Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

О. І. КОРОНКЕВИЧ

РЕЗОНАНС В ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ ПРИ ДІЇ ВИПАДКОВИХ СИЛ

1. В роботі [1] були розглянуті системи диференціальних рівнянь першого порядку з постійними або періодичними коефіцієнтами та вільними членами, які являли собою випадкові функції; системи не мали характеристичних показників (у випадку сталих коефіцієнтів, відповідно-характеристичне рівняння не мало коренів) з дійсною частиною, рівною нулю. Згідно з прийнятою термінологією (див., напр., [2]), цей випадок будемо називати нерезонансним. В даній роботі розглядається випадок резонансу для систем з постійними коефіцієнтами, тобто випадок, коли серед коренів характеристичного рівняння є уявні або нульові.

Розглядаємо системи

$$\frac{dY}{dt}=AY+\xi(t), \tag{1}$$

де Y — стовбець розв'язків; $\xi(t)$ — стовбець випадкових функцій, який можна розглядати, як многомірну випадкову функцію; A — постійна матриця коефіцієнтів. Припустимо, що $\xi(t)$ — многомірна стаціонарна функція, тобто всі її компоненти — стаціонарні і стаціонарно-зв'язані; середнє значення $M\xi(t)=0$. Тоді, якщо характеристичне рівняння не має коренів з дійсною частиною, рівною нулю, то існує однозначно визначений частинний стаціонарний розв'язок системи (1), який дорівнює [1]

$$Y(t)=\int_{\pm\infty}^{t} e^{A(t-\tau)}\xi(\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

де позначення нижньої границі інтегрування показує, що при інтегруванні елемента, який має множник $e^{\alpha(t-\tau)}$ при $Re(\alpha)<0$, беремо $-\infty$, при $Re(\alpha)>0$, беремо $+\infty$. У випадку, коли характеристичне рівняння має уявні, або нульові корені, інтеграл (2) не існує. Тоді будемо розглядати розв'язок в формі

$$Y(t)=\int_{\pm\infty;\,0}^{t} e^{A(t-\tau)}\xi(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

де позначення нижньої границі інтегрування говорить про те, що при інтегруванні функції, яка має множник $e^{\alpha(t-\tau)}$ і $Re(\alpha)=0$, беремо нижню границю рівною нулю. Така форма частинного розв'язку дає можливість кожну функцію $y_s(t)$ стовбця $У(t)$ подати у вигляді суми стаціонарних і нестаціонарних компонент. Крім того, з умови $M\xi(t)=0$ випливає, що середнє значення частинного розв'язку (3) $MУ(t)=0$.

Нашою найближчою метою буде дослідження залежності дисперсії нестаціонарних компонент від параметра t, а також дослідження можливості існування стаціонарних розв'язків у випадку резонансу.

Перш за все треба сказати, що коли уявний, або нульовий корінь характеристичного рівняння, якому відповідає елементарний дільник матриці A степені κ, співпадає з власною частотою випадкової функції [6], то, як легко зрозуміти, виходячи з загальної теорії диференціальних рівнянь, такому кореню відповідає нестаціонарна компонента частинного розв'язку з середнім значенням, яке дорівнює нулю, і дисперсією, яка росте пропорціонально $t^{2\kappa}$. В дальшому приймаємо, що корені характеристичного рівняння, які лежать на уявній осі, не співпадають з власними частотами стаціонарної функції $\xi(t)$.

Нехай серед коренів характеристичного рівняння є корені $\pm i\beta$, яким відповідають прості елементарні дільники матриці A. Кожному з цих коренів буде відповідати нестаціонарна випадкова компонента частинного розв'язку $y_s(t)$; $s=1,\dots n$, яка має вигляд

$$\zeta_s^j(t)=c_s e^{i\beta t}\int_0^t e^{-i\beta\tau}\,\xi_j(\tau)\,d\tau\,. \tag{4}$$

Розглянемо одну з таких компонент; її дисперсія

$$M\,|\,\zeta_s^j(t)\,|^2=|\,c_s\,|^2\int_0^t\int_0^t e^{-i\beta(\tau_1-\tau_2)}B(\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2\,, \tag{5}$$

де $B(\tau_1-\tau_2)=M\xi_j(\tau_1)\,\overline{\xi_j(\tau_2)}$.

Очевидно, величина інтеграла (5) зберігається, якщо взяти границі інтегрування $-\frac{t}{2}$, $+\frac{t}{2}$. Замінюючи змінні $\tau_1-\tau_2=p$; $\tau_1+\tau_2=q$, ми при безмежному збільшенні t прийдемо до розглядання

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}dq\int_{-T}^{T}e^{-i\beta p}\,B(p)dp=\lim_{T\to\infty}2\,T\int_{-T}^{T}e^{-i\beta p}\,B(p)dp\,,$$

або, повертаючись до звичайних позначень

$$\lim_{T\to\infty}2\,T\int_{-T}^{T}e^{-i\beta\tau}B(\tau)d\tau\,.$$

Ясно, що коли інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\beta\tau}B(\tau)d\tau$ — скінчений і відмінний від нуля, то при безмежному збільшенні t

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M\,|\,\zeta_s^j(t)\,|^2}{t} \tag{6}$$

— скінчений.

Якщо існує спектральна щільність $f_j(\tau)$, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta\tau} B(\tau)\,d\tau = f_j(\beta)$ — значення спектральної щільності випадкової функції $\xi_j(t)$ в точці $\lambda=\beta$. Звідси ясно, у відповідності з теоремою 1 [1], що у випадку, коли спектральні щільності $f_j(\lambda)$ компонент многомірної випадкової функції $\xi_j(t)$; $j=1,\dots n$ відмінні від нуля при всіх значеннях λ, то, якщо характеристичне рівняння системи має нульові або уявні корені, стаціонарні розв'язки відсутні. Приймемо надалі, що $f_j(\lambda)$ існує та $f_j(\lambda)\neq 0$.

Зауважимо, що, коли вільні члени являють собою функції $\Phi_j(t)$ в звичайному розумінні (не випадкові), які мають перетворення Фурьє $\varphi_j(\lambda)$, то з того, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta\tau}\Phi_j(\tau)d\tau = \varphi_j(\beta)$ є величиною скінченою, випливає, що модуль відповідної компоненти розв'язку лишається обмеженим при необмеженому збільшенні t.

У тому випадку, коли степінь елементарних дільників, що відповідають кореням $\pm i\beta$, дорівнює κ, і корінь $i\beta$ співпадає з власною частотою випадкової функції, дисперсія відповідної нестаціонарної компоненти $M|\zeta_s^j(t)|^2$ збільшується, як вже було вказано вище, пропорціонально $t^{2\kappa}$. Коли корінь $\pm i\beta$ не співпадає з власними частотами, то, як легко показати, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{M|\zeta_s^j(t)|^2}{t^{2\kappa-1}}$ — скінчений. Таким чином, для випадкових функцій в тому випадку, коли уявний корінь характеристичного рівняння не співпадає з власними частотами, і спектральна щільність $f_j(\beta)\neq 0$, має місце явище, яке може бути названо слабим резонансом.

2. Нехай характеристичне рівняння має два уявних кореня $\pm i\beta$; відповідні елементарні дільники прості. Нехай кореню $\pm i\beta$ у функції $y_s(t)$ відповідає нестаціонарна компонента (5). Розглянемо докладно залежність дисперсії (6) цієї компоненти від t при необмеженому збільшенні параметра t. Будемо припускати, що кореляційна функція має спектральну щільність і, таким чином,

$$B(\tau_1-\tau_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(\tau_1-\tau_2)} f_j(\lambda)\,d\lambda. \tag{7}$$

Підставляючи вираз (7) в (5) і зауваживши, що умови теореми Фубіні задовольняються, тому що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_j(\lambda)\,d\lambda$ — скінчена величина, змінюємо порядок інтегрування і після нескладних перетворень одержуємо

$$M|\zeta_s^j(t)|^2 = 2|c_s|^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_j(\lambda)\frac{1-\cos(\beta-\lambda)t}{(\beta-\lambda)^2}\,d\lambda =$$

$$=2|c_s|^2\left\{\int\limits_0^{\infty}\frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz+\int\limits_0^{\infty}\frac{f_j(-z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz\right\}. \tag{8}$$

Розглянемо поведінку інтеграла $\int\limits_0^\infty \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz$ при зростанні величини t. Перш за все,

$$\int\limits_0^\infty \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz = \int\limits_0^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz +$$

$$+\int\limits_A^\infty \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz. \tag{9}$$

Зважаючи на те, що спектральна щільність випадкової стаціонарної функції — невід'ємна [5], підінтегральний вираз також невід'ємний, тому

$$\int\limits_A^\infty \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz < 2\int\limits_A^\infty \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}\,dz. \tag{10}$$

Оберемо $A=\frac{2\kappa\pi}{t}$; $\kappa=n[t]$, де n — ціле число, $[t]$ — ціла частина від t. Розгляд проводимо при деякому фіксованому t, вважаючи його в усякому разі більшим від одиниці. Очевидно, $A=\frac{2n[t]\pi}{t}\geqslant\frac{2n[t]\pi}{[t+1]}\geqslant\pi n$. Оскільки інтеграл $\int\limits_{-\infty}^\infty f_j(\lambda)\,d\lambda$ — скінчений, то для як завгодно малої величини $\varepsilon_1>0$ можна вибрати таке n, що при $z>\pi n$, і тим більше при $z>A$, буде мати місце $f_j(z+\beta)<\varepsilon_1$. Таким чином,

$$\int\limits_A^\infty \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}\,dz<\frac{\varepsilon_1}{A};\quad \int\limits_0^\infty \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz=$$

$$=\int\limits_0^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz+\eta_1(t), \tag{11}$$

де $\eta_1(t)<\frac{\varepsilon_1}{A}$ (нерівність зберігається при як завгодно великому t).

Інтеграл $\int\limits_0^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz$ будемо розглядати як

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\varepsilon^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{(1-\cos zt)\int\limits_1^z \frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}\,d\zeta\,\Big|_\varepsilon^A - t\int\limits_\varepsilon^A\left[\int\limits_1^z \frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}\,d\zeta\right]\sin zt\,dz\right\}.$$

Внаслідок вибору $A=\frac{2\pi\kappa}{t}$, позаінтегральний член зникає, і одержуємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{A}\frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)dz = t\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\int_{\varepsilon}^{A} z\left[\int_{1}^{z}\frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}d\zeta\right]\frac{\sin zt}{z}dz\right\}. \quad (12)$$

Покажемо

$$\lim_{z\to 0}\left\{-z\int_{1}^{z}\frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}d\zeta\right\}=f_j(\beta). \quad (13)$$

Справді, виберемо довільно мале $\varepsilon_2>0$ і таке $\delta>0$, що при $|z|<\delta$, $|f_j(z+\beta)|-f_j(\beta)|<\varepsilon_2$. Зауважимо, що $f_j(\beta)=\lim_{z\to 0}\left\{-z\int_{1}^{z}\frac{f_j(\beta)}{\zeta^2}d\zeta\right\}$. Тоді

$$\lim_{z\to 0}\left|-z\int_{1}^{z}\frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}d\zeta+z\int_{1}^{z}\frac{f_j(\beta)}{\zeta^2}d\zeta\right|\leqslant\lim_{z\to 0}\left\{\left|-z\int_{\delta}^{z}\frac{f_j(\zeta+\beta)-f_j(\beta)}{\zeta^2}d\zeta\right|+\right.$$

$$\left.+\left|z\int_{1}^{\delta}\frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}d\zeta\right|+\left|z\int_{1}^{\delta}\frac{f_j(\beta)}{\zeta^2}d\zeta\right|\right\}\leqslant\varepsilon_2.$$

І тому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\int_{\varepsilon}^{A}z\left[\int_{1}^{z}\frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}d\zeta\right]\frac{\sin zt}{z}dz\right\}=-\int_{0}^{A}z\left[\int_{1}^{z}\frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}d\zeta\right]\frac{\sin zt}{z}dz. \quad (14)$$

Зважаючи на те, що вираз (14) являє собою інтеграл Діріхле, і беручи до уваги, що всі міркування дослівно повторюються для другого інтегралу, що знаходиться в правій частині рівності (8), з (9)—(14) одержуємо, що уявному кореню $i\beta$ відповідає нестаціонарна компонента розв'язку, дисперсія якої задовольняє умові

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M|\zeta_s^j(t)|^2}{t}=2\pi|c_s|^2 f_j(\beta). \quad (15)$$

Аналогічний вираз будемо мати для нестаціонарної компоненти, що відповідає кореню $-i\beta$ або нульовому кореню характеристичного рівняння; очевидно, в цих випадках замість $f_j(\beta)$ буде $f_j(-\beta)$, або $f_j(0)$.

3. Нехай кореню $i\beta$ відповідає κ елементарних дільників характеристичної матриці, степені яких $m_1,\ldots m_\kappa$. Елементарному дільнику степеня m_q відповідають нестаціонарні компоненти, які входять в функцію $y_s(t)$, вигляду

$$\zeta_s^p(t)=c_s^p\int_{0}^{t}e^{i\beta(t-\tau)}(t-\tau)^{p-1}\xi_j(\tau)\,d\tau,\qquad p=1,\ldots m_q. \quad (16)$$

Позначимо через m яке-небудь m_q і розглянемо нестаціонарну компоненту розв'язку

$$\zeta_s^m(t) = c_s^m \int_0^t e^{i\beta(t-\tau)} (t-\tau)^{m-1} \xi_j(\tau)\, d\tau =$$

$$= c_s^m\ (m-1)! \int_0^t \ldots m \ldots \int_0^{\tau_2} e^{i\beta(t-\tau_1)} \xi_j(\tau_1)\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_m. \qquad (17)$$

Очевидно, $M\zeta_s^m(t) = 0$. Наше завдання надалі також полягає в тому, щоб вивчити поведінку дисперсії $M|\zeta_s^m(t)|^2$ при необмеженому збільшенні t. Підставляючи у вираз для дисперсії значення кореляційної функції (7), міняючи порядок інтегрування і виконуючи інтегрування по τ, подібно до того, як це робилося в попередньому розділі, одержимо

а) при m непарному; $m > 1$

$$M|\zeta_s^m(t)|^2 = |c_s^m|^2 [(m-1)!]^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_j(\lambda)}{(\beta-\lambda)^{2m}} \left\{ \left[\cos(\beta-\lambda)t - 1 + \ldots \right.\right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (\beta-\lambda)^{m-1} \right]^2 + \left[\sin(\beta-\lambda)t - \ldots + \right.$$

$$\left.\left. + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} (\beta-\lambda)^{m-2} \right]^2 \right\} d\lambda; \qquad (18)$$

б) при m парному

$$M|\zeta_s^m(t)|^2 = |c_s^m|^2 [(m-1)!]^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_j(\lambda)}{(\beta-\lambda)^{2m}} \left\{ \left[\cos(\beta-\lambda)t - 1 + \ldots \right.\right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} (\beta-\lambda)^{m-2} \right]^2 + \left[\sin(\beta-\lambda)t - \ldots + \right.$$

$$\left.\left. + (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (\beta-\lambda)^{m-1} \right]^2 \right\} d\lambda. \qquad (19)$$

Розглянемо випадок, коли m непарне; при m парному всі міркування аналогічні. Перш за все, повторюючи міркування попереднього параграфа і позначаючи для скорочення запису вираз у фігурних дужках через $R(t; z)$, одержимо

$$M|\zeta_s^m(t)|^2 = |c_s^m|^2 [(m-1)!]^2 \left\{ \int_0^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^{2m}} R(t; z)\, dz + \right.$$

$$\left. + \int_0^A \frac{f_j(-z+\beta)}{z^{2m}} R(t; z)\, dz + 2\eta(t)\, t^{2m-2} \right\} \qquad (20)$$

де $\eta(t) < \frac{\varepsilon_1}{A}$; ε_1 — як завгодно мале, Розглядаючи інтеграл $\int\limits_0^{A}$ як $\lim \int\limits_{\varepsilon}^{A}$, виконуємо інтегрування частинами. Зауважимо, що оскільки $\cos At=1$; $\sin At=0$, позаінтегральний член при підстановці нижньої границі дає нуль, а при підстановці верхньої границі — величину, яку можна представити у вигляді $c_1(t)\cdot t^{2m-2}$, де $c_1(t)$ — обмежена величина при довільному значенні t. В результаті одержимо

$$\int\limits_0^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^{2m}} R(t;z)\,dz=$$

$$=-2\frac{t^m}{(m-1)!}(-1)^{\frac{m+1}{2}} \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{A} z^{m-1}\left[\int\limits_1^z \frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^{2m}}\,d\zeta\right]\cdot\left[\sin zt - zt + \ldots + \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} z^{m-2}\right] dz + c_1(t)\,t^{2m-2}. \tag{21}$$

Далі знову інтегруємо частинами $(m-2)$ рази. Позаінтегральні члени при підстановці нижньої границі $z=\varepsilon$ і при $\varepsilon\to 0$ дають нулі; при підстановці верхньої границі одержимо величини, суму яких можна представити у вигляді $c_2(t)t^{2m-2}$, де $c_2(t)$ — обмежена при довільному t. При кожному інтегруванні перед інтегралом буде виникати множник $-t$. Остаточно, знак перед інтегралом буде $(-1)^q$, де $q=1+\dfrac{m+1}{2}+\dfrac{m-1}{2}+$ $+m-2=1+2(m-1)$ — непарне число. Тому $(-1)^q=-1$. В результаті одержуємо

$$\int\limits_0^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^{2m}} R(t;z)\,dz=$$

$$=-\frac{2t^{2m-2}}{(m-1)!}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{A}\left[\int\limits_1^z \ldots m-2 \ldots \int\limits_1^{\eta_2} \eta_1^{m-1}\int\limits_1^{\eta_1}\frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^{2m}}\,d\zeta\, d\eta_1 \ldots d\eta_{m-2}\right]\times$$

$$\times(\cos zt-1)\,dz + c(t)\,t^{2m-2};\quad c(t)=c_1(t)+c_2 t). \tag{22}$$

Ще раз інтегруємо частинами. В цьому випадку позаінтегральний член зникає і одержуємо

$$\int\limits_0^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^{2m}} R(t;z)dz=$$

$$=-\frac{2t^{2m-1}}{(m-1)!}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^{A} z\left[\int\limits_1^z \ldots m-1 \ldots \int\limits_1^{\eta_2} \eta_1^{m-1}\int\limits_1^{\eta_1}\frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^{2m}}\,d\zeta\, d\eta_1 \ldots d\eta_{m-1}\right]\times$$

$$\times\frac{\sin zt}{z}\,dz + c(t)\,t^{2m-2}. \tag{23}$$

Розглянемо інтеграл, який знаходиться в квадратних дужках. Покажемо, що

$$\lim_{z\to 0}\left\{ z\int_1^z \ldots m-1 \ldots \int_1^{\eta_2} \eta_1^{m-1} \int_1^{\eta_1} \frac{f_i(\zeta+\beta)}{\zeta^{2m}}\, d\zeta\, d\eta_1 \ldots d\eta_{m-1}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2m-1}\,\frac{1}{(m-1)!} f_i(\beta). \tag{24}$$

Справді, візьмемо як завгодно мале $\varepsilon_2 > 0$ і таке $\delta > 0$, що при $|z| < \delta$, $|f_i(z+\beta) - f_i(\beta)| < \varepsilon_2$. Беручи до уваги, що $m-1$ — парне число, маємо очевидну рівність

$$-\frac{1}{2m-1}\,\frac{1}{(m-1)!} f_i(\beta) =$$

$$= \lim_{z\to 0}\left\{ z\int_1^z \ldots m-1 \ldots \int_1^{\eta_2} \eta_1^{m-1} \int_1^{\eta_1} \frac{f_i(\beta)}{\zeta^{2m}}\, d\zeta\, d\eta_1 \ldots d\eta_{m-1}\right\}.$$

Далі

$$\lim_{z\to 0}\left| z\int_1^z \ldots m-1 \ldots \int_1^{\eta_2} \eta_1^{m-1} \int_1^{\eta_1} \frac{f_i(\zeta+\beta) - f_i(\beta)}{\zeta^{2m}}\, d\zeta\, d\eta_1 \ldots d\eta_{m-1}\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon_2}{2m-1}\,\frac{1}{(m-1)!}$$

і остаточно

$$\int_0^A \frac{f_i(z+\beta)}{z^{2m}} R(t;z)\, dz =$$

$$= -\frac{2}{(m-1)!} t^{2m-1} \int_0^A z\left[\int_1^z \ldots m-1 \ldots \int_1^{\eta_2} \eta_1^{m-1} \int_1^{\eta_1} \frac{f_i(\zeta+\beta)}{\zeta^{2m}}\, d\zeta\, d\eta_1 \ldots d\eta_{m-1}\right] \times$$

$$\times \frac{\sin zt}{z}\, dz + c(t)\, t^{2m-2}. \tag{25}$$

Беручи до уваги, що (25) являє собою інтеграл Діріхле і що всі міркування так само повторюються для другого інтеграла, який знаходиться в правій частині рівності (20), виходячи з (20), (21), (25), одержуємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M\,|\zeta_s^m(t)|^2}{t^{2m-1}} = \frac{2\pi\,|c_s^m|^2}{2m-1} f_i(\beta). \tag{26}$$

Одержані результати можуть бути подані в слідуючому формулюванні:

Теорема 1. Дано систему лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами; вільні члени $\xi_i(t)$ утворюють багатомірну стаціонарну випадкову функцію, середнє значення якої $M\xi(t)=0$. Характеристичне рівняння має уявні корені $\pm i\beta$, які не співпадають з власними частотами випадкових функцій $\xi_j(t)$; цим кореням відповідають елементарні дільники матриці коефіцієнтів системи степені m. Нехай спектральні щільності $f_j(\lambda)$ відмінні від нуля при $\lambda=\pm\beta$. Тоді випадкові функції $y_s(t)$, які дають частинний розв'язок системи, матимуть нестаціонарні компоненти $\zeta_s^p(t)$ з середнім значенням $M\zeta_s^p(t)=0$ і дисперсією, яка задовольняє умові

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M\,|\,\zeta_s^p(t)\,|^2}{t^{2p-1}}=\frac{2\pi\,|\,c_s^p\,|^2}{2p-1}f_j(\pm\beta),\qquad p=1,\dots m.$$

Теорема відповідно поширюється на випадок, коли характеристичне рівняння має нульовий корінь.

4. Нехай характеристичне рівняння має уявні корені $\pm i\beta$, елементарні дільники, що відповідають цим кореням мають степінь, рівну одиниці. Нехай далі в деякому оточенні $\lambda=\beta$ прирости спектральних функцій $\Delta F_j(\lambda)=0$. Виходячи з властивостей спектральної функції, зрозуміло, що це також буде мати місце у відповідному оточенні $\lambda=-\beta$. Розглянемо для визначенності компоненту частинного розв'язку, яка відповідає кореню $+i\beta$ і випадковій функції $\xi_j(t)$, пам'ятаючи, що все сказане нижче поширюється на компоненту частинного розв'язку, що відповідає кореню $-i\beta$.

$$\zeta_s^j(t)=c_s e^{i\beta t}\int_0^t e^{-i\beta\tau}\xi_j(\tau)\,d\tau=c_s e^{i\beta t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(\beta-\lambda)t}-1}{-i(\beta-\lambda)}\,dZ_j(\lambda).$$

Виходячи з умов накладених на функцію $F_j(\lambda)$ і співвідношення [5]

$$F(\lambda+\Delta\lambda)-F(\lambda)=M\,|\,Z(\lambda+\Delta\lambda)-Z(\lambda)\,|^2, \tag{27}$$

інтеграли

$$\chi_j(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\frac{1}{i(\lambda-\beta)}\,dZ_j(\lambda) \tag{28}$$

і

$$\chi_j(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i(\lambda-\beta)}\,dZ_j(\lambda) \tag{29}$$

існують і визначають: перший — випадкову стаціонарну функцію, другий — випадкову константу. Середнє значення $M\chi_j(t)=0$ існує тому, що при осередненні полюс компенсується нулем в чисельнику. Так само існує інтеграл, що визначає кореляційну функцію

$$M\,\chi_j(t)\overline{\chi_j(s)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda(t-s)}\frac{1}{(\lambda-\beta)^2}\,dF_j(\lambda). \tag{30}$$

А тому

$$\zeta_s^j(t)=c_s\chi_j(t)+c_s e^{i\lambda t}\chi_j(0). \tag{31}$$

$\zeta_s^j(t)$; $s=1,\ldots n$ — є компонентою частинного розв'язку системи (1); ця компонента відповідає кореню характеристичного рівняння $i\beta$ і випадковій функції $\xi_j(t)$. Але стовбець $c_s e^{i\beta t}\chi_j(0)$, $s=1,\ldots n$ дає частинний розв'язок відповідної однорідної системи. Тому $\tilde{\zeta}_s^j(t)=c_s\chi_j(t)$ є також компонентою частинного розв'язку неоднорідної системи. Випадкова функція $\chi_j(t)$, як це безпосередньо можна бачити, — стаціонарна і стаціонарно-зв'язана з іншими компонентами частинного стаціонарного розв'язку. Зауважимо, що випадкова функція $\zeta_s^j(t)$ має обмежену дисперсію, але не стаціонарна, тому, що $\chi_j(t)$ і $e^{i\beta t}\chi_j(t)$ — зв'язані нестаціонарно.

Нехай тепер степені елементарних дільників матриці коефіцієнтів, що відповідають кореням характеристичного рівняння $\pm i\beta$ дорівнюють m. Тоді, якщо в оточенні $\lambda=\beta$, $\Delta F_j(\lambda)=0$, то відповідна стаціонарна компонента розв'язку може бути представлена у вигляді

$$\tilde{\zeta}_s^j(t)=c_s\chi_j(t)=c_s\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\frac{1}{i^m(\lambda-\beta)^m}dZ_j(\lambda). \qquad (32)$$

Таким чином, в нашому випадку, не зважаючи на присутність уявних коренів характеристичного рівняння, існує стаціонарний частинний розв'язок. Але, на відміну від нерезонансного випадку, коли існує однозначно визначений частинний стаціонарний розв'язок в даному разі стовбець $У(t)$, що дає стаціонарний розв'язок системи (1), визначається з точністю до $C^{(1)}e^{i\beta t}\varkappa_1+C^{(2)}e^{-i\beta t}\varkappa_2$, де $C^{(1)}e^{i\beta t}$, $C^{(2)}e^{-i\beta t}$ — стовбці частинних розв'язків однорідної системи, а $\varkappa_1$ і $\varkappa_2$ — випадкові константи, що задовольняють слідуючим умовам: $M\varkappa_1=0$; $M\varkappa_2=0$; $\varkappa_1$ і $\varkappa_2$ — взаємно некорельовані і некорельовані з випадковими функціями $\xi_j(t)$, тобто $M\varkappa_1\varkappa_2=0$; $M\varkappa_\kappa\xi_j(t),=0$; $\kappa=1,2$; $j=1,\ldots n$.

Розглянемо випадок, коли існують спектральні щільності $f_j(\lambda)$. Тоді легко зрозуміти, що для існування частинного стаціонарного розв'язку в випадку уявних коренів $\pm i\beta$ з степенями елементарних дільників m досить вимагати, щоб $f_j(\beta)=0$; $f_j'(\beta)=0;\ldots f_j^{(2m-1)}(\beta)=0$; $f_j^{(2m)}(\beta)$ — скінчена. З того, що спектральна щільність дійсного випадкового процесу — парна функція, випливає, що це також буде мати місце в точці $\lambda=-\beta$.

Оскільки спектральна щільність — невід'ємна, при $f(\lambda_0)=0$, в цій точці функція $f(\lambda)$ має мінімум, і тому $f'(\lambda_0)=0$, і перша відмінна від нуля похідна може бути лише похідною парного порядку.

Все сказане підсумовується теоремою, яка дає достатні умови існування стаціонарних розв'язків в резонансному випадку.

Теорема 2. Дано систему (1). Характеристичне рівняння має уявні корені $\pm i\beta_1\ldots\pm i\beta_\kappa$, серед яких можуть бути також рівні — кожен корінь виписується стільки разів, скільки йому відповідає груп розв'язків однорідної системи. Відповідні степені елементарних дільників: $m_1,\ldots,m_\kappa$ Величини $\pm i\beta_1,\ldots,\pm i\beta_\kappa$ не співпадають з власними частотами випадкової функції $\xi(t)$. В деякому оточенні $\lambda=\beta_p$, $p=1,\ldots\kappa$, прирости спектральних функцій $\Delta F_j(\lambda)=0$ (якщо існують спектральні щільності, то $f_i(\beta_p) = 0 \ldots f^{(2m_p-1)}(\beta_p) = 0$; $f_i^{(2m_p)}(\beta_p)$ — скінчена). Тоді існує частинний стаціонарний розв'язок $У(t)$ системи (1) визначений з точністю до

$$\sum_{p_1=1}^{\kappa} C^{p_1} e^{i\beta_{p_1} t} \varkappa_{p_1} + \sum_{p_2=1}^{\kappa} C^{p_2} e^{-i\beta_{p_2} t} \varkappa_{p_2},$$

де

$$C^{p_1} e^{-i\beta_{p_1} t}, \quad C^{p_2} e^{-i\beta_{p_2} t},$$

— відповідні стовбці рішень однорідної системи, а $\varkappa_{p_1}$ і $\varkappa_{p_2}$ — випадкові константи, середнє значення яких дорівнює нулю і які взаємно некорельовані між собою та некорельовані з випадковими функціями $\xi_j(t)$.

Відповідне поширення теореми на випадок нульових коренів характеристичного рівняння очевидне.

ЛІТЕРАТУРА

1. Коронкевич О. І. Лінійні динамічні системи під дією випадкових сил. Наукові записки ЛДУ, т. 44, серія механіко-математична, в. 8, 1957.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М., 1956.
3. Хинчин А. Я. Усп. мат. наук, в. 5, 42—51, 1938.
4. Колмогоров А. Н. Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром. Юбилейный сборник АН СССР, т. I, 1947.
5. Яглом А. М. Усп. мат. наук, в. 5, 1952, стор. 3—168.
6. Karhunen K. Über lineare Methoden in der Warscheinlichkeitsrechnung, Ann. Akad. Sci. Fennicae, A, I, № 37, Helsinki, 1947, стор. 79.