Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

О. І. КОРОНКЕВИЧ

ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ДО ПИТАННЯ ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

1. В цій роботі розглядається неперервність сум і добутків випадкових функцій і неперервність розв'язків диференціальних рівнянь, які мають випадкові члени. Стаціонарність випадкових функцій не припускається.

Неперервність випадкової функції розуміють як неперервність по імовірності, тобто [1]

$$P\{|\xi(t+\Delta t)-\xi(t)|<\varepsilon\}\underset{\Delta t\to 0}{\to}1, \tag{1}$$

або, частіше [2, 3, 4, 5], як неперервність в середньому квадратичному

$$M|\xi(t+\Delta t)-\xi(t)|^2\underset{\Delta t\to 0}{\to}0. \tag{2}$$

З (2) на основі нерівності Чебишева випливає (1), так що коли функція $\xi(t)$ неперервна в середньому квадратичному, то вона неперервна і по імовірності. Говорячи про неперервність випадкової функції, ми будемо в дальшому мати на увазі неперервність в розумінні (2).

Припускаючи випадкову функцію $\xi(t)$ — дійсною, позначимо двохточковий момент другого порядку $M\xi(t)\xi(s)=K(t;\ s)$ (коли випадкова функція комплексна — $K(t;\ s)=M\xi(t)\overline{\xi(s)}$). Якщо $M\xi(t)=0$ при довільних t, то $K(t;\ s)$ співпадає з кореляційною функцією [5], між іншим, іноді $K(t;\ s)$ називають кореляційною функцією незалежно від величини $M\xi(t)$ [3].

Використовуючи подані позначення, з (2) одержуємо

$$M|\xi(t+\tau)-\xi(t)|^2\leqslant|K(t+\Delta t,\,t+\Delta t)-K(t+\Delta t,t)|+$$
$$+|K(t,t+\Delta t)-K(t,t)|. \tag{3}$$

Таким чином, неперервність випадкової функції в середньому квадратичному зводиться до неперервності її двохточкового моменту другого порядку у звичайному розумінні. Цей зв'язок розглядається в [3, 5]; результати, які стосуються цього питання, можна висловити в слідуючих формулюваннях, що нам здаються більш точними:

Теорема 1. Якщо момент другого порядку $K(t;\ s)=M\xi(t)\xi(s)$ — неперервний в довільній точці діагоналі квадрата $0\leqslant t\leqslant T;\ 0\leqslant s\leqslant T$ в напрямі однієї з координатних осей, то функція $K(t;\ s)$ неперервна по обом змінним в довільній точці в середині квадрата $T\times T$ і неперервна на границі квадрату при наближенні до неї з середини. В цьому випадку випадкова функція неперервна в середньому квадратичному на замкненому інтервалі $0\leqslant t\leqslant T$.

Зауважимо, що для дійсних випадкових функцій $K(t;\ s)=K(s;\ t)$. Тоді доведення випливає з нерівності

$$|K(t+\Delta t;\, s+\Delta s)-K(t;\, s)|\leqslant|K(t+\Delta t;\, s+\Delta s)-K(t+\Delta t;\, s)|+ \\ +|K(t+\Delta t;\, s)-K(t;\, s)| \tag{4}$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, одержуємо

$$|K(t+\Delta t;\, s+\Delta s)-K(t+\Delta t;\, s)|\leqslant \\ \leqslant\sqrt{M\,\xi^2(t+\Delta t)}\,\sqrt{M[\xi(s+\Delta s)-\xi(s)]^2} \tag{5}$$

Аналогічно оцінюємо модуль $|K(t+\Delta t;\ s)-K(t;\ s)|$, далі з допомогою нерівності (3) закінчуємо доведення першої частини теореми. Доведення другої частини одержуємо безпосередньо з (3). З тих же нерівностей випливає оберненість теореми:

Теорема 2. Якщо випадкова функція $\xi(t)$ неперервна в середньому квадратичному на замкненому інтервалі $0\leqslant t\leqslant T$, то момент другого порядку $K(t;\ s)=M\xi(t)\xi(s)$ є неперервний по обом аргументам в довільній точці всередині квадрата $T\times T$, і також неперервний на границі квадрата при наближенні до неї з середини.

2. Розглянемо випадкову функцію $\zeta(t)$, яка являє собою суму випадкових функцій

$$\zeta(t)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(t), \tag{6}$$

або більш загально

$$\zeta(t_1\ldots t_n)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(t_i). \tag{6'}$$

Очевидно, (6), (6′) можна розглядати як n-мірний випадковий вектор, аргументи якого в першому випадку змінюються на прямій, а в другому — в n-мірному просторі; (6′) можна також розглядати, як випадкове поле спеціального виду. Умова неперервності випадкової функції $\zeta(t_1,\ldots,t_n)$

$$M\left|\sum_{i=1}^{n}[\xi_i(t_i+\Delta t_i)-\xi_i(t_i)]\right|^2\underset{\substack{\Delta t_1\to 0\\ \cdots\cdots\\ \Delta t_n\to 0}}{\longrightarrow}0. \tag{7}$$

Очевидно, ця умова зводиться до неперервності других моментів окремих компонент $K_{ii}(t_i;\ s_i)=M\,\xi_i(t_i)\xi_i(s_i)$ і других змішаних моментів $K_{ij}(t_i;\ s_j)=M\,\xi_i(t_i)\xi_j(s_j)$, тобто до неперервності матриці $\{K_{ij}(t_i;\ s_j)\}$, яку ми в дальшому будемо називати кореляційною матрицею. Але з нерівності

$$|K_{ij}(t_i+\Delta t_i;\ t_j)-K_{ij}(t_i;\ t_j)|=|M[\xi_i(t_i+\Delta t_i)-\xi_i(t_i)]\,\xi_j(t_j)|\leqslant \\ \leqslant\sqrt{M\xi_j^2(t_j)}\,\sqrt{M[\xi_i(t_i+\Delta t_i)-\xi_i(t_i)]^2} \tag{8}$$

випливає, що неперервність всіх елементів кореляційної матриці виходить з неперервності її діагональних елементів. При цьому майже очевидною є:

Теорема 3. Якщо кожний діагональний елемент кореляційної матриці $K_{ii}(t_i; s_i)$ задовольняє на множині $0 \leqslant t_i \leqslant T$; $0 \leqslant s_i \leqslant T$ умовам теореми 1, то кореляційна матриця неперервна всюди всередині $2n$-мірного паралелепіпеда $0 \leqslant t_i \leqslant T$; $0 \leqslant s_j \leqslant T$; $i, j = 1, \ldots, n$, і неперервна на границі при наближенні до неї з середини.

Висновок. Сума неперервних випадкових функцій є неперервною випадковою функцією; n-мірний випадковий вектор є неперервний, якщо всі його компоненти — неперервні випадкові функції.

3. Нехай $\xi(t)$ — неперервна випадкова функція. Розглянемо умови, при яких момент

$$M\xi^{i_1}(t_1)\ldots\xi^{i_n}(t_n);\ \sum_{j=1}^{n} i_j = N;\ i_j \text{ — цілі числа}, \tag{9}$$

буде неперервною функцією своїх аргументів, і випадкова функція

$$\zeta(t_1; \ldots t_n) = (\xi^{i_1} t_1)\ldots\xi^{i_n}(t_n) \tag{10}$$

також буде неперервною випадковою функцією.

Покажемо, що має місце

Теорема 4. Якщо випадкова функція $\xi(t)$ — неперервна в середньому квадратичному на інтервалі $0 \leqslant t \leqslant T$, і момент $M\xi^{2(N-1)}(t)$ — обмежений, то довільний момент (9) не вище N-го порядку є неперервною функцією в n-мірному просторі; $0 \leqslant t_i \leqslant T$; $i = 1, \ldots, n$.

Справді,

$$\begin{gathered}
|M\xi(t_1+\Delta t_1)\ldots\xi(t_N+\Delta t_N) - M\xi(t_1)\ldots\xi(t_N)| \leqslant |M\xi(t_1+ \\
+\Delta t_1)\ldots\xi(t_{N-1}+\Delta t_{N-1})\xi(t_N+\Delta t_N) - M\xi(t_1+\Delta t_1)\ldots\xi(t_{N-1}+ \\
+\Delta t_{N-1})|\xi(t_N)| + |M\xi(t_1+\Delta t_1)\ldots\xi(t_{N-1}+\Delta t_{N-1})\xi(t_N) - M\xi(t_1+ \\
+\Delta t_1)\ldots\xi(t_{N-1})\xi(t_N)| + \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\
+|M\xi(t_1+\Delta t_1)\xi(t_2)\ldots\xi(t_N) - M\xi(t_1)\ldots\xi(t_N)|.
\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}
|M\xi(t_1+\Delta t_1)\xi(t_2)\ldots\xi(t_N) - M\xi(t_1)\ldots\xi(t_N)| = |M\xi(t_2)\ldots\xi(t_N)[\xi(t_1+ \\
+\Delta t_1) - \xi(t_1)] \leqslant \sqrt{M\xi^2(t_2)\ldots\xi^2(t_N)}\sqrt{M[\xi(t_1+\Delta t_1)-\xi(t_1)]^2}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Момент $M\xi^2(t_2)\ldots\xi^2(t_N)$ має порядок $2(N-1)$; легко показати, що

$$M\xi^2(t_2)\ldots\xi^2(t_N) \leqslant \sum_{\kappa=2}^{N} A_\kappa M\xi^{2(N-1)}(t_\kappa), \tag{13}$$

тому з умови теореми випливає, що момент, який знаходиться під першим радикалом — обмежений. Аналогічно оцінюються всі інші модулі. З одержаних нерівностей виходить вірність теореми для моментів N-го порядку. Але з обмеженості момента $M\xi^{2\kappa}(t)$ випливає обмеженість довільного моменту нижчого порядку, і тому теорема є вірною.

Висновок 1. Якщо на інтервалі $0 \leqslant t \leqslant T$ випадкова функція $\xi(t)$ — неперервна в середньому квадратичному і момент $M\xi^{4N_0-2}(t)$ — обмежений, то довільна випадкова функція (10) при $N \leqslant N_0$ — неперервна в середньому квадратичному в n-мірному паралелепіпеді. $0 \leqslant t_i \leqslant T$; $i = 1, \ldots, n$.

Доведення випливає з теореми 4 і з того, що неперервність випадкової функції в середньому квадратичному зводиться до неперервності її кореляційної функції.

Висновок 2. Якщо момент $M\xi^{2\kappa}(t)$ — обмежений для довільного скінченого додатнього числа κ, і випадкова функція $\xi(t)$ — неперервна в середньому квадратичному, то довільний момент (9) є неперервною функцією і довільна випадкова функція (10) також неперервна в середньому квадратичному.

Висновок 3. Добуток неперервних в середньому квадратичному випадкових функцій $\xi(t)\eta(t)$ є неперервною випадковою функцією, якщо $M\xi^6(t)$; $M\eta^6(t)$ — обмежені, або випадкові функції $\xi(t)$; $\eta(t)$ — незалежні.

Перша частина твердження випливає з висновку 1; доведемо вірність другої частини теореми:

$$M[\xi(t+\Delta t)\eta(t+\Delta t) - \xi(t)\eta(t)]^2 = M[\xi^2(t+\Delta t)\eta^2(t+\Delta t) - 2\xi(t+ \\ +\Delta t)\eta(t+\Delta t)\xi(t)\eta(t) + \xi^2(t)\eta^2(t) - \xi^2(t+\Delta t)\eta(t+\Delta t)\eta(t) + \\ + \xi^2(t+\Delta t)\eta(t+\Delta t)\eta(t) - \xi^2(t)\eta(t+\Delta t)\eta(t) + \xi^2(t)\eta(t+\Delta t)\eta(t)] \leqslant \\ \leqslant |M\xi^2(t+\Delta t)\eta(t+\Delta t)[\eta(t+\Delta t) - \eta(t)]| + |M\xi(t+\Delta t)\eta(t+ \\ +\Delta t)\eta(t)[\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]| + |M\eta(t+\Delta t)\eta(t)\xi(t)[\xi(t+\Delta t) - \\ - \xi(t)]| + |M\eta(t)\xi^2(t)[\eta(t+\Delta t) - \eta(t)]|. \tag{14}$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського і беручи до уваги незалежність випадкових функцій $\xi(t)$ і $\eta(t)$, одержимо

$$|M\xi^2(t+\Delta t)\eta(t+\Delta t)[\eta(t+\Delta t) - \eta(t)]| = M\xi^2(t+\Delta t)|M\eta(t+ \\ +\Delta t)[\eta(t+\Delta t) - \eta(t)]| \leqslant M\xi^2(t+ \\ +\Delta t)\sqrt{M\eta^2(t+\Delta t)}\sqrt{M[\eta(t+\Delta t) - \eta(t)]^2}; \tag{15}$$

$$|M\xi(t+\Delta t)\eta(t+\Delta t)\eta(t)[\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]| = |M\eta(t+ \\ +\Delta t)\eta(t)M\xi(t+\Delta t)[\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]| \leqslant |M\eta(t+ \\ +\Delta t)\eta(t)\sqrt{M\xi^2(t+\Delta t)}\sqrt{M[\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]^2}. \tag{16}$$

Аналогічно оцінюються інші доданки в правій частині нерівності (14).

4. Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dY}{dt} = P(t)Y + \xi(t), \tag{17}$$

де Y — стовбець невідомих функцій; $\xi(t)$ — стовбець випадкових функцій; $P(t)$ — матриця коефіцієнтів, елементи якої — функції, неперервні на замкненому проміжку $0 \leqslant t \leqslant T$. Тоді, очевидно, що з неперервності в середньому квадратичному випадкової функції $\xi(t)$ випливає неперервність в тому ж розумінні частинного розв'язку системи (17).

Розглянемо нелінійну систему, аналогічну розглянутим в [6]

$$\frac{dY}{dt} = P(t)\,Y + \xi(t) + \mu\Phi(t; y_1, \ldots y_n; \mu\xi_n, \ldots \mu\xi_n) \tag{18}$$

Φ — стовбець функцій, неперервних по t і аналітичних відносно решти аргументів. Нехай розв'язок системи (18) може бути представлений у вигляді ряду по степенях параметра μ, який рівномірно збігається при $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ (див. [6]). Тоді для неперервності частинного розв'язку достатньо, крім неперервності функції $\Phi(t)$ відносно t, припустити неперервність заданих випадкових функцій і обмеженість моментів $M\xi_i^{2\kappa}(t)$ при довільному цілому κ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Слуцкий Е. Е. Несколько предложений к теории случайных функций. Тр. Среднеазиатского госуниверситета, в. У-а, математика, Ташкент, 1939.

2. Karhunen K. Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ann. Acad. Sci. Fennicae, A, I, № 37, Helsinki 1947, стор. 79.

3. Karhunen K. Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse. Ann. Acad. Sci. Fennicae, № 34, Helsinki, 1946.

4. Колмогоров А. Н. Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром. Юбилейный сборник АН СССР, т. I, 1947.

5. Пугачев В. С. Изв. АН СССР, серия математическая, т. 17, 1953, стор. 401—420.

6. Ворович И. Н. Изв. АН СССР, серия математическая, т. 20, 1956. стор. 17—32.