Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

О. І. КОРОНКЕВИЧ

ЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ ПІД ДІЄЮ ВИПАДКОВИХ СИЛ

1. Однією з основних задач, що виникають при дослідженні системи диференціальних рівнянь з випадковими членами, є дослідження зв'язку між статистичними характеристиками розв'язку і статистичними характеристиками випадкових членів рівняння. В даній роботі з цієї точки зору досліджуються лінійні системи диференціальних рівнянь першого порядку; вільні члени являють собою випадкові функції. Будуть розглянуті системи з постійними та періодичними коефіцієнтами. В дальшому розглядається поширення одержаних результатів на нелінійні системи з малим параметром, що допускають представлення розв'язку в вигляді ряду по степеням цього параметра.

Динамічні системи під дією випадкових сил, зокрема, лінійні динамічні системи, розглядались в роботах [1, 2, 3, 4] та ряді інших. В роботі [3] показано, що система лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами та випадковими стаціонарними функціями в правій частині має стаціонарний частинний розв'язок, якщо всі корені характеристичного рівняння лежать в лівій півплощині. Метод одержання явного виразу такого розв'язку через задані випадкові функції в роботі не вказаний.

В цій статті розглядається загальний метод визначення стаціонарного частинного розв'язку в явній формі; при цьому буде показано, що подана в [3] достатня умова існування цього розв'язку є занадто обмежуюча.

Будемо розглядати рівняння виду

$$A_n(y) = \xi(t), \tag{1}$$

де A_n — лінійний диференціальний оператор n-го порядку з постійними коефіцієтами. Припускаємо, що характеристичне рівняння не має нульових або чисто уявних коренів. $\xi(t)$ — випадкова стаціонарна функція, що, як відомо, (див. напр. [5]), може бути представленою у вигляді

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, dZ(\lambda). \tag{2}$$

Припускаючи існування стаціонарного частинного розв'язку рівняння (1), запишемо в аналогічному вигляді спектральний розклад розв'язку

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, dW(\lambda). \tag{3}$$

Подібно до [2], підставляючи (2), (3) в (1), одержуємо відповідне співвідношення між диференціалами випадкових функцій $dZ(\lambda)$ і $dW(\lambda)$

$$dW(\lambda) = \frac{1}{A_n(i\lambda)} dZ(\lambda). \tag{4}$$

Розкладаючи дріб, що стоїть в правій частині (4), на прості дроби, одержимо:

а) при відсутності кратних коренів

$$dW(\lambda) = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{c_\kappa}{i\lambda - \alpha_\kappa} \tag{5}$$

де α_κ — корені характеристичного рівняння.

Тоді частинний стаціонарний розв'язок рівняння (1) може бути представлений у формі $y(t) = \sum\limits_{\kappa=1}^{n} y_k(t)$,

де

$$y_\kappa(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dW(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \frac{c_\kappa}{i\lambda - \alpha_\kappa} dZ(\lambda). \tag{6}$$

Легко бачити, що інтеграл (6) завжди має сенс, якщо тільки $Re\,(\alpha_\kappa) \neq 0$ [6].

Таким чином, частинний розв'язок, який ми шукаємо, одержується як сума окремих компонент, що, як легко перевірити, можуть бути явно виражені через подану випадкову функцію, а саме

$$y_\kappa(t) = c_\kappa \int\limits_0^{\infty} e^{\alpha_\kappa \tau} \xi(t-\tau) \text{ при } Re(\alpha_\kappa) < 0; \tag{7}$$

$$y_\kappa(t) = c_\kappa \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha_\kappa \tau} \xi(t+\tau) \text{ при } Re(\alpha_\kappa) > 0; \tag{8}$$

б) нехай характеристичне рівняння має кратний корінь α_κ, кратності m. Приймемо для визначенності $Re(\alpha_\kappa) > 0$. Тоді при розкладі на прості дроби будемо мати групу доданків

$$\left\{ \frac{c_1}{i\lambda - \alpha_\kappa} + \ldots + \frac{c_e}{(i\lambda - \alpha_\kappa)^l} + \ldots + \frac{c_m}{(i\lambda - \alpha_\kappa)^m} \right\} dW(\lambda). \tag{9}$$

Кожному з цих доданків відповідає компонента частинного розв'язку у вигляді

$$y_e = c_e \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{\tau_l}^{\infty} \ldots l-1 \ldots \int\limits_{\tau_2}^{\infty} e^{-\alpha_\kappa \tau_1} \xi(t+\tau_1)\, d\tau_1 \ldots d\tau_l;\; l = 1, \ldots m. \tag{10}$$

Аналогічно одержимо відповідний вираз для випадку кратних коренів при $Re(\alpha_k) < 0$.

Обчислюючи статистичні характеристики розв'язку, і використовуючи комутативність операцій математичного сподівання і інтегрування [9], легко показати, що, коли подана випадкова функція стаціонарна в розумінні О. Я. Хінчина [7] (перший і другий моменти інваріантні відносно зсуву параметра), або в розумінні [3] (всі моменти інваріантні відносно зсуву параметра), то в тому ж розумінні буде стаціонарним одержаний частинний розв'язок.

Очевидно, все сказане відповідно поширюється на системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$\frac{dy_s}{dt}=\sum_{j=1}^{n} b_{sj}y_j+\xi_s(t);\ s=1\ldots n, \tag{11}$$

де b_{sj} — сталі коефіцієнти; $\xi_s(t)$ — стаціонарні і стаціонарно-зв'язані випадкові функції.

Зауважимо, що одержаний розв'язок для системи (11) може бути записаний в матричній формі

$$Y(t)=\int_{\pm\infty}^{t} e^{B(t-\tau)}\xi(\tau)d\tau, \tag{12}$$

де $Y(t)$ — стовбець частинних розв'язків; $\xi(\tau)$ — стовбець випадкових функцій; $e^{B(t-\tau)}$ — фундаментальна матриця Гріна. Позначення нижньої границі інтегрування $\pm\infty$ означає, що при інтегруванні елемента, який має множник $e^{\alpha t(t-\tau)}$ при $Re(\alpha)<0$ беремо $-\infty$; при $Re(\alpha)>0$ беремо $+\infty$. Нагадаємо, що, згідно з умовою, характеристичне рівняння не має коренів з нульовою дійсною частиною. Розглядаючи розв'язок в формі (12), легко безпосередньою перевіркою переконатися в тому, що він являє собою многомірну стаціонарну випадкову функцію.

Будемо говорити, що випадкова функція визначена єдиним способом, якщо вона визначена з точністю до випадкової функції, яка при довільному значенні t, з імовірністю одиниця, приймає значення нуль. Тоді неважко показати, що одержаний розв'язок визначається однозначно.

На основі сказаного легко переконатися, що має місце

Теорема 1. Достатньою умовою існування єдиного стаціонарного частинного розв'язку лінійного диференціального рівняння (1) або лінійної системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами (11), при умові, що вільні члени є випадкові стаціонарні і стаціонарно-зв'язані функції, — є відсутність коренів характеристичного рівняння з дійсною частиною, рівною нулю. При цьому, якщо випадкова стаціонарна функція $\xi(t)$ має компоненту з неперервним спектром і кожна з похідних спектральних функцій $\frac{dF_s(\lambda)}{d\lambda}$ відмінна від нуля всюди, де вона існує, — ця умова є також необхідною.

В и с н о в о к. Дано рівняння (1) або система (11), в правій частині якої — випадкова функція з стаціонарними m-тими похідними, Тоді відносно існування частинного розв'язку з стаціонарними m-тими похідними має місце теорема 1.

Розглянемо загальне представлення неперервної випадкової стаціонарної функції [8]

$$\xi(t) = \zeta_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \zeta_\kappa e^{i\lambda_\kappa t} + \xi_1(t), \tag{13}$$

де $\zeta_0, \zeta_\kappa, \xi_1(t)$ — ортогональні частоти; λ_κ — власні частоти; $\xi_1(t)$ — компонента випадкової функції, яка має неперервний спектр. На основі представлення (13) легко одержати такий результат:

Теорема 2. При умовах теореми 1, кожній компоненті неперервної випадкової функції $\xi(t)$, представленої в формі (13), відповідає аналогічна компонента частинного стаціонарного розв'язку рівняння (1) або, відповідно, системи (11). При цьому спектри власних частот поданої випадкової стаціонарної функції і частинного стаціонарного розв'язку — однакові.

2. Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь з змінними коефіцієнтами. Будемо додержуватися матричної форми запису.

$$\frac{dY}{dt} = P(t)Y + \xi(t), \tag{14}$$

де $P(t)$ — матриця коефіцієнтів; $\xi(t)$ — стовбець випадкових функцій, що можна розглядати як многомірну випадкову функцію. Нагадаємо, що многомірну випадкову функцію називаємо стаціонарною, якщо всі її елементи — стаціонарні і стаціонарно-зв'язані [6].

Нехай система (14) приводима [10] з допомогою перетворення $Y = Z(t)X$. При такому перетворенні система (14) переходить в систему

$$\frac{dX}{dt} = BX + Z^{-1}(t)\xi(t), \tag{15}$$

де B — постійна матриця, яка дорівнює

$$B = Z^{-1}(t)P(t)Z(t) - Z^{-1}(t)\frac{dZ(t)}{dt} \tag{16}$$

Будемо вважати, що матриця B не має характеристичних чисел, які лежать на уявній осі. Тоді частинний розв'язок системи (14) можна записати в слідуючій формі, де позначення нижньої границі інтегрування вживається в тому ж розумінні, що і в (12):

$$Y(t) = \int_{\pm\infty}^{t} Z(t)e^{B(t-\tau)} Z^{-1}(\tau)\,\xi(\tau)d\tau. \tag{17}$$

Розглянемо випадок, коли елементи матриці коефіцієнтів системи (14) — періодичні функції, які мають один і той самий період ω. Тоді елементи матриці $Z(t)$ — також періодичні функції, період яких в загальному випадку дорівнює 2ω [11].

Нехай $\xi(t)$ — многомірна стаціонарна випадкова функція. Тоді, очевидно, частинний випадковий розв'язок (17) системи лінійних рівнянь з періодичними коефіцієнтами має властивості

$$MУ(t+2\omega)=MУ(t); \tag{18}$$

$$MУ(t+2\omega)(У(s+2\omega))^*=MУ(t)(У(s))^*. \tag{19}$$

Знак * тут і далі означає, що матриця (в даному випадку — стовбець) транспонується і її елементи замінюються комплексно спряженими. Останню рівність можна так само записати інакше, в формі, яка в дальшому буде для нас більш зручною. Позначимо кореляційну матрицю

$$MУ(t)(У(s))^*=B_{yy}(t;s)=B_{yy}(t;t-\tau), \tag{20}$$

де $\tau=t-s$. Тоді можна сказати, що кореляційна матриця $B_{yy}(t;t-\tau)$ при довільному значенні τ є періодична функція відносно t. Випадкову функцію, яка має властивості (18), (19), будемо називати періодичною випадковою функцією.

Розв'язок (17), який має ці властивості, визначається однозначно. Це можна довести, виходячи з того, що відповідна однорідна система, внаслідок умов, накладених на матрицю B, не має випадкових розв'язків з обмеженим квадратом модуля на всій осі t. Сказане дає можливість висловити теореми, які являють собою узагальнення теорем Нейгебауера і Бора [11] для випадкових функцій.

Теорема 3. Дано систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з періодичними коефіцієнтами; вільні члени утворюють многомірну випадкову стаціонарну функцію; система не має характеристичних показників, дійсна частина яких дорівнює нулю. Тоді в класі випадкових періодичних функцій існує однозначно визначений частинний розв'язок системи.

Теорема 4. Дано систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з періодичними або постійними коефіцієнтами. Система не має характеристичних показників (відповідно, при постійних коефіцієнтах відсутні корені характеристичного рівняння), дійсна частина яких дорівнює нулю. Вільні члени утворюють многомірну випадкову періодичну функцію з періодом, рівним періоду коефіцієнтів.

Тоді в класі випадкових періодичних функцій існує однозначно визначений розв'язок системи.

Введене поняття періодичних випадкових функцій можна розглядати як узагальнення поняття стаціонарних випадкових функцій, тому що для останніх рівності (18), (19) виконуються при довільних значеннях величини ω.

Будь-яку стаціонарну випадкову функцію можна подати у вигляді суми сталої величини і стаціонарної випадкової функції, середнє значення якої дорівнює нулю. Аналогічно, будь-яку періодичну випадкову функцію $\xi(t)$ можна представити у вигляді:

$$\xi(t)=\varphi(t)+\zeta(t), \tag{21}$$

де $\varphi(t)=M\xi(t)$ — періодична функція; $\zeta(t)$ — випадкова періодична функція з середнім значенням, рівним нулю. З (17) випливає, що, коли $M\xi(t)=0$, то і $MУ(t)=0$. Тому поняття періодичної випадкової функції, середнє значення якої дорівнює нулю, природньо виникає як розв'язок лінійної системи з періодичними коефіцієнтами, якщо вільні члени утворюють стаціонарну випадкову функцію з середнім значенням, рівним нулю.

Періодичні випадкові функції з середнім значенням, рівним нулю, цікаві тим, що для них можна довести ергодичну теорему, яка звичайно доводиться для стаціонарних випадкових функцій [6; 8; 12; 13]. А саме, відповідно змінивши методику доведення [13], можна показати, що має місце

Теорема 5. Нехай $\xi(t)$ — періодична випадкова функція, яка задовольняє умові $M\xi(t)=0$; $M\xi(t+\tau)(\xi(t))^* \underset{|\tau|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ рівномірно відносно t. Тоді $\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\xi(t)dt \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в розумінні збіжності в середньому квадратичному.

Справді, необхідно довести

$$M\left|\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\xi_i(t)dt\right|^2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{22}$$

для кожного елемента $\xi_i(t)$; $i=1, 2, \ldots n$. Позначимо $M\xi_i(t_1)\,\xi_i(t_2)= = B_{ii}(t_1;t_2)$ і замість t_2 введемо змінну $\tau=t_2-t_1$.

Одержимо

$$M\left|\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\xi_i(t)dt\right|^2 =$$

$$=\frac{1}{T^2}\left|\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}B_{ii}(t_1;t_2)\,dt_1\cdot dt_2\right| \leqslant \frac{1}{T^2}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}dt_1\int\limits_{-T}^{T}\left|B_{ii}(t_1;\ t_1+\tau)\right|d\tau.$$

Згідно з умовою теореми, можна для довільного $\varepsilon>0$, вказати таке τ_0, що при $|\tau|>\tau_0$, для всіх значень t_1 маємо $|B_{ii}(t_1;\ t_1+\tau)|<\varepsilon$. Припускаючи, що величина ε вказана, відповідне значення τ_0 — фіксовано, і, в усякому разі, довжина проміжка інтегрування $T>\tau_0$, розіб'ємо проміжок інтегрування у внутрішньому інтегралі на три частини $-T$, $-\tau_0$; $-\tau_0$, $+\tau_0$; τ_0, T. Позначимо $m=\max|B_{ii}(t_1;\ t_1+\tau)|$. Тоді одержимо слідуючі оцінки:

$$\int\limits_{-T}^{-\tau_0}|B_{ii}(t_1;\ t_1+\tau)|\,d\tau<\varepsilon(T-\tau_0)\,;\ \int\limits_{\tau_0}^{T}|B_{ii}(t_1;t_1+\tau)|\,d\tau<\varepsilon(T-\tau_0)\,;$$

$$\int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0}|B_{ii}(t_1;t_1+\tau)|\,d\tau<2\,m\,\tau_0\,.$$

Таким чином

$$M\left|\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\xi_i(t)\,dt\right|^2<\frac{1}{T}2\,\varepsilon(T-\tau_0)+\frac{m}{T}2\,\tau_0\,. \tag{23}$$

Візьмемо тепер величину T настільки великою, що $\frac{m}{T}\tau_0 < \varepsilon$; тоді

$$M\left|\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\xi_i(t)\,dt\right|^2 < 4\,\varepsilon, \tag{24}$$

де ε — як завгодно мала величина. Теорему доведено.

Теорема 6. Дано систему лінійних диференціальних рівнянь з періодичними або постійними коефіцієнтами. Система не має характеристичних показників (відповідно при постійних коефіцієнтах — відсутні корені характеристичного рівняння), дійсна частина яких дорівнює нулю. Вільний член $\xi(t)$ є многомірна стаціонарна або періодична випадкова функція, яка задовольняє умовам теореми 5. Тоді $\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} У(t)\,dt \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в розумінні збіжності в середньому квадратичному.

Для доведення треба показати, що з умови $M\xi(t+\tau)\,(\xi(t))^* \underset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} 0$ рівномірно відносно t, випливає також $MУ(t+\tau)\,(У(t))^* \underset{|\tau|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ рівномірно відносно t. В цьому легко переконатися, якщо взяти до уваги обмеження, накладені на матрицю B, і використати представлення розв'язку в формі (17).

Зауважимо, що, коли дана система — з постійними коефіцієнтами і випадкова функція $\xi(t)$ — стаціонарна, умова теореми 5 $M\xi(t)=0$ стає, як це і зрозуміло, зайвою.

3. Розглядаємо далі систему лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами; вільні члени утворюють періодичну многомірну випадкову функцію. Нехай період періодичної випадкової функції не має спільної міри з періодом коефіцієнтів. Тоді майже очевидно, що частинний розв'язок нашої системи, взятий в формі (17), має такі властивості:

а) $MУ(t)$ — майже-періодична функція;

б) $MУ(t)\,(У(t-\tau))^* = B_{yy}(t;\,t-\tau)$, при довільному значенні τ, є майже-періодична функція t.

Многомірну випадкову функцію, яка має ці властивості, будемо називати майже-періодичною многомірною випадковою функцією. Тоді неважко перевірити, що виявляються вірними слідуючі теореми, аналогічні теоремам 3, 4.

Теорема 7. Дано систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з періодичними коефіцієнтами; вільні члени утворюють періодичну многомірну випадкову функцію, період якої не має спільної міри з періодом коефіцієнтів рівнянь. Система не має характеристичних показників з дійсною частиною, рівною нулю. Тоді в класі випадкових майже-періодичних функцій існує однозначно визначений розв'язок системи.

Теорема 8. Дано систему лінійних диференціальних рівнянь з періодичними або постійними коефіцієнтами. Система не має характеристичних показників (відповідно при постійних коефіцієнтах — відсутні корені характеристичного рівняння), дійсна частина яких дорівнює нулю, Вільні члени утворюють многомірну випадкову майже-періодичну функцію. Тоді в класі майже-періодичних випадкових функцій існує однозначно визначений розв'язок системи.

Для випадкових майже-періодичних функцій, середнє значення яких дорівнює нулю, залишаються вірними також ергодичні теореми, цілком аналогічні теоремам 5, 6.

4. Дано нелінійну систему, аналогічну розглянутим в [3]

$$\frac{dY}{dt} = PY + \xi(t) + \mu\,\Phi(y_1, \dots y_n, \mu\xi_1, \dots \mu\xi_n), \tag{25}$$

де Φ — стовбець функцій, аналітичних відносно всіх своїх аргументів. Система (25) така, що її розв'язок може бути представлений у вигляді ряду по степеням параметра μ, який рівномірно збігається при $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. В роботі [3] розглянуто, зокрема, випадок, коли коефіцієнти системи — сталі величини. При цьому автор вводить поняття стаціонарності в слідуючому розумінні:

$$M\,\xi_1(t_1)\,\xi_2(t_2)\dots\xi_j(t_j) = f(t_1 - t_j\,; \dots t_{j-1} - t_j), \tag{26}$$

тобто довільні моменти випадкових функцій інваріантні відносно зміщення параметра t. Для таких систем і таких випадкових функцій подано теорему, яка стверджує, що серед розв'язків системи є стаціонарний, якщо корені характеристичного рівняння лежать в лівій півплощині.

Згідно з висновками пункту 1 ясно, що результати [3] можна посилити. Розглянемо випадкову функцію

$$\zeta(t) = \xi_1^{m_1}(t) \dots \xi_j^{m_j}(t), \tag{27}$$

де $\xi_i(t)$ — компоненти випадкової функції $\xi(t)$; $m_1, \dots m_j$ — довільні цілі числа.

Будемо називати многомірну випадкову функцію $\xi(t)$ цілком стаціонарною, якщо кожна випадкова функція (27) є стаціонарною в розумінні О. Я. Хінчина і кожні дві такі функції є стаціонарно зв'язані (26). Тоді має місце слідуюче узагальнення теореми 1.

Теорема 9. Дано систему диференціальних рівнянь (25); $\xi(t)$ — многомірна цілком стаціонарна випадкова функція. Матриця P — постійна. Характеристичне рівняння не має коренів з дійсною частиною, яка дорівнює нулю. Тоді в класі многомірних цілком стаціонарних випадкових функцій існує однозначно визначений розв'язок системи, який може бути представлений у вигляді ряда по степеням параметра μ.

Далі аналогічно узагальнимо поняття періодичних і майже-періодичних випадкових функцій. Будемо називати многомірну випадкову функцію $\xi(t)$ — цілком періодичною (цілком майже-періодичною) випадковою функцією, якщо кожна випадкова функція (27) є періодична (майже-періодична) випадкова функція. Тоді, якщо система (25) має постійні або періодичні коефіцієнти, а $\xi(t)$ — многомірна цілком періодична, або цілком майже-періодична випадкова функція, то для таких нелінійних систем теореми 3, 4, 7, 8 узагальнюються подібно до того, як для системи з постійними коефіцієнтами і цілком стаціонарною випадковою функцією, узагальнюючи теорему 1, одержуємо теорему 9.

ЛІТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике, Изд. АН УССР, 1945.
2. Бэтчолор Дж. Теория однородной турбулентности, ИЛ., 1955.
3. Ворович И. И. Изв. АН СССР, серия математическая, т. 20, № 1, 17—32, 1956
4. Солодовников В. В. Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. М.—Л., 1952.
5. Колмогоров А. Н. Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром. Юбилейный сборник АН СССР, т. 1, 1947.
6. Яглом А. М. Усп. мат. наук, т. 7, в. 5, 1952. стор. 3—168.
7. Хинчин А. Я. Усп. мат. наук, т. 5, 1938, стор. 42—51.
8. K. Karhunen. Über lineare metoden in der Warscheinlichkeitsrechnung. Ann. Acad. Sci. Fennicae. A. I, № 37. Helsinki, 1947, стор. 79.
9. Пугачев В. С. Основы общей теории случайных функций. Акад. арт. наук, 1952.
10. Еругин Н. П. Приводимые системы. Тр. мат. института им. В. А. Стеклова. XIII, Л.—М., 1946.
11. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., 1956.
12. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., 1954.
13. Бунимович В. Н. Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, Изд. Советское радио, 1951.