Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

С. П. ГАВЕЛЯ

ПРО ПОВЕДІНКУ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПОБЛИЗУ ДЕЯКИХ МНОЖИН ЇХ ОСОБЛИВОСТЕЙ

Методом, подібним до методу І. Фредгольма [1], який розглядав те ж саме питання для розв'язків системи рівнянь пружної рівноваги, Я. Б. Лопатинський [2] дослідив поведінку розв'язків лінійних еліптичних систем диференціальних рівнянь в околицях ізольованих особливих точок, виражаючи їх через фундаментальну матрицю та її похідні, характер особливостей яких добре досліджено ([3], [4]). Мета цієї замітки полягає в одержанні аналогічного представлення розв'язків таких же систем, особливості яких складають деякі щільні множини. Одержуване представлення має вигляд інтеграла по деякій околиці такої множини. Подається приклад такого представлення ядра потенціала, що зводить до регулярних інтегральних рівнянь задачу типу Пуанкаре для гармонійних функцій. При цьому з метою стислості викладу використовуються позначення та припущення роботи [2], за винятком окремо обумовлених випадків.

Отже, нехай, на відміну від [2], особливі точки $z=(z_1,\dots,z_n)$ розв'язку $\Psi(x,\sigma)$ утворюють множину σ, розміщену на деякій m-мірній (причому спочатку припускається, що $m<n$) поверхні

$$\Sigma \quad \begin{cases} x_{m+1}=f_{m+1}(x_1,\dots,x_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ x_n=f_n(x_1,\dots,x_m) \end{cases} \tag{1}$$

Функції $f_\kappa(x_1,\dots,x_m)$, $(\kappa=m+1,\dots,n)$ вважаються кусково-гладкими на деякій околиці проекції множини σ на площину $x_{m+1}=\dots=x_n=0$. (Цей особливий спосіб параметризації, очевидно, не обмежує загальності міркувань).

Умовимось позначати з допомогою $\tilde\sigma$ деяку вимірну (m-мірну) околицю множини σ на поверхні Σ, а з допомогою $\tilde S_\varrho$ — границю множини точок, віддалених від $\tilde\sigma$ не більше, ніж на ρ. При цьому зауважимо, що для будь-якої неперервної поблизу $\tilde S_\varrho$ (проте, можливо, розривної на $\tilde\sigma$) функції $\Phi(x,\tilde\sigma)$ буде

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\tilde S_\rho}\Phi(x,\tilde\sigma)d_xS=\overbrace{\int\cdots\int}^{m}_{\tilde\sigma'}\left\{\overbrace{\int\cdots\int}^{n-m-1}_{\tilde\delta_\rho}\Phi(x,\tilde\sigma)\,d_x\delta\right\}\xi(x')d\tilde\sigma'=$$

$$=\int\overbrace{\cdots}^{m}\int_{\tilde{\sigma}}\left\{\int\overbrace{\cdots}^{n-m-1}\int_{\delta_{\tilde{\rho}}}\tilde{\Phi}(x,\tilde{\sigma})\,d_x\delta\right\}\eta(x')\,d\tilde{\sigma}.$$

Тут $\delta_{\tilde{\rho}}$ — $(m—m—1)$-мірний) контур, утворений, перетином поверхні $S_{\tilde{\rho}}$ з площиною $x_1=C_1,\ldots,x_m=C_m$ $(C_\kappa=\mathrm{const})$, $d\delta$ — його елемент.

$\tilde{\sigma}'$ — проекція множини $\tilde{\sigma}$ на площину $x_{m+1}=\ldots=x_n=0$, елемент якої позначено $d\tilde{\sigma}'$ (так що $dS=\xi(x')\,d\delta d\tilde{\sigma}'$), а її точка позначається $x'=$ $=(x_1,\ldots,x_m)$.

$d\tilde{\sigma}=\frac{\xi(x')}{\eta(x')}d\tilde{\sigma}'$ — елемент поверхні $\tilde{\sigma}$, причому внаслідок наших припущень $\xi(x')$ та $\eta(x')$ — кусково-неперервні на $\tilde{\sigma}'$ функції.

При умові існування

$$\lim_{\tilde{\rho}\to 0}\int\overbrace{\cdots}^{n-m-1}\int_{\delta_{\tilde{\rho}}}\tilde{\Phi}(x,\tilde{\sigma})\,\eta(x')\,d_x\delta=\varphi(x')$$

очевидно буде

$$\lim_{\tilde{\rho}\to 0}\int\overbrace{\cdots}^{n-1}\int_{S_\rho}\Phi(x,\tilde{\sigma})\,d_xS=\int\overbrace{\cdots}^{m}\int_{\tilde{\sigma}}\varphi(x')\,d\tilde{\sigma}.$$

Аналогічно [2], застосовуючи формулу

$$u(x)\,A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)-\left(A'\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u'(x)\right)'v(x)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\,2\,B^j_x(u(x),v(x))$$

до функцій $\omega(y,x)$ і $\Psi(x,\sigma)$ та інтегруючи обидві частини одержуваного таким чином співвідношення по області, обмеженій поверхнею $S—S_\nu—S_{\tilde{\varrho}}$, дістанемо

$$\int\overbrace{\cdots}^{n-1}\int_{S_y}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-y_j}{\varrho}B^j_x(\omega(y,x),\Psi(x,\sigma))\,d_xS-$$

$$-\int\overbrace{\cdots}^{n-1}\int_{S_{\tilde{\rho}}}\sum_{j=1}^{n}\nu_j B^j_x(\omega(y,x),\Psi(x,\sigma))\,d_xS+$$

$$+\int\overbrace{\cdots}^{n-1}\int_{S}\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)\,B^j_x(\omega(y,x),\Psi(x,\sigma))\,d_xS=0,$$

де $\nu_j(x)$ $(j=1,\ldots,n)$ позначають косинуси напрямних кутів внутрішньої нормалі до відповідної поверхні інтегрування в її точці $x=(x_1,\ldots,x_n)$.

Користуючись означаючою властивістю фундаментальної матриці [4]

$$\lim_{\rho\to 0}\underbrace{\int\cdots\int}_{S_y}^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-y_j}{\varrho}B^j_x(\omega(y,x),\ \Psi(x,\sigma))\,d_xS=-\Psi(y,\sigma)$$

та переходячи до границі при $\varrho\to 0$, одержимо

$$\Psi(y,\sigma)=-\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{S_{\varrho}^{\sim}}\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)\,B^j_x(\omega(y,x),\ \Psi(x,\sigma))d_xS+\Psi_0(y,\sigma),\qquad(3)$$

де

$$\Psi_0(y,\sigma)=\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{S}\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)\,B^j_x(\omega(y,x),\ \Psi(x,\sigma))\,d_xS$$

t разів неперервно диференційовна в V функція (без особливостей в точках $z\epsilon\sigma$). (В згадуваному в [2] аналітичному випадку належить вважати $t=\infty$ та відповідні ряди, що виникають далі, рівномірно збіжними).

В наших умовах кожній точці $x=(x_1,\ldots,x_n)$ поверхні $\tilde{S_\varrho}$ відповідає деяка така точка $\zeta=(x_1,\ldots,x_m,\ f_{m+1},\ldots,f_n)=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ (де $f_\kappa=f_\kappa(x_1,\ldots,x_m)$) поверхні Σ, що $x_i=\zeta_i$ при $i=1,\ldots,m$. Умовимося позначати частину поверхні Σ, що має спільну з $\tilde{S_\varrho}$ проекцію на площину $x_{m+1}=\ldots=x_n=0$, з допомогою, $\tilde{\sigma}$, так що $\zeta\epsilon\tilde{\sigma}$.

Зауважимо, що розклад (1) з [2] в точці $x_1=y_1,\ldots,x_m=y_m$ матиме вигляд

$$u(x)=\sum_{\kappa=1}^{t}\vartheta_\kappa(x,y)\frac{\partial^\kappa}{\partial y^n}u(y)+R^{(u)}(x,y),$$

де, як і скрізь надалі, позначено

$$\sum_{\kappa_{m+1}+\ldots+\kappa_n=0}^{\kappa_{m+1}+\ldots+\kappa_n<t}=\sum_{\kappa=0}^{t};\qquad\qquad \vartheta_{\kappa_{m+1},\ldots,\kappa_n}=\vartheta_\kappa;$$

$$\frac{\partial^{\kappa_{m+1}+\ldots+\kappa_n}}{\partial x_{m+1}^{\kappa m+1}\ldots\partial x_n^{\kappa n}}=\frac{\partial^\kappa}{\partial x^\kappa}.$$

Застосовуючи цей розклад до функції $\omega(y,x)$ відносно точки ζ, будемо мати

$$\omega(y,x)=\sum_{\kappa=0}^{t}\vartheta_\kappa(x,\zeta)\frac{\partial^\kappa}{\partial\zeta^\kappa}\omega(y,\zeta)+R^{(\omega)}(y,x,\zeta),\qquad(4)$$

причому

$$|x-\zeta|^{l_1+\ldots+l_n-t}\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}R^{(\omega)}(y, x, \zeta)$$

обмежені при $l_1+\ldots+l_n<t$.

Внісши цей розклад (4) до виразу (3), одержимо

$$\Psi(y,\sigma)=-\sum_{\kappa=0}^{t}\overbrace{\int\ldots\int}^{n-1}_{S_{\tilde\rho}}\frac{\partial^\kappa}{\partial\zeta^\kappa}\;\omega(y,\zeta)\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)B^j_x(\vartheta_n(x,\zeta),\Psi(x,\sigma))d_xS-$$

$$-\overbrace{\int\ldots\int}^{m}_{\sigma'}\left\{\overbrace{\int\ldots\int}^{n-m-1}_{\delta_{\tilde\rho}}\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)B^j_x(R^{(\omega)}(y,\ x,\ \zeta),\Psi(x,\sigma))d_x\delta\right\}\eta(x')d_x\sigma+\Psi_0(y,\sigma).$$

Аналогічно [2] умовимось вважати функцію $\Phi(x,\sigma)$ такою, що належить до класу $\tilde K_q$, якщо при $x\neq\zeta$, x, $\zeta\in V$, $\Phi(x,\sigma)$ неперервна, а $|x-\zeta|^q\Phi(x,\sigma)$ при $q>0$, $\Phi(x,\sigma)/\ln|x-\zeta|$ при $q=0$ та $\Phi(x,\sigma)$ при $q<0$ обмежені.

Якщо тепер покласти, що

$$\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}\Psi(x,\sigma)\in\tilde K_{n-s+l_1+\ldots+l_n+t-m-0},$$

то, очевидно, буде $B^j_x(R^{(\omega)}(y,x,\zeta),\Psi(x,\sigma))\in\tilde K_\chi$,

де $\chi=n-m-1-0$,
так що

$$\overbrace{\int\ldots\int}^{n-m-1}_{\delta_{\tilde\rho}}\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)\,B^j_x\,(R^{(\omega)}(y,x,\zeta),\Psi(x,\sigma))\,d_x\,\delta\to0$$

при $x\to\zeta$, $S_{\tilde\rho}\to\sigma$, $\tilde\varrho\to0$.

З другого боку, з (2) випливає незалежність від $\tilde\varrho$ виразу

$$I=\overbrace{\int\ldots\int}^{n-1}_{S_{\tilde\rho}}\frac{\partial^\kappa}{\partial\zeta^\kappa}\omega(y,\zeta)\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)B^j_x(\nu_\kappa(x,\zeta),\Psi(x,\sigma))\,d_xS,$$

внаслідок чого

$$I=\lim_{\tilde\rho\to0}\overbrace{\int\ldots\int}^{m}_{\sigma'}\frac{\partial^\kappa}{\partial\zeta^\kappa}\omega(y,\zeta)\left\{\overbrace{\int\ldots\int}^{n-m-1}_{\delta_{\tilde\rho}}\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)\,B^j_x(\vartheta_\kappa(x,\zeta),\Psi(x,\sigma))d_x\delta\right\}\times$$

$$\times \eta(x')\, d_x \delta = -\int^{\overbrace{\ldots}^{m}}_{\tilde{\sigma}} \int \frac{\partial^\kappa}{\partial z^\kappa} \omega(y, z)\, \tau_\kappa^{(\psi)}(z)\, d_z\sigma,$$

де

$$\tau_\kappa^{(\psi)}(z) = -\lim_{\tilde{\rho}\to 0} \int^{\overbrace{\ldots}^{n-m-1}}_{\delta_\rho} \int \sum_{j=1}^{n} \nu_j(x) B_x^j(\vartheta_\kappa(x, \eta), \psi(x, \sigma))\, d_x\delta\eta(x')$$

Отже, теорема з [2] видозмінюється слідуючим чином.

Теорема. Якщо при $x\bar{\epsilon}\sigma$ функція $\Psi(x, \sigma)$ неперервно диференційовна s разів по x,

$$\frac{\partial^{\kappa_1+\ldots+\kappa_n}}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x^{\kappa_n}} \Psi(x, \sigma) \in \underset{(\kappa_1+\ldots+\kappa_n<s)}{\tilde{K}_{t-s+\kappa_1+\ldots+\kappa_n+n-m-0}};$$

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x, \sigma) = 0;$$

оператор $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ та множина σ точок розриву функції $\Psi(x, \sigma)$ мають описані вище (та в [2]) властивості, то має місце представлення

$$\Psi(x, \sigma) = \sum_{\kappa=0} \int^{\overbrace{\ldots}^{m}}_{\sigma} \int \frac{\partial^\kappa}{\partial z^\kappa} \omega(x, z)\, \tau_\kappa^{(\psi)}(z)\, d_z\sigma + \Psi_0(x, \sigma).$$

Зауваження 1. Все наведене вище залишиться справедливим також і у випадку $m=n$, якщо в цьому останньому під σ мати на увазі ($(n-1)$-мірну) границю множини точок розриву функції $\Psi(x, \sigma)$, вживаючи у відповідних випадках число $n-1$ замість числа m.

Зауваження 2. Твердження 1 з [2] в розглядуваному випадку видозмінюється слідуючим чином.

Якщо

$$|x-\zeta|^{n-m-1} \frac{\partial^{\kappa_1+\ldots+\kappa_n}}{\partial x_n^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}} \Psi(x, \sigma) \underset{x\to 0}{\to} 0$$

при $0 \leqslant \kappa_1 + \ldots + \kappa_n < s$, то $\Psi(x, \sigma)$ неперервно диференційовна t разів по x в V (особливість усувається).

Зауваження 3. Цілком аналогічні результати мають місце також і у випадку, коли Σ складається з конечного числа частин, які можуть бути представлені аналогічно (1).

Приклад. Визначення поправки до відомого ядра потенціала, що зводить задачу типу Пуанкаре для гармонійних функцій до регулярних інтегральних рівнянь, на випадок неопуклих областей.

Побудоване в [6] ядро (зберігаються позначення [6])

$$q(x, y) = -\frac{1}{\pi} \frac{\left(|x-y| \frac{\alpha(y)}{|\alpha(y)|} + x - y\right)}{\left||x-y| \frac{\alpha(y)}{|\alpha(y)|} + x - y\right|^2}$$

в системі координат, для якої $y=0$, $a \frac{\alpha(y)}{|\alpha(y)|} = (0, 0, 1)$, буде

$$q(x) = -\frac{\bar{\nu}}{2\pi r}\left(\frac{x_1}{r+x_3}, \frac{x_2}{r+x_3}, 1\right), \text{ де } r = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

Таким чином, це ядро розривне вздовж від'ємної півосі ox_3 в нових координатах і, отже, непридатне для областей, з якими такі півосі перетинаються.

Представлення (5) для таких функцій буде

$$\frac{x_1}{r(r+x_3)} = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\varrho}\,d\xi = -\frac{x_1}{\varrho(\varrho+x_3+\xi)}\Big|_0^\infty;$$

$$\frac{x_2}{r(r+x_3)} = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{\varrho}\,d\xi = -\frac{x_2}{\varrho(\varrho+x_3+\xi)}\Big|_0^\infty;$$

$$\frac{1}{r} = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{\varrho}\,d\xi = -\frac{1}{\varrho}\Big|_0^\infty, \quad (\varrho = \sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3+\xi)^2}).$$

Замінюючи тепер в цьому представленні проміжок інтегрування $(0, \infty)$ на $(0, h)$, де h — деяке позитивне постійне число, дістанемо нове ядро

$$\tilde{q}(x) = q(x) + \Delta q(x),$$

причому поправка $\Delta q(x)$ буде

$$\Delta q(x) = \frac{\bar{\nu}}{2\pi R}\left(\frac{x_1}{R+x_3+h}, \frac{x_2}{R+x_3+h}, 1\right),$$
$$(R = \sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3+h)^2}).$$

Збереження означаючих властивостей новим ядром не викликає сумнівів. Дійсно, його поведінка поблизу початку не відрізняється від попереднього внаслідок аналітичності поправки $\Delta g(x)$ в початку, гармонійність же легко перевіряється. З аналітичності ж нового ядра зовні відрізка $x_1=x_2=0$, $-h \leqslant x_3 \leqslant 0$ випливає його придатність для областей, з якими не перетинаються лише такі відрізки (останні можуть бути вибрані як завгодно малої довжини), тобто цим здійснюється вказівка Г. Вейля [5] про відтинання нескінчених антен до деякої постійної довжини h. (Більш грунтовно це питання розглядається в [7]).

ЛІТЕРАТУРА

1. Fredholm J. Acta Math., 23, 1900.
2. Лопатинский Я. Б. ДАН СССР, 79, № 5, 1951.
3. Лопатинский Я. Б. Укр. мат. журн. 3, № 3, 1951.
4. Лопатинский Я. Б. Укр. мат. журн. 3, № 3, 1951.
5. Weyl H. Rend. C. Pal. XXXIX, 24, 1915.
6. Лопатинский Я. Б. Наукові записки ЛДУ, серія фізико-математична, в. 5, 1953.
7. Гавеля С. П. Наукові записки ЛДУ, серія механіко-математична, в. 8, 1957.