Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

С. П. ГАВЕЛЯ

ПРО ЗВЕДЕННЯ ДО РЕГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ НЕОПУКЛИХ ОБЛАСТЕЙ

Розроблений Я. Б. Лопатинським метод приведення до регулярних інтегральних рівнянь граничних задач для еліптичних систем диференціальних рівнянь, викладений в роботі [1], побудовано в припущенні опуклості розглядуваної області та, згідно з зауваженням його автора ([2], стор. 6), з допомогою перетворення аргументів може бути безпосередньо поширений і на деякі неопуклі області, гомеоморфні кулі. За цим методом розв'язки відповідних задач представляються у вигляді потенціалів, ядра яких, маючи на увазі як метод їх побудови,* так і аналітичність в дотичному до границі області півпросторі, ми дозволимо собі називати надалі «півпросторовими». Вимога опуклості області пояснюється тим, що ці «півпросторові» ядра мають, взагалі кажучи, необмежені множини точок розриву, що виявляються лише у випадку опуклої області завжди зовні останньої. Це явище добре прослідкувати, наприклад, на задачі про пружну рівновагу тіла при заданих напруженнях на його поверхні, для якої «півпросторове» ядро виявляється розривним вздовж зовнішніх півнормалей до поверхні тіла (Г. Вейль називає їх антенами ([3], стор. 14), що робить це ядро непридатним для тіл, такі півнормалі яких потрапляють до їх середин. Г. Вейль з цього приводу зауважує: «...Якщо ж припущення про те, що зовнішні нормалі ніде не зустрічають тіла, не виконано, то належить видозмінити наші міркування, відтинаючи всі антени до деякої постійної висоти, вибраної настільки малою, щоб відтяті антени ніде більше з тілом не перетинались. Математичне формулювання цієї ідеї легко здійснити» ([3], стор. 24). Проте це здійснення, безперечно, викликає інтерес.

З допомогою деякого узагальнення цього замислу Г. Вейля на загальний випадок розглядуваних в [1] задач тут будується метод одержання поправок до «півпросторових» ядер, що роблять їх придатними і для неопуклих (в тому числі й негомеоморфних кулі) областей. Це дозволяє розглядати багатозв'язні та деякі необмежені області, що виключались раніше. Викладене ілюструється результатом обчислення такої поправки для згадуваної вище задачі теорії пружності. Крім того, робляться зауваження про поширення деяких результатів Я. Б. Лопатинського на випадок неопуклих областей. При цьому використовуються позначення та припущення розділу 3 роботи [1], за винятком випадків, в яких це окремо зауважено.

---

* Головна частина такого ядра являє собою ядро потенціалу, що дає явне представлення розв'язку відповідної граничної задачі для дотичного до границі області півпростору при зафіксованих в точці дотику коефіцієнтах рівняння.

ПРО АНАЛІТИЧНЕ ПРОДОВЖЕННЯ «ПІВПРОСТОРОВИХ» ЯДЕР

Нагадаємо деякі позначення.

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x)=0 \quad (x \in V) \tag{1}$$

— розглядувана система лінійних диференціальних рівнянь.

$$\lim_{x \to y} B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x)=f(y) \quad (x \in V,\ y \in S) \tag{2}$$

— граничні умови.

$A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ і $B_0\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — відповідно головні частини операторів $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ та $B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Користуючись так званою місцевою системою координат, у якій $y=0$, $\nu=(\overbrace{0,\dots,0}^{n-1},1)$, та позначаючи місцеві координати вектора $\tau+\lambda\nu$ з допомогою α_i $(i=1,\dots,n)$, так що $\alpha_n=\lambda$, а α_j $(j=1,\dots,n-1)$ — місцеві координати вектора τ, вираз κ-стовбця головного члена «півпросторового» ядра ([1], стор. 147) запишемо

$$F_\kappa(x)=\overbrace{\int\cdots\int}^{n-2}_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'}\, T\int_{+} \Phi^{(s-s_\kappa-1)}(x,\alpha)\, A_0^{-1}(\alpha)\, Q_\kappa(\alpha)\, d\alpha_n,$$

де

$$Q_\kappa(\alpha')=(E,\dots,\alpha_n^{s-1}E)\,R_\kappa(\alpha');$$

$R_\kappa(\alpha')$ — κ-стовбець матриці $R(\alpha)$, правої оберненої до матриці

$$I_1=\int_{+} B_0(\alpha)\,A_0^{-1}(\alpha)\,(E,\dots,\alpha_n^{s-1}E)\,d\alpha_n,$$

а також

$$A_0(\alpha)=A_0(0,\alpha); \qquad B_0(\alpha)=B_0(0,\alpha).$$

Хай для довільного $\alpha' \in T$, за винятком, можливо, деякої множини нульової міри, буде

$$\det A_0(\alpha)=a_0\prod_{j=1}^{\varkappa}[(\alpha_n-\mu_j)(\alpha_n-\bar{\mu}_j)]^{\nu_j} \qquad \left(\sum_{j=1}^{\varkappa}\nu_j=\frac{ps}{2}\right).$$

Тоді

$$I_1=2\pi i\sum_{j=1}^{\varkappa}\lim_{\alpha_n\to\mu_j} C_j\frac{\partial^{\nu_j-1}}{\partial\alpha_n^{\nu_j-1}}\left\{(\alpha_n-\mu_j)^{\nu_j}B_0(\alpha)\,A_0^{-1}(\alpha)\,(E,\dots,\alpha_n^{s-1}E)\right\}.$$

Умовимося відмічати степені деяких форм відповідними верхніми індексами у квадратних дужках. Оскільки

$B_0(\alpha)=\left(B_{\kappa l}^{[\sigma_{\kappa l}]}(\alpha)\right)_{\kappa=1;\ l=1}^{\frac{ps}{2};\ p}$ ($\sigma_{\kappa l}$ — цілі невід'ємні числа, що не перевищують s_κ),

і також $A_0(\alpha)=A_0^{[ps]}(\alpha)$, то

$$\int_{+} B_0(\alpha)A_0^{-1}(\alpha)\alpha_n^t E d\alpha_n =$$

$$=2\pi i\sum_{j=1}^{\varkappa}\lim_{\alpha_n\to\mu_j}\left(B_{\kappa l}^{[\sigma_{\kappa l}+t+\delta_j-1]}(\alpha,\mu_j)\right)_{\kappa=1;\ l=1}^{\frac{ps}{2};\ p}(t=0,\ldots,s-1);$$

$$I_1=\frac{2\pi i\left(B^{[m]}(\alpha',\mu),\ldots,B^{[m+s-1]}(\alpha',\mu)\right)}{\Lambda^{[\delta_j]}(\alpha',\mu)}$$

де

$$B^{[m+t]}(\alpha',\mu)=\left(B_{\kappa l}^{[\sigma_{\kappa l}+t+\delta-1]}\ \alpha',\mu)\right)_{\kappa=1;\ l=1}^{\frac{ps}{2};\ p},$$

δ та δ_j — деякі цілі невід'ємні числа,

$$\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_\varkappa).$$

Отже,

$$R_\kappa(\alpha')=\frac{1}{2\pi i}\Lambda^{[\delta]}(\alpha',\mu)\Gamma_\kappa^{-1}(\alpha'),$$

де Γ_κ^{-1} — κ-стовбець матриці, правої оберненої до матриці

$$\Gamma(\alpha')=\left(B^{[m]}(\alpha',\mu),\ldots,B^{[m+s-1]}(\alpha',\mu)\right).$$

Далі

$$I_2=\int_{+}\Phi^{(s-s_\kappa-1)}(x,\alpha)A_0^{-1}(\alpha)(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)=$$

$$=2\pi i\sum_{j=1}^{\varkappa}\lim_{\alpha_n\to\mu_j}C_j\frac{\partial^{\nu_j-1}}{\partial\alpha_n^{\nu_j-1}}\left\{(\alpha_n-\mu_j)^{\nu_j}\Phi^{(s-s_\kappa-1)}(x,\alpha)A_0^{-1}(\alpha)(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)\right\}.$$

З цього видно, що, позначаючи з допомогою $\Psi_j(x,\alpha)$ строчку s матриць порядка p функцій, аналітичних при $(x,\alpha)\neq 0$, можемо представити

$$I_2=2\pi i\frac{\sum_{j=1}^{\varkappa}\Psi_j(x,\alpha^j)}{\Lambda^{[\delta]}(\alpha',\mu)},$$

де $\alpha^j(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\ \mu_j)$.

Таким чином,

$$F_n(x)=\underbrace{\int\overbrace{\ldots}^{n-2}\int}_{|\alpha'|=1} I_2 R_\kappa(\alpha')d_{\alpha'}T=\underbrace{\int\overbrace{\ldots}^{n-2}\int}_{|\alpha'|=1}\left\{\sum_{j=1}^{\varkappa}\Psi_j(x,\alpha^j)\right\}\Gamma_\kappa^{-1}(\alpha')\,d_{\alpha'}T.$$

Слід зауважити, що при продовженні функції $\Psi_j(x, \alpha^j)$ в комплексний простір шляхом заміни α^j на $\tilde{\alpha}^j$, де

$$\tilde{\alpha}^j=\alpha'^j+i\alpha''^j;\qquad \alpha'^j=(\alpha'_1,\ldots,\alpha'_{n-1},\mu'_j(\alpha',\alpha''));$$
$$\mu_j(\alpha'_1+i\alpha'')=\mu'_j(\alpha',\alpha'')+i\mu''_j(\alpha',\alpha'');$$
$$\alpha''^j=(\alpha''_1,\ldots,\alpha''_{n-1},\mu''_j(\alpha',\alpha'')).$$

їх аналітичність зовні $(x, \tilde{\alpha}^j)=0$ зберігається.

Аналітичність же матриці $\Gamma^{-1}(\tilde{\alpha}')$ буде порушуватись лише в точках, де продовження в комплексний простір рангового мінора $\Delta(\alpha')$ матриці $I_1(\alpha')$ обертається в нуль, внаслідок чого множина таких точок буде зображуватись рівнянням

$$\Delta(\tilde{\alpha}')=0, \tag{3}$$

еквівалентним системі

$$\begin{cases}\Delta'(\alpha',\alpha'')=0\\ \Delta''(\alpha',\alpha'')=0,\end{cases} \tag{4}$$

де

$$\Delta(\tilde{\alpha}')=\Delta'(\alpha',\alpha'')+i\Delta''(\alpha',\alpha'');$$
$$\alpha'=(\alpha'_1,\ldots,\alpha'_{n-1});\ \alpha''=(\alpha''_1,\ldots,\alpha''_{n-1}).$$

Вирази $\Delta'(\alpha', \alpha'')$ та $\Delta''(\alpha', \alpha'')$ або $\Delta(\tilde{\alpha}')$ є форми степеня не вище $g=s-1+\sum\limits_{\kappa=1}^{\frac{ps}{2}} s_\kappa$ від $\alpha'_1, \alpha''_1, \ldots, \alpha'_{n-1}, \alpha''_{n-1}, \mu'_1, \mu''_1\ldots, \mu'_\varkappa, \mu''_\varkappa$, або від $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{n-1}, \mu_1, \ldots, \mu_\kappa$ відповідно, причому μ'_j та μ''_j або μ_j є однорідні функції першого степеню від $\alpha'_1, \alpha''_1, \ldots, \alpha'_{n-1}, \alpha''_{n-1}$, або від $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{n-1}$ відповідно. Тому кожне з співвідношень (3) та (4) зображує не більше, ніж g, різних зв'язних конічних множин $\tilde{C}_\kappa$ та C_κ (з спільним центром в початку координат) в $(n-1)$-мірному комплексному або $(2n-2)$-мірному дійсному просторі відповідно.

Нагадаємо далі, що κ-стовбець «півпросторового» ядра визначається формулами ([1], стор. 135—138, 147—148).

$$G_n(x)=\sum_{l=0}^{s-s_\kappa-1}F_{\kappa l}(x)+u_\kappa(x), \tag{5}$$

$$u_\kappa(x) = -\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{V} \omega(x, y)\, v_\kappa(y)\, dy;$$

$$v_\kappa(x) = \sum_{l=0}^{s-s_\kappa-1} \overbrace{\int\cdots\int}^{n-2}_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'}\, T \int_{+} \sum_{q=-t}^{s-l-1} L_q\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi^{(l)}(x, \alpha) P_{\kappa,l}(\alpha)\, d\alpha_n. \quad (6)$$

$$F_{nl}(x) = \overbrace{\int\cdots\int}^{n-2}_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'}\, T \int_{+} \Phi^{(l)}(x, \alpha)\, P_{\kappa,l}(\alpha)\, d\alpha_n. \quad (7)$$

$\omega(x, y) = (\omega_{\kappa_1 l}(x, y))_{\kappa, l=1}^{p}$ — фундаментальна матриця, відповідна матриці $A\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$.

Матриці $P_{\kappa, l}(\alpha)$ обчислюються з слідуючої системи:

$$\sum_{q=j-m}^{s} \widetilde{L}_q\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial x}\right) P_{\kappa, j-q}(\alpha) = 0 \quad (8)$$

$$(j = s, \ldots, s+m-1; \quad m = s - s_\kappa - 1),$$

причому

$$P_{\kappa m}(\alpha) = A_0^{-1}(\alpha)\, Q_\kappa(\alpha),$$

а також

$$F_{\kappa m}(x) = F_\kappa(x).$$

Символи $L_q\left(\alpha, \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\right)$ позначають лінійні диференціальні оператори з аналітичними коефіцієнтами виду

$$L_q\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) = \sum_{\kappa_1 + \ldots + \kappa_n - j_1 - \ldots - j_n = q} L_{j_1 \ldots j_n}^{\kappa_1 \ldots \kappa_n} \alpha_1^{j_1} \ldots \alpha_n^{j_n} \frac{\partial^{\kappa_1 + \ldots + \kappa_n}}{\partial \alpha_1^{\kappa_1} \ldots \partial \alpha_n^{\kappa_n}}.$$

$L_{j_1 \ldots j_n}^{\kappa_1 \ldots \kappa_n}$ — постійні матриці, q — ціле число, що називається вагою однорідної матриці.

$\widetilde{L}_q\left(\alpha, \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\right)$ — оператор, спряжений до $L_q\left(\alpha, \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\right)$.

При цьому для матриці $\widetilde{L}_s\left(\alpha, \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\right) = A_0(\alpha)$ існує обернена.

Користуючись наведеними формулами, легко переконатись, що при цьому має місце слідуюче зауваження.

З а у в а ж е н н я 1. При належному виборі області V в (6) «півпросторове» ядро може бути аналітично продовжене на таку довільну область, замикання якої, за винятком початку координат, являється конечною підобластю області аналітичності його головного члена.

Дійсно, співвідношення (8) свідчать про співпадання множин особливостей матриць $P_{\kappa,l}$ при $l=0, \ldots, m$. З цього випливає аналітична продовжувальність молодших членів $F_l(x)$ ядра $G(x)$ на область аналітичної продовжувальності його головного члена $F(x)$. Решта випливає безпосередньо з формул (6).

Умовимось тепер позначати з допомогою $\tilde{T}$ зв'язну суму не більше g таких $(n-2)$-мірних* множин $\tilde{T}_\kappa$ точок $\tilde{\alpha}'=\alpha+i\alpha''$, які допускають неперервне взаємне перетворення довільних двох з T, $\tilde{T}_\kappa$, не зачіпаючи решти. Аналітичність функції

$$\tilde{F}(x)=\sum_{j=1}^{\varkappa}\underbrace{\int \cdots \int}_{\tilde{T}}^{n-2} \Psi_j\,(x,\,\tilde{\alpha}_j)\,\Gamma^{-1}(\tilde{\alpha}')\,d_{\tilde{\alpha}'}\tilde{T}$$

може порушуватись лише в точках, де $(x, \tilde{\alpha}^j)=0$, тобто де

$$\begin{cases}(x,\,\alpha'^j)=0\\(x,\,\alpha''^j)=0\end{cases} \tag{9}$$

хоча б при одному $j=1, \ldots, \varkappa$. При фіксованому $\tilde{\alpha}'=\alpha'+i\alpha''$ ці співвідношення визначають деяку $(n-2)$-мірну дійсну площину (перетин двох $(n-1)$-мірних дійсних площин), а при русі точки $\tilde{\alpha}'$ вздовж множини $\tilde{T}$ — деяку формально $(2n-4)$-мірну конічну поверхню з вершиною в початку координат, яку можна розглядати, наприклад, як $(n-3)$-параметричну сім'ю $(n-1)$-мірних конічних поверхонь в n-мірному дійсному просторі. Таким чином, кожній множині $\tilde{T}$ відповідає деяка поверхня σ розриву функції $F(x)$ (обернена відповідність неоднозначна). Зокрема, при $\alpha''=0, \mu''_j\,(\alpha', \alpha'')\neq 0$ для всіх $j=1, \ldots, \varkappa$, тобто при інтегруванні по дійсній множині, поверхня σ співпадає з площиною $x_n=0$.

При цьому має місце слідуюче

З а у в а ж е н н я 2. Якщо поверхні σ' та σ'' не перетинаються, то їм відповідні множини $\tilde{T}'$ та $\tilde{T}''$ також не перетинаються (проте не навпаки).

Дійсно, якби $\tilde{\alpha}'_0=\alpha'_0+i\alpha''_0$ була спільною точкою множин $\tilde{T}'$ та $\tilde{T}''$, то відповідні поверхні σ' та σ'' повинні були б мати спільну ($(n-2)$-мірну) площину

$$\begin{cases}(x,\,\alpha_0'^j)=0\\(x,\,\alpha_0''^j)=0.\end{cases}$$

В неправильності оберненого твердження переконує слідуючий приклад:

множинам $\begin{cases}\alpha''=0\\|\alpha'|=C_1\end{cases}$ та $\begin{cases}\alpha''=0\\|\alpha'|=C_2\end{cases}$ при $\begin{cases}\mu'(\alpha',0)=0\\\mu''(\alpha',0)\neq 0\end{cases}$ $(C_1\neq C_2)$

відповідає одна й та ж поверхня σ — площина $x_n=0$.

* Розмірність множин тут і далі визначається кількістю дійсних параметрів.

Умовимося називати множину Ω_1 достатньо (скільки завгодно) близькою до Ω_2, якщо точна верхня грань віддалей точок першої з них від другої достатньо (скільки завгодно) мала (проте не обов'язково навпаки).

Із співвідношень (9) безпосередньо випливає

З а у в а ж е н н я 3. Якщо множина $\tilde{T}'$ достатньо близька до $\tilde{T}''$, то відповідна першій поверхня σ' скільки завгодно близька до відповідної другій — σ''.

Із однорідності відносно $\tilde{\alpha}'$ лівих частин співвідношень $(x, \tilde{\alpha}'^{j})=0$ випливає з а у в а ж е н н я 4. Двом точкам $\tilde{\alpha}'_1$ та $\tilde{\alpha}'_2 \in \tilde{T}$, що лежать на одній і тій самій центральній комплексній прямій, відповідає та сама твірна ($(n-2)$-мірна дійсна площина) конуса σ.

З а у в а ж е н н я 5. Існує деяка $(n-2)$-мірна скільки завгодно близька до T і гомеоморфна останній множина $\overline{T}$, відповідна якій поверхня $\bar{\sigma}$ лежить між двома відмінними від $x_n=0$ $(n-1)$-мірними дійсними площинами з довільним, проте спільним для обох, напрямом проекцій ν'_1 та ν'_2 їх нормалей ν_1 і ν_2 на площину $x_n=0$.

Внаслідок можливості попереднього повороту координатної системи навколо осі ox_n, не обмежуючи загальності, можна вважати

$$\nu'_1=(\nu^{(1)}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-2}); \quad \nu'_2=(\nu^{(2)}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-2}).$$

($\nu^{(1)}$ та $\nu^{(2)}$ — деякі відмінні від нуля постійні).

Множина $\overline{T}$ може бути визначена співвідношеннями

$$\alpha''_2=\ldots=\alpha''_{n-1}=0; \quad \delta>\alpha''_1=\text{const}>0; \quad |\alpha'|=1.$$

В цьому випадку, очевидно, буде

$$\nu_1=(\nu^{(1)}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-3}, \max_j \{\mu''_j(\alpha', \alpha'')\}), \quad \nu^{(1)}=\alpha''_1;$$

$$\nu_2=(\nu^{(2)}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-3}, \min_j \{\mu''_j(\alpha', \alpha'')\}), \quad \nu^{(2)}=\alpha''_1.$$

При цьому $0<\min\limits_j \{\mu_j(\alpha', \alpha'')\} \leqslant \max\limits_j \{\mu_j(\alpha', \alpha'')\}<\infty$ внаслідок умови еліптичності та неперервності функцій $\mu_j(\alpha', \alpha'')$.

При достатньо малому α''_1 множина $\overline{T}$ буде скільки завгодно близькою до T. З цього та виконання так званої умови розв'язності $\Big($рівність ранга матриці I_1 числу $\dfrac{ps}{2}$ ([1], стор. 147), тобто відмінність від нуля неперервної в комплексній околиці множини T функції $\Delta(\tilde{\alpha}')$ на T, а значить і на близькій до неї $T\Big)$ випливає

З а у в а ж е н н я 6. Будь-яке «півпросторове» ядро $G(x)$ може бути аналітично продовжене на довільну конечну частину півпростору $x_n<0$ аж до деякої, ніде, крім початку, не співпадаючої з площиною $x_n=0$ конічної поверхні.

Розглядаючи далі $(n—1)$-мірну комплексну площину $\tilde{\alpha}_n=0$ як $(2n—2)$-мірну дійсну, опишемо в ній сферу

$$|\tilde{\alpha}'|=R \tag{10}$$

довільного радіуса R, і нехай T' — $(n—2)$-мірна (центральна з центром в початку координат проекція множини T на цю сферу. Проведемо, далі, через T' на сфері (10) $(n—1)$-мірну (замкнуту) аналітичну поверхню χ, і нехай C'_κ та $C'=\sum_{\kappa=1}^{g} C'_\kappa$ — $(n—2)$-мірні границі перетинів зі сферою (10) множин C_κ та $C=\sum_{\kappa=1}^{g} C_\kappa$ відповідно.

При цьому поверхня χ вважається такою, що C' непусте. Хай, крім того, $\tilde{T}'$ — одна з визначених вище множин $\tilde{T}$, що лежить на (10) достатньо близько до C', і не перетинається з C, і нехай також $x= =(x_1, \ldots, x_n)$ — довільна точка, що не належить відповідній C поверхні розриву Σ. Якщо тепер $\tilde{T}$ — множина, що лежить в спільній з $\tilde{T}'$ конічній з вершиною в початку координат поверхні і гомеоморфна останній, то має місце слідуюче

Зауваження 7.

Функція
$$\tilde{F}_j(x)=\overbrace{\int\cdots\int}^{n-2}_{\tilde{T}} \Psi_j(x, \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^j)\,\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}')\,d_{\tilde{\alpha}}\tilde{T}$$

аналітична в точці x.

Справедливість цього зауваження випливає з можливості вибору $\tilde{T}'$ настільки близького до C', щоб згідно з зауваженням 3 точка x опинилась зовні відповідної $\tilde{T}'$ (і, внаслідок зауваження 4, також зовні відповідної $\tilde{T}$) поверхні розриву.

З попередніх зауважень випливає нижченаведена теорема.

Теорема 1. При прийнятих вище припущеннях та позначеннях «півпросторове» ядро $G(x)$ є аналітично продовжуваним на довільну конечну частину півпростору $x_n \leqslant 0$ аж до поверхні σ, що відповідає як завгодно близькій до C' множині $\tilde{T}'$.

Переконатись в цьому можна, наприклад, слідуючим чином.

Виберемо на $\tilde{T}'$ два оточення $\tilde{T}'_1 \subset \tilde{T}'_2$ деякої точки $\tilde{\alpha}' \ni \tilde{T}'$ та утворимо множину $\tilde{T}'$ з $\tilde{T}'_2$, неперервно з'єднаної (не зачіпаючи точок $\tilde{\alpha}' \in C'$) з множиною, одержаною з $\tilde{T}_1'$ шляхом зміни знака всіх координат її точок. Будову конічної поверхні розриву $\tilde{\sigma}$, відповідної такій множині $\tilde{T}'$, зручно представити з допомогою перетину її деякою n-мірною сферою. Цей перетин буде, очевидно, складатись з відповідних $\tilde{T}'_1$ та $\tilde{T}'_2$ двох частин аналогічних перетинів різних полостей поверхні σ, неперервно з'єднаних поверхнями $\tau^{(1)}$ та $\tau^{(2)}$, що перетинаються з перетинами площини $x_n=0$ тією ж сферою. Якщо при цьому вибирати множину $\tilde{\tilde{T}}'$ таким чином, щоб $\tau^{(1)}$ та $\tau^{(2)}$ не перетинались між собою, то кожна полость конуса, обмеженого поверхнею $\tilde{\sigma}$, буде містити в собі оточення деякої конечної точки x, як завгодно близької до другої полості та до точки $\tilde{x}$, що відповідає точці $\tilde{\alpha}'$. Тому заміна множини інтегрування T з допомогою $\tilde{\tilde{T}}'$ у виразах (6) та (7), а також належний вибір області V в (5)) дозволяє аналітично продовжити ядро $G(x)$ на точки цього останнього оточення. Неперервно пересуваючи точку $\tilde{\alpha}'$ вздовж множини $\tilde{T}'$, можна, очевидно, переконатись в аналітичній продовжуваності ядра $G(x)$, як це зазначено в теоремі 1.

Нехай тепер $\tilde{T}$ позначає множину, центральна проекція (з початку) якої на сферу (10) співпадає з $\tilde{T}'$. Тоді вираз аналітичного продовження «півпросторового» ядра на частину півпростору $x_n \leqslant 0$, що міститься в довільно вибраній конечній області V з (5) і обмежена поверхнею $\tilde{\sigma}$, може бути одержаний з (5) шляхом заміни виразів (6) та (7) слідуючими:

$$v_\kappa(x) = \sum_{l=0}^{s-s_\kappa-1} \overbrace{\int \cdots \int}^{n-2}_{\tilde{\tilde{T}}} d_{\tilde{\alpha}'} \tilde{\tilde{T}} \int_{+} \sum_{q=-t}^{s-l-1} L_q\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi^{(l)}(x, \tilde{\alpha}) P_{\kappa,l}(\tilde{\alpha})\, d\alpha_n;$$

$$F_{\kappa,l}(x) = \overbrace{\int \cdots \int}^{n-2}_{\tilde{\tilde{T}}} d_{\tilde{\alpha}'} \tilde{\tilde{T}} \int_{+} \Phi^{(l)}(x, \tilde{\alpha}) P_{\kappa,l}(\tilde{\alpha})\, d\alpha_n.$$

З а у в а ж е н н я 8. При $n-1<2n-3$, тобто при $n>2$ у випадку існування множин C_κ, що ніде, крім початку, не перетинаються, та відповідних їм поверхонь σ_κ, які також не перетинаються при $x \neq 0$, «півпросторове» ядро $G(x)$ може бути аналітично продовжене на будь-яку конечну частину всього простору, за винятком початку координат.

Справедливість цього твердження випливає з можливості проведення поверхонь χ' та χ'' через кожне з будь-яких двох різних C'_n окремо, що, по-попередньому, дозволяє аналітично продовжити $G(x)$ до поверхонь, як завгодно близьких до кожної з різних σ_κ.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА ЗДІЙСНЕННЯ ЗАМИСЛУ Г. ВЕЙЛЯ

Наслідки приведеного в попередньому параграфі вивчення «півпросторових» ядер дозволяють побудувати слідуючий метод реалізації згаданої ідеї Г. Вейля.

Нехай обмежуюча область V поверхня S, що задовольняє прийнятим вище умовам ([1], стор. 147), за винятком, можливо, вимоги опуклості, допускає побудову в кожній своїй точці y такої конічної поверхні σ, що деяка частина її оточення цієї точки σ_h, яка належить неперервно залежній від координат точки y сім'ї і розташована в півпросторі $x_n<0$, не мала б спільних точок з $V+S$ (крім самої точки y).

Представимо поблизу початку (місцевої системи) аналітично продовжене аж до частини σ_- поверхні σ, що міститься в півпросторі $x_n<0$, «півпросторове» ядро $G(x)$ у вигляді інтеграла від розв'язків рівняння (1) тільки з точковими особливостями, розповсюдженого по деякій такій поверхні Ω, що

а) $\Omega \supset \sigma_h$,

б) для всіх $x \in \Omega - \sigma_n$ буде $|x| \geqslant h > 0$.

З цією метою можна скористатись слідуючою формулою Гріна:

$$u(x) = -\int_{\widetilde{S}} \overbrace{\cdots}^{n-1} \int \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(\omega(x, z), u(z))\, d_z \widetilde{S}, \tag{11}$$

де $\widetilde{S}$ — деяка замкнута поверхня, яка обмежує таку допустиму ([4], стор. 57), область Q, що $u(x)$ задовольняє рівнянню (1) в $Q+S$. Цю формулу одержують шляхом інтегрування співвідношення

$$\omega(x, z)\, A\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) u(z) - \left(A'\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) \omega(x, z)\right)' u(z) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} B_z^j(\omega(x, z), u(x))$$

по області, обмеженій з одного боку поверхнею $\widetilde{S}$, а з другого — сферою з центром в точці $x \in Q$ достатньо малого радіуса δ та наступного граничного переходу при $\delta \to 0$.

Позначаючи з допомогою S_ρ та σ_ρ відповідно належним чином орієнтовані частини сфери радіуса ϱ з центром в початку, що відтинається поверхнею σ_-, та частину поверхні σ_-, що відтинається цією сферою, а також вважаючи Ω вибраним таким чином, щоб можна було покласти $\widetilde{S} = \Omega - \sigma_\rho + S_\rho$. використовуючи формулу (11) та незалежність одержуваного виразу від ϱ, можемо записати

$$G(x) = -\lim_{\rho \to 0} \int_{\Omega - \sigma_\rho + S_\rho} \overbrace{\cdots}^{n-1} \int \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(\omega(x, z), G(z))\, d_z \widetilde{S}. \tag{12}$$

У випадку існування при $x \neq 0$.

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{S_\rho} \overbrace{\cdots}^{n-1} \int \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(\omega(x, z), G(z))\, d_z \widetilde{S} = -g(x)$$

вираз (12) можна записати

$$G(x) = -\int_{\Omega} \overbrace{\cdots}^{n-1} \int \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(\omega(x, z), G(z))\, d_z \Omega + g(x).$$

В протилежному випадку, користуючись лемою Я. Б. Лопатинського з [9], згідно якій при умові достатньої гладкості коефіцієнтів рівняння (1)

$$\omega(x, z)=\sum_{l=0}^{t} \vartheta_l(z) \left\{\frac{\partial^l}{\partial y^l}\, \omega(x, y)\right\}\Big|_{y=0} + R(x; z, 0),$$

$$\left(\text{тут позначено } \sum_{l=0}^{t} = \sum_{\substack{0 \leqslant l_1+\ldots+l_n \leqslant t \\ 0 \leqslant l_n \leqslant s}}; \ \frac{\partial^l}{\partial y^l}=\frac{\partial^{l_1+\ldots l_n}}{\partial y_1^{l_1}\ldots \partial y_n^{l_n}}; \ \vartheta_l(z)=\vartheta_{l_1\ldots l_n}(z, 0)\right),$$

одержимо аналогічно попередньому

$$G(x)=-\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(R(x; z, 0),\, G(z))\, d_z\Omega + \tilde{g}(x).$$

Тут

$$\tilde{g}(x)=-\lim_{\rho\to 0} \overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{S_\rho} \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(R(x; z, 0),\, G(z))\, d_z S -$$

$$-\sum_{l=0}^{t} \left\{\frac{\partial^l}{\partial y^l}\, \omega(x, y)\right\}\Big|_{y=0} \overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\Omega-\sigma_\rho+S_\rho} \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(\vartheta_l(z),\, G(z)) d_z \tilde{S}.$$

(З огляду на те, що матриці $\vartheta_l(z)$ є розв'язками рівняння (1), коефіцієнти

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\Omega-\sigma_\rho+S_\rho} \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(\vartheta_l(z),\, G(z)) d_z \tilde{S}$$

не залежать від ϱ.

Число t, очевидно, повинно бути вибране настільки великим, щоб розглядувана границя існувала).

Зауважимо, що у випадку достатньо швидкого спадання функцій $G(z)$ та $\omega(x, z)$ при $z\to\infty$ під Ω можна було б у виразі (12) мати на увазі поверхню σ.

Аддитивну поправку $\Delta G(x)$ до «півпросторового» ядра $G(x)$, додавання якої створювало б нове ядро $\tilde{G}(x)=G(x)+\Delta G(x)$, придатне і для розглядуваних в цьому параграфі невипуклих областей V, можна визначити слідуючим чином

$$\Delta G(x)=\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\Omega-\sigma_h} \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(\omega(x, z),\, G(z))\, d_z\Omega.$$

Дійсно, по-перше, така поправка не впливає на поведінку ядра поблизу початку (тобто вона зберігає властивість «стрибка», а також не порушує забезпечуючих регулярність оцінок) внаслідок її аналітичності в достатньо малому його оточенні.

По-друге, будучи розв'язком рівняння (1), вона також забезпечує задоволення цьому рівнянню нового ядра

$$\tilde{G}(x) = -\int \overbrace{\cdots}^{n-1}_{\sigma_h} \int \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(\omega(x, z), G(z))\, d_z\sigma, \tag{13}$$

аналітичність якого зовні σ_h не викликає сумнівів.

Користуючись результатами (а також припущеннями та позначеннями) замітки [6], замість представлення (12) можна вживати слідуюче:

$$G(x) = \sum_{\kappa=0}^{t} \int \overbrace{\cdots}^{n-1}_{\sigma_0} \int \frac{\partial^\kappa}{\partial z^\kappa} \omega(x, z)\, \tau_\kappa^{(G)}(z)\, d_z\sigma + G_0(x), \tag{14}$$

де σ_0 — границя множини, зв'язаної з C співвідношенням (9).

Аналогічно попередньому аддитивна поправка $\Delta_0 G(x)$ у цьому випадку може бути визначена

$$\Delta_0 G(x) = -\sum_{\kappa=0}^{t} \int \overbrace{\cdots}^{n-1}_{\sigma_0^- - \sigma_0^h} \int \frac{\partial^h}{\partial z^h} \omega(x, z)\, \tau_\kappa^{(G)}(z)\, d_z\sigma, \tag{15}$$

де σ_0^h — достатньо мале оточення початку на $\sigma_{\bar{o}}$.

Згідно з зауваженням [6] сім'ю поверхонь σ з необхідними властивостями можна побудувати для будь-якої гладкої границі S області V, внаслідок чого розглядуваний метод дозволяє зовсім звільнитись від обмеження опуклості області V.

Приведемо застосування побудованого тут метода до задачі про пружну рівновагу тіла при заданих напруженнях на його поверхні. В цьому випадку система (1) може бути записана

$$\mu(\operatorname{graddiv} - \operatorname{rotrot})\, u(x) + (\lambda + \mu) \operatorname{graddiv} u(x) = 0 \tag{16}$$

(λ та μ — так звані сталі Ляме — числа, що характеризують пружні властивості тіла).

Побудоване вперше Г. Вейлем ([3], стор. 23) «півпросторове» ядро цієї задачі можна представити у вигляді

$$G(x) = \frac{1}{\lambda + \mu} \left\{ \frac{1}{2} \Phi(x) + (\lambda + 2\mu) P(x) \right\},$$

де

$$P(x) = \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)} P_1(x) + \frac{1}{2\mu} P_2(x);$$

де

$$\Phi(x)=\left\|\begin{matrix} \frac{1}{r}+\frac{r(r+x_3)-x_2^2}{r(r+x_3)^2}, & \frac{x_1 x_2}{r(r+x_3)^2}, & \frac{x_1}{r(r+x_3)} \\ \frac{x_2 x_1}{r(r+x_3)^2}, & \frac{1}{2}+\frac{r(r+x_3)-x_1^2}{r(r+x_3)^2}, & \frac{x_2}{r(r+x_3)} \\ -\frac{x_1}{r(r+x_3)}, & -\frac{x_2}{r(r+x_3)}, & \frac{1}{r} \end{matrix}\right\|;$$

$$P_1(x)=\left\|\begin{matrix} \frac{1}{r}-\frac{x_1^2}{r^3}, & -\frac{x_1 x_2}{r^3}, & -\frac{x_1 x_3}{r^3} \\ -\frac{x_2 x_1}{r^3}, & \frac{1}{r}-\frac{x_2^2}{r^3}, & -\frac{x_2 x_3}{r^3} \\ -\frac{x_3 x_1}{r^3}, & -\frac{x_3 x_2}{r_3}, & \frac{1}{r}-\frac{x_3^2}{r^3} \end{matrix}\right\|;$$

$$P_2(x)=\left\|\begin{matrix} \frac{1}{r}+\frac{x_1^2}{r^3}, & \frac{x_1 x_2}{r^3}, & \frac{x_1 x_3}{r^3} \\ \frac{x_2 x_1}{r^3}, & \frac{1}{r}+\frac{x_2^2}{r^3}, & \frac{x_2 x_3}{r^3} \\ \frac{x_3 x_1}{r^3}, & \frac{x_3 x_2}{r^3}, & \frac{1}{r}+\frac{x_3^2}{r^3} \end{matrix}\right\|.$$

Позначаючи з допомогою $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ та $\Phi_3(x)$ відповідно перший, другий та третій стовбці матриці $\Phi(x)$, представлення виду (14) можна записати

$$\Phi_1(x)=\int_0^\infty\left\{\operatorname{rot}\left(0;\frac{1}{\varrho};\ \frac{\xi x_2}{\varrho^3}\right)'\right. d\xi;$$

$$\Phi_2(x)=-\int_0^\infty\left\{\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\varrho};\ 0;\ \frac{\xi x_1}{\varrho^3}\right)'\right. d\xi;$$

$$\Phi_3(x)=-\int_0^\infty\left\{\operatorname{grad}\frac{1}{\varrho}\right\}' d\xi.^*$$

$\left(\text{Тут}\quad \varrho=\sqrt{x_1^2+x_1^2+(x_3+\xi)^2}\right)$.

Шукана аддитивна поправка до цього ядра буде

$$\Delta_0 G(x)=\Phi'(x)+\Phi''(x),$$

* Штрих позначає транспонування.

причому

$$\Phi' x = \begin{Vmatrix} \frac{1}{R} + \frac{R(R+x_3+h) - x_2^2}{R(R+x_3+h)^2}, & \frac{x_1 x_2}{R(R+x_3+h)}, & \frac{x_1}{R(R+x_3+h)} \\ \frac{x_1 x_2}{R(R+x_3+h)^2}, & \frac{1}{R} + \frac{R(R+x_3+h) - x_1^2}{R(R+x_3+h)^2}, & \frac{x_2}{R(R+x_3+h)} \\ -\frac{x_1}{R(R+x_3+h)}, & -\frac{x_2}{R(R+x_3+h)}, & \frac{1}{R} \end{Vmatrix};$$

$$\Phi''(x) = -$$

$$- \begin{Vmatrix} \frac{h}{R(R+x_3+h)} - \frac{hx_2^2(2R+x_3+h)}{R^3(R+x_3+h)}, & \frac{hx_1 x_2(2R+x_3+h)}{R^3(R+x_3+h)^2}, & 0 \\ \frac{hx_1 x_2(2R+x_3+h)}{R^3(R+x_3+h)^2}, & \frac{h}{R(R+x_3+h)} - \frac{hx_1^2(2R+x_3+h)}{R^3(R+x_3+h)^2}, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}.$$

(Тут $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^3 + (x_3+h)^2}$).

Представлення

$$\Phi''(x) = h(\Phi''_1(x), \Phi''_2(x), \Phi''_3(x));$$

$$\Phi''_1(x) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2};\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2};\ 0\right);$$

$$\Phi''_2(x) = \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial x_1};\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2};\ 0\right);$$

$$\Phi''_3(x) = (0; 0; 0);$$

$$w = \ln(R + x_3 + h,$$

з якого легко помітити, що

$$\operatorname{div}\Phi''_1(x) = \operatorname{div}\Phi''_2(x) = \operatorname{div}\Phi''_3(x) = 0,$$

$$(\operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot})\,\Phi''(x) = 0,$$

переконує в задоволенні функції $\Phi''(x)$ рівнянню (16).

Внаслідок аналітичності функцій $\Phi'(x)$ та $\Phi''(x)$ в оточенні початку та аналогії між матрицями $\Phi(x)$ та $\Phi'(x)$, наявність решти необхідних властивостей у цієї поправки $\Delta_0 G(x)$ сумнівів не викликає.

Аналітичність нового ядра $\tilde{G}(x) = G(x) + \Delta_0 G(x)$ зовні відрізка $x_1 = x_2 = 0, -h \leqslant x_3 \leqslant 0$ свідчить про його придатність для довільної області, відрізок довжини h зовнішньої півнормалі до границі якої, проведеної в будь-якій її точці, завжди виявляється зовні області та її границі, що, очевидно, завжди має місце для областей, обмежених гладкими поверхнями.

ДЕЯКІ ПРИКЛАДАННЯ

На прикладі результатів Я. Б. Лопатинського, наведених в роботах [2], [7], [8], ілюструємо можливість уникнення обмеження опуклості області в тих випадках, коли останнє мотивоване наявністю у «півпросторових» ядер згадуваних вище (розділ 1) конічних множин особливостей. Таке уникнення може бути досягнуте шляхом застосування побудованих в розділі 2 поправок. Прослідкуємо це в кожному окремому випадку, зберігаючи при цьому, з метою стислості позначення відповідних робіт.

1. Доведення леми 1 з [2] про можливість для довільного двічі неперервно диференційовного розв'язку

$\tilde{u}(x)$ системи
$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}(x)=0 \tag{17}$$

побудування ядра $G(x, y)$ з тими ж властивостями, що і $G_0(x, y)$, та підбору такої неперервної густини $\tilde{\mu}(y)$, щоб розв'язок

$$\int_S G(x, z)\tilde{\mu}(z)\,d_zS$$

тієї ж системи (17) співпадав з $\tilde{u}(x)$ на границі S розглядуваної області, грунтується, по-перше, на представленні розв'язку $\tilde{u}(x)$ у вигляді інтегралів по S, аналогічному (11), не залежному від опуклості області, та, по-друге, на використанні слідуючих властивостей «півпросторового» ядра $G_0(x, y)$:

а) $G_0(x, y)$ — функціональна матриця, визначена та неперервна разом з своїми похідними

$$\frac{\partial^{\kappa_1+\ldots+\kappa_n+l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}\partial y_1^{l_1}\ldots\partial y_n^{l_n}}\,G_0(x, y)$$

при $\kappa_1+\ldots+\kappa_n\leqslant\max\{2; t\}$, $l_1+\ldots+l_n\leqslant t$, $x\in D+S$, $y\in S$, $x\neq y$.

При малому $|x-y|$ головний член будь-якої з цих похідних визначається відповідною похідною головного члена $\tilde{G}_0(x, y)$ первісної матриці $G_0(x, y)$.

При цьому $\tilde{G}_0(z, y)=O\left(\frac{z, \nu(y)}{|z|^n}\right)$ і при диференціюванні $\tilde{G}_0(z, y)$ по y порядок особливості зберігається, а при кожному диференціюванні по z — взагалі підвищується на одиницю.

б) $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\ G_0(x, y)=0$ при $x\in D$; $y\in S$;

в) при $x\in D$, $y\in S$,

$$\lim_{x\to y}\int_S G_0(x, z)\,\mu(z)\,d_zS=\mu(y)+\int_S G_0(y, z)\,\mu(z)\,d_zS.$$

Оскільки внесення визначеної формулами (13) або (15) поправки не порушує цих властивостей а)—в) ядра, забезпечуючи, проте, аналітичність нового ядра всередині розглядуваної області (з гладкою границею) незалежно від її опуклості, то отже при збереженні всіх інших припущень використання будь-якої з цих поправок дозволяє звільнитись від обмеження опуклості, не порушуючи справедливості леми.

Так само може бути поширена на випадок неопуклих областей лема 2, що доводить існування взаємнооднозначної відповідності між многовидністю розв'язків рівняння

$$\psi(y) + \int_S \psi(z) G(z, y) d_z S = 0$$

та многовидністю неперервно диференційовних в $D+S$ (та двічі — в D) розв'язків спряженої з (17) системи, що анулюються на границі S.

Таким чином, для областей, що задовольняють вказаним в цитованій роботі вимогам, за винятком вимоги опуклості, (в тому числі також і негомеоморфних кулі) залишається справедливою доведена в [2] теорема 2 про необхідність та достатність відсутності ненульових неперервно-диференційовних в $D+S$ розв'язків спряженої однорідної задачі

$$A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) = 0, \qquad (x \in D),$$

$$v(y) = 0, \qquad (y \in S)$$

для існування неперервно диференційовного в $D+S$ та двічі — в D розв'язку задачі

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0, \qquad (x \in D),$$

$$u(y) = f(y), \quad (y \in S)$$

при довільній неперервній на S функції $f(y)$.

2. Не зупиняючись на уникненні обмеження опуклості областей D, що фігурують в умові теореми 1 з [7], з огляду на малоістотність цього обмеження, переконаємося в можливості такого уникнення в теоремі 2 тієї ж роботи [7]. З цією метою досить зауважити, що при заміні «півпросторового» ядра $G_0(x, y)$, яке вживається в її доведенні, з допомогою $\tilde{G}_0(x, y) = G_0(x, y) + \Delta G_0(x, y)$, де $\Delta G_0(x, y)$ — визначена однією з формул (13) або (15) поправка, по-перше, можлива побудова представлення, аналогічного (10),

$$\tilde{G}(x, y) = \tilde{G}_0(x, y) + \sum_{i=1}^{r} \omega(x, x_j)\Theta_j(y)$$

та, по-друге, внесення такої поправки не порушує одержуваних з представлення (11) оцінок.

Таким чином, дійсно, використання побудованих в розділі 2 поправок до «півпросторових» ядер дозволяє поширити на неопуклі області й цю теорему 2 з [7] про збереження розв'язаності та стійкість розв'язку при малих змінах границі області та граничних значень.

3. Цілком аналогічно може бути поширена на випадок неопуклої області D також і теорема з [8] про стійкість розв'язку відповідної однозначно розв'язаної задачі при малих змінах коефіцієнтів рівнянь разом з деякими їх похідними.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лопатинский Я. Б. Укр. мат. журн. 5, 1953, стор. 123.
2. Лопатинский Я. Б. ДАН УРСР 1, 5, 1956.
3. Weyl H., Rend. C. Pal., XXXIX, 1915, стор. 1—49.
4. Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М., 1947.
5. Лопатинский Я. Б. Укр. мат. журн. 3, 1951.
6. Гавеля С. П. Наукові записки ЛДУ, серія механіко-математична, в. 8. 1957.
7. Лопатинський Я. Б. ДАН УРСР, 2, 107 1956.
8. Лопатинський Я. Б. ДАН УРСР, 3, 211, 1956.
9. Лопатинский Я. Б. ДАН СССР, т. 79, № 5, 1951.