Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

Я. Б. ЛОПАТИНСЬКИЙ

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ З АНАЛІТИЧНИМ ЯДРОМ

В роботі [1] Е. Е. Леві вказав метод дослідження аналітичних властивостей розв'язків інтегральних рівнянь з аналітичними ядрами, які мають (в дійсному перетині) особливості полярного типу.

Метою цієї статті є визначення області аналітичності розв'язків інтегрального рівняння з аналітичним ядром.

Нехай D — обмежена відкрита множина n-мірного дійсного простору, ε — деяке додатнє число, менше від одиниці. Для точок $x=(x_1, \ldots, x_n)$ відповідного комплексного простору покладається

$$x'=(Rex_1, \ldots, Rex_n); \; x''=(Jmx_1, \ldots, Jmx_n); \; |x|=+\sqrt{|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2};$$

для точки $x \epsilon D$ $d(x')$ означає віддаль x' від границі D. Нехай $\Omega_\varepsilon^{(1)}$ — множина комплексних точок $x=(x_1, \ldots, x_n)$ таких, що $x' \epsilon D$, $(x'') \epsilon \varepsilon d(x')$; взагалі, $\Omega_\varepsilon^{(m)}$ — множина поступів m точок $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ з $\Omega_\varepsilon^{(1)}$ таких, що для довільних j, $\kappa (j \neq \kappa)$

$$|x^{(j)''} - x^{(\kappa)''}| < \varepsilon |x^{(j)'} - x^{(\kappa)'}|.$$

Лема 1. Нехай $(x, y) \; \Omega_\varepsilon^{(2)}$. Тоді в $\Omega_\varepsilon^{(1)}$ можна побудувати довільно гладку n-мірну поверхню $\tilde{D}$, яка проходить через точки x, y і обмежує разом з D $(n+1)$-мірну многовидність, довільний поступ m різних точок якої належить $\Omega_\varepsilon^{(m)}$, для кожного m.

Тут буде вказано спосіб побудови кусково-гладкої поверхні такої, яку можна далі як завгодно згладити.

В D проводяться кулі S_x, S_y з центрами в точках x', y', радіуси яких дорівнюють $\frac{|x''|}{\varepsilon_1}$, $\frac{|y''|}{\varepsilon_1}$ відповідно; ε_1 вибирається меншим ε і настільки близьким до ε, щоб

$$|x''| < \varepsilon_1 d(x'); \; |y''| < \varepsilon_1 d(y'); \; |x''-y''| < \varepsilon_1 |x'-y'|.$$

Тоді, як легко зауважити, S_x, $S_y \epsilon D$; при цьому при достатній близькості ε_1 до ε, S_x і S_y або мають пустий перетин, або їх границі перетинаються більше, ніж в одній точці. В першому випадку, за Е. Е. Леві, $\tilde{D}$ складається з $D/(S_x \cup S_y)$ і бокових поверхонь двох конусів з вершинами в точках x, y і з основами S_x, S_y відповідно. Побудова в другому випадку більш складна.

Нехай S $(n-2)$-мірна сфера, по якій перетинаються границі S_x, S_y; z' — центр цієї сфери; ω — найближча до z' точка границі $S_x \cup \bar{S}_y$; $d(z') > |\omega - z'|$. Очевидно, $\varepsilon_1 |\omega - x'| = x''$, $\varepsilon_1 |\omega - y'| = |y''|$; $\varepsilon_1 |x'-y'| >$

$>|x''-y''|$ сторони трикутника з вершинами o, x'', y'' не більші від помножених на ε_1 відповідних сторін трикутника з вершинами ω, x', y'. Таким чином кулі з центрами в точках o, x'', y'' і радіусами $\varepsilon_1|\omega-z'|$, $\varepsilon_1|x-z'|$, $\varepsilon_1|y'-z'|$ мають спільні внутрішні точки; нехай z'' одна з них. Тепер будується $(n-1)$-мірний конус T, описаний відрізком, який сполучує точку $z=z'+iz''$ з точкою S. Нехай $T_x(T_y)$ n-мірна поверхня, описана відрізком, який сполучує точку $x(y)$ зі змінною точкою, що пробігає T і частину границі $S_x(S_y)$, яка не належить $S_y(S_x)$. Поверхня $\tilde{D}$ складається з $D/(S_x \cup S_y)$, T_x і T_y.

Легко перевірити, що в обох випадках $\tilde{D}$ задовольняє умови леми. Функція $K(x, y)$, визначена при $(x, y)\in\Omega_{\varepsilon}^{(2)}$, $x\neq y$, буде називатись функцією класу κ, якщо обмежені при $(x, y)\in\Omega_{\varepsilon}^{(2)}$, $x\neq y$, $|x-y|^{\kappa}K(x, y)$ (при $\kappa>0$), або $\dfrac{1}{1+|\lg|x-y||}\,K(x, y)$ (при $\kappa=0$), або $K(x, y)$ (при $\kappa<0$).

Лема 2. Нехай $K(x, y)$, $L(x, y)$ — аналітичні функції своїх аргументів при $(x, y)\in\Omega_{\varepsilon}^{(2)}(x=(x_1, \ldots, x_n),\ y=(y_1, \ldots, y_n))$, що належать відповідно до класів κ і l; l, $\kappa<n$.

Тоді

$$M(x, y)=\int\limits_{D}K(x, z)L(z, y)\,dz \quad (dz=dz_1, \ldots, dz_n)$$

визначене при x, $y\in D$, що аналітично продовжується на $(x, y)\in\Omega_{\varepsilon}^{(2)}$, причому $M(x, y)$ належить до класу $\kappa+l-n$ в $\Omega_{\varepsilon}^{(2)}$. Це уточнення одного твердження Е. Е. Лєві; метод доведення також належить Е. Е. Лєві.

Нехай $(x, y)\in\Omega_{\varepsilon}^{(2)}$, $\tilde{D}$ — поверхня, побудована при доведенні першої леми

$$M(x, y)=\int\limits_{\tilde{D}}K(x, z)L(z, y)\,dz. \tag{1}$$

Поверхня $\tilde{D}$ тут вважається орієнтованою згідно з D, підінтегральний вираз розглядається як зовнішня диференціальна форма. Як відомо, величина інтегралу (1) не змінюється при заміні $\tilde{D}$ другою поверхнею, яка задовольняє обмеження першої леми.

Нехай $\tilde{D}_{\tau^0}$ — частина поверхні $\tilde{D}_0$, побудованої для точок x^0, y^0, одержана видаленням τ^0 — оточення точок x^0, y^0. Для пари (x, y), достатньо близької до пари (x^0, y^0) і достатньо малого τ^0 поверхню $\tilde{D}$ можна скласти з $\tilde{D}_{\tau^0}$ і конусів з вершинами в точках x, y, які опираються на утворену границю D_{τ^0}. Тоді методом Е. Е. Лєві можна довести аналітичність $M(x, y)$ в деякому оточенні точки (x^0, y^0).

Оцінка характеру особливості $M(x, y)$ при $x=y$ проводиться елементарно.

Лема доведена.

Подібним способом доводиться слідуюча

Лема 3. Нехай $K(x, z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}), y$, є обмежена аналітична функція при $(x, z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}, y) \in \Omega_{\varepsilon}^{(m+2)}$, що залишається неперервною при суміщенні точок $x, z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}, y$. Тоді

$$M(x, y) = \int_D dz^{(1)} \ldots \int_D K(x, z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}, y)\, dz^m,$$

аналітично продовжувальна в $\Omega_{\varepsilon}^{(2)}$, обмежена і неперервна при $x = y$.

Простим наслідком цієї леми є слідуюче твердження.

Якщо $K(x, y)$ — обмежена аналітична функція при $(x, y) \in \Omega_{\varepsilon}^{(2)}$, що неперервно продовжується у випадку $x = y$, то функція Фредгольма $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ є обмеженою аналітичною функцією x, y, λ при $(x, y) \in \Omega_{\varepsilon}^{(2)}$ і довільній обмеженій області зміни λ, що неперервно продовжується на випадок $x = y$.

Цей результат відразу одержується на основі застосування леми 3 до окремих доданків відомого розкладу $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ по степенях λ.

Аналітичну природу функції Фредгольма $D\left(\begin{matrix} x^{(1)} \ldots x^{(m)} \\ y^{(1)} \ldots y^{(m)} \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ можна дослідити таким же чином при допомозі деякого узагальнення леми 3. Простіше, однак, використати легку для перевірки при регулярних λ тотожність

$$D\left(\begin{matrix} x^{(1)} \ldots x^{(m)} \\ y^{(1)} \ldots y^{(m)} \end{matrix} \middle| \lambda\right) = \frac{1}{\{D(\lambda)\}^{m-1}} \begin{vmatrix} D\left(\begin{matrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{matrix} \middle| \lambda\right) \ldots D\left(\begin{matrix} x^{(1)} \\ y^{(m)} \end{matrix} \middle| \lambda\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ D\left(\begin{matrix} x^{(m)} \\ y^{(1)} \end{matrix} \middle| \lambda\right) \ldots D\left(\begin{matrix} x^{(m)} \\ y^{(m)} \end{matrix} \middle| \lambda\right) \end{vmatrix}^{1)} \qquad (2)$$

Для характеристичних значень λ в правій частині формули (2) слід розкрити виникаючу там неозначеність.

Інтегральне рівняння

$$u(x) = f(x) + \int_D K(x, z)\, u(z)\, dz \qquad (3)$$

у випадку, коли $K(x, y)$ є аналітичною функцією при $(x, y) \in \Omega_{\varepsilon}^{(2)}$ в припущенні, що $K(x, y)$ належить $\Omega_{\varepsilon}^{(2)}$ до класу $\kappa < n$, приводиться до вигляду

$$u(x) = F(x) + \int_D K^{(m+1)}(x, z)\, u(z)\, dz;$$

$$F(x) = f(x) + \int_D K(x, z) f(z)\, dz + \ldots + \int_D K^{(m)}(x, z) f(z)\, dz,$$

причому $K^{(m+1)}(x, y)$ при $m > \dfrac{\kappa}{n - \kappa}$ обмежене в $\Omega_{\varepsilon}^{(2)}$ і неперервно продовжувальне для $x = y$, а аналітична природа $F(x)$ легко визначається лемою 2.

З цього зауваження безпосередньо випливає слідуюча теорема.

Теорема. Якщо $f(x)$ аналітична обмежена функція при $x \in \Omega_\varepsilon^{(1)}$, $K(x, y)$ аналітична функція при $(x, y) \in \Omega_\varepsilon^{(2)}$, що належить до класу $\kappa < n$, то всякий обмежений в D розв'язок рівняння (3) являється обмеженою аналітичною функцією в $\Omega_\varepsilon^{(1)}$.

Зокрема це вірно для власних функцій ядра $K(x, y)$ і асоційованого ядра.

Внаслідок того, що за Фредгольмом система інтегральних рівнянь може бути приведена до одного інтегрального рівняння, теорема вірна також і для систем рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. Леви Э. Э. Усп. мат. наук, 8, 1941, стор. 249.
2. Platrier. J. de Math., 1913, стор. 233.