Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

Д. П. МЕЛЬНИК

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ НЕОБМЕЖЕНОГО ПРОСТОРУ

Нехай задана система рівнянь еліптичного типу

$$A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u \equiv A_0\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + A_1\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0, \tag{1}$$

де $A_0\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ означає диференціальний оператор порядку s, однорідний відносно $\lambda, \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, тобто оператор вигляду

$$A_0\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{\kappa_1 + \cdots + \kappa_{n+1} = s} A_{\kappa_1 \ldots \kappa_{n+1}}(x) \lambda^{\kappa_{n+1}} \frac{\partial^{\kappa_1 + \cdots + \kappa_n}}{\partial x_1^{\kappa_1} \cdots \partial x_n^{\kappa_n}};$$

$$A_1\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{\kappa_1 + \cdots \kappa_{n+1} < s} A_{\kappa_1 \ldots \kappa_{n+1}}(x) \lambda^{\kappa_{\kappa+1}} \frac{\partial^{\kappa_1 + \cdots + \kappa_n}}{\partial x_1^{\kappa_1} \cdots \partial x_n^{\kappa_n}}.$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мірного дійсного простору, λ — дійсне додатнє число, $A_{\kappa_1 \ldots \kappa_{n+1}}(x)$ — квадратні матричні функції, визначені в усьому просторі, $u(x)$ — стовбець, складений із невідомих функцій.

Фундаментальним розв'язком 1) системи (1) з особливістю в точці y називається матриця $\omega_\lambda(x, y)$, що має слідуючі властивості:

1) s раз неперервно диференційовна в усьому просторі, за винятком точку y;

2) $$A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_\lambda(x, y) = 0 \quad (x \neq y);$$

3) для довільної s—1 разів неперервно диференційовної матриці $v(x)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \cdots (n-1) \cdots \int_{S_\varepsilon} \sum_{\kappa=1}^{n} \cos(\nu, x_\kappa) B_\kappa(\omega_\lambda(x, y), v(x)) \, d_x s = v'(y),$$

де S_ε — сфера радіуса ε з центром в точці y; ν — орт зовнішньої нормалі до S_ε; $B_\kappa(u, v)$ — білінійні форми, які визначаються за формулою

$$v'(x) A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) - \left(A'\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x)\right)' u(x) = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\kappa} B_\kappa(u, v)$$

$$\left(A'\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right) — \text{спряжений оператор}\right).$$

Як відомо, ці білінійні форми визначаються неоднозначно. Будемо вважати їх визначеними так, що в них входять лише похідні до $s-1$ порядку.

Теорема. Нехай існує така додатня в усьому просторі функція $A_0(x)$, що

$$\frac{\det A_0(\lambda,\ x,\ i\alpha)}{[A_0(x)]^p\,|\alpha'|^{sp}} \geqslant \mu > 0 \tag{2}$$

для кожної точки x простору і для кожної дійсної ненульової точки $\alpha' = (\lambda, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Якщо при цьому коефіцієнти оператора $A_0\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовні $s+1$ разів, коефіцієнти при похідних порядку $j (j=0,\ 1, \ldots, s-1)$ в операторі $A_1\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовні j разів в усьому просторі, причому коефіцієнти оператора $A_0\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ будуть порядку $O(A_0(x))$, а похідні до s порядку цих коефіцієнтів, так як і коефіцієнти оператора $A_1\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ростуть не швидше, ніж $A_0(x)$ при $|x| \to \infty$, то при достатньо великому λ існує фундаментальний розв'язок системи (1) $\omega_\lambda(x,\ y)$ в усьому просторі і задовольняє слідуючим оцінкам, справедливим як при $|x-y| \to \infty$, так і при $|x-y| \to 0$:

$$\frac{\partial^{\kappa_1+\cdots+\kappa_n}\omega_\lambda(x, y)}{\partial x_1^{\kappa_1}\cdots\partial x_n^{\kappa_n}} =$$

$$= O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{A_0(x)}\varphi_{n-s+\kappa_1+\cdots+\kappa_n}(|x-y|)\right) \kappa_1+\cdots+\kappa_n = 0,1,\ \cdots,\ s;\ \varepsilon > 0,$$

де

$$\varphi_\kappa(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x-y|^\kappa} & (\kappa > 0) \\ |\lg|x-y||+1 & (\kappa = 0) \\ 1 & (\kappa < 0). \end{cases}$$

Доведення. Позначимо через $\omega_0(\lambda,\ y,\ x-y)$ фундаментальний розв'язок з особливістю в точці y для системи рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$A_0\left(\lambda,\ y,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)u = \sum_{\kappa_1+\cdots\kappa_{n+1}=s} A_{\kappa_1\cdots\kappa_{n+1}}(y)\,\lambda^{\kappa_{n+1}}\frac{\partial^{\kappa_1+\cdots+\kappa_n}u}{\partial x_1^{\kappa_1}\cdots\partial x_n^{\kappa_n}} = 0.$$

Користуючись методом Бохнера [2], неважко одержати

$$\omega_0(\lambda, y, x-y) = \frac{(-1)^{n-s+1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(i\,|x-y|^2)^{n-s+1}} \int\limits_{\infty} e^{i(\alpha,\, x-y)} \left(\sum_{\kappa=1}^{n} (x_\kappa -\right.$$

$$\left. - y_\kappa) \frac{\partial}{\partial \alpha_\kappa} \right)^{n-s+1} \left(\sum_{\kappa_1 + \ldots + \kappa_{n+1} = s} A_{\kappa_1 \ldots \kappa_{n+1}}(y)\, \lambda^{\kappa_{n+1}} (i\,\alpha_1)^{\kappa_1} \cdots (i\alpha_n)^{\kappa_n} \right)^{-1} d\alpha ,$$

де $\int\limits_{\infty}$ означає n-мірний інтеграл по всьому простору.

Фундаментальний розв'язок з особливістю в точці y для системи (1) будемо шукати у вигляді

$$\omega_\lambda(x, y) = \omega_0(\lambda, x, x-y) + \int\limits_{\infty} \omega_0(\lambda, x, x-z)\, g(z, y)\, dz , \tag{3}$$

де $g(x, y)$ покищо невідома матрична функція, яку будемо підбирати так, щоб функція $\omega_\lambda(x, y)$ задовольняла другій умові фундаментальності.

Припустимо, що знайдена так функція $g(x, y)$ неперервно диференційовна по x_κ один раз при $x \neq y$. Неважко пересвідчитись, що в цьому припущенні відносно $g(x, y)$ матриця $\omega_\lambda(x, y)$, що визначається формулою (3), неперервно диференційовна s разів при $x \neq y$, тобто виконується перша умова фундаментальності.

На основі леми 3 [3]

$$A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_\lambda(x, y) = A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_0(\lambda, x, x-y) +$$

$$+ \int\limits_{\infty} A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_0(\lambda, x, x-z)\, g(z, y)\, dz + g(x, y).$$

Таким чином, питання про можливість добору такої матриці $g(x, y)$, щоб для $\omega\ (x, y)$ виконувалась друга умова фундаментальності, рівнозначне питанню про можливість розв'язку слідуючої системи інтегральних рівнянь:

$$g(x, y) + \int\limits_{\infty} A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_0(\lambda, x, x-z)\, g(z, y)\, dz +$$

$$+ A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_0(\lambda, x, x-y) = 0. \tag{4}$$

Покажемо тепер, що система (4) має розв'язок. Дослідимо ядро цієї системи. Перш за все, оцінимо $\omega_0(\lambda, x, x-y)$, а для цього перетворимо його вираз. Зробимо ортогональне перетворення

$$\alpha_\kappa = \sum_{l=1}^{n} c_{\kappa l} \tilde{\alpha}_l ; \ x_\kappa = \sum_{l=1}^{n} c_{\kappa l} \tilde{x}_l ,$$

причому таке, щоб напрям n-осі співпав з напрямом вектора $x-y$, а після цього проведемо заміну

$$\tilde{\alpha} = \lambda\beta .$$

Тоді, очевидно,

$$\omega_0(\lambda, x, x-y) = \frac{(-1)^{n-s+1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(i|x-y|^2)^{n-s+1}} \int\limits_{\infty} e^{i(\alpha, x-y)} \left(\sum_{\kappa=1}^{n} (x_\kappa - y_\kappa) \frac{\partial}{\partial \alpha_\kappa}\right)^{n-s+1} \times$$

$$\times A_0^{-1}(\lambda, x, i\alpha_1, \ldots, i\alpha_n)\, d\alpha = \frac{(-1)^{n-s+1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(i|x-y|^2)^{n-s+1}} \times$$

$$\times \int\limits_{\infty} e^{i\tilde{\alpha}_n|x-y|} \left(\tilde{x}_n \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_n}\right)^{n-s+1} A_0^{-1}\left(\lambda, x, i\sum_{l=1}^{n} c_{1l}\tilde{\alpha}_l, \ldots, i\sum_{l=1}^{n} c_{nl}\tilde{\alpha}_l\right) d\tilde{\alpha} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-s+1}\tilde{x}^{n-s+1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(i|x-y|^2)^{n-s+1}\lambda} \int\limits_{\infty} e^{i\lambda\beta_n|x-y|} \frac{\partial^{n-s+1}}{\partial \beta_n^{n-s+1}} \times$$

$$\times A_0^{-1}\left(1, x, i\sum_{l=1}^{n} c_{1l}\beta_l, \ldots, i\sum_{l=1}^{n} c_{nl}\beta_l\right) d\beta. \tag{5}$$

Можна показати, що в припущенні (2) величина останнього інтегралу не зміниться, якщо зсунути трохи шлях інтегрування, наприклад, по β_n в комплексну площину

$$\beta_n \to \beta_n + i\varepsilon_0 \quad (\varepsilon_0 > 0).$$

Тому на основі (5)

$$\omega_0(\lambda, x, x-y) = \frac{(-1)^{n-s+1}\tilde{x}_n^{n-s+1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(i|x-y|^2)^{n-s+1}\lambda} \times$$

$$\times \int\limits_{\infty} e^{i\lambda(\beta_n + i\varepsilon_0)|x-y|} \frac{\partial^{n-s+1}}{\partial \beta_n^{n-s+1}} A_0^{-1}\left(1, x, i\sum_{l=1}^{n} c_{1l}\beta_l - c_{1n}\varepsilon_0, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, i\sum_{l=1}^{n} c_{nl}\beta_l - c_{nn}\varepsilon_0\right) d\beta = \frac{(-1)^{n-s+1} e^{-\lambda\varepsilon_0 \cdot |x-y|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \times$$

$$\times \int\limits_{\infty} \frac{\tilde{x}_n^{n-s+1}}{(i|x-y|^2)^{n-s+1}} e^{i\tilde{\alpha}_n|x-y|} \frac{\partial^{n-s+1}}{\partial \tilde{\alpha}_n^{n-s+1}} A_0^{-1}\left(\lambda, x, i\sum_{l=1}^{n} c_{1l}\tilde{\alpha}_l - \lambda c_{1n}\varepsilon_0, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, i\sum_{l=1}^{n} c_{nl}\tilde{\alpha}_l - \lambda c_{nn}\varepsilon_0\right) d\tilde{\alpha} = \frac{(-1)^{n-s+1} e^{-\lambda\varepsilon_0|x-y|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \times$$

$$\times \int\limits_{\infty} \frac{e^{i(\alpha, x-y)}}{(i|x-y|^2)^{n-s+1}} \left(\sum_{\kappa=1}^{n} (x_\kappa - y_\kappa)\frac{\partial}{\partial \alpha_\kappa}\right)^{n-s+1} A_0^{-1}(\lambda, x, i\alpha_1 -$$

$$- \lambda c_{1n}\varepsilon_0, \ldots, i\alpha_n - \lambda c_{nn}\varepsilon_0)\, d\alpha.$$

Застосовуючи до останнього інтегралу теорему 13 [2], враховуючи при цьому виконання умови (2) і припущення про те, що коефіцієнти оператора $A_0\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ мають оцінку $O(A_0(x))$, одержимо, що

$$\omega_0(\lambda, x, x-y) = O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon_0|x-y|}}{A_0(x)}\varphi_{n-s}(|x-y|)\right), \tag{6}$$

а оцінки для похідних $\omega_0(\lambda, x, x-y)$ одержуються диференціюванням функції $\frac{e^{-\lambda\varepsilon_0|x-y|}}{A_0(x)}\varphi_{n-s}(|x-y|)$, якщо для простоти вважати, що $A_0(x)$ веде себе так, як коефіцієнти оператора $A_0\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Легко бачити, що в нашому припущенні відносно коефіцієнтів всі члени виразу $A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0(\lambda, x, x-y)$ будуть мати, наприклад, для випадку $s<n$ оцінку типу $O\left(\frac{(\lambda\varepsilon_0)^\kappa e^{-\lambda\varepsilon_0|x-y|}}{|x-y|^l}\right)$, де $\kappa=0,1,\ldots,s-1$; $l=n-s,\ldots,n-1$, причому κ і l приймають свої значення так, що завжди $\kappa+l<n$. В цьому випадку члени $\int\limits_\infty A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0(\lambda, x, x-z)dz$ будуть мати оцінку типу

$$O\left(\int\limits_\infty(\lambda\varepsilon_0)^\kappa\frac{e^{-\lambda\varepsilon_0|x-z|}}{|x-z|^l}dz\right) = O\left((\lambda\varepsilon_0)^\kappa\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon_0\rho}\rho^{n-1-l}d\rho\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\lambda\varepsilon_0^{n-l-\kappa}}\int\limits_0^\infty l^{-u}u^{n-1-l}du\right) = O\left(\frac{1}{\lambda\varepsilon_0^{n-l-\kappa}}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda\varepsilon_0}\right).$$

Тоді, очевидно,

$$\int\limits_\infty\left|A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0(\lambda, x, x-z)\right|dz \leqslant \frac{C}{\lambda\varepsilon_0} < 1 \text{ при } \lambda > \frac{C}{\varepsilon_0}.$$

Аналогічний результат одержується і для випадку $s=n$ і для $s<n$. Отже, при достатньо великому λ

$$\int\limits_\infty\left|A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0(\lambda, x, x-z)\right|dz < 1,$$

а, значить, систему (4) можна розв'язати методом послідовних наближень.

На основі леми 1 [1] $g(x, y)$ неперервно диференційовна по x_κ при $x \neq y$, тобто припущення про $g(x, y)$ виправдане. Таким чином, матриця $\omega_\lambda(x, y)$, що визначається по формулі (3), задовольняє першій і другій умові фундаментальності. Як легко бачити, $\omega(x, y)$ задовольняє і третій умові фундаментальності, за рахунок першого доданку $\omega_0(\lambda, x, x-y)$. А тепер оцінимо $\omega_\lambda(x, y)$. Для стислості викладу обмежимось випадком $s<n$. Оцінка першого доданку в формулі (3) відома.

Для того, щоб оцінити другий доданок, перш за все потрібно оцінити $g(x, y)$.

Розв'язуючи систему (4) методом послідовних наближень, одержимо

$$g(x,y) = -A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0(\lambda, x, x-y) +$$
$$+\int_\infty A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0(\lambda, x, x-z)\,A\left(\lambda, z, \frac{\partial}{\partial z}\right)\omega_0(\lambda, z, z-y)\,dz + \ldots$$

Оскільки кожний член цього рівномірно збіжного ряду має оцінку $O(e^{-\lambda\varepsilon_i|x-y|})$ при $|x-y|\to\infty$ $(i = 1, 2, \ldots; 0<\varepsilon'<\ldots<\varepsilon_2<\varepsilon_1<\varepsilon_0)$, то $g(x, y) = O(e^{-\lambda\varepsilon'|x-y|})$ $(|x-y|\to\infty)$. При $|x-y|\to 0$ $g(x,y) = O\left(\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\right)$ (за рахунок першого члену ряду). Тому $g(x, y)$ має слідуючу оцінку, справедливу і при $|x-y|\to\infty$ і при $|x-y|\to 0$:

$$g(x, y) = O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon''|x-y|}}{|x-y|^{n-1}}\right).$$

Приймаючи до уваги цю оцінку і оцінку (6), маємо

$$\int_\infty \omega_0(\lambda, x, x-z)\,g(z, y)\,dz = O\left(\int_\infty \frac{e^{-\lambda\varepsilon_0|x-z|}e^{-\lambda\varepsilon''|z-y|}dz}{A_0(x)\,|x-z|^{n-s}\,|z-y|^{n-1}}\right) =$$
$$= O\left(\frac{1}{A_0(x)}\cdot\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{|x-y|^{n-s-1}}\right) \quad (0<\varepsilon<\varepsilon_0).$$

Порівнюючи оцінки першого і другого доданків в формулі (3), одержимо оцінку, що характеризує $\omega_\lambda(x, y)$ як при $|x-y|\to\infty$, так і при $|x-y|\to 0$, а саме

$$\omega_\lambda(x, y) = O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{A_0(x)|x-y|^{n-s}}\right).$$

Легко бачити, що

$$\frac{\partial^{\kappa_1+\ldots+\kappa_n}\omega_\lambda(x, y)}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}} = O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{A_0(x)\,|x-y|^{n-s+\kappa_1+\ldots+\kappa_n}}\right) =$$
$$= O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{A_0(x)}\varphi_{n-s+\kappa_1+\ldots+\kappa_n}(|x-y|)\right)$$
$$(\kappa_1+\ldots+\kappa_n = 1, 2, \ldots, s).$$

Аналогічним шляхом такі ж оцінки для $\omega_\lambda(x, y)$ можна одержати і для випадку $s=n$ і для $s>n$. Таким чином, теорема доведена.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лопатинський. Я. Б. Укр. мат. журн. т. III, № 1, 1951.
2. Bochner S. Annals of mathematics. Vol. 57, № 1, 1953.
3. Лопатинський. Я. Б. Укр. мат. журн. т. III, № 3, 1951.