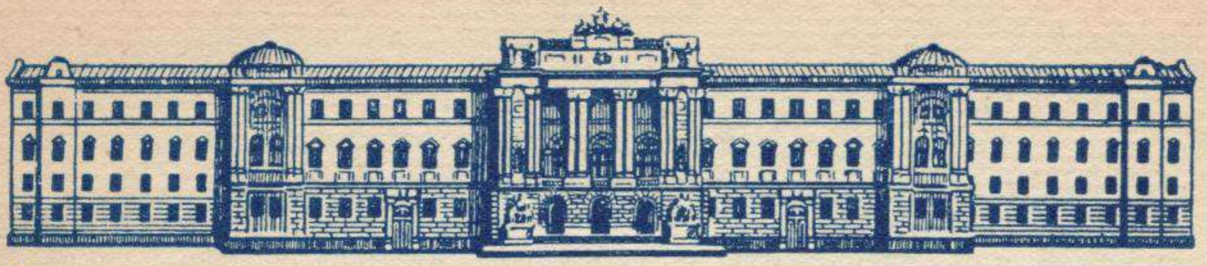

ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА
НАУКОВІ ЗАПИСКИ, том 44

ПИТАННЯ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ

ВИПУСК ВОСЬМИЙ

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1957

Львівський

державний університет

імені Ів. Франка

МВО УССР

ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Ив. ФРАНКО

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ 44

Серия механико-математическая

ВОПРОСЫ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ

ВЫПУСК ВОСЬМОЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЬВОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

1957

МВО УРСР
ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА
НАУКОВІ ЗАПИСКИ
ТОМ 44
Серія механіко-математична

ПИТАННЯ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ

ВИПУСК ВОСЬМИЙ

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1957

Друкується з дозволу ректора
Львівського університету члена-
кореспондента АН УРСР професора
Є. К. Лазаренка

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

Н. П. ФЛЕЙШМАН

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПЛИТИ З РЕБРАМИ ЖОРСТКОСТІ ЗМІННОЇ КРИВИЗНИ

В інженерній практиці вже давно вживаються конструкції у вигляді плит, підкріплених кільцевими ребрами жорсткості. Задача розрахунку таких плит стала предметом досліджень ряду авторів. Зокрема, для плит, підкріплених круговими ребрами жорсткості різними методами одержані розв'язки задачі згину для багатьох випадків навантаження.

Методом рядів такі розв'язки одержані Г. М. Савіним [1], Д. В. Вайнбергом [2], Н. П. Флейшманом [3, 4, 5] та ін. В роботах [1] (глава VII, §§ 1—6) і [2] кільця жорсткості розглядались як тонкі плити, прогини яких задовольняють рівнянню Софі Жермен. В роботах [1] (глава VII, § 7), [3], [4], [5] припускається, що ці кільця являються тонкими пружними стержнями. Останнє припущення дозволило поставити і розв'язати для ряду частинних випадків задачу про оптимальне підкріплення краю кругового отвору в тонкій плиті.

Методом початкових параметрів К. А. Кітовер [6] розв'язав задачу осесиметричного згину круглої плити, підсиленої кількома концентричними ребрами жорсткості.

Задачі згину плит, підкріплених ребрами жорсткості змінної кривизни, є багато труднішими.

В ряді робіт [7, 8, 9] М. П. Шереметєв вперше сформулював у функціях комплексної змінної граничні умови задачі згину тонкої плити, криволінійний край якої підкріплений пружним кільцем. Зокрема, для безмежної ізотропної плити з однорідним напруженим станом на безмежності М. П. Шереметєвим [8, 9] одержано точний розв'язок задачі згину (методом інтегралів типу Коші) для випадку, коли плита ослаблена круговим отвором з підкріпленим краєм і наближений розв'язок (методом послідовних наближень) для плити з підкріпленим еліптичним отвором. Там же [8, 9] розв'язана задача згину для безмежної анізотропної плити з підкріпленим круговим отвором.

Питання про еквівалентне підкріплення криволінійного отвору в анізотропній або ізотропній плиті кільцем жорсткості змінного перерізу розглянуто автором в статті [10].

В даній роботі (короткий виклад див. [11]) досліджується згин плити, підсиленої кількома кільцевими ребрами жорсткості змінної кривизни.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо тонку пружну ізотропну плиту, серединна площина якої займає деяку кінцеву багатозв'язну область S площини $z = x + iy$ з границею L, що складається із сукупності простих замкнутих кривих L_j ($j=1, 2,\cdots,m+1$) (див. рис. 1), із яких L_{m+1} охоплює всі останні. Плита підсилена l-кільцевими криволінійними ребрами жорсткості із другого матеріалу, осьові лінії яких позначимо через γ_1, γ_2, ..., γ_l. Лінія $\Gamma=\Sigma\gamma_\kappa$ розбиває область S на $l+1$ областей так, що $S=S_0+S_1+S_2+\ldots+S_l$. Для простоти припустимо, що області S_κ ($\kappa=1, 2, \ldots, l$) однозв'язні, а область S_0 багатозв'язна і обмежена сукупністю кривих Γ і $L=\Sigma L_j$.

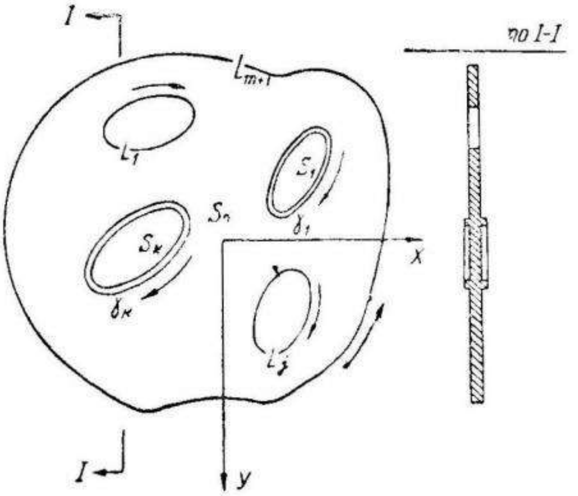

Рис. 1.

Допустимо також, що границі L і Γ не дотикаються і не перетинаються.

В областях S_κ ($\kappa=0, 1, 2, \ldots, l$) до плити прикладено задане довільне поперечне навантаження (розподілений тиск $q_\kappa(x, y)$ і зосереджені сили), а на границі L задані зовнішні згинаючі моменти m (s) і зусилля p (s)

$$M_n(s)=m(s),$$

$$N_n+\frac{\partial H_{n\tau}(s)}{\partial s}=p(s) \text{ на } L. \quad (1.1)$$

Ребра жорсткості розглядаються як пружні тонкі кільця постійної жорсткості на згин та кручення, поведінка яких може бути описана теорією малих деформацій тонких криволінійних стержнів (див., напр., [12])

Припустимо також, що одна з головних осей інерції поперечних перерізів цих кілець жорсткості лежить в площині xoy. В цьому випадку ця головна вісь інерції в кожному поперечному перерізі співпадає з головною нормаллю до осі γ_κ ($\kappa=1, 2, \ldots, l$) кільця. В зв'язку з малою шириною поперечних перерізів підкріплюючих кілець, припустимо, що спай між областями S_0 і S_κ ($\kappa=1, 2, \ldots, l$) має місце відповідно по кривих γ_κ, тобто вздовж осьових ліній ребер жорсткості, які розмежовують ці області.

Згинаючі моменти і зусилля, які діють на κ-те кільце з боку області S_0, позначимо через $m_{0\kappa}$ (s) і $p_{0\kappa}$ (s), а зусилля що діють на те ж кільце з боку області S_κ — через $m_{\kappa\kappa}$ (s) і $p_{\kappa\kappa}(s)$ ($\kappa=1, 2, \ldots, l$). s — дуга контура γ_κ, яка відраховується від деякої довільно вибраної початкової точки за годинниковою стрілкою. Якщо яке-небудь навантаження прикладено безпосередньо до ребра жорсткості, тобто вздовж γ_κ, то на підставі прийнятих вище припущень воно може бути віднесено до будь-якої із сусідніх областей S_0 або S_κ. Додатній напрямок перелічених вище сил і моментів схематично показаний на рис. 2, де наведено перетин плити вздовж лінії I—I (див. рис. 1).

Очевидно, що κ — те кільце знаходиться під дією сумарного навантаження

$$m_\kappa(s)=m_{0\kappa}(s)-m_{\kappa\kappa}(s);$$

$$p_\kappa(s)=p_{0\kappa}(s)-p_{\kappa\kappa}(s). \quad (1.2)$$

Або, іншими словами, при переході з області S_0 в область S_κ згинаючі моменти і перерізуючі сили терплять стрибки (поки що невідомі) $m_к(s)$ і $p_к^!(s)$.

Під дією навантаження (1.2) кільце деформується разом з плитами, що примикають до нього. На контурі $\gamma_к$, очевидно, повинні задовольнятись умови рівності прогинів і деформацій

$$w_0 = w_к = \Delta_к; \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial n} = \frac{\partial w_к}{\partial n} = \Theta_{\tau к}, \tag{1.4}$$

де w_0 — прогин плити в області S_0; $w_к$ — прогин в області $S_к$ ($к = 1, 2, \ldots, l$); $\Delta_к$—прогин точок $к$-го кільця; n—нормаль, зовнішня відносно

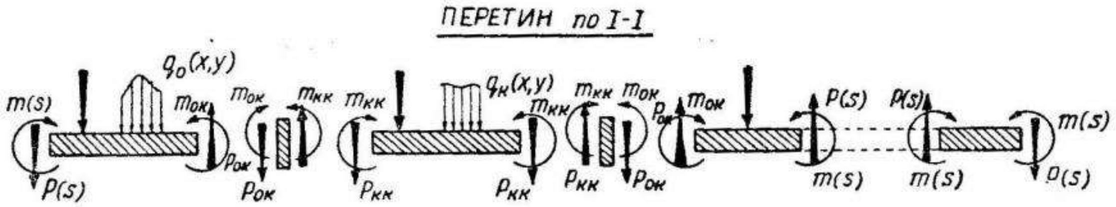

Рис. 2.

області S_0; $\Theta_{\tau к}$ — кут кручення пружної лінії кільця, тобто кут повороту нормального перетину кільця навколо дотичної τ до контура $\gamma_к$. Дотична направляється в бік зростання дуги s (див. рис. 1).

Продиференціюємо умову (1.3) по s. Тоді можна записати умову рівності деформацій у вигляді слідуючої комплексної комбінації:

$$\frac{\partial w_0}{\partial n} + i\frac{\partial w_0}{\partial s} = \frac{\partial w_к}{\partial n} + i\frac{\partial w_к}{\partial s} \text{ на } \gamma_к;$$

$$\frac{\partial w_к}{\partial n} + i\frac{\partial w_к}{\partial s} = \Theta_{\tau к} - i\Theta_{nк} \text{ на } \gamma_к, \tag{1.5}$$

де $\Theta_{nк} = -\frac{d\Delta_к}{ds}$ — кут згину кільця, тобто кут повороту дотичної до осі кільця навколо нормалі в даній точці. За додатній напрямок відліку кутів $\Theta_{\tau к}$ і $\Theta_{nк}$ прийнято напрямок проти ходу годинникової стрілки.

В граничних умовах (1.5) доцільно зробити деякі перетворення. Для цього зауважимо, що

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}; \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial n},$$

а також, що на контурі $\gamma_к$

$$\frac{\partial x}{\partial n} = -\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial n}.$$

Склавши комплексну комбінацію

$$\frac{\partial w}{\partial n} + i\frac{\partial w}{\partial s} = it\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

де t — афікс точки контура Γ, $\dot{t}=\frac{dt}{ds}$, і приймаючи до уваги що $\dot{t}\bar{\dot{t}}=1$, перепишемо умову (1.5) у вигляді

$$\frac{\partial w_0}{\partial x}+i\frac{\partial w_0}{\partial y}=\frac{\partial w_\kappa}{\partial x}+i\frac{\partial w_\kappa}{\partial y} \text{ на } \gamma_\kappa$$

$$\frac{\partial w_\kappa}{\partial x}-i\frac{\partial w_\kappa}{\partial y}=-i\bar{\dot{t}}(\Theta_{\tau\kappa}-i\Theta_{n\kappa}) \text{ на } \gamma_\kappa. \tag{1.6}$$

Як відомо [13], розв'язок поставленої задачі зводиться до визначення функцій $\varphi_\kappa(z)$ і $\psi_\kappa(z)$ $(\kappa=0,\ 1,\ \ldots,\ l)$ від комплексного змінного $z=x+iy$, регулярних відповідно в кожній з областей $S_\kappa(\kappa=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l)$, крім тих точок, де прикладені зосереджені сили. Ці функції визначаються із граничних умов задачі (1.1), (1.2), (1.6), а через них прогин плити в області S_κ $(\kappa=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l)$ виражається формулою

$$w_\kappa=w_\kappa^1+\overset{\circ}{w}_\kappa=2Re\,[\bar{z}\,\varphi_\kappa(z)+\chi_\kappa(z)]+\overset{\circ}{w}_\kappa(x,\ y), \tag{1.7}$$

де $\chi_\kappa(z)=\int\psi_\kappa(z)\,dz$, а $\overset{\circ}{w}_\kappa$ $(x,\ y)$ — який-небудь частинний розв'язок диференціального рівняння згину тонкої плити

$$D\,\Delta\Delta\,w_\kappa=q_\kappa(x,\ y). \tag{1.8}$$

Тут $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — циліндрична жорсткість; E — модуль Юнга; ν — коефіцієнт Пуассона; $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Для спрощення дальших викладок і без обмеження загальності приймемо як частковий розв'язок $\overset{\circ}{w}_\kappa(x,\ y)$ $(\kappa=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l)$, розв'язок задачі для випадку відсутності ребер жорсткості.

Тоді

$$w_\kappa^1=2Re\,[\bar{z}\,\varphi_\kappa(z)+\chi_\kappa(z)]$$

буде являти собою додатковий прогин, визваний в плиті наявністю ребер жорсткості. Цьому додатковому прогину відповідатимуть певні додаткові деформації і внутрішні зусилля в плиті. Функції $\varphi_\kappa(z)$ і $\psi_\kappa(z)$ будуть, очевидно, функціями голоморфними у відповідних областях $S_\kappa(\kappa=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ l)$. Через ці функції граничні умови (1.1), (1.2) і (1.6) можуть бути записані відповідно так:

$$-\varkappa\overline{\varphi_0(\tau)}+\tau\,\overline{\varphi_0'(\tau)}+\overline{\psi_0(\tau)}=-iC_{1j}\bar{\tau}+C_{2j}$$
$$\text{на } L_j\,(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m+1); \tag{1.9}$$

$$-\varkappa\overline{\varphi_0(t)}+\bar{t}\,\varphi_0'(t)+\psi_0(t)=-\varkappa\overline{\varphi_\kappa(t)}+\bar{t}\,\varphi_\kappa'(t)+\psi_\kappa(t)-$$
$$-I_\kappa/2D(1-\nu) \quad \text{на } \gamma_\kappa(\kappa=1,\ 2,\ \ldots,\ l); \tag{1.10}$$

$$\overline{\varphi_0(t)}+\bar{t}\,\varphi_0'(t)+\psi_0(t)=\overline{\varphi_\kappa(t)}+\bar{t}\,\varphi_\kappa'(t)+\psi_\kappa(t) \text{ на } \gamma_\kappa; \tag{1.11}$$

$$\overline{\varphi_\kappa(t)}+\bar{t}\,\varphi_\kappa'(t)+\psi_\kappa(t)=\frac{\bar{\dot{t}}}{2i}(\Theta_{\tau\kappa}-i\Theta_{n\kappa})-\frac{\partial\overset{\circ}{w}_\kappa}{\partial t} \text{ на } \gamma_\kappa, \tag{1.12}$$

де t — афікс точки контура Γ; τ — афікс точки на L; $\varkappa = \frac{3+\nu}{1-\nu}$; C_{1j} і C_{2j} — відповідно дійсна і комплексна сталі, які потрібно визначити.

$$I_\kappa = I_\kappa(t) = I_\kappa(s) = -\int_0^S \left[m_\kappa(s_1) - i \int_0^{S_1} p_\kappa(s_2)\, ds_2 \right] \bar{t}\, ds_1. \qquad (1.13)$$

Функції $I_\kappa(t)(\kappa = 1, 2, \ldots, l)$, які залежать від стрибка навантаження вздовж γ_κ, поки що невідомі.

Умова (1.9) виражає те, що додаткові зусилля в плиті, які викликані наявністю ребер жорсткості, задовольняють нульовим граничним умовам на L. Умова (1.10) виражає наявність стрибків додаткових внутрішніх зусиль в плиті при переході через контур γ_κ. Умова (1.11) рівносильна рівності додаткових деформацій в сусідніх областях плити вздовж γ_κ, а остання умова (1.12) виражає рівність деформацій кільця і плити.

Права частина (1.12) залежить від деформацій кільця, які, очевидно, є функціями від його навантаження $m_\kappa(s)$ та $p_\kappa(s)$ і визначаються при інтегруванні основних рівнянь теорії малих деформацій тонких криволінійних стержнів.

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАНИЧНОЇ УМОВИ (1.12) І ДЕЯКІ ВИСНОВКИ

Для перетворення умови (1.12) розглянемо рівновагу і деформацію тонкого пружного кільця $\gamma_\kappa(\kappa = 1, 2, \ldots, l)$, яке знаходиться під дією навантаження $m_\kappa(s)$ і $p_\kappa(s)$ (1.2).

Позначимо через

$$\vec{\Theta}_\kappa(s) = \Theta_{\tau\kappa}\vec{\tau} + \Theta_{n\kappa}\vec{n} + \Theta_{b\kappa}\vec{b}$$

вектор повороту рухомих осей натурального тригранника з ортами $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ при деформації кільця. Орт бінормалі $\vec{b}$ направлений вниз так само, як і вісь OZ. Крім того, введемо вектор

$$\vec{\varepsilon}_\kappa(s) = \delta\omega_{\tau\kappa}\vec{\tau} + \delta\omega_{n\kappa}\vec{n} + \delta\omega_{b\kappa}\vec{b},$$

де $\delta\omega_{n\kappa}$, $\delta\omega_{b\kappa}$, $\delta\omega_{\tau\kappa}$ — прирости головних компонентів кривизни і кручення кільця. Між векторами $\vec{\Theta}_\kappa(s)$ і $\vec{\varepsilon}_\kappa(s)$ існує відома залежність Клебша [12], а саме

$$\delta\omega_{\tau\kappa} = \frac{d\Theta_{\tau\kappa}}{ds} + \omega_{n\kappa}\Theta_{b\kappa} - \omega_{b\kappa}\Theta_{n\kappa};$$

$$\delta\omega_{n\kappa} = \frac{d\Theta_{n\kappa}}{ds} + \omega_{b\kappa}\Theta_{\tau\kappa} - \omega_{\tau\kappa}\Theta_{b\kappa};$$

$$\delta\omega_{b\kappa} = \frac{d\Theta_{b\kappa}}{ds} + \omega_{\tau\kappa}\Theta_{n\kappa} - \omega_{n\kappa}\Theta_{\tau\kappa}. \qquad (2.1)$$

де $\omega_{n\kappa}$, $\omega_{b\kappa}$ та $\omega_{\tau\kappa}$ — головні компоненти кривизни і кручення кільця.

З другого боку компоненти вектора $\vec{\varepsilon}_\kappa(s)$ зв'язані з компонентами головного моменту

$$L_\kappa = L_{\tau\kappa}\vec{\tau} + L_{n\kappa}\vec{n} + L_{b\kappa}\vec{b}$$

внутрішніх сил, які діють в перетині s кільця, співвідношеннями Кірхгофа.

$$\delta\omega_{\tau\kappa} = \frac{L_{\tau\kappa}}{C_\kappa}; \quad \delta\omega_{n\kappa} = \frac{L_{n\kappa}}{A_\kappa}, \quad \delta\omega_{b\kappa} = \frac{L_{b\kappa}}{B_\kappa}, \tag{2.2}$$

де $L_{n\kappa}$ і $L_{b\kappa}$ — згинаючі моменти; $L_{\tau\kappa}$ — крутящий момент; A_κ і B_κ — жорсткості кільця на згин навколо осей $\vec{n}$ і $\vec{b}$; C_κ — жорсткість на кручення.

Рівняння рівноваги елемента стержня мають вигляд

$$\frac{d\vec{V}_\kappa}{ds} + \vec{p}^\kappa = 0; \quad \frac{d\vec{L}_\kappa}{ds} + (\vec{\tau}_x \vec{V}_\kappa) + \vec{m}_\kappa = 0, \tag{2.3}$$

де $\vec{V}_\kappa$ — головний вектор внутрішніх зусиль, які діють в перерізі s кільця, $\vec{p}_\kappa$ і $\vec{m}_\kappa$ — зовнішня сила і згинаючий момент, що діють на одиницю довжини осі даного елемента кільця.

У нашому випадку (1.2)

$$\vec{p}_\kappa = p_\kappa(s)\vec{b}; \quad \vec{m}_\kappa = m_\kappa(s)\vec{\tau}. \tag{2.4}$$

Крім того,

$$\omega_{\tau\kappa} = 0; \quad \omega_{n\kappa} = 0; \quad \omega_{b\kappa} = \frac{1}{\varrho_\kappa}; \tag{2.5}$$

через те, що кожне підкріплююче кільце має сталий поперечний переріз, а його вісь γ_κ є плоскою кривою із змінним радіусом кривизни ϱ_κ. Приймаючи до уваги (2.5), перепишемо перші два співвідношення (2.1) так:

$$\frac{d\Theta_{\tau\kappa}}{ds} = \delta\omega_{\tau\kappa} + \Theta_{n\kappa}\cdot\frac{1}{\varrho_\kappa};$$

$$\frac{d\Theta_{n\kappa}}{ds} = \delta\omega_{n\kappa} - \Theta_{\tau\kappa}\cdot\frac{1}{\varrho_\kappa}.$$

Складаючи комплексну комбінацію останніх рівнянь, знаходимо

$$\frac{d}{ds}(\Theta_{\tau\kappa} - i\Theta_{n\kappa}) = \delta\omega_{\tau\kappa} - i\delta\omega_{n\kappa} + \frac{i}{\varrho_\kappa}(\Theta_{\tau\kappa} - i\Theta_{n\kappa}). \tag{2.6}$$

Помножимо обидві сторони (2.6) на $\dot{\bar{t}}\,ds$ і проінтегруємо їх по s в границях від 0 до s. Одержимо

$$\int_0^s \frac{d}{ds}(\Theta_{\tau\kappa} - i\Theta_{n\kappa})\dot{\bar{t}}\,ds = \int_0^s (\delta\omega_{\tau\kappa} - i\delta\omega_{n\kappa})\dot{\bar{t}}\,ds + i\int_0^s \frac{1}{\varrho_\kappa}(\Theta_{\tau\kappa} - i\Theta_{n\kappa})\dot{\bar{t}}\,ds.$$

Обчислюючи тепер перший інтеграл по частинах і враховуючи, що

$$\frac{d\dot{\bar{t}}}{ds}=\frac{d}{ds}(\dot{x}-i\dot{y})=\ddot{x}-i\ddot{y}=-\frac{\dot{y}}{\varrho_к}-i\frac{\dot{x}}{\varrho_к}=-\frac{i\dot{\bar{t}}}{\varrho_к}, \tag{2.7}$$

знаходимо

$$(\Theta_{\tau к}-i\Theta_{nк})\dot{\bar{t}}=\int_0^s(\delta\omega_{\tau к}-i\delta\omega_{nк})\dot{\bar{t}}\,ds+C_{3к}, \tag{2.8}$$

де $C_{3к}=(\overset{\circ}{\Theta}_{\tau к}-i\overset{\circ}{\Theta}_{nк})\dot{\bar{t}}_0$ — комплексна стала інтегрування. Підставляючи (2.2) в (2.8), одержимо

$$(\Theta_{\tau к}-i\Theta_{nк})\dot{\bar{t}}=\int_0^s\left(\frac{L_{\tau к}}{C_к}-i\frac{L_{nк}}{A_к}\right)\dot{\bar{t}}\,ds+C_{3к}. \tag{2.9}$$

Для того, щоб виразити інтеграл в правій частині (2.9) через навантаження на кільце (2.4), спроектуємо друге рівняння (2.3) на рухомі осі $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$.

Приймаючи до уваги, що

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds}=\frac{\vec{n}}{\varrho_к};\quad \frac{d\vec{n}}{ds}=-\frac{\vec{\tau}}{\varrho_к};\quad \frac{d\vec{b}}{ds}=0,$$

одержуємо

$$\frac{dL_{\tau к}}{ds}=\frac{L_{nк}}{\varrho_к}-m_к(s);\quad \frac{dL_{nк}}{ds}=-\frac{L_{\tau к}}{\varrho_к}+V_{bк}. \tag{2.10}$$

де $V_{bк}$ — перерізуюча сила, яка діє в перерізі s кільця.

Помножимо тепер обидві частини першого рівняння (2.10) на $\dot{\bar{t}}ds$ і проінтегруємо їх в границях від 0 до s

$$\int_0^s\frac{dL_{\tau к}}{ds}\dot{\bar{t}}ds=\int_0^s\frac{L_{nк}}{\varrho_к}\dot{\bar{t}}ds-\int_0^s m_к(s)\,\dot{\bar{t}}\,ds.$$

Вичисляючи перший інтеграл по частинах і враховуючи (2.7), а також те, що $\dot{t}\dot{\bar{t}}=1$, знаходимо

$$L_{\tau к}=-i\dot{t}\int_0^s L_{\tau к}\frac{\dot{\bar{t}}}{\varrho_к}ds+\dot{t}\int_0^s\left[V_{bк}-\frac{L_{\tau к}}{\varrho_к}\right]\dot{\bar{t}}ds+C''_к\dot{t}, \tag{2.11}$$

де $C'_к$ — комплексна стала інтегрування.

Поступаючи аналогічно з другим рівнянням (2.10), одержуємо

$$L_{nк}=-i\dot{t}\int_0^s L_{nк}\frac{\dot{\bar{t}}}{\varrho_к}ds+\dot{t}\int_0^s\left[V_{bк}-\frac{L_{\tau к}}{\varrho_к}\right]\dot{\bar{t}}ds+C''_к\dot{t} \tag{2.12}$$

де C''_{κ} — також комплексна стала інтегрування. Множачи (2.12) на i і віднімаючи його з (2.11), одержуємо далі

$$L_{\tau\kappa} - iL_{n\kappa} = -\dot{t}\int_0^s [m_\kappa(s) + iV_{b\kappa}]\dot{\bar{t}}\,ds + C_{4\kappa}\dot{t}, \qquad (2.13)$$

де $C_{4\kappa} = (\overset{\circ}{L}_{\tau\kappa} - i\overset{\circ}{L}_{n\kappa})\dot{\bar{t}}_0$ — нова комплексна стала. Інтегруючи перше рівняння (2.3) з врахуванням (2.4), маємо

$$V_{b\kappa} = -\int_0^s p_\kappa(s)\,ds + \overset{\circ}{V}_{b\kappa},$$

де $\overset{\circ}{V}_{b\kappa}$ — дійсна стала. Підставляючи одержане значення $V_{b\kappa}$ в (2.13) знаходимо

$$L_{\tau\kappa} - iL_{n\kappa} = -\dot{t}\int_0^s [m_\kappa(s_1) - i\int_0^{s_1} p_\kappa(s_2)(ds_2]\dot{\bar{t}}\,ds_1 - i\dot{t}\,\overset{\circ}{V}_{b\kappa}(\bar{t} - \bar{t}_0) + C_{4\kappa}\dot{t}, \qquad (2.14)$$

де t_0 — афікс точки $s = 0$.

Приймаючи до уваги (1.14), позначимо

$$I_\kappa^*(s) = \dot{t}\,[I_\kappa(s) - i\overset{\circ}{V}_{b\kappa}(\bar{t} - \bar{t}_0) + C_{4\kappa}]. \qquad (2.15)$$

Тоді (2.14) запишеться у вигляді

$$L_{\tau\kappa} - iL_{n\kappa} = I_\kappa^*(s)$$

Звідси

$$L_{\tau\kappa} = \frac{1}{2}[I_\kappa^*(s) + \overline{I_\kappa^*(s)}],$$

$$L_{n\kappa} = \frac{1}{2i}[\overline{I_\kappa^*(s)} - I_\kappa^*(s)]. \qquad (2.16)$$

Підставляючи (2.16) в (2.9), одержуємо

$$\cancel{\dot{t}}(\Theta_{\tau\kappa} - i\Theta_{n\kappa}) = \frac{1}{2}\int_0^s J_\kappa(s)\,ds + C_{3\kappa}, \qquad (2.17)$$

де позначено

$$J_\kappa(s) = \left[I_\kappa^*(s)\left(\frac{1}{C_\kappa} + \frac{1}{A_\kappa}\right) + \overline{I_\kappa^*(s)}\left(\frac{1}{C_\kappa} - \frac{1}{A_\kappa}\right)\right]\dot{\bar{t}}. \qquad (2.18)$$

Значить, гранична умова (1.12) може бути записана остаточно у вигляді

$$\overline{\varphi_\kappa(t)} + \bar{t}\,\varphi'_\kappa(t) + \psi_\kappa(t) = \frac{1}{4i}\int_0^s J_\kappa(s)\,ds + \frac{C_{3\kappa}}{2i} - \frac{\partial \overset{\circ}{w}_\kappa}{\partial t} \text{ на } \gamma_\kappa. \qquad (2.19)$$

Для визначення сталих інтегрування $C_{4\kappa}$ і $\overset{\circ}{V}_{b\kappa}$ користуємося умовами однозначності деформацій і прогинів кільця, які легко виводяться із (2.9), (2.16) і (2.17) і після деяких перетворень приймають відповідно вигляд

$$\int\limits_{\gamma_\kappa} J_\kappa(s)\,ds = 0; \qquad Im \int\limits_{\gamma_\kappa} t J_\kappa(s)\,ds = 0. \tag{2.20}$$

Цікаво зауважити, що для визначення внутрішніх зусиль в пружному кільці γ_κ достатньо визначити лише функцію $I_\kappa^*(s)$ (2.15) через яку моменти $L_{\tau\kappa}$, $L_{n\kappa}$ і перерізуюча сила $V_{b\kappa}$ в кільці виражаються за формулами (див. (2.16) і (2.10)

$$L_{\tau\kappa} = Re\, I_\kappa^*(s); \quad L_{n\kappa} = -Im\, I_\kappa^*(s); \tag{2.21}$$

$$V_{b\kappa} = \frac{1}{\varrho_\kappa} Re\, I_\kappa^*(s) - Im\, I_\kappa^{*\prime}(s) \tag{2.22}$$

Внутрішні моменти в кільці вигідно виражати також і за іншими формулами, які одержуються з (2.9) і (1.6) у вигляді

$$\frac{L_{n\kappa}}{A_\kappa} + i\frac{L_{\tau\kappa}}{C_\kappa} = -\frac{1}{2}\left(\Delta w_\kappa + 4\dot{t}^2 \frac{\partial^2 w_\kappa}{\partial t^2}\right), \tag{2.23}$$

де замість w_κ можна писати також w_0 (див. (1.4). Після ряду перетворень формулі (2.23) можна придати вигляд

$$\frac{L_{n\kappa}}{A_\kappa} + i\frac{L_{\tau\kappa}}{C_\kappa} = \frac{1}{D(1-\nu^2)}[M_\tau - \nu M_n + i(1+\nu)H_{n\tau}]. \tag{2.24}$$

Оскільки величина моментів $L_{n\kappa}$ і $L_{\tau\kappa}$ не повинна залежати від вибору області S_0 або S_κ, в якій розглядаються моменти M_n, M_τ і $H_{n\tau}$, ми робимо висновок, що права частина (2.24) залишається інваріантною при переході через γ_κ з області S_κ в область S_0, тобто

$$\left\{\frac{1}{Eh^3}[M_\tau - \nu M_n + i(1+\nu)H_{n\tau}]\right\}^- = \left\{\frac{1}{Eh^3}[M_\tau - \nu M_n + i(1+\nu)H_{n\tau}]\right\}^+. \tag{2.25}$$

Тут і в дальшому значками +(плюс) або —(мінус) позначені граничні значення при $z \to t$ відповідно зліва або справа від γ_κ, тобто з області S_0 або S_κ.

В окремому випадку круглого ребра жорсткості радіуса R, що знаходиться в умовах симетричного відносно центра навантаження, маємо

$$L_{\tau\kappa} = H_{n\tau}^+ = H_{n\tau}^- = 0;$$

$$L_{n\kappa} = R(M_n^+ - M_n^-). \tag{2.26}$$

Отже, із (2.25) одержуємо при $(Eh^3)^+ = (Eh^3)^-$, що

$$L_{n\kappa} = \frac{R}{\nu}(M_\tau^+ - M_\tau^-). \tag{2.27}$$

Враховуючи (2.26), виводимо із (2.24) для осесиметричного випадку, що при $M_n^- = 0$, тобто, коли кільце, яке підкріплює край кругового отвору в плиті, вільне від зовнішнього навантаження,

$$\left(\frac{M_n}{M_\tau}\right)^+ = \frac{\delta_1}{1 - \nu^2 + \nu\delta_1}, \tag{2.28}$$

де $\delta_1 = A/RD$.

Якщо $M_n^+ = 0$, тобто кільце (вільне від зовнішніх зусиль) підкріплює край круглої плити, то з (2.24) одержуємо, що

$$\left(\frac{M_\tau}{M_n}\right)^- = \frac{\nu^3 + \nu\delta_1 - 1}{\delta_1}. \tag{2.29}$$

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ

В граничних умовах поставленої задачі (1.9), (1.10), (1.11) і (2.19) фігурують поки що невідомі функції I_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots, l$).

Відносно ж шуканих функцій $\varphi_\kappa(z)$ і $\psi_\kappa(z)$ ($\kappa = 0, 1, 2, \ldots, l$), можна сказати, що вони голоморфні відповідно в кожній з областей S_κ, на які розбивається область S лінією Γ. Але ці функції зазнають розриви при переході через Γ. Якщо ввести дві функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$, кусочно голоморфні в області S з лінією стрибків Γ, можна переписати вищевказані граничні умови у вигляді

$$-\varkappa\overline{\varphi(\tau)} + \bar{\tau}\varphi'(\tau) + \psi(\tau) = -iC_{1j}\bar{\tau} + C_{2j} \text{ на } L_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m+1); \tag{3.1}$$

$$-\varkappa\overline{\varphi^+(t)} + \bar{t}\varphi'^+(t) + \psi^+(t) = -\varkappa\overline{\varphi^-(t)} + \bar{t}\varphi'^-(t) + \psi^-(t) + (\varkappa+1)\overline{g(t)} \quad \text{на } \Gamma; \tag{3.2}$$

$$\overline{\varphi^+(t)} + \bar{t}\varphi'^+(t) + \psi^+(t) = \varphi^-(t) + \bar{t}\varphi'^-(t) + \psi^-(t) \quad \text{на } \Gamma; \tag{3.3}$$

$$\overline{\varphi^-(t)} + \bar{t}\varphi'^-(t) + \psi^-(t) = P(t) \quad \text{на } \Gamma. \tag{3.4}$$

Через $g(t)$ і $P(t)$ позначені невідомі функції, які на кожному контурі γ_κ ($\kappa = 1, 2, \ldots, l$) приймають відповідно значення

$$g_\kappa(t) = -\frac{1}{8D}\bar{I}_\kappa;$$

$$P_\kappa(t) = \frac{1}{4i}\int_0^s J_\kappa(s)\,ds + \frac{1}{2i}C_{3\kappa} - \frac{\partial w_\kappa^\circ}{\partial t}. \tag{3.5}$$

За допомогою формул (2.18) і (2.15) легко виразити $P_\kappa(t)$ через $g_\kappa(t)$ і навпаки. Так, наприклад,

$$P_\kappa(t)=\frac{1}{2i}C_{3\kappa}-\frac{\partial w_\kappa^\circ}{\partial t}+\frac{1}{4i}\int\limits_0^s\left\{\left(\frac{1}{C_\kappa}+\frac{1}{A_\kappa}\right)[C_{4\kappa}-iV_{b\kappa}^\circ(\bar t-\bar t_0)-8D\overline{g_\kappa(t)}]+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{C_\kappa}-\frac{1}{A_\kappa}\right)\dot{\bar t}^2[\bar C_{4\kappa}+iV_{b\kappa}^\circ(t-t_0)-8Dg_\kappa(t)]\right\}ds. \qquad (3.6)$$

Розглянемо спочатку умови (3.2) і (3.3). Віднімаючи з першої другу і переходячи до спряжених значень, знаходимо [1]

$$\varphi^+(t)-\varphi^-(t)=-g(t) \quad \text{на } \Gamma. \qquad (3.7)$$

Приймаючи до уваги (3.7), із (3.3) виводимо далі

$$\psi^+(t)-\psi^-(t)=h(t) \quad \text{на } \Gamma, \qquad (3.8)$$

де

$$h(t)=\overline{g(t)}+\bar t g'(t); \qquad g'(t)=\frac{dg(t)}{dt}. \qquad (3.9)$$

Таким чином, для визначення функцій $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ ми прийшли до двох задач лінійного спряження (3.7) і (3.8). Розв'язуючи ці задачі, знаходимо [14]

$$\varphi(z)=\varphi^\circ(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{g(t)\,dt}{t-z},$$

$$\psi(z)=\psi^\circ(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{h(t)\,dt}{t-z}, \qquad (3.10)$$

де $\varphi^\circ(z)$ і $\psi^\circ(z)$ — невідомі функції, які голоморфні у всій області S і підлягають визначенню.

Підставляючи функцію (3.10) в граничну умову (3.1), одержуємо

$$-\varkappa\overline{\varphi^\circ(\tau)}+\bar\tau\varphi^{\circ\prime}(\tau)+\psi^\circ(\tau)=\Phi(\tau)-iC_{1j}\bar\tau+C_{2j} \quad \text{на } L_j \qquad (3.11)$$

$$(j=1, 2, \ldots, m+1),$$

де
$$\Phi(\tau)=\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{\overline{g(t)}\,d\bar t}{\bar t-\bar\tau}+\frac{\bar\tau}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{g(t)\,dt}{(t-\tau)^2}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\frac{h(t)\,dt}{t-\tau}. \qquad (3.12)$$

Отже, функції $\varphi^\circ(z)$ і $\psi^\circ(z)$ визначаються розв'язком першої основної задачі згину плити, серединна площина якої займає багатозв'язну область S, що обмежена контуром L. Розв'язуючи цю задачу, ми знаходимо функції $\varphi^\circ(z)$ і $\psi^\circ(z)$, а потім з (3.10) — кусочно голоморфні функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$, які виражені через $g(t)$.

Підставляючи знайдені функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ в останню граничну умову (3.4), права частина якої також містить $g(t)$ (див. (3.6)), одер-

[1] Граничну умову (3.7) можна одержати й іншим шляхом, якщо виходити з інваріантності (2.25).

жимо інтегральне рівняння на Γ для визначення функції $g(t)$. Знаючи $g(t)$, ми із (3.10) остаточно визначимо функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$.

Якщо контур L_{m+1} відсутній, тобто область S — безмежна площина з отворами, все сказане вище може бути застосовано з незначними змінами.

Зауваження. Якщо контур L не вільний, а на ньому задані величини $w_0(s)$ і $\frac{\partial w_0}{\partial n}$ (n — зовнішня нормаль до L) то, очевидно, все сказане вище залишається в силі, крім граничної умови (3.1), яка повинна бути замінена умовою

$$\overline{\varphi(\tau)} + \overline{\tau}\varphi'(\tau) + \psi(\tau) = 0. \tag{3.13}$$

Після підстановки функцій (3.10) в (3.13), одержуємо в цьому випадку

$$\overline{\varphi^\circ(\tau)} + \overline{\tau}\varphi^{\circ\prime}(\tau) + \psi^\circ(\tau) - \Phi_*(\tau) \quad \text{на } L, \tag{3.14}$$

де
$$\Phi_*(\tau) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\overline{g(t)}\,\overline{dt}}{\overline{t}-\overline{\tau}} + \frac{\overline{\tau}}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)\,dt}{(t-\tau)^2} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{h(t)\,dt}{t-\tau}. \tag{3.15}$$

Отже, для визначення функцій $\varphi^\circ(z)$ і $\psi^\circ(z)$ доводиться розв'язувати на цей раз другу основну задачу згину плити. Після визначення цих функцій обчислюємо $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ за формулами (3.10), а потім підставляємо останні в (3.4) для визначення невідомої функції $g(t)$.

Якщо контур L плити шарнірно опертий, то гранична умова (3.1) заміняється відомими граничними умовами вільного спирання краю плити (див., напр. [15]), а далі робимо так само, як і вище.

ЛІТЕРАТУРА

1. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.
2. Вайнберг Д. В. Напряженное состояние составных дисков и пластин. Изд. АН УРСР, 1952.
3. Флейшман Н. П. К вопросу о подкреплении круговых отверстий упругими кольцами. Автореферат диссертации, Львов, 1950.
4. Флейшман Н. П. Наукові записки ЛДУ, т. XXII, серія фізико-математична, в. 5, 1953, стор. 84—95.
5. Флейшман Н. П. Наукові записки ЛДУ, т. XXIX, серія механіко-математична, в. 6 (1), 1954, стор. 105—111.
6. Китовер К. А. Круглые тонкие плиты. Л., 1953.
7. Шереметєв М. П. Доповіді АН УРСР, № 6, 1950.
8. Шереметьев М. П. Укр. мат. журн., т. V, № 1, 1953, стор. 58—79.
9. Шереметьев М. П. Пластинки с подкрепленным краем. Автореферат диссертации. Институт механики АН СССР, 1953.
10. Флейшман Н. П. Доповіді АН УРСР, № 4, 1954, стор. 311—4.
11. Флейшман Н. П. Доповіді та повідомлення ЛДУ, в. 6, ч. 2, 1955, стор. 92—5.
12. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л. и др. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении, т. II, гл. XI. Машгиз, 1952.
13. Лехницкий С. Г. Прикладная математика и механика, т. 2, в. 2, 1938, стор. 181—210.
14. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Ан СССР, 1954.
15. Лурье А. И. Известия Ленинградского политехнического института, т. XXXI, 1928, стор. 305—320.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

І. О. ПРУСОВ

ПРУЖНА ПІВПЛОЩИНА З ПІДКРІПЛЕНИМ КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Рішення подібної задачі дано І. Г. Арамановичем [4] за методом Д. Й. Шермана. Нами дається рішення цієї задачі методом лінійного спряження, який вперше запропонував Н. І. Мусхелішвілі [1, 2] для півплощини і пізніше узагальнив І. Н. Карцивадзе [3] для однозв'язних областей, що відображаються на круг раціональною функцією.

Нехай пружна невагома півплощина $y<0$ на глибині h має отвір радіуса 1, в який впаяне кільце сталого перерізу з внутрішнім контуром радіуса r. Позначимо через L, L_1 і L_0 відповідно границю півплощини, контура спая і внутрішнього контура кільця (рис.).

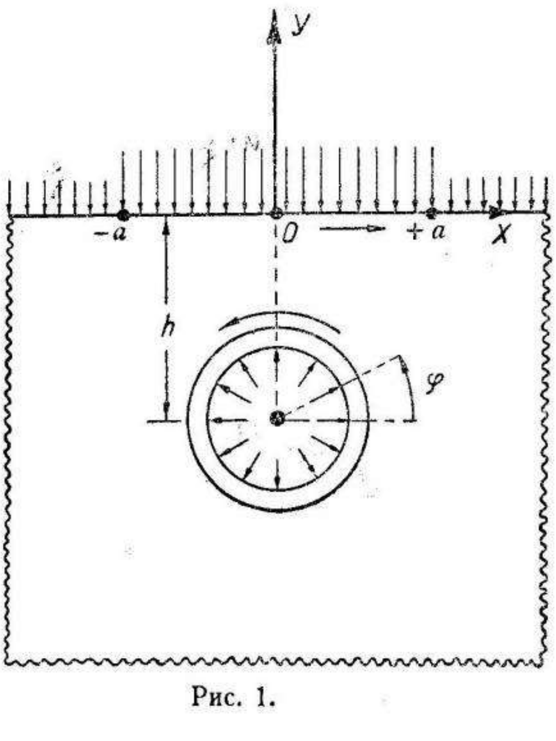

Рис. 1.

Знайдемо пружний стан півплощини і кільця, якщо на L за винятком відрізка $(-a, +a)$, на відрізку $(-a, +a)$ і на L_0 відповідно діє тиск q, $q+N$ і P.

Нехай $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$ — функції напруг Колосова-Мусхелішвілі, визначені в області півплощини при $y<0$. Тоді, якщо визначити відомим способом [2] функцію $\Phi_1(z)$ в області $y>0$, на границі півплощини одержимо умову

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \begin{cases} q \text{ на } L-(-a, +a) \\ q+N \text{ на } (-a, +a). \end{cases} \tag{1}$$

Рівнянню (1) задовільнимо, поклавши

$$\Phi_1(z) = -\frac{1}{2}q + \frac{N}{2\pi i}\ln\frac{z-a}{z+a} + \sum_{\kappa=2}^{\infty}[a_\kappa(z-z_0)^{-\kappa} + b_\kappa(z+z_0)^{-\kappa}] \quad \text{при } y<0; \tag{2}$$

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2}q+\frac{N}{2\pi i}\ln\frac{z-a}{z+a}+\sum_{\kappa=2}^{\infty}[a_\kappa(z-z_0)^{-\kappa}+b_\kappa(z+z_0)^{-\kappa}]$$

$$\text{при } y>0, \qquad (3)$$

де $z_0=-ih$, a_κ і b_κ — невідомі постійні, які мають дійсне значення при κ парному і уявне — при κ непарному.

Функцію $\Psi_1(z)$ знайдемо по формулі $\Psi_1(z)=-\Phi_1(z)-\bar{\Phi}_1(z)-z\Phi'_1(z)$ при $y<0$, що, враховуючи (2) і (3), дає

$$\Psi_1(z)=-\frac{Naz}{\pi i(z^2-a^2)}+\sum_{\kappa=2}^{\infty}[(\kappa-1)(a_\kappa+z_0a_{\kappa-1})-\bar{b}_\kappa](z-z_0)^{-\kappa}+$$

$$+\sum_{\kappa=2}^{\infty}[(\kappa-1)(b_\kappa-z_0b_{\kappa-1})-\bar{a}_\kappa](z+z_0)^{-\kappa}. \qquad (4)$$

Введемо заміну $z=\xi+z_0$. Тоді з (2) і (4) одержимо

$$\Phi(\zeta)=\Phi_1(\zeta+z_0)=-\frac{1}{2}q+\frac{N}{2\pi i}\ln\frac{\zeta+z_0-a}{\zeta+z_0+a}+$$

$$+\sum_{\kappa=2}^{\infty}[a_\kappa\zeta^{-\kappa}+b_\kappa(\zeta+2z_0)^{-\kappa}] \quad \text{при } |\zeta|>1; \qquad (5)$$

$$\Psi(\zeta)=\Psi_1(\zeta+z_0)+\bar{z}_0\Phi'_1(\zeta+z)=\frac{Na(\zeta+2z_0)}{\pi i[(\zeta+z_0)^2-a^2]}+$$

$$+\sum_{\kappa=2}^{\infty}\{[(\kappa-1)(a_\kappa+2z_0a_{\kappa-1})-\bar{b}_\kappa]\zeta^{-\kappa}+[(\kappa-1)b_\kappa-\bar{a}_\kappa](\zeta+2z_0)^{-\kappa}\}. \qquad (6)$$

При ζ по модулю, близькому до одиниці, з (5), і (6), якщо розкласти праві частини по степенях ζ, одержимо

$$\Phi(\zeta)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}(M_\kappa+A_\kappa)\zeta^\kappa+\sum_{\kappa=2}^{\infty}a_\kappa\zeta^{-\kappa} \quad (|\zeta|>1); \qquad (7)$$

$$\Psi(\zeta)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}(T_\kappa+B_\kappa)\zeta^\kappa+\sum_{\kappa=2}^{\infty}[(\kappa-1)(a_\kappa+2z_0a_{\kappa-1})-\bar{b}_\kappa]\zeta^{-\kappa} \quad (|\zeta|>1), \qquad (8)$$

де

$$M_0=-\frac{1}{2}\left(q+\frac{Na}{\pi}\right);\; M_\kappa=(-1)^{\kappa+1}\cdot\frac{N}{2\pi i\kappa}\left[\frac{1}{(z_0-a)^\kappa}-\frac{1}{(z_0+a)^\kappa}\right] \quad (\kappa\geqslant 1);$$

$$T_\kappa=(-1)^{\kappa+1}\cdot\frac{N}{2\pi i}\left[\frac{z_0+a}{(z_0-a)^{\kappa+1}}-\frac{z_0-a}{(z_0+a)^{\kappa+1}}\right] \quad (\kappa\geqslant 0);$$

$$A_\kappa=(-1)^\kappa\sum_{n=2}^{\infty}(2z_0)^{-\kappa-n}C^\kappa_{n+\kappa-1}b_n;$$

$$B_\kappa = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^\kappa (2z_0)^{-\kappa-n} C^\kappa_{n+\kappa-1} [(n-1)\, b_n - \bar{a}_n];$$

α — кут між прямими, що проходять через центр колового отвору і точки $-a$ і $+a$ на прямолінійному контурі L.

Поширюючи визначення функції $\Phi(\zeta)$ на область $|\zeta|<1$, з (7) і (8) при $|\zeta|<1$ знайдемо

$$\Phi(\zeta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \{(\kappa-1)(\bar{M}_\kappa + \bar{A}_\kappa)\zeta^{-\kappa} + [(\kappa+1)(\bar{a}_{\kappa+2} - 2z_0\, \bar{a}_{\kappa+1}) - b_{\kappa+1}]\, \zeta^\kappa\} -$$

$$- \sum_{\kappa=2}^{\infty} (\kappa+1)\, \bar{a}_\kappa \zeta^\kappa - (\bar{T}_{\kappa-2} + \bar{B}_{\kappa-2})\, \zeta^{-\kappa}]. \qquad (9)$$

Нехай $\Phi_1(\zeta)$ і $\Psi_1(\zeta)$ — функції напруг в кільці, визначені при $|\zeta|<1$. Тоді, поширюючи визначення функції $\Phi_1(\zeta)$ на область $|\zeta|>1$, на контурі спая одержимо граничні умови

$$\Phi^-(\sigma) - \Phi^+(\sigma) = \sigma_\rho + i\tau_{\rho\varphi}; \qquad \Phi_1{}^+(\sigma) = \Phi_1{}^-(\sigma) = \sigma_\rho + i\tau_{\rho\varphi};$$

$$\varkappa\Phi^-(\sigma) + \Phi^+(\sigma) = 2\mu g'(\sigma); \qquad \varkappa_1\Phi_1{}^+(\sigma) + \Phi_1{}^-(\sigma) = 2\mu_1 g'(\sigma). \quad (10)$$

Звідки, після деяких перетворень, маємо

$$[\Phi_1(\sigma) + \Phi(\sigma)]^+ - [\Phi_1(\sigma) + \Phi(\sigma)]^- = 0 \qquad \text{на } L_1; \qquad (11)$$

$$[\Phi_1(\sigma) - r_1\Phi(\sigma)]^+ + r_2[\Phi_1(\sigma) - r_1\Phi(\sigma)]^- = 0, \qquad \text{на } L_1, \qquad (12)$$

де

$$r_1 = \frac{1+\varkappa}{(1+\varkappa_1)\, r_0}; \qquad r_2 = \frac{r_0+\varkappa}{1+r_0\varkappa_1}; \quad r_0 = \frac{\mu}{\mu_1};$$

$\varkappa$ і μ, $\varkappa_1$ і μ_1 — пружні постійні пластинки і кільця.

Рівняння (11) і (12) задовольняються, якщо покласти

$$\Phi_1(\zeta) + \Phi(\zeta) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} P_\kappa \zeta^\kappa + \sum_{\kappa=1}^{\infty} N_\kappa \zeta^{-\kappa} \qquad (|\zeta| \lesseqgtr 1), \qquad (13)$$

$$\Phi_1(\zeta) - r_1\Phi(\zeta) = \begin{cases} \sum\limits_{\kappa=0}^{\infty} P'_\kappa \zeta^\kappa + \sum\limits_{\kappa=1}^{\infty} N'_\kappa \zeta^{-\kappa} & (|\zeta|<1), \\ -\dfrac{1}{r_1}\left(\sum\limits_{\kappa=0}^{\infty} P'_\kappa \zeta^\kappa + \sum\limits_{\kappa=1}^{\infty} N'_\kappa \zeta^{-\kappa}\right) & (|\zeta|>1). \end{cases} \qquad (14)$$

Розв'язавши рівняння (13) і (14) відносно функції $\Phi(\zeta)$ і $\Phi_1(\zeta)$, знайдемо їх значення як при $|\zeta|>$ для $|\zeta|$, який достатньо мало відрізняється від 1. Потім, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ζ в одержаному значенні функції $\Phi(\zeta)$ і її значенні згідно (7) і (9), знайдемо коефіцієнти P_κ, N_κ, P'_κ і N'_κ через раніш введені, а тим самим знайдемо і функцію $\Phi_1(\zeta)$ у вигляді

$$\Phi_1(\zeta)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}E_\kappa\zeta^\kappa+\sum_{\kappa=2}^{\infty}F_\kappa\zeta^{-\kappa}\qquad(|\zeta|<1);\tag{15}$$

$$\Phi_1(\zeta)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}E'_\kappa\zeta^\kappa+\sum_{\kappa=2}^{\infty}F'_\kappa\zeta^{-\kappa}\qquad(|\zeta|>1),\tag{16}$$

$$E_0=\frac{1}{1+r_2}\left[(r_1r_2+2r_2-r_1)(A_0+M_0)+(r_1-r_2)(a_2-b_2)\right];$$

$$E_\kappa=\frac{1}{1+r_2}\left[r_2(1+r_1)(A_\kappa+M_\kappa)+\right.$$

$$\left.+(r_2-r_1)\left\{(\kappa+1)(\overline{a}_\kappa-\overline{a}_{\kappa+2}+2z_0\overline{a}_{\kappa+1})+b_{\kappa+2}\right\}\right];$$

$$F_\kappa=\frac{1}{1+r_2}\left[r_2(1+r_1)a_\kappa+(r_1-r_2)\left\{(\kappa-1)(\overline{A}_\kappa+\overline{M}_\kappa)+\overline{T}_{\kappa-2}+\overline{B}_{\kappa-2}\right\}\right];$$

$$E'_0=\frac{1}{1+r_2}\left[r_1r_2-r_1-2)(A_0+M_0)+(1+r_1)(a_2-b_2)\right];$$

$$E'_\kappa=\frac{1}{1+r_2}\left[r_1r_2-1)(A_\kappa+M_\kappa)-\right.$$

$$\left.-(1+r_1)\left\{(\kappa+1)(\overline{a}_\kappa-\overline{a}_{\kappa+2}+2z_0\overline{a}_{\kappa+1})+b_{\kappa+2}\right\}\right];$$

$$F'_\kappa=\frac{1}{1+r_2}\left[r_1r_2-1)a_\kappa+(1+r_1)\left\{(\kappa-1)(\overline{A}_\kappa+\overline{M}_\kappa)+\overline{T}_{\kappa-2}+\overline{B}_{\kappa-2}\right\}\right].$$

Далі покладемо $\zeta=r\zeta_0$. Тоді з (15) одержимо

$$\Phi_2(\zeta_0)=\Phi_1(r\xi_0)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}r^{-\kappa}E_\kappa\zeta_0^\kappa+\sum_{\kappa=2}^{\infty}r^{-\kappa}F_\kappa\zeta_0^{-\kappa}\qquad(|\zeta_0|>1).\tag{17}$$

Поширюючи визначення функції $\Phi_2(\zeta_0)$ на область $|\zeta_0|<1$, знайдемо

$$\Phi_2(\zeta_0)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}r^{-\kappa}\left[r^{-2}-1)(\kappa+1)\overline{F}_\kappa+r^{-2}E'_\kappa\right]\zeta_0^\kappa+$$

$$+\sum_{\kappa=1}^{\infty}r^\kappa\left[(1-r^{-2})(\kappa-1)\overline{E}_\kappa+r^{-2}F'_\kappa\right]\zeta_0^{-\kappa}+(r^{-2}-1)\overline{E}_0+E'_0r^{-2}$$

$$(|\zeta_0|<1).\tag{18}$$

Гранична умова на внутрішнім контурі кільця буде така:

$$\Phi_2^+(\sigma_0)-\Phi_2^-(\sigma_0)=P,\tag{19}$$

що, враховуючи (17) і (18), дає слідуючу систему для визначення коефіцієнтів a_κ і b_κ:

$$(1-2r^2)E_0+E'_0=r^2P;$$

$$(1-r^2)(\kappa+1)\overline{F}_\kappa + E'_\kappa - E_\kappa r^{2\kappa+2} = 0 \quad (\kappa \geqslant 1);$$

$$(1-r^2)(\kappa-1)\overline{E}_\kappa - F'_\kappa + F_\kappa r^{-2\kappa+2} = 0 \quad (\kappa \geqslant 2).$$

В окремому випадку, якщо покласти $r = 0{,}8$, $a = h = 2$, $E = 26 \cdot 10^3$ *кг/см²*, $E_1 = 140 \cdot 10^3$ *кг/см²*, $\nu = 0{,}3$, $\nu_1 = 0{,}16$ (ν, ν_1 — коефіцієнти Пуассона), $\varkappa = 1{,}8$, $\varkappa_1 = 2{,}36$, для компонентів напруг одержимо:

В кільці на контурі спая:

$$\sigma_\varphi\big|_{\varphi=0} = 2{,}32P - 4{,}04q - 2{,}46N, \qquad \sigma_\rho\big|_{\varphi=0} = -0{,}264P - 0{,}890q - 0{,}630N,$$

$$\sigma_\varphi\big|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = 2{,}35P - 4{,}06q - 2{,}65N, \qquad \sigma_\rho\big|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = -0{,}264P - 0{,}889q - 0{,}589N,$$

$$\sigma_\varphi\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 2{,}42P - 4{,}08q - 2{,}50N, \qquad \sigma_\rho\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -0{,}261P - 0{,}891q - 0{,}443N.$$

В точці A:

$$\sigma_x = 0{,}325P - 1{,}14q - 1{,}56N.$$

В кільці на контурі L_0:

$$\sigma_\varphi\big|_{\varphi=0} = 3{,}21P - 4{,}99q - 5{,}94N,$$

$$\sigma_\varphi\big|_{\varphi=\frac{\pi}{6}} = 3{,}26P - 5{,}02q - 5{,}42N,$$

$$\sigma_\varphi\big|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 2{,}89P - 4{,}85q + 1{,}02N.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Основные граничные задачи теории упругости для полуплоскости. Сооб. АН Груз. ССР, т. 11, № 10, 1941.

2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 4-е, М., 1954.

3. Карцивадзе И. Н. Эффективное решение основных задач теории упругости для некоторых областей. Сооб. АН Груз. ССР, т. 7, № 8, 1946.

4. Араманович И. Г. О распределении напряжений в упругой полуплоскости, ослабленной подкрепленным круговым отверстием. ДАН СССР, т. 104, № 3, 1955.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

І. О. ПРУСОВ

РОЗТЯГ БЕЗКОНЕЧНОЇ ПЛАСТИНКИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ, ПІДКРІПЛЕНИМ КІЛЬЦЕМ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

Розглядається всесторонній розтяг безконечної ізотропної пластинки, в круговий отвір якої до моменту розтягу впаяно без попереднього натягу кільце з другого матеріалу, обмежене по зовнішньому контуру колом, а по внутрішньому — центрально розміщеним з ним еліпсом.

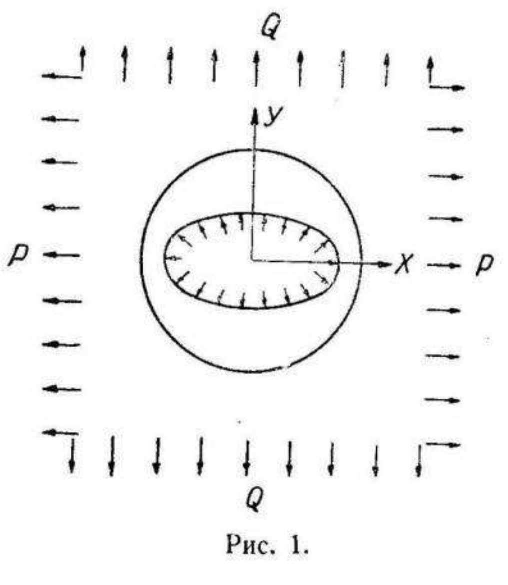

Рис. 1.

Задача рішається методом лінійного спряження [1, 2]. Рішення будується таким шляхом, що граничні умови на контурі спаю виконуються тотожньо, навіть якщо обмежитись конечним числом членів в розкладі в ряд функції напруження.

Нехай R — радіус отвору, L і L_1 — відповідно контур спаю і еліптичний контур кільця, по осям якого спрямовані осі декартової системи координат XOY (рис. 1).

Знайдемо напружений стан в пластинці і підкріплюючому кільці, поклавши, що на безконечності пластинка розтягується рівномірно розподіленими силами інтенсивності

$$\sigma_x = P, \quad \sigma_y = Q, \quad \tau_{xy} = 0, \tag{1}$$

а внутрішній контур кільця піддається рівномірному тиску q.

Введемо в розгляд функцію $z = \omega(\zeta) = R\zeta$, яка конформно перетворює зовнішність контуру L комплексної площини z на зовнішність одиничного кола γ комплексної площини ζ і позначимо через $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$, $\Phi_1(\zeta)$ і $\Psi_1(\zeta)$ функції напруження Колосова-Мусхелішвілі, які визначають напружений стан в пластинці і кільці.

Функції $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ визначені при $|\zeta| > 1$, в області, яка відповідає області пластинки. Розширимо визначення функції $\Phi(\zeta)$ на область $|\zeta| < 1$, поклавши при $|\zeta| < 1$,

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = -\omega'(\zeta)\overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \left(\frac{1}{\zeta^2}\right)\omega(\zeta)\overline{\Phi'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{\zeta^2}\omega'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\overline{\psi}\left(\frac{1}{\zeta}\right). \tag{2}$$

З останньої формули маємо

$$\omega'(\zeta)\Psi(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2}\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)\left[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right] - \overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)\Phi'(\zeta) \quad \text{при } |\zeta| > 1. \tag{3}$$

Компоненти напруження і зміщення через функції $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ виражаються у вигляді [1]

$$\sigma_\rho + \sigma_\varphi = 2\left[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}\right]; \tag{4}$$

$$\sigma_\rho + i\tau_{\rho\varphi} = \Phi(\zeta) - \Phi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) + \bar{\zeta}^2\left[\frac{\omega(\bar{\zeta}^{-1})}{\omega'(\bar{\zeta}^{-1})} - \frac{\omega(\zeta)}{\varrho^2\,\omega'(\zeta)}\right]\overline{\Phi'(\zeta)} +$$

$$+ \zeta^2\,\overline{\omega'(\zeta)}\left[\frac{1}{\omega'(\bar{\zeta}^{-1})} - \frac{1}{\varrho^2\,\omega'(\zeta)}\right]\overline{\psi(\zeta)}; \tag{5}$$

$$2\mu(u' + iv') = i\zeta\omega'(\zeta)\left[\varkappa\Phi(\zeta) + \Phi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)\right] - i\varrho^2\,\omega'(\zeta)\left[\frac{\bar{\zeta}\,\omega(\bar{\zeta}^{-1})}{\omega'(\bar{\zeta}^{-1})} -\right.$$

$$\left. - \frac{\omega(\zeta)}{\zeta\omega'(\zeta)}\right]\overline{\Phi'(\zeta)} - i\varrho^2\,\omega'(\zeta)\,\overline{\omega'(\zeta)}\left[\frac{\bar{\zeta}}{\omega'(\bar{\zeta}^{-1})} - \frac{1}{\zeta\omega'(\zeta)}\right]\overline{\psi(\zeta)}, \tag{6}$$

де

$$u' = \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \zeta = \varrho e^{i\varphi},$$

На основі рівнянь (5) і (6) для функції $\Phi(\zeta)$ маємо граничні умови

$$\Phi^-(\sigma) - \Phi^+(\sigma) = \sigma_\rho + i\tau_{\rho\varphi} \qquad \text{на } \gamma; \tag{7}$$

$$\varkappa\left[\omega'(\sigma)\,\Phi(\sigma)\right]^- + \left[\omega'(\sigma)\,\Phi(\sigma)\right]^+ = 2\mu g'(\sigma) \qquad \text{на } \gamma. \tag{8}$$

Аналогічним шляхом для функції $\Phi_1(\zeta)$, розширивши її визначення на область $|\zeta| > 1$, одержимо

$$\Phi_1^+(\sigma) - \Phi_1^-(\sigma) = \sigma_\rho + i\tau_{\rho\varphi} \qquad \text{на } \gamma; \tag{9}$$

$$\varkappa_1\left[\Phi_1(\sigma)\,\omega'(\sigma)\right]^+ + \left[\Phi_1(\sigma)\,\omega'(\sigma)\right]^- = 2\mu_1\,g'(\sigma) \qquad \text{на } \gamma, \tag{10}$$

де $\varkappa$ і μ — пружні постійні матеріалу пластинки; $\varkappa_1$ і μ_1 — пружні постійні матеріалу кільця.

З рівнянь (7)—(10), після виключення невідомих, які стоять в правих частинах, маємо

$$\Phi^-(\sigma) - \Phi^+(\sigma) = \Phi_1^+(\sigma) - \Phi_1^-(\sigma) \qquad \text{на } \gamma; \tag{11}$$

$$\varkappa\Phi^-(\sigma) + \Phi^+(\sigma) = r\left[\varkappa_1\,\Phi_1^+(\sigma) + \Phi_1^-(\sigma)\right] \qquad \text{на } \gamma; \tag{12}$$

де через r позначено відношення $\frac{\mu}{\mu_1}$.

З рівнянь (11) і (12) шляхом їх лінійної комбінації, одержимо

$$\left[\Phi_1(\sigma) + \Phi(\sigma)\right]^+ - \left[\Phi_1(\sigma) + \Phi(\sigma)\right]^- = 0; \tag{13}$$

$$\left[\Phi_1(\sigma) - r_1\,\Phi(\sigma)\right]^+ + r_2\left[\Phi_1(\sigma) - r_1\,\Phi(\sigma)\right]^- = 0, \tag{14}$$

де

$$r_1 = \frac{1 + \varkappa}{r(1 + \varkappa_1)}; \qquad r_2 = \frac{r + \varkappa}{1 + r\varkappa_1}.$$

Очевидно, що рівняння (13) буде виконуватись, якщо покладемо

$$\Phi_1(\zeta)+\Phi(\zeta)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} M_\kappa \zeta^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty} N_\kappa \zeta^{-\kappa} \qquad \text{при } |\zeta|\leqq 1. \tag{15}$$

Далі покладемо $\Phi_1(\zeta)-r_1\Phi(\zeta)=\begin{cases}\Omega(\zeta) & \text{при } |\zeta|<1,\\ -\dfrac{1}{r_2}\Omega(\zeta) & \text{при } |\zeta|>1.\end{cases}$ (16)

Тоді з (14) одержимо рівняння, яке буде виконуватись, коли покладемо

$$\Omega(\zeta)=\sum_{\kappa=0}^{\infty} M'_\kappa \zeta^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty} N'_\kappa \zeta^{-\kappa} \qquad \text{при } |\zeta|\leqq 1.$$

Тому з рівняння (16) маємо

$$\Phi_1(\zeta)-r_1\Phi(\zeta)=\begin{cases}\sum\limits_{\kappa=0}^{\infty} M'_\kappa \zeta^\kappa+\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty} N'_\kappa \zeta^{-\kappa} & \text{при } |\zeta|<1,\\ -\dfrac{1}{r_2}\left(\sum\limits_{\kappa=0}^{\infty} M'_\kappa \zeta^\kappa+\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty} N'_\kappa \zeta^{-\kappa}\right) & \text{при } |\zeta|>1.\end{cases} \tag{17}$$

Розв'язавши рівняння (15) і (17) відносно $\Phi(\zeta)$ і $\Phi_1(\zeta)$, одержимо

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{1+r_1}\left[\sum_{\kappa=0}^{\infty}(M_\kappa-M'_\kappa)\zeta^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty}(N_\kappa-N'_\kappa)\zeta^{-\kappa}\right] \quad \text{при } |\zeta|<1; \tag{18}$$

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{1+r_1}\left[\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left(M_\kappa+\frac{M'_\kappa}{r_2}\right)\zeta^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(N_\kappa+\frac{N'_\kappa}{r_2}\right)\zeta^{-\kappa}\right] \quad \text{при } |\zeta|>1; \tag{19}$$

$$\Phi_1(\zeta)=\frac{1}{1+r_1}\left[\sum_{\kappa=0}^{\infty}(r_1M_\kappa+M'_\kappa)\zeta^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty}(r_1N_\kappa+N'_\kappa)\zeta^{-\kappa}\right] \text{при } |\zeta|<1; \tag{20}$$

$$\Phi_1(\zeta)=\frac{1}{1+r_1}\left[\sum_{\kappa=0}^{\infty}\left(r_1M_\kappa-\frac{M'_\kappa}{r_2}\right)\zeta^\kappa+\sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(r_1N_\kappa-\frac{N'_\kappa}{r_2}\right)\zeta^{-\kappa}\right] \text{при } |\zeta|>1. \tag{21}$$

Якщо далі врахувати, що функція $\Phi(\zeta)$, визначена на всій площині змінного ζ (з лінією струбків на γ), в околі нуля і безконечно віддаленої точки в нашому випадку має вигляд

$$\Phi(\zeta)=\Gamma+0\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \text{ при } \zeta\to\infty, \qquad \Phi(\zeta)=\frac{\Gamma'}{\zeta^2}+0\,(1) \text{ при } \zeta\to 0,$$

де

$$\Gamma=\frac{1}{4}(P+Q), \qquad \Gamma'=\frac{1}{2}(Q-P),$$

то з рівнянь (18) і (19) знайдемо, що

$$M_0+\frac{1}{r^2}M'_0=(1+r_1)\Gamma, \qquad N_1-N'_1=0,$$

$$M_\kappa+\frac{1}{r_2}M'_\kappa=0\ (\kappa\geqslant 1), \quad N_2-N'_2=(1+r_1)\Gamma',$$

$$N_1+\frac{1}{r_2}N'_1=0, \qquad N_\kappa-N'_\kappa=0\ (\kappa\geqslant 3).$$

А тоді праві частини в співвідношеннях (18)—(21) через невідомі коефіцієнти M_κ і N_κ виразяться так:

$$\Phi(\zeta)=\frac{1+r_2}{1+r_1}\sum_{\kappa=0}^{\infty}M_\kappa\zeta^\kappa-\Gamma r_2+\frac{\Gamma'}{\zeta^2} \quad \text{при } |\zeta|<1; \tag{18'}$$

$$\Phi(\zeta)=\frac{1+r_2}{(1+r_1)r_2}\sum_{\kappa=2}^{\infty}N_\kappa\zeta^{-\kappa}+\Gamma-\frac{1}{\zeta^2}\frac{\Gamma'}{r_2} \quad \text{при } |\zeta|>1; \tag{19'}$$

$$\Phi_1(\zeta)=\frac{r_1-r_2}{1+r_1}\sum_{\kappa=0}^{\infty}M^\kappa\zeta^\kappa+\sum_{\kappa=2}^{\infty}N_\kappa\zeta^{-\kappa}-\frac{\Gamma'}{\zeta^2}+\Gamma r_2 \quad \text{при } |\zeta|<1; \tag{20'}$$

$$\Phi_1(\zeta)=\sum_{\kappa=0}^{\infty}M_\kappa\zeta^\kappa+\frac{r_1r_2-1}{(1+r_1)r_2}\sum_{\kappa=2}^{\infty}N_\kappa\zeta^{-\kappa}+\frac{\Gamma'}{r_1\zeta^2}-\Gamma \quad \text{при } |\zeta|>1. \tag{21'}$$

M_κ і N_κ — взагалі кажучи, комплексні постійні. Однак в нашому випадку, внаслідок геометричної і силової симетрії, ці постійні будуть дійсними числами. Крім того, на тій самій основі коефіцієнти при непарних степенях змінного ζ дорівнюють нулю.

Невідомі, які входять в рівняння (18)—(21), знайдемо, задовольнивши граничні умови на внутрішньому контурі кільця. Маючи це на меті, введемо нову відображаючу функцію

$$z=\omega_0(\zeta_0)=R_1\left(\zeta_0+\frac{m}{\zeta_0}\right), \tag{22}$$

яка дає конформне відображення зовнішності контуру L_1 на зовнішність одиничного круга $|\zeta_0|>|\sigma_0|=1$, коло якого позначимо через γ_0.

Нехай $\Phi_2(\zeta_0)=\Phi_1(\zeta)$ і $\Psi_2(\zeta_0)=\Psi_1(\zeta)$ — функції Колосова-Мусхелішвілі, визначені в частині області $|\zeta_0|>1$, яка відповідає області кільця, де на основі (1) і (22)

$$\zeta=r_0\left(\zeta_0+\frac{m}{r_0}\right); \qquad r_0=\frac{R_1}{R}<1. \tag{23}$$

Розширимо визначення функції $\Phi_2(\zeta_0)$ на область $|\zeta_0|<1$, поклавши

$$\omega'_0(\zeta_0)\Phi_2(\zeta_0)=-\omega'_0(\zeta_0)\overline{\Phi}_2\left(\frac{1}{\zeta_0}\right)+\frac{\omega_0(\zeta_0)}{\zeta_0^2}\overline{\Phi}'_2\left(\frac{1}{\zeta_0}\right)+\frac{\overline{\omega}'_0(1/\zeta_0)}{\zeta_0^2}\overline{\Psi}_2\left(\frac{1}{\zeta_0}\right)$$

$$\text{при } |\zeta_0|<1. \tag{24}$$

Тоді, виходячи з (5), маємо граничну умову

$$[\omega'_0(\sigma_0)(\Phi_2(\sigma_0)]^+ - [\omega'(\sigma_0)\,\Phi_2(\sigma_0)]^- = q\,\omega'_0(\sigma_0) \qquad \text{на } \gamma_0. \tag{25}$$

Знайдемо тепер вираз функції $\omega'_0(\zeta_0)\Phi_2(\zeta_0)$ як при $|\zeta|>1$, так і при $|\zeta|<1$ через параметри M_κ і N_κ. Підставляючи в (20′) значення ζ з (23) і помноживши праву і ліву частини (20′) на $\omega'_0(\zeta_0)$, в результаті після нескладних перетворень одержимо

$$\omega'_0(\zeta_0)\,\Phi_2(\zeta_0) = R_1\sum_{\kappa=0}^{\infty}(A_\kappa - mA_{\kappa+2})\,\zeta_0^\kappa + R_1\sum_{\kappa=4}^{\infty}[B_\kappa - mB_{\kappa-2})\,\zeta_0^{-\kappa} + R_1\frac{B_1 - mA'_0}{\zeta_0^2}$$

$$\text{при } |\zeta_0|>1, \tag{26}$$

де

$$B_\kappa = \sum_{n=\kappa}^{\infty} a_n r_0^n m^{\frac{n+\kappa}{2}} C_n^{\frac{n+\kappa}{2}} + \sum_{n=2}^{\kappa}(-m)^{\frac{\kappa-n}{2}} C_{\frac{\kappa+n}{2}-1}^{\frac{\kappa-n}{2}} b_n r_0^{-n} \qquad (\kappa\geqslant 2);$$

$$A_\kappa = \sum_{n=\kappa}^{\infty} a_n r_0^n m^{\frac{n-\kappa}{2}} C_n^{\frac{n-\kappa}{2}} \quad (\kappa\geqslant 0); \qquad a_0 = r_3 M_0 + \Gamma r_2;$$

$$b_2 = N_2 - \Gamma'; \qquad a_\kappa = r_3 M_\kappa \quad (\kappa\geqslant 2);$$

$$b_\kappa = N_\kappa \quad (\kappa\geqslant 4); \qquad r_3 = \frac{1-r}{1+r\varkappa_1}.$$

Виходячи з формул (20) і (21) і формули, аналогічної (3), в якій ζ по модулю треба вважати меншим одиниці, знайдемо, $\Psi_1(\zeta)$, а потім і функцію $\Psi_2(\zeta_0)$, визначену при $|\zeta_0|>1$ в області кільця, у вигляді

$$\Psi_2(\zeta_0) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} A'_\kappa \zeta_0^\kappa + \sum_{\kappa=2}^{\infty} B'_\kappa \zeta_0^{-\kappa}, \tag{27}$$

де

$$A'_\kappa = \sum_{n=\kappa}^{\infty} a'_n r_0^n m^{\frac{n-\kappa}{2}} C_n^{\frac{n-\kappa}{2}} \qquad (\kappa\geqslant 0);$$

$$B'_\kappa = \sum_{n=\kappa}^{\infty} a'_n r_0^n m^{\frac{n+\kappa}{2}} C_n^{\frac{n+\kappa}{2}} + \sum_{n=2}^{\kappa}(-m)^{\frac{\kappa-n}{2}} C_{\frac{\kappa+n}{2}-1}^{\frac{\kappa-n}{2}} b'_n r_0^{-n} \qquad (\kappa\geqslant 2)$$

$$a'_0 = -r_3 M_2 + r_4 N_2 + \frac{\Gamma'}{r_2}; \quad b'_2 = r_3 M_0 + \Gamma r_2 + M_0 - \Gamma;$$

$$b'_4 = 3(N_2 - \Gamma') + M_2; \quad r_4 = \frac{\varkappa - r\varkappa_1}{r+\varkappa};$$

$$a'_\kappa = -(\kappa+1) r_3 M_{\kappa+2} + r_4 N_{\kappa+2} \quad (\kappa\geqslant 2);$$

$$b'_\kappa + (\kappa-1) N_{\kappa-2} + M_{\kappa-2} \qquad (\kappa\geqslant 6).$$

Далі, на основі (24) знайдемо вираз для функції $\omega'_0(\zeta_0)\Phi_2(\zeta_0)$ при $|\zeta_0|<1$

$$\omega'_0(\zeta_0)\Phi_2(\zeta_0)=R_1\sum_{\kappa=4}^{\infty}[(\kappa-1)(A_\kappa+mA_{\kappa-2})+A'_{\kappa-2}-mA'_\kappa]\zeta_0^{-\kappa}-$$

$$-R_1\sum_{\kappa=2}^{\infty}[(\kappa+1)(B_\kappa+mB_{\kappa+2})+mB'_\kappa-B'_{\kappa+2}]\zeta_0^\kappa+$$

$$+R_1(-A_0-mA'_0+B'_2-mB_2)+R_1(A'_0+mA_0+A_2-mA'_2)\zeta_0^{-2} \qquad (28)$$

Будемо вимагати, щоб праві частини (26) і (28) задовольняли граничній умові (25). Тоді, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях σ_0, одержимо систему

$$-A_0-mA'_0+B'_2-mB_2=A_0-mA_2+q;$$

$$A'_0+mA_0+A_2-mA'_2=B_2-mA_0-mq;$$

$$(\kappa+1)(B_\kappa+mB_{\kappa+2})+mB'_\kappa-B'_{\kappa+2}=-A_\kappa+mA_{\kappa+2} \quad (\kappa\geqslant 2); \qquad (29)$$

$$(\kappa+1)(A_{\kappa+2}+mA_{\kappa+4})+A'_\kappa-mA'_{\kappa+2}=B_{\kappa+2}-mB_\kappa \quad (\kappa\geqslant 2),$$

з якої, враховуючи прийняті раніше позначення, знайдемо M_κ і N_κ де κ, як вже відмічалось, приймає тільки парні значення.

В окремому випадку при $m=0$ з системи (29) одержимо

$$M_0=\frac{\Gamma}{\Delta_1}(1-r_2+2r_0^2r^2); \quad M_2=\frac{3\Gamma'}{\Delta_2}[1-r_0^2)(1+r_2r_4)r_0^2];$$

$$N_2=\frac{\Gamma'}{\Delta_2}[r_2r_3r_0^2(3-6r_0^2+4r_0^4)+r_3r_0^8-r_2-r_0^2]; \quad M_\kappa=N_\kappa=0 \quad (\kappa\geqslant 4)$$

$$\Delta_1=1+r_3-2r_0^2r_3, \quad \Delta_2=r_2[3r_3(1-r_0^2)^2r_0^2+(r_0^6r_3-1)(1-r_4r_0^2)],$$

що співпадає з результатом Г. М. Савіна в роботі [3].

Приклад. Нехай матеріал пластинки і кільця має пружні постійні $\mu=4{,}42\cdot 10^5$ *кг/см²*, $\nu=0{,}3$, $\mu_1=8{,}1\cdot 10^5$ *кг/см²*, $\varkappa=\varkappa_1=2{,}8$, а лінійні розміри кільця дані відношеннями $R:a:b=15:14:13$. Тоді, обмежуючись тільки п'ятьма невідомими членами в системі (29), тобто рахуючи M_0, M_2, N_2, M_4, N_4 відмінними від нуля, а $M_\kappa=N_\kappa=0$ $(\kappa>6)$ — рівними нулю, для компонент напруг одержимо формули.

На еліптичному контурі кільця:

$$\varphi_\varphi=\frac{1}{R(\varphi)}[1{,}753P+1{,}570Q+1{,}792q+(-3{,}053P+3{,}202Q+$$

$$+0{,}199q)\cos 2\varphi+(-0{,}055P+0{,}077Q+0{,}018q)\cos 4\varphi+$$

$$+(0{,}094P-0{,}114Q-0{,}017q)\cos 6\varphi+(-0{,}009P+0{,}011Q+$$

$$+0{,}0014q)\cos 8\varphi \qquad R(\varphi)=1-2m\cos 2\varphi+m^2.$$

В кільці на контурі спаю:

$$\sigma_\varphi=1{,}420P+1{,}596Q+1{,}535q+(-2{,}019P+2{,}399Q+0{,}182q)\cos 2\varphi+$$

$$+(-0{,}225P+0{,}287Q+0{,}052q)\cos 4\varphi;$$

$$\sigma_\rho = 0{,}199\,P + 0{,}114\,Q - 0{,}738\,q + (-0{,}211\,P + 0{,}178\,Q - 0{,}028\,q)\cos 2\varphi +$$
$$+ (-0{,}040\,P + 0{,}026\,Q - 0{,}012\,q)\cos 6\varphi;$$

В пластинці на контурі спаю:

$$\sigma_\varphi = 0{,}802\,P + 0{,}886\,Q + 0{,}738\,q + (-1{,}130\,P + 1{,}333\,Q + 0{,}170\,q)\cos 2\varphi +$$
$$+ (-0{,}128\,P + 0{,}160\,Q - 0{,}027\,q)\cos 4\varphi.$$

При цьому, граничні умови на еліптичному контурі кільця виконуються приблизно. Найгірше вони виконуються в точках, які визначаються полярним кутом $\varphi = 0$ і $\frac{\pi}{2}$ для нормального тиску σ_ρ і кутом $\varphi = \frac{\pi}{4}$ для $\tau_{\rho\varphi}$. В цих точках

$$\sigma_\rho = -0{,}0169P + 0{,}0230Q - 0{,}995q \quad \text{при } \varphi = 0;$$
$$\sigma_\rho = +0{,}0268P - 0{,}0439Q - 1{,}014q \quad \text{при } \varphi = \frac{\pi}{2};$$
$$\tau_{\rho\varphi} = +0{,}0683P - 0{,}0857Q - 0{,}015q \quad \text{при } \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Як бачимо, точність виконання граничних умов залежить від значення P, Q і q. При $Q \leq P \leq 2Q$ похибка підрахунків практично мала. Очевидно, для одержання рішення з більш точним виконанням граничних умов необхідно взяти більше членів M_k і N_k.

ЛІТЕРАТУРА

1. Карцивадзе И. Н. Эффективное решение основных задач теории упругости для некоторых областей. Сооб. АН Груз. ССР, т. VII, № 8, 1946.
2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
3. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

М. П. ШЕРЕМЕТЄВ, В. І. ТУЛЬЧИЙ

ДЕЯКІ ПИТАННЯ ЗГИНУ ПЛАСТИНОК З ПІДКРІПЛЕННЯМ

І. ГРАНИЧНІ УМОВИ ЗАДАЧІ

Нехай задана область анізотропної пластинки ослаблена отвором, край якого підкріплений тонким пружним ізотропним кільцем постійного перерізу. До зовнішнього контуру пластинки прикладені згинаючі і крутячі моменти, а на підкріпляюче кільце діють віднесені до одиниці довжини дуги згинаючі моменти $m(s)$ і перерізаючі сили $p(s)$.

Нехай одна з головних осей інерції поперечного перерізу кільця лежить в площині недеформуючої осі кільця. Припустимо, що пластинка в кожній точці має одну площину пружної симетрії, паралельну її середній площині. Помістивши початок координат в центрі тяжіння кільця, приймемо середню площину за площину xoy і направимо вісь oz вниз.[1]

Якщо прийняти вісь підкріплюючого кільця за контур спаю, то її рівняння в параметричній формі буде мати вигляд:

$$x = x(s), \quad y = y(s),$$

де s — довжина дуги осі підкріплюючого кільця.

За додатній напрямок обходу контуру приймемо такий, при якому область пластинки залишається зліва.

При взаємодії плити і кільця з умов статичної рівноваги випливає рівність

$$M_n = M_{1n}, \; N_n + \frac{\partial H_{n\tau}}{\partial s} = N_{1n} + \frac{\partial H_{1n\tau}}{\partial s}, \tag{1.1}$$

де M_{1n}, N_{1n}, $H_{1n\tau}$ — відповідні згинаючі моменти, перерізаючі сили і крутячі моменти, які діють на кільце зі сторони пластинки, а M_n, N_n, $H_{n\tau}$ — однойменні величини, але характеризуючі дію кільця на пластинку.

С. Г. Лєхніцький в роботі [1] показав, що умови (1.1) рівносильні співвідношенням

$$\frac{4}{3} h^3 Re \left[\frac{P_1}{\mu_1} \varphi'_1(z_1) + \frac{P_2}{\mu_2} \psi'_2(z_2) \right] = -\int_0^s (M_{1n}\, dy + f dx) - C_0 x + C_1; \tag{1.2}$$

$$\frac{4}{3} h^3 Re \left[q_1 \varphi'_1(z_1) + q_2 \psi'_2(z_2) \right] = \int_0^s (-M_{1n}\, dx + f dy) + C_0 y + C_2. \tag{1.3}$$

[1] Припускаємо, що контур спаю має дотичну, яка неперервно змінюється.

Тут C_0, C_1, C_2 — дійсні постійні, крім того, покладено

$$f=\int_0^s\left(\frac{\partial H_{1n\tau}}{\partial\alpha}+N_{1n}\right)d\alpha .$$

Далі, на контурі спаю пластинки і кільця, крім співвідношень (1.1), мають місце рівності

$$[W(s)=W_1(s)],\ \frac{\partial W}{\partial n}=\gamma, \tag{1.4}$$

де $W(s)$, $W_1(s)$ — відповідно прогин середньої площини пластинки і прогин осі кільця, а γ — кут кручення пружної лінії кільця.

Використовуючи залежність $W_1(s)$ і γ від діючого на кільце навантаження, ми, як показано в роботі [2], одержимо

$$\frac{\partial W_1}{\partial s}=\Theta_{Ox}\dot y-\Theta_{Oy}\dot x+\dot y\int_0^s\varepsilon_x\,ds-\dot x\int_0^s\varepsilon_y ds\,; \tag{1.5}$$

$$\gamma=\Theta_{Ox}\dot x+\Theta_{Oy}\dot y+\dot x\int_0^s\varepsilon_x\,ds+\dot y\int_0^s\varepsilon_y\,ds .$$

Причому,

$$\begin{aligned}\varepsilon_x&=\left(\frac{1}{A}\dot y^2+\frac{1}{C}\dot x^2\right)L_x+\dot x\,\dot y\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)L_y\,;\\ \varepsilon_y&=\left(\frac{1}{A}\,\dot x^2+\frac{1}{C}\dot y^2\right)L_y+\dot x\,\dot y\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)L_x .\end{aligned} \tag{1.6}$$

І крім того,

$$L_y+iL_x=L_{Oy}+iL_{Ox}+[\bar z(s)-\bar z_0(s)]\ V_{Oz}-i\int_0^s\bar zM_{1n}\,d\alpha-\int_0^s[\bar z(s)-$$

$$-\bar z(\alpha)]\left[N_{1n}+\frac{\partial H_{1n\tau}}{\partial\alpha}\right]d\alpha-\int_0^s[\bar z(s)-\bar z(\alpha)]\,p(\alpha)d\alpha-i\int_0^s\bar z(s)m(s)\,ds\,, \tag{1.7}$$

де L_x і L_y — проекції головного моменту всіх сил, діючих на підкріпляюче кільце Θ_{Ox}, Θ_{Oy}, L_{Ox}, L_{Oy}, V_{Oz} — довільні дійсні постійні, $\dot x=\frac{dx}{\partial s}$, $\dot y=\frac{dy}{\partial s}$ а A і C — відповідні жорсткості на згин і крутіння для підкріпляючого кільця.

Як відомо [2], співвідношення (1.4) еквівалентні двом умовам, записаним з допомогою функцій φ_1 і ψ_2.

$$2Re\,[\varphi'_1(z_1)+\psi'_2(z_2)]=\frac{\partial W_1}{\partial s}\dot x-\gamma\dot y\,;$$

$$2Re\,[\mu_1\varphi'_1(z_1)+\mu_2\psi'_2(z_2)]=\frac{\partial W_1}{\partial s}\dot{y}+\gamma\dot{x}. \tag{1.8}$$

З метою скорочення запису надалі, покладемо

$$\Omega_1(z_1z_2)=\frac{P_1}{\mu_1}\varphi'_1(z_1)+\frac{P_2}{\mu_2}\psi'_2(z_2),\ \Omega_2(z_1z_2)=\varphi'_1(z_1)+\psi'_2(z_2);$$

$$\Omega_3(z_1z_2)=q_1\varphi'_1(z_1)+q_2\psi'_2(z_2),\ \Omega_4(z_1z_2)=\mu_1\varphi'_1(z_1)+\mu_2\psi'_2(z_2). \tag{1.9}$$

Прийнявши до уваги (1.9), помітимо, що

$$2Re\,\Omega_2(z_1z_2)=Re\left\{\left[\frac{\partial W_1}{\partial s}-i\gamma\right]\dot{\bar{z}}\right\},\ 2Re\,\Omega_4(z_1z_2)=-$$

$$-I_m\left\{\left[\frac{\partial W_1}{\partial s}-i\gamma\right]\dot{\bar{z}}\right\}. \tag{1.10}$$

Поклавши $A=\kappa C$, де κ — довільна величина, і переконуючись в справедливості рівностей

$$k\dot{x}+i\dot{y}=\frac{1}{2}[\dot{z}(1+k)+\dot{\bar{z}}(k-1)],\ \dot{x}+ik\dot{y}=$$

$$=\frac{1}{2}[\dot{z}(1+k)-\dot{\bar{z}}(k-1)] \tag{1.11}$$

на основі (1.5) і (1.6) з (1.10), знайдемо

$$2Re\,\Omega_2(z_1z_2)=Re\left\{-\Theta_{Oy}-\frac{1}{2A}\int_0^s[(L_y+iL_x)(k+1)-\right.$$

$$\left.-\dot{\bar{z}}^2(L_y-iL_x)(k-1)]\,ds\right\}; \tag{1.12}$$

$$2Re\,\Omega_4(z_1z_2)=I_m\left\{\Theta_{Ox}+\frac{1}{2A}\int_0^s[(L_y+iL_x)(k+1)-\right.$$

$$\left.-\dot{\bar{z}}^2(L_y-iL_x)(k-1)]\,ds\right\}. \tag{1.13}$$

Праві частини співвідношень (1.12) і (1.13), як це видно з (1.7), можуть бути явно виражені через діюче на кільце навантаження.

Розглянувши випадок ізотропної пластинки і міркуючи аналогічно викладеному вище, остаточно одержимо

$$(3+\mu)\overline{\varphi}(\bar{z})-(1-\mu)[\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)]=\frac{1}{2D}\int_0^s\left[-M_{1n}+\right.$$

$$\left.+i\int_0^s\left(\frac{\partial H_{1n\tau}}{\partial\alpha}+N_{1n}\right)d\alpha\right]\dot{\bar{z}}\,ds_1+iC\bar{z}-C_1; \tag{1.14}$$

$$\overline{\varphi}(\overline{z})+\overline{z}\varphi'(z)+\psi(z)=-\frac{1}{2}(\Theta_{Oy}+i\Theta_{Ox})-\frac{1}{4A}\int_0^s[(L_y+iL_x)(\kappa+1)+$$

$$+(\kappa-1)\dot{\overline{z}}^2(iL_x-L_y)]\,ds, \qquad (1.15)$$

де також прийнято, що $A=\kappa C$, а вираз L_y+iL_x має значення, вказане в (1.7).

Інколи, при рішенні конкретних задач, доцільно замість чотирьох умов виду (1.2), (1.3), (1.12), (1.13) користуватись однією, яка може бути одержана з них слідуючим шляхом.

В рівностях (1.2) помножимо першу на i і вирахуємо її з другої. Використовуючи при цьому позначення (1.9) знайдемо

$$\frac{4}{3}h^3[Re\,\Omega_3(z_1z_2)-iRe\,\Omega_1'(z_1z_2)]=\int_0^s(-M_{1n}+if)\dot{\overline{z}}\,ds+iC_0\overline{z}+C_3, \quad (1.16)$$

де $C_3=C_2-iC_1$.

Подібним шляхом з рівностей (1.10) одержимо

$$Q(z_1z_2)=\left(\frac{\partial W_1}{\partial s}-i\gamma\right)\dot{\overline{z}}, \qquad (1.17)$$

де покладено

$$Q(z_1z_2)=2\{Re\,\Omega_2(z_1z_2)-iRe\,\Omega_4(z_1z_2)\}. \qquad (1.17\text{a})$$

Враховуючи (1.13) і диференцюючи рівність (1.17) по s, одержимо

$$\frac{\partial Q}{\partial s}=-\frac{1}{2A}[(L_y+iL_x)(\kappa+1)-\dot{\overline{z}}^2(L_y-iL_x)(\kappa-1)]. \qquad (1.18)$$

Далі, підставимо в праву частину (1.18) замість виразу L_y+iL_x його значення з (1.7). Об'єднуючи перетворену таким шляхом рівність (1.18) з співвідношенням (1.16), одержимо

$$B_1\dot{z}_1\Phi'_1(z_1)+B_2\dot{z}_2\Psi'_2(z_2)+B_3\dot{\overline{z}}_1\overline{\Phi}'_1(\overline{z}_1)+B_4\dot{\overline{z}}_2\overline{\Psi}'_2(\overline{z}_2)+$$

$$+R_1\Phi_2(z_1)+R_2\Psi_2(z_2)+R_3\overline{\Phi}_1(\overline{z}_1)+R_4\overline{\Psi}_2(\overline{z}_2)+\dot{z}^2[P_{10}\Phi_1(z_1)+$$

$$+P_{20}\Psi_2(z_2)+P_{30}\overline{\Phi}_1(\overline{z}_2)+P_{40}\overline{\Psi}_2(\overline{z}_2)]=f_1+if_2, \qquad (1.19)$$

де введено позначення

$$f_1+if_2=-(\kappa+1)\Big\{L_{Oy}+iL_{Ox}+[\overline{z}(s)-\overline{z}_0(s)]V_{Oz}+C_0\overline{z}-iC_3-$$

$$-\int_0^s[\overline{z}(s)-\overline{z}(\alpha)]p(\alpha)\,d\alpha-i\int_0^s\dot{\overline{z}}m(s)ds\Big\}-\dot{\overline{z}}^2(\kappa-1)\Big\{iL_{Ox}-L_{Oy}-[z(s)-$$

$$-z_0(s)]V_{Oz}-C_0z-i\overline{C_3}+\int_0^s[z(s)-z(\alpha)]\,p(\alpha)d\alpha-i\int_0^s\dot{z}\,m(s)\,ds\Big\}; \quad (1.20)$$

$$B_j = 2A(1 - i\mu_j);\ B_{\kappa_1} = 2A(1 - i\bar{\mu}_{\kappa_1});$$

$$R_j = \frac{2}{3}(\kappa+1)h^3\left[\frac{p_j}{\mu_j} + iq_j\right];\ R_{\kappa_1} = \frac{2}{3}(\kappa+1)h^3\left[\frac{\bar{p}_{\kappa_1}}{\bar{\mu}_{\kappa_1}} + i\bar{q}_{\kappa_1}\right];$$

$$P_{j_0} = \frac{2}{3}(\kappa-1)h^3\left[iq_j - \frac{p_j}{\mu_j}\right];\ P_{\kappa_{10}} = \frac{2}{3}(\kappa-1)h^3\left[i\bar{q}_{\kappa_1} - \frac{\bar{p}_{\kappa_1}}{\bar{\mu}_{\kappa_1}}\right];$$

$$\varphi'_1(z_1) = \Phi_1(z_1);\ \psi'_2(z_2) = \Psi_2(z_2);\ (j = 1{,}2)(\kappa_1 = 3{,}4).$$

При цьому постійні $p_1, p_2, \ldots \bar{q}_2$ відомим шляхом виражаються через пружні постійні пластинки.

Міркуючи аналогічно, з співвідношень (1.14) і (1.15), написаних для випадку ізотропної пластинки, знайдемо

$$2A\,[\bar{z}\,\overline{\varphi'(z)} + \bar{z}\,\varphi'(z) + z\bar{z}\,\varphi''(z) + z\psi'(z)] + iD(\kappa+1)[(3+\mu)\overline{\varphi(z)} -$$

$$-(1-\mu)(\overline{z\varphi'(z) + \psi(z)})] + iD(\kappa-1)\bar{z}^2[(3+\mu)\varphi(z) -$$

$$-(1-\mu)(\overline{\psi(z)} + z\overline{\varphi'(z)})] = f_1 + if_2. \qquad (1.21)$$

При цьому

$$f_1 + if_2 = -\frac{\kappa+1}{2}\left\{\bar{z}\,V^1_{Oz} - C^1{}_0 - i\int_0^s \bar{z}m(s)\,ds - \int_0^s [\bar{z}(s) -\right.$$

$$\left. - z(\alpha)]p(\alpha)\,d\alpha\right\} - \frac{\kappa-1}{2}\bar{z}^2\left\{C^1{}_0 - zV^1_{Oz} - i\int_0^s z\,m(s)\,ds +\right.$$

$$\left. + \int_0^s [z(s) - z(\alpha)]\,p(\alpha)\,d\alpha\right\},$$

де

$$V^1_{Oz} = C_0 + V_{Oz};\ C^1_0 = iL_{Ox} - L_{Oy} + z_0 V_{Oz} + iC_1. \qquad (1.22)$$

Таким чином, питання про підкріплення контуру анізотропної пластинки зводиться до визначення аналітичних функцій $\varphi_1(z_1)$ і $\psi_2(z_2)$ з чотирьох граничних умов виду (1.2), (1.3), (1.12), (1.13) або з одної умови, записаної в формі (1.19). У випадку ізотропної пластинки початковими можуть бути як умови (1.14), (1.15), так і співвідношення (1.21), з яких і визначаються аналітичні функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$, що рішають поставлену задачу.

Основні співвідношення, раніше одержані в роботі для випадку рівних жорсткостей, легко визначити з наших граничних умов, поклавши в них $\kappa = 1$.

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПІДКРІПЛЮЮЧОГО КІЛЬЦЯ

Пригадуючи (1.18) і виносячи за скобки $\bar{\dot{z}}$, можемо написати

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = -\frac{\bar{\dot{z}}}{2A}\left[\dot{z}(\kappa+1)(L_y+iL_x)-\bar{\dot{z}}(\kappa-1)(L_y-iL_x)\right], \qquad (2.1)$$

або

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = -\frac{\bar{\dot{z}}}{A}\left[L_n + i\kappa L_\tau\right], \qquad (2.2)$$

де

$$L_n = -L_x\cos\alpha - L_y\sin\alpha\,, \quad L_\tau = L_y\cos\alpha - L_x\sin\alpha\,, \quad \alpha = \arg z\,. \qquad (2.3$$

Далі, тому що $W = 2Re[\varphi_1(z_1) + \psi_2(z_2)]$, то

$$Q(z_1 z_2) = \frac{\partial W}{\partial x} - i\frac{\partial W}{\partial y}. \qquad (2.4)$$

Диференцюючи рівність (2.4) по s, одержимо

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{1}{2}\left[(\dot{z}+\bar{\dot{z}})\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (\bar{\dot{z}}-\dot{z})\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2i\dot{z}\,\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right]. \qquad (2.5)$$

Отже, враховуючи (2.5) і помноживши ліву і праву частину рівності (2.2) на $\dot{z}$, напишемо

$$(1+\dot{z}^2)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + (1-\dot{z}^2)\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2i\dot{z}^2\,\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y} = -\frac{2}{A}\left[L_n + i\kappa L_\tau\right]. \qquad (2.6)$$

Як відомо,

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{2}{3}h^3\left[B_{11}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right];\\ M_y &= -\frac{2}{3}h^3\left[B_{12}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{22}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{26}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right];\\ H_{xy} &= -\frac{2}{3}h^3\left[B_{16}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{26}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2B_{66}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}\right]. \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Розрішивши систему (2.7) відносно $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ і $\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}$, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} &= b_1 M_x + b_2 M_y + b_3 H_{xy};\\ \frac{\partial^2 W}{\partial y\partial x} &= d_1 M_x + d_2 M_y + d_3 H_{xy};\\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} &= a_1 M_x + a_2 M_y + a_3 H_{xy}. \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Коефіцієнти b_1, $b_2 \dots a_2$, a_3 виражаються через коефіцієнти системи (2.7) відомим шляхом. Наприклад

$$a_1 = -\frac{3}{2} h^3 \left[\frac{B_{12}(B_{16}^2 - B_{11} B_{66}) - B_{16}(B_{12} B_{16} - B_{11} B_{26})}{(B_{12}^2 - B_{11} B_{22})(B_{16}^2 - B_{11} B_{66}) - B_{11}^2 (B_{16} - B_{26})^2} \right];$$

$$a_2 = -\frac{3}{2} h^3 \left[\frac{B_{11}(B_{11} B_{66} - B_{16}^2)}{(B_{12}^2 - B_{11} B_{22})(B_{16}^2 - B_{11} B_{66}) - B_{11}^2 (B_{16} - B_{26})^2} \right]; \quad (2.9)$$

$$a_3 = -\frac{3}{2} h^3 \left[\frac{B_{11}(B_{16} B_{12} - B_{11} B_{26})}{(B_{12}^2 - B_{11} B_{22})(B_{16}^2 - B_{11} B_{66}) - B_{11}^2 (B_{16} - B_{26})^2} \right].$$

Враховуючи (2.8) і відділяючи дійсну і уявну частини рівності (2.6), знайдемо

$$L_n = -\frac{A}{2} Re \{ [(1 + \dot{z}^2) b_1 - (1 - \dot{z}^2) a_1 - 2i\dot{z}^2 d_1] M_x + [(1 + \dot{z}^2) b_2 +$$

$$+ (1 - \dot{z}^2) a_2 - 2i\dot{z}^2 d_2] M_y + [(1 + \dot{z}^2) b_3 + (1 - \dot{z}^2) a_3 - 2i\dot{z}^2 d_3] H_{xy} \};$$

(2.10)

$$L_\tau = -\frac{C}{2} I_m \{ [(1 + \dot{z}^2) b_1 - (1 - \dot{z}^2) a_1 - 2i\dot{z}^2 d_1] M_x + [(1 + \dot{z}^2) b_2 +$$

$$+ (1 - \dot{z}^2) a_2 - 2i\dot{z}^2 d_2] M_y + [(1 + \dot{z}^2) b_3 + (1 - \dot{z}^2) a_3 - 2i\dot{z}^2 d_3] H_{xy} \}.$$

Внаслідок того, що $H_{1n\tau} = L_\tau$ з (1.1) витікає рівність

$$N_{1n} = N_n + \frac{\partial H_{n\tau}}{\partial s} - \frac{\partial L_\tau}{\partial s},$$

де

$$N_n = -(N_x \cos(nx) + N_y \cos(ny));$$

$$H_{n\tau} = (M_y - M_x) \cos(nx) \cos(ny) + H_{xy} [\cos^2(nx) - \cos^2(ny)].$$

Таким чином, знаючи напружений стан анізотропної пластинки, ми можемо, використовуючи співвідношення (2.10) і (2.11) визначити напружений стан підкріпляючого кільця.

У випадку ізотропної пластинки співвідношення (2.10) і (2.11) значно спрощуються і приводяться до слідуючих формул

$$L_n = \frac{A}{D(1 - \mu^2)} [M_\tau - \mu M_n]; \; L_\tau = \frac{C}{D(1 - \mu^2)} H_{n\tau}. \quad (2.12)$$

Далі, враховуючи, що $H_{1n\tau} = L_\tau$ з (1.1) одержимо

$$N_{1n} = N_n + \left[1 - \frac{C}{D(1 - \mu)} \right] \frac{dH_{n\tau}}{ds}. \quad (2.13)^1$$

[1] Інакше ці формули одержані в дипломній роботі М. І. Швайко (Львівський державний університет ім. Ів. Франка, 1955 р.), виконаної під керівництвом М. П. Шереметєва.

Напружений стан кільця можна визначити і безпосередньо через функції $\varphi_1(z_1)$ і $\psi_2(z_2)$.

З цією метою в праву частину (1.17а) замість $\Omega_2(z_1 z_2)$ і $\Omega_4(z_1 z_2)$ підставимо їх значення з (1.9) і продиференцюємо його по s

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 2Re\left[\dot{z}_1 \varphi''_1(z_1) + \dot{z}_2 \psi''_2(z_2)\right] - i2Re\left[\mu_1 \dot{z}_1 \varphi''_1(z_1) + \mu_2 \dot{z}_2 \psi''_2(z_2)\right]. \quad (2.14)$$

Помноживши рівність (2.2) на $e^{i\alpha}$ і відділяючи уявну і дійсну частини одержаного співвідношення, можемо, враховуючи (2.17), написати

$$L_n = -A2Re\left[\dot{z}_1(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha)\varphi''_1(z_1) + \dot{z}_2(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha)\psi''_2(z_2)\right]; \quad (2.15)$$

$$L_\tau = -C2Re\left[\dot{z}_1(\cos\alpha + \mu_1\sin\alpha)\varphi''_1(z_1) + \dot{z}_2(\cos\alpha + \mu_2\sin\alpha)\psi''_2(z_2)\right].$$

У випадку ізотропної пластинки співвідношення (2.15) спростяться і мають вид

$$\begin{aligned} L_n &= -2ARe\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi}'(\overline{z}) + \overline{z}\dot{z}^2\varphi''(z) + \dot{z}^2\psi'(z)\right]; \\ L_\tau &= -2CI_m\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi}'(\overline{z}) + \overline{z}\dot{z}^2\varphi''(z) + \dot{z}^2\psi'(z)\right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

БЕЗКОНЕЧНА ПЛАСТИНКА З КРУГОВИМ ОТВОРОМ

Нехай підкріпляюче кільце вільне від навантаження, а напружений стан на безконечності — однорідний, тобто $M_x(\infty)$, $M_y(\infty)$ $H_{xy}(\infty)$ — величини обмежені.

Поклавши $z = \kappa\zeta$, відобразимо область пластинки на зовнішність одиничного кола γ_1.

В нашому випадку, як відомо [3], функції $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$ мають вигляд

$$\varphi(\zeta) = -\frac{A}{4D(1+\mu)}R\zeta + \varphi_0(\zeta), \quad \psi(\zeta) = \frac{BR}{2D(1-\mu)}\zeta + \psi_0(\zeta), \quad (3.1)$$

де $\varphi_0(\zeta)$ і $\psi_0(\zeta)$ — голоморфні в околі безконечно віддаленої точки. На основі (3.1) напишемо

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \frac{a_3}{\zeta^3} + \ldots; \quad \psi_0(\zeta) = \frac{a'_1}{\zeta} + \frac{a'_2}{\zeta^2} + \frac{a'_3}{\zeta^3} + \ldots; \quad (3.2)$$

Постійним A_1 і B можемо надавати різні значення в залежності від виду навантаження:

Напружений стан	A_1	B
$M_x(\infty) = M_y(\infty) = M$, $H_{xy}(\infty) = 0$	$2M$	0
$M_x(\infty) = 0$ або $M_y(\infty) = 0$, $H_{xy}(\infty) = 0$	M	$\pm M$
$M_x(\infty) = M_y(\infty) = 0$, $H_{xy}(\infty) = H$	0	$2iH$

Згинаючий момент M в другому рядку беремо із знаком плюс, якщо $M_x(\infty)=0$.

Поклавши в граничній умові (1.21) $z=\kappa\zeta$ помножимо її і рівність, що до неї спряжена, на

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$$

$|\zeta|>1$ і проінтегруємо їх по контуру γ_1.

В результаті інтегрування одержимо

$$\frac{2A}{R}\left[\frac{1}{\zeta}\,\varphi'_0(\zeta)-\varphi''_0(\zeta)-\zeta\psi'_0(\zeta)\right]+D(\kappa+1)(1-\mu)\left[\frac{1}{\zeta}\,\varphi'_0(\zeta)+\psi_0(\zeta)\right]+$$

$$+D(\kappa-1)\left[\frac{3+\mu}{\zeta^2}\,\varphi_0(\zeta)-(1-\mu)\frac{\overline{a}'_1}{\zeta}\right]=\frac{R\overline{B}(\kappa-1)}{2}\,\zeta^{-3}+$$

$$+\frac{A_1}{D(1+\mu)}\,[A-RD(1+\mu)]\,\zeta^{-1},$$

$$\frac{2A}{R}\,\zeta\varphi'_0(\zeta)-D(\kappa+1)(3+\mu)\,\varphi_0(\zeta)-D(\kappa-1)(1-\mu)[\zeta\varphi'_0(\zeta)+ \tag{3.3}$$

$$+\zeta^2\psi_0(\zeta)-a'_1\zeta-a'_2]=\frac{B}{2D(1-\mu)}\,[2A-RD(\kappa+1)(1-\mu)]\,\zeta^{-1}.$$

З другого із співвідношень (3.3) знайдемо

$$\psi_0(\zeta)=\frac{\overline{B}[RD(\kappa+1)(1-\mu)-2A]}{2D^2(1-\mu)^2(\kappa-1)}\,\zeta^{-3}+$$

$$+\frac{2A-RD(\kappa-1)(1-\mu)}{RD(\kappa-1)(1-\mu)}\,\zeta^{-1}\varphi'_0(\zeta)-\frac{(\kappa+1)(3+\mu)}{(\kappa-1)(1-\mu)}\,\zeta^{-2}\varphi_0(\zeta)+$$

$$+a'_1\,\zeta^{-1}+a_2\,\zeta^{-2}. \tag{3.4}$$

Підставивши (3.4) в першу рівність, із (3.3) можемо написати

$$\frac{2A}{R}\left[\frac{1}{\zeta}\,\varphi'_0(\zeta)-\varphi''_0(\zeta)+3B'_3\,\zeta^{-3}-B'_1\,\varphi'_0(\zeta)\,\zeta^{-1}+B_2\zeta^{-1}\,\varphi'_0(\zeta)-\right.$$

$$\left.-2B'_2\,\zeta^{-2}\varphi_0(\zeta)+a'_1\,\zeta^{-1}+2a'_2\,\zeta^{-2}\right]+D(\kappa+1)(1-\mu)\left[\frac{1}{\zeta}\,\varphi'_0(\zeta)+\right.$$

$$\left.+B'_3\,\zeta^{-3}+B'_1\,\zeta^{-1}\,\varphi'_0(\zeta)-B'_2\,\zeta^{-2}\,\varphi_0(\zeta)+a'_1\,\zeta^{-1}+a'_2\,\zeta^{-2}\right]+$$

$$+D(\kappa-1)\,[(3+\mu)\,\zeta^{-2}\,\varphi_0(\zeta)-(1-\mu)\,\overline{a}'_1\,\zeta^{-1}]=\frac{A_1}{D(1+\mu)}\,[A-$$

$$-RD(1+\mu)]\,\zeta^{-1}+\frac{R\overline{B}(\kappa-1)}{2}\,\zeta^{-3}. \tag{3.5}$$

При цьому

$$B'_3 = \frac{\overline{B}}{2D^2(\kappa-1)(1-\mu)^2}\,[RD(\kappa+1)(1-\mu)-2A];$$

$$B'_1 = \frac{2A - RD(\kappa-1)(1-\mu)}{RD(\kappa-1)(1-\mu)};\ B'_2 = \frac{(\kappa+1)(3+\mu)}{(\kappa-1)(1-\mu)}. \tag{3.6}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної ζ, із (3.5) знайдемо

$$a'_1[2A + RD(\kappa+1)(1-\mu)] - RD(\kappa-1)(1-\mu)\overline{a}'_1 = \\ = \frac{RA_1}{D(1+\mu)}[A - RD(1+\mu)]. \tag{3.7}$$

$$a'_2[1+B'_1+B'_2]\,[6A+RD(\kappa+1)(1-\mu)] + a_1 RD(\kappa-1)(3+\mu) = \\ = -\frac{R^2(\kappa-1)}{2}\overline{B} + B'_3[6A + RD(\kappa+1)(1-\mu)],\ a_n = \\ = a'_n = 0\ (n \geqslant 2) \tag{3.8}$$

Необхідним наслідком умови однозначності прогину пластинки є рівність $\overline{a}'_1 = a'_1$.

Тому з (3.7) і (3.8) витікає, що

$$a'_1 = \frac{RA_1[A - RD(1+\mu)]}{D(1+\mu)[2A+2DR(1-\mu)]}; \tag{3.9}$$

$$a_1 = \frac{\overline{B}D^2R^3(\kappa-1)^2(1-\mu)^2 + RB[2A - RD(\kappa+1)(1-\mu)][6A + RD(\kappa+1)(1-\mu)]}{2D(1-\mu)\{R^2D^2(\kappa-1)^2(1-\mu)(3+\mu) + [2A+RD(\kappa+1)(3+\mu)][6A+RD(\kappa+1)(1-\mu)]\}}.$$

Отже, поставлена задача нами рішена. На основі (3.1) і (3.2) остаточно напишемо

$$\varphi(\zeta) = -\frac{A_1R}{4D(1+\mu)}\zeta - a_1\zeta^{-1}; \\ \psi(\zeta) = \frac{BR}{2D(1-\mu)}\zeta + a'_1\zeta^{-1} + a_3\zeta^{-3}, \tag{3.10}$$

де, враховуючи (3.4), покладемо

$$a'_3 = \frac{\overline{B}R^2(\kappa-1) + 2a_1[6A + RD(\kappa+1)(1-\mu) - RD(\kappa-1)(3+\mu)]}{2[6A+RD(\kappa+1)(1-\mu)]}.$$

Рішення для випадку $A = C$, опубліковане в роботі [4], легко одержати з (3.10), якщо $\kappa = 1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. Прикладная математика и механика, новая серия, т. 2, в. 2, 1938.

2. Шереметьев М. П. Изгиб анизотропных и изотропных плит, ослабленных отверстием, край которого подкреплен упругим тонким кольцом ДАН УССР, № 6, 1950.

3. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, 1951.

4. Шереметьев М. П. Изгиб тонких плит с подкрепленным краем. Укр. мат. журн. № 1, 1953.

5. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов, т. II, ОГИЗ, Гостехиздат, 1946, стор. 163—167.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

Т. Л. МАРТИНОВИЧ

ЗГИН ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ТРИКУТНИМ ОТВОРОМ, ПІДКРІПЛЕНИМ ПРУЖНИМ КІЛЬЦЕМ

Розглянемо безконечну ізотропну пластинку, ослаблену трикутним отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем з нерівними жорсткостями на згин і кручення.

Для простоти обчислень, не порушуючи загальності методу розв'язування, будемо рахувати, що пластинка і кільце вільні від дії зовнішніх зусиль, а зусилля на безконечності обмежені, $P_z=0$. Початок координат виберемо в центрі трикутного отвору, вісь ox направимо вздовж бісектриси кута.

Функцію $\omega(\zeta)$ візьмемо у вигляді [4]

$$\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta^2}\right), \tag{1}$$

яка при $m=\dfrac{1}{3}$ відображає зовнішність трикутного отвору із закругленими кутами на зовнішність одиничного кола, вважаючи при цьому, що пластинка спаяна з кільцем вздовж вісі кільця. Радіус закруглення кутів криволінійного трикутного отвору буде $r=\dfrac{1}{21}R$, де $R=\dfrac{3}{2}H$; H — висота трикутного отвору.

Функції $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$, що характеризують напружений стан пластинки в перетвореній області, матимуть слідуючий вигляд:

$$\varphi(\zeta)=-\frac{AR}{4D(1+\nu)}\zeta+\varphi_0(\zeta);$$

$$\psi(\zeta)=\frac{BR}{2D(1-\nu)}\zeta+\psi_0(\zeta), \tag{2}$$

де ν — коефіцієнт Пуассона; $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — циліндрична жорсткість пластинки;

$$\varphi_0(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^{-n};\qquad \psi_0(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\zeta^{-n} \tag{3}$$

Значення постійних A і B приведені в слідуючій таблиці:

	$A=M_{x\infty}+M_{y\infty}$	$B=M_{y\infty}-M_{x\infty}$
$M_{x\infty}=M_{y\infty}=M,\quad H_{xy\infty}=0$	$2M$	0
$M_{x\infty}=0$ або $M_{y\infty}=0,\ H_{xy\infty}=0$	M	$\pm M$
$M_{x\infty}=M_{y\infty}=0,\ H_{xy\infty}=H$	0	$2iH$

Враховуючи рівності (1) і (2), задача, як показано в роботі [3], зводиться до знаходження функцій $\varphi_0(\zeta)$ і $\psi_0(\zeta)$, голоморфних в області пластинки, із граничних умов

$$U'(\sigma)-\kappa_1 R_0\frac{1}{\sigma}U(\sigma)-\kappa'_1 R_0\overline{U(\sigma)}\frac{1-2m\sigma^3}{\sigma^3-2m}=\kappa_1(|\omega'(\sigma)|-R_0)\frac{1}{\sigma}U(\sigma)+$$

$$+\kappa'_1(|\omega'(\sigma)|-R_0)\overline{U(\sigma)}\frac{1-2m\sigma^3}{\sigma^3-2m}+(1-\varkappa)\overline{\varphi'_0(\sigma)}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{AR(\varkappa-1)}{4D(1+\nu)}\frac{1}{\sigma^2};\qquad(4)$$

$$\varkappa\overline{\varphi_0(\sigma)}+\frac{\sigma^3(1+m\sigma^3)}{\sigma^3-2m}\varphi'_0(\sigma)+\psi_0(\sigma)=U(\sigma)+\frac{AR\varkappa}{4D(1+\nu)}\frac{1}{\sigma}+$$

$$+\frac{AR}{4D(1+\nu)}\frac{\sigma^2(1+m\sigma^3)}{\sigma^3-2m}-\frac{BR}{2D(1-\nu)},\sigma,\qquad(5)$$

де

$$\varkappa=-\frac{3+\nu}{1-\nu};\quad \kappa_1=\frac{(\alpha+1)(1-\nu)D}{2C},\quad \kappa'_1=\frac{(\alpha-1)(1-\nu)D}{2C};\qquad C=\alpha A;$$

A — жорсткість кільця на згин, C — жорсткість кільця на кручення.

Функцію $U(\sigma)$, яка входить в контурні умови (4) і (5), будемо визначати методом послідовних наближень.

Поклавши $|\omega'(\sigma)|=R_0$, одержимо рівність для визначення нульового наближення

$$U^{(0)\prime}(\sigma)-\frac{\kappa_1 R_0}{\sigma}U^{(0)}(\sigma)-\kappa'_1 R_0\overline{U^{(0)}(\sigma)}\frac{1-2m\sigma^3}{\sigma^3-2m}=(1-\varkappa)\overline{\varphi'_0(\sigma)}\frac{1}{\sigma^2}+$$

$$+\frac{AR(\varkappa-1)}{4D(1+\nu)}\frac{1}{\sigma^2}.\qquad(6)$$

Із рівності (5) випливає, що функцію $U(\sigma)$ можна подати у вигляді

$$U(\sigma)=U_1(\sigma)+U_2(\sigma),\qquad(7)$$

де

$$U_1(\sigma)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\sigma^n;\quad U_2(\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\sigma^{-n}.$$

Далі скористуємось прийомом, запропонованим М. П. Шереметєвим при розгляді пружної рівноваги еліптичного кільця (плоска задача) [2].

Помножимо рівність (6) на $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ і проінтегруємо її по γ при $|\zeta|<1$ і $|\zeta|>1$. В результаті інтегрування одержимо

$$U_1^{(0)'}(\zeta) - \frac{\kappa_1 R_0}{\zeta} U_1^{(0)}(\zeta) - \kappa'_1 R_0 \overline{U}_2^{(0)}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{1-2m\zeta^3}{\zeta^3 - 2m} + \kappa_1 R_0 \alpha_0^{(0)} \frac{1}{\zeta} +$$

$$+ 2mR_0 \kappa'_1 \overline{\alpha}_0^{(0)} = (1-\varkappa) \overline{\varphi}'_0 \left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{1}{\zeta^2} - \frac{\kappa'_1 R_0 (1-4m^2) S_1}{3\sqrt[3]{4m^2}} \frac{\zeta^2}{\zeta^3 - 2m} -$$

$$- \frac{\kappa'_1 R_0 (1-4m^2) S_2}{3\sqrt[3]{2m}} \frac{\zeta}{\zeta^3 - 2m} - \frac{\kappa'_1 R_0 (1-4m^2) S_3}{3} \frac{1}{\zeta^3 - 2m} \quad (|\zeta|<1); \tag{8}$$

$$U_2^{(0)'}(\zeta) - \frac{\kappa_1 R_0}{\zeta} U_2^{(0)}(\zeta) - \kappa'_1 R_0 \overline{U}_1^{(0)}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \frac{1-2m\zeta^3}{\zeta^3 - 2m} - \kappa_1 R_0 \alpha_0^{(0)} \frac{1}{\zeta} -$$

$$- 2m \kappa'_1 R_0 \overline{\alpha}_0^{(0)} = \frac{AR(\varkappa - 1)}{4D(1+\nu)} \frac{1}{\zeta^2} + \frac{\kappa'_1 R_0 (1-4m^2) S_1}{3\sqrt[3]{4m^2}} \frac{\zeta^2}{\zeta^3 - 2m} +$$

$$+ \frac{\kappa'_1 R_0 (1-4m^2) S_2}{3\sqrt[3]{2m}} \frac{\zeta}{\zeta^3 - 2m} + \frac{\kappa'_1 R_0 (1-4m^2) S_3}{3} \frac{1}{\zeta^3 - 2m} \quad (|\zeta|>1). \tag{9}$$

Тут позначено

$$S_1 = \overline{U}_2\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - \frac{(1-i\sqrt{3})}{2} \overline{U}_2\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) - \frac{(1+i\sqrt{3})}{2} \overline{U}_2\left(\frac{1}{\sigma_3}\right);$$

$$S_2 = \overline{U}_2\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) - \frac{(1+i\sqrt{3})}{2} \overline{U}_2\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) - \frac{(1-i\sqrt{3})}{2} \overline{U}_2\left(\frac{1}{\sigma_3}\right); \tag{10}$$

$$S = \overline{U}_2\left(\frac{1}{\sigma_1}\right) + \overline{U}_2\left(\frac{1}{\sigma_2}\right) + \overline{U}_2\left(\frac{1}{\sigma_3}\right),$$

де

$$\sigma_1 = \sqrt[3]{2m}, \quad \sigma_2 = -\frac{\sqrt[3]{2m}}{2}(1 - i\sqrt{3}), \quad \sigma_3 = -\frac{\sqrt[3]{2m}}{2}(1 + i\sqrt{3}).$$

Із властивостей інтегралів типу Коші випливає, що рівність (8) представляє функцію змінної ζ, регулярну в середині γ, а рівність (9) — регулярну зовні γ, включаючи і безконечно віддалену точку.

Розкладаючи в ряд вирази, які входять в рівність (8), по додатним степеням ζ, а вирази, які входять в рівність (9), по від'ємним степеням ζ, враховуючи при цьому (3) і (4), матимемо

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n + 1 - R_0 \kappa_1) \alpha_{n+1}^{(0)} \zeta^n - \kappa'_1 R_0 (4m^2 - 1) \sum_{n=4}^{\infty} \left\{ \sum_{\kappa=3,6\ldots}^{n-1} (2m)^{-\frac{\kappa+3}{3}} \overline{\beta}_{n-\kappa}^{(0)} \right\} \zeta^n +$$

$$+ \frac{\kappa'_1 R_0}{2m} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\beta}_n^{(0)} \zeta^n + 2m \kappa'_1 R_0 \overline{\alpha}_0^{(0)} = (\varkappa - 1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \overline{a}_{n+1}^{(0)} \zeta^n +$$

$$+\frac{\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)S_1}{3\sqrt[3]{4m^2}}\sum_{n=2,5\ldots}^{\infty}(2m)^{-\frac{n+1}{3}}\zeta^n+\frac{\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)S_2}{3\sqrt[3]{2m}}\sum_{n=1,4\ldots}^{\infty}(2m)^{-\frac{n+2}{3}}\zeta^n+$$

$$+\frac{\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)S_3}{3}\sum_{n=0,3,6\ldots}^{\infty}(2m)^{-\frac{n+3}{3}}\zeta^n; \tag{11}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(1-n-\varkappa_1 R_0)\beta_{n-1}^{(0)}\zeta^{-n}-\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)\sum_{n=3}^{\infty}\left\{\sum_{\kappa=3,6\ldots}^{n}(2m)^{\frac{\kappa-3}{3}}\overline{\alpha}_{n-\kappa}^{(0)}\right\}\zeta^{-n}+$$

$$+2m\varkappa'_1 R_0\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\alpha}_n^{(0)}\zeta^{-n}-\varkappa_1 R_0\alpha_0^{(0)}\frac{1}{\zeta}=\frac{AR(\varkappa-1)}{4D(1+\nu)}\frac{1}{\zeta^2}+$$

$$+\frac{\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)S_1}{3\sqrt[3]{4m^2}}\sum_{n=1,4\ldots}^{\infty}(2m)^{\frac{n-1}{3}}\zeta^{-n}+\frac{\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)S_2}{3\sqrt[3]{2m}}\sum_{n=2,5\ldots}^{\infty}(2m)^{\frac{n-2}{3}}\zeta^{-n}+$$

$$+\frac{\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)S_3}{3}\sum_{n=3,6\ldots}^{\infty}(2m)^{\frac{n-3}{3}}\zeta^{-n}. \tag{12}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ζ в рівностях (11) і (12), одержимо дві безконечні системи лінійних алгебраїчних рівнянь трикутного вигляду для визначення коефіцієнтів $\alpha_n^{(0)}$ і $\beta_n^{(0)}$

$$(1-\varkappa_1 R_0)\alpha_1^{(0)}+2m\varkappa'_1 R_0\overline{\alpha}_0^{(0)}=(\varkappa-1)\overline{a}_1^{(0)}+\frac{\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)S_3}{6m};$$

$$(2-\varkappa_1 R_0)\alpha_2^{(0)}+\frac{\varkappa'_1 R_0}{2m}\overline{\beta}_1^{(0)}=2(\varkappa-1)\overline{a}_2^{(0)}+\frac{\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)S_2}{6m\sqrt[3]{2m}};$$

$$(3-\varkappa_1 R_0)\alpha_3^{(0)}+\frac{\varkappa'_1 R_0}{2m}\overline{\beta}_2^{(0)}=3(\varkappa-1)\overline{a}_3^{(0)}+\frac{\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)S_1}{6m\sqrt[3]{4m^2}};$$

$$(4-\varkappa_1 R_0)\alpha_4^{(0)}+\frac{\varkappa'_1 R_0}{2m}\overline{\beta}_3^{(0)}=4(\varkappa-1)\overline{a}_4^{(0)}+\frac{\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)S_3}{12m^2}. \tag{13}$$

$$2m\varkappa'_1 R_0\overline{\alpha}_1^{(0)}-\varkappa_1 R_0\alpha_0^{(0)}=\frac{\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)S_1}{3\sqrt[3]{4m^2}};$$

$$-(1+\varkappa_1 R_0)\beta_1^{(0)}+2m\varkappa'_1 R_0\overline{\alpha}_2^{(0)}=\frac{AR(\varkappa-1)}{4D(1+\nu)}+\frac{\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)S_2}{3\sqrt[3]{2m}};$$

$$-(2+\varkappa_1 R_0)\beta_2^{(0)}+2m\varkappa'_1 R_0\overline{\alpha}_3^{(0)}-\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)\overline{\alpha}_0^{(0)}+\frac{\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)S_3}{3};$$

$$-(3+\varkappa_1 R_0)\beta_3^{(0)}+2m\varkappa'_1 R_0\overline{\alpha}_4^{(0)}-\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)\overline{\alpha}_1^{(0)}=\frac{2\varkappa'_1 R_0(1-4m^2)mS_1}{3\sqrt[3]{4m^2}}. \tag{14}$$

Параметри S_1, S_2 і S_3, які входять в системи (13) і (14), на основі співвідношень (7) і (10) легко виражаються через коефіцієнти β_n

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{1-(-1)^n\left[\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right]\right\}\overline{\beta}_n(2m)^{\frac{n}{3}};$$

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{1-(-1)^n\left[\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}\right]\right\}\overline{\beta}_n(2m)^{\frac{n}{3}};$$

$$S_3 = \sum_{n+1}^{\infty}\left\{1+(-1)^n\left[\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n}\right]\right\}\overline{\beta}_n(2m)^{\frac{n}{3}}. \qquad (15)$$

Як видно із систем (13) і (14), всі $\alpha_n^{(0)}$ і $\beta_n^{(0)}$ послідовно визначаються безпосередньо через коефіцієнти $a_n^{(0)}$ функції $\varphi_0(\zeta)$, для визначення яких використаємо умову (5). Для цього помножимо рівність (5) на $\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ і проінтегруємо по γ при $|\zeta|<1$ і $|\zeta|>1$. В результаті інтегрування одержимо

$$\varkappa\overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)-a_1^{(0)}m = U_1^{(0)}(\zeta)+\frac{ARm}{4D(1+\nu)}\zeta^2-\frac{BR}{2D(1-\nu)}\zeta \qquad (16)$$

$$\frac{\zeta^2(1+m\zeta^3)}{\zeta^3-2m}\varphi'_0(\zeta)+ma_1^{(0)}+\psi_0(\zeta) = U_2^{(0)}(\zeta)+$$

$$+\frac{AR\varkappa}{4D(1+\nu)}\frac{1}{\zeta}+\frac{AR}{4D(1+\nu)}\frac{\zeta^2(1+m\zeta^3)}{\zeta^3-2m}-\frac{ARm}{4D(1+\nu)}\zeta^2. \qquad (17)$$

Підставимо в (16) замість $\overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ і $U_1^{(0)}(\zeta)$ їх вирази із (3) і (7) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ζ, при цьому матимемо

$$\varkappa\overline{a}_0^{(0)}-ma_1^{(0)} = \alpha_0^{(0)};$$

$$\varkappa\overline{a}_1^{(0)} = \alpha_1^{(0)}-\frac{BR}{2D(1-\nu)};$$

$$\varkappa\overline{a}_2^{(0)} = \alpha_2^{(0)}+\frac{ARm}{4D(1+\nu)};$$

$$\varkappa\overline{a}_n^{(0)} = \alpha_n^{(0)} \quad (n\geqslant 3). \qquad (18)$$

Розв'язуючи сумісно системи (13), (14) і (18), знайдемо коефіцієнти $a_n^{(0)}$, $\alpha_n^{(0)}$ і $\beta_n^{(0)}$ розкладу функцій $\varphi_0(\zeta)$ і $U(\zeta)$ в нульовому наближенні; функцію $\psi_0(\zeta)$ знаходимо із рівності (17).

Параметри S_1, S_2 і S_3, які ввійдуть у вирази шуканих коефіцієнтів, визначаються із умови (15).

При знаходженні першого і слідуючих наближень для простоти викладок приймемо, що

$$|\omega'(\sigma)| = R\sqrt{1+4m^2-2m\left(\sigma^3+\frac{1}{\sigma^3}\right)}\approx R_0-\lambda\left(\sigma^3+\frac{1}{\zeta^3}\right), \qquad (19)$$

де $$R_0=\frac{R(1+2m+4m^2)}{1+2m}; \qquad \lambda=\frac{mR}{1+2m}.$$

Підставляючи рівність (19) і знайдену в нульовому наближенні функцію $U^{(0)}(\sigma)$ в праву частину контурної умови (4), одержимо рівність для визначення функції $U(\sigma)$ в першому наближенні

$$U^{(1)\prime}(\sigma)-\kappa_1 R_0\frac{1}{\sigma}U^{(1)}(\sigma)-\kappa'_1 R_0\overline{U^{(1)}(\sigma)}\frac{1-2m\sigma^3}{\sigma^3-2m}=(1-\varkappa)\overline{\varphi'_0(\sigma)}\frac{1}{\sigma^2}+$$

$$+\frac{AR(\varkappa-1)}{4D(1+\nu)}\frac{1}{\sigma^2}-\kappa_1\lambda\left(\sigma^3+\frac{1}{\sigma^3}\right)\frac{1}{\sigma}U^{(0)}(\sigma)-\kappa'_1\lambda\left(\sigma_3+\frac{1}{\sigma^3}\right)\overline{U^{(0)}(\sigma)}\frac{1-2m\sigma^3}{\sigma^3-2m}. \tag{20}$$

Далі поступаємо так само як і при знаходженні нульового наближення. В результаті одержимо безконечні системи трикутного вигляду лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\alpha_n^{(1)}$ і $\beta_n^{(1)}$ аналогічні системам (13) і (14), в праві частини яких додатково будуть входити тільки деякі відомі доданки. Розв'язуючи одержані таким способом системи сумісно із системою (18), замінивши в останній відповідно $\alpha_n^{(0)}$ і $\alpha_n^{(0)}$ через $\alpha_n^{(1)}$ і $\alpha_n^{(1)}$, визначимо коефіцієнти розкладу функцій $\varphi_0(\zeta)$ і $U(\zeta)$ в першому наближенні; функцію $\psi_0(\zeta)$ визначимо із рівності (17).

Аналогічно знаходимо слідуючі наближення. Побудований процес послідовних наближень збігається рівномірно.

У випадку рівних жорсткостей кільця на згин і кручення $\kappa'_1=0$ і системи (13) і (14) значно спрощуються і дають можливість одержати функції $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$ для будь-якого наближення в замкнутій формі. В нульовому наближенні

$$\varphi^{(0)}(\zeta)=-\frac{AR}{4D(1+\nu)}\zeta+a_1^{(0)}\frac{1}{\zeta}+a_2^{(0)}\frac{1}{\zeta^2};$$

$$\psi^{(0)}(\zeta)=\frac{BR}{2D(1-\nu)}\zeta-\frac{\zeta^2(1+m\zeta^3)}{\zeta^3-2m}\varphi_0^{(0)\prime}(\zeta)+\frac{AR(1+\kappa\varkappa)}{4D(1+\nu)(1+\kappa)}\frac{1}{\zeta}+$$

$$+\frac{AR}{4D(1+\nu)}\frac{\zeta^2(1+m\zeta^3)}{\zeta^3-2m}-\frac{ARm}{4D(1+\nu)}\zeta^2 \tag{21}$$

де

$$\varphi_0^{(0)}(\zeta)=a_1^{(0)}\frac{1}{\zeta}+a_2^{(0)}\frac{1}{\zeta^2}; \quad Q_1^{(0)}=-\frac{\overline{B}R(1-\kappa)}{2D(1-\nu)_3(1-\kappa\varkappa)};$$

$$a_2^{(0)}=\frac{ARm(2-\kappa)}{4D(1+\nu)(2-\kappa\varkappa)}; \qquad \kappa=\kappa_1R_0.$$

В першому наближенні

$$\varphi^{(1)}(\zeta)=\varphi^{(0)}(\zeta)+\varphi_1(\zeta); \quad \psi^{(1)}(\zeta)=\psi^{(0)}(\zeta)+\psi_1(\zeta), \tag{22}$$

де $\varphi^{(0)}(\zeta)$ і $\psi^{(0)}(\zeta)$ — функції напруження в нульовому наближенні (21), а $\varphi_1(\zeta)$ і $\psi_1(\zeta)$ мають вигляд

$$\varphi_1(\zeta)=-\frac{\kappa\lambda}{R_0}\left[\frac{\beta_1^{(0)}}{2-\kappa\varkappa}\frac{1}{\zeta^2}+\frac{\overline{a}_1^{(0)}}{4-\kappa\varkappa}\frac{1}{\zeta^4}+\frac{a_2^{(0)}}{5-\kappa\varkappa}\frac{1}{\zeta^5}\right];$$

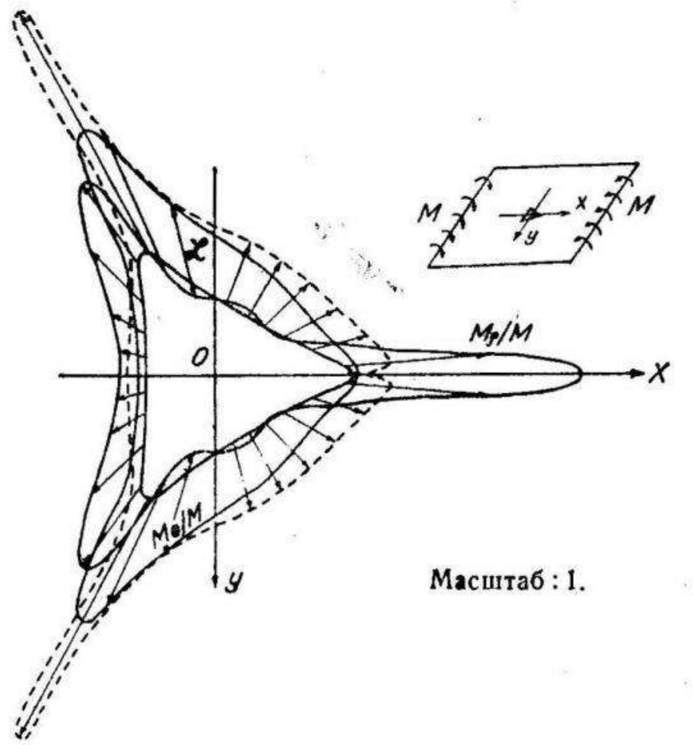
M
M
x
y
M_ρ/M
M_θ/M
X
y
0
Масштаб : 1.

Рис. 1.

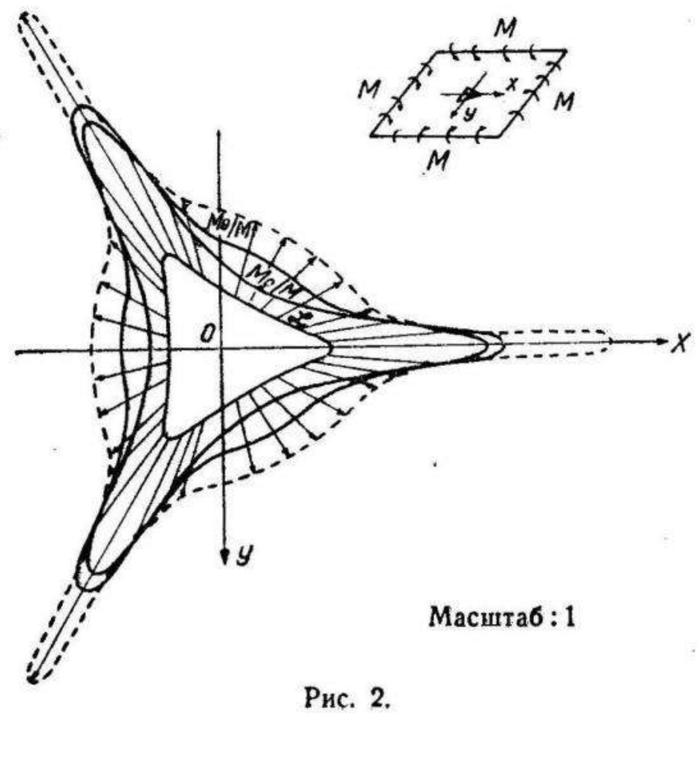
M
M
M
M
x
y
M_θ/M
M_ρ/M
X
y
0
Масштаб : 1

Рис. 2.

$$\psi_1(\zeta) = -\frac{\zeta^2(1+m\zeta^3)}{\zeta^3-2m}\varphi'_1(\zeta) + \frac{\kappa\lambda}{R_0}\left[\frac{\alpha_2^{(0)}}{1+\kappa}\frac{1}{\zeta} + \frac{\alpha_1^{(0)}}{2+\kappa}\frac{1}{\zeta^2} + \frac{\beta_1^{(0)}}{4+\kappa}\frac{1}{\zeta^4}\right],$$

де

$$\alpha_1^{(0)} = \frac{\varkappa-1}{1-\kappa}\bar{a}_1^{(0)},\ \alpha_2^{(0)} = \frac{2(\varkappa-1)}{2-\kappa}a_2^{(0)};\ \beta_1^{(0)} = -\frac{AR(\varkappa-1)}{4D(1+\nu)(1+\kappa)}.$$

По функціям напруження (22) підраховані згинаючі моменти M_ρ і M_ϑ при чистому і односторонньому згині.

На рис. 1 приведений графік розподілу згинаючих моментів M_ρ і M_ϑ по контуру спаю пластинки з кільцем при односторонньому згині при $\nu = \frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{3}$ і $\kappa = 1{,}22$.

На рис. 2 приведений графік розподілу згинаючих моментів M_ρ і M_ϑ по контуру спаю пластинки з кільцем при чистому згині, при $\nu = \frac{1}{3}$, $m = \frac{1}{3}$ і $\kappa = 0{,}867$.

Пунктирна лінія на рис. 1 і 2 характеризує розподіл згинаючих моментів M_ϑ по контуру трикутного отвору в пластинці без підкріплення при тих же даних і взята із монографії Г. М. Савіна [4].

Підрахунки показали, що значення моментів першого наближення відрізняються від відповідних значень моментів другого наближення в точках найбільшої кривизни не більше ніж на 3,93%, що говорить про хорошу збіжність послідовних наближень.

ЛІТЕРАТУРА

1. Шереметьев М. П. Изгиб тонких плит с подкрепленным краем. Укр. мат. журн., № 1, 1953.
2. Шереметьев М. П. Упругое равновесие эллиптического кольца. ПММ, т. XVII, в. I, 1953.
3. Шереметєв М. П. і Мартинович Т. Л. Згин нескінченної пластинки, ослабленої еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем. Прикладна механіка, т. III, в. 2, 1957.
4. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. Гостехиздат, 1951.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

М. О. ІГНАТЬЄВ

ІНТЕГРАЛЬНІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОХ ОСНОВНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ СФЕРИ

Загальновідомі розв'язки граничної задачі типу Діріхле для рівняння Лапласа, як у вигляді ряду, так і у вигляді інтеграла (інтеграл Пуассона). Розв'язок основних задач теорії пружності для сфери у вигляді ряду по сферичних функціях вперше був побудований Ляме.

За допомогою відомих властивостей сферичних функцій тут просумовані ряди, що дають розв'язки відповідних задач.

I. ІНТЕГРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ГРАНИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ВНУТРІШНОСТІ СФЕРИ ПРИ ЗАДАНИХ ЗСУВАХ

Коли на поверхні сфери задано зсуви, розв'язок граничної задачі теорії пружності для внутрішності сфери дається формулою

$$\overline{u}=\overline{v}+\frac{m}{2}(R_0^2-R^2)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{m}{(3m-4)n-2m+2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{v}_n, \; ^1 \tag{1}$$

де m — число Пуассона, або, змінюючи порядок сумування та диференціювання, знаходимо

$$\overline{u}=\overline{v}+\frac{m}{2}(R_0^2-R^2)\operatorname{grad}\operatorname{div}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\overline{v}_n(x)}{(3m-4)n-2m+2}, \tag{1'}$$

де x — точка в середині сфери $|y|=R_0$, $\overline{v}_n$ — гармонічний вектор n-го степеня,

$$\overline{v}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{v}_n \tag{2}$$

— гармонічний вектор, який приймає на сфері ті ж самі значення, що і вектор зсуву $\overline{u}=\overline{f}(\Theta,\varphi)$. З другого боку, кожний гармонічний в середині кулі $|x|\leqslant R_0$ вектор, який на сфері приймає дані значення $\overline{f}(\Theta, s)$, дається формулою

$$v(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi R_0^2}\varrho^n\iint\limits_{|y|=R_0}P_n(\cos\gamma)\,\overline{f}(y)\,d_yS. \tag{3}$$

[1] Див., наприклад, А. И. Лурье «Пространственные задачи теории упругости», 1955.

Порівнюючи формули (2) та (3), знаходимо

$$\overline{v}_n = \frac{2n+1}{4\pi R_0^2}\varrho^n \iint\limits_{|\overline{y}|=R_0} P_n(\cos\gamma)\overline{f}(y)\,d_yS. \tag{4}$$

Підставивши (4) в рівність (1), одержимо

$$\overline{u} = \overline{v} + \frac{m}{8\pi R_0^2}(R_0^2 - R^2)\operatorname{grad}\operatorname{div}\iint\limits_{|\overline{y}|=R_0}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{an+b}\varrho^n P_n(\cos\gamma)\right]\overline{f}(y)\,d_yS, \tag{5}$$

де $a=3m-4$; $b=2-2m$.

Ставимо собі метою просумувати вираз

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{an+b}\varrho^n P_n(\cos\gamma). \tag{6}$$

Вираз (6) можна переписати слідуючим чином:

$$\Psi = \frac{2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\varrho^n P_n(\cos\gamma) + \left(1 - \frac{2b}{a}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varrho^n P_n(\cos\gamma)}{an+b}. \tag{6'}$$

Просумуємо спочатку

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varrho^n P_n(\cos\gamma)}{an+b}. \tag{7}$$

Продиференціювавши (7) по ϱ, одержимо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\varrho^{n-1}}{an+b}P_n(\cos\gamma). \tag{7'}$$

Помноживши (7) та (7′) відповідно на b та $a\varrho$, а потім склавши результати, одержимо

$$a\varrho\frac{\partial\Phi}{\partial\varrho} + b\Phi = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\gamma)\varrho^n.$$

Але сума, що стоїть в правій частині цього рівняння, є розкладом функції

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\varrho\cos\gamma + \varrho^2}}.$$

тобто має місце рівність

$$\Phi_0 = \sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\gamma)\varrho^n = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\varrho\cos\gamma + \varrho^2}}. \tag{8}$$

Тому звичайне диференціальне рівняння для функції $\Phi(\varrho, \gamma)$ можна записати в слідуючому вигляді:

$$\varrho^{\frac{b}{a}} \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} + \frac{b}{a} \varrho^{\frac{b}{a}-1} = \frac{\varrho^{\frac{b}{a}-1}}{a\sqrt{1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2}}. \tag{9}$$

З рівності (7) виходить, що при $\varrho=0$ маємо $\Phi(0, \gamma)=\frac{1}{b}$ і, отже, функція $\Phi(0, \gamma)$ від γ не залежить, тобто маємо

$$\Phi(\varrho, \gamma)\Big|_{\rho=0} = \frac{1}{b}.$$

Зауважимо ще, що з позначень $a=3m-4$, $b=2-2m$ випливає

$$-1 < \frac{b}{a} < 0.$$

Справді, для пружних тіл число Пуассона $m>2$, і тому $a>0$ і $b<0$. Далі очевидно, що $a+b=m-2$ і, отже, $a+b>0$. Звідси виходить $1+\frac{b}{a}>0$, або $\frac{b}{a}>-1$. З другого боку, $\frac{b}{a}<0$, що й треба було довести.

Враховуючи границі зміни величини $\frac{b}{a}$, зауважимо, що рівняння (9) не можна інтегрувати, якщо нижня границя $\varrho=0$, а тому будемо інтегрувати його в границях від α до ϱ. Переписуючи (9) у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho^{\frac{b}{a}} \Phi\right) = \frac{1}{a} \varrho^{\frac{b}{a}-1} \Phi_0(\varrho),$$

одержуємо

$$\varrho^{\frac{b}{a}} \Phi = \frac{1}{a} \int_{\alpha}^{\rho} t^{\frac{b}{a}-1} \Phi_0(t)\, dt + C.$$

Звідси маємо

$$\Phi = \frac{1}{b} \varrho^{-\frac{b}{a}} \int_{\alpha}^{\rho} \Phi_0(t)\, dt^{\frac{b}{a}} + C \varrho^{-\frac{b}{a}}.$$

Застосовуючи формулу інтегрування частинами, знаходимо

$$\Phi = \frac{1}{b} \varrho^{-\frac{b}{a}} \left[\Phi_0(\varrho) \varrho^{\frac{b}{a}} - \Phi_0(\alpha) \alpha^{\frac{b}{a}} \int_{\alpha}^{\rho} t^{\frac{b}{a}} \frac{\partial \Phi_0(t)}{\partial t} dt \right] + C \varrho^{-\frac{b}{a}} =$$

$$= \frac{1}{b} \Phi_0(\varrho) - \frac{1}{b} \varrho^{-\frac{b}{a}} \int_{\alpha}^{\rho} t^{\frac{b}{a}} \frac{\partial \Phi_0(t)}{\partial t} dt + C_1 \varrho^{-\frac{b}{a}},$$

де

$$C_1 = C - \frac{\Phi_0(\alpha)\,\alpha^{\frac{b}{a}}}{b}.$$

Але в останньому інтегралі вже можна інтегрувати при нижній границі $\varrho=0$. Тому для $\Phi(\varrho)$, після підстановки $t=\varrho\xi$, одержимо

$$\Phi(\varrho) = C\varrho^{-\frac{b}{a}} + \frac{\Phi_0}{b} - \frac{1}{b}\varrho\int_0^1 \xi^{\frac{b}{a}} \frac{\partial\Phi_0(\varrho\xi)}{\partial(\varrho\xi)}\, d\xi.$$

З того, що $\Phi_0(\varrho)$ і $\Phi(\varrho)$ розкладаються в ряди по цілих ступенях ϱ виходить, що $C=0$.

Тому для $\Phi(\varrho)$ одержимо слідуючий вираз:

$$\Phi(\varrho) = \frac{\Phi_0}{b} - \frac{\varrho}{b}\int_0^1 \xi^{\frac{b}{a}} \frac{\partial\Phi_0(\varrho\xi)}{\partial(\varrho\xi)}\, d\xi. \tag{10}$$

Підставляючи в (6′) значення Φ_0 та Φ, одержуємо

$$\Psi = \frac{\Phi_0}{b} - \frac{a-2b}{ab}\varrho\int_0^1 \xi^{\frac{b}{a}} \frac{\partial\Phi_0(\varrho\xi)}{\partial(\varrho\xi)}\, d\xi. \tag{11}$$

Обчислимо ще $\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{f}\Psi(\varrho)$. Для цього зауважимо, що справедливі слідуючі тотожності:

1) $\Phi_0 = \dfrac{R_0}{|\bar{x}-\bar{y}|}$;

2) $\varrho = \dfrac{|\bar{x}|}{R_0}$;

3) $\dfrac{\partial\Phi_0(\varrho\xi)}{\partial(\varrho\xi)} = -\dfrac{R_0^2[\xi|\bar{x}|^2 - (\bar{x},\bar{y})]}{|\bar{x}|\,|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}$.

Підставляючи ці вирази в (11), одержуємо

$$\Psi = \frac{R_0}{b|\bar{x}-\bar{y}|} + \frac{R_0(a-2b)}{ab}\int_0^1 \frac{\xi^{\frac{b}{a}}[\xi|\bar{x}|^2 - (\bar{x},\bar{y})]}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}\, d\xi. \tag{11′}$$

Після елементарних перетворень знаходимо

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\Psi(\varrho)\bar{f}(y) = \frac{R_0}{b}\Bigg\{-\frac{\bar{f}}{|\bar{x}-\bar{y}|^3} + \frac{3(\bar{f},\bar{x}-\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|^5}(\bar{x}-\bar{y}) +$$

$$+\frac{a-2b}{a}\int_0^1 \xi^{\frac{b}{a}+1}\Bigg[\frac{2\bar{f}}{|\xi\bar{x}-\bar{y}|^3} - \frac{3(\bar{f},2\bar{x}\xi-\bar{y})}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^5}(\bar{x}\xi-\bar{y}) -$$

$$-\frac{3(\bar f,\ \xi\bar x-\bar y)}{|\bar x\xi-\bar y|^5}(2\bar x\xi-\bar y)-\frac{3\,\xi[\xi|\bar x|^2-(\bar x,\bar y)]}{|\bar x\xi-\bar y|^5}\bar f(y)+$$

$$+\frac{15\,\xi\,[\xi\,|\bar x|^2-(\bar x,\ \bar y)]\,(\bar f,\bar x\xi-\bar y)}{|\bar x\xi-\bar y|^7}(\bar x\xi-\bar y)\Bigg]\,d\,\xi\Bigg\}. \tag{12}$$

Функція $\bar v$, як гармонічний вектор, одразу записується по формулі Пуассона

$$\bar v=\frac{1}{4\pi R_0^2}\iint\limits_{|\bar y|=R_0}\frac{R_0^2-R^2}{|\bar x-\bar y|^3}\bar f(y)d_yS. \tag{13}$$

Підставляючи (12) та (13) в формулу (5), одержуємо

$$\begin{gathered}\bar u=\frac{1}{4\pi R_0}\iint\limits_{|\bar y|=R_0}\frac{R_0^2-R^2}{|\bar x-\bar y|^3}\bar f\,d_yS+\frac{m\,(R_0^2-R^2)}{8\pi R_0 b}\iint\limits_{|\bar y|=R_0}\Bigg\{-\frac{\bar f}{|\bar x-\bar y|^3}+\\
+\frac{3(\bar f,\ \bar x-\bar y)}{|\bar x-\bar y|^5}(\bar x-\bar y)+\frac{a-2b}{a}\int\limits_0^1\xi^{\frac{b}{a}+1}\Bigg[\frac{2\bar f}{|\bar x\xi-\bar y|^3}-\\
-\frac{3(\bar f,\ 2\xi\bar x-\bar y)}{|\bar x\xi-\bar y|^5}(\bar x\xi-\bar y)-\frac{3(\bar f,\ \bar x\xi-\bar y)}{|\bar x\xi-\bar y|^5}(2\bar x\xi-\bar y)-\\
-\frac{3\xi\,[|\bar x|^2\xi-(\bar x,\ \bar y)]}{|\bar x\xi-\bar y|^5}\bar f(y)+\frac{15\,\xi[\,|\bar x|^2\xi-(\bar x,\ \bar y)]\,(\bar f,\ \bar x\xi-\bar y)}{|\bar x\xi-\bar y|^7}(\bar x\xi-\bar y)\Bigg]d\xi\Bigg\}d_yS.\end{gathered} \tag{14}$$

Якщо зауважити, що

$$|\bar x|^2\xi-(\bar x,\bar y)=(\bar x\xi-\bar y,\ \bar x)=\sum_{i=1}^{3}(x_i\,\xi-y_i)\,x_i,$$

то після деяких перетворень, формула (14) набуває вигляду

$$\begin{gathered}\bar u=\frac{R_0^2-R^2}{4\pi R_0}\iint\limits_{|\bar y|=R_0}\Bigg\{\frac{\bar f}{|\bar x-\bar y|^3}\Bigg[1-\frac{m}{2b}+\frac{m\,(a-2b)}{2ab}\Bigg]+\\
+\frac{(\bar f,\ \bar x-\bar y)(\bar x-\bar y)}{|\bar x-\bar y|^5}\Bigg[\frac{3m}{2b}-\frac{3m\,(a-2b)}{2ab}\Bigg]+\\
+\frac{m(a-2b)}{2ab}\int\limits_0^1\xi^{\frac{b}{a}+1}\Bigg[-\frac{b}{a}\,\frac{\bar f}{|\bar x\xi-\bar y|^3}+\frac{3b}{a}\,\frac{(\bar f,\ \bar x\xi-\bar y)(\bar x\xi-\bar y)}{|\bar x\xi-\bar y|^5}\Bigg]d\xi\Bigg\}\,d_yS,\end{gathered}$$

або

$$\bar{u} = \frac{R_0^2 - R^2}{4\pi R_0} \iint\limits_{|\bar{y}|=R_0} \left\{ \frac{\bar{f}}{|\bar{x}-\bar{y}|^3}\left(1-\frac{m}{a}\right) + \frac{3m}{a}\frac{(\bar{f}, \bar{x}-\bar{y})(\bar{x}-\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|^5} + \right.$$

$$\left. + \frac{m(a-2b)}{2ab}\int\limits_0^1 \xi^{\frac{b}{a}+1}\left[\frac{3(\bar{f}, \bar{x}\xi-\bar{y})}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^5}(\bar{x}\xi-\bar{y}) - \frac{\bar{f}}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}\right] d\xi \right\} d_yS. \quad (14')$$

Переходячи від позначень a та b до позначення m, знаходимо

$$\bar{u} = \frac{R_0^2 - R^2}{4\pi R_0(4m-3)} \iint\limits_{|\bar{y}|=R_0} \left\{ \frac{3(m-1)\bar{f}}{|\bar{x}-\bar{y}|^3} + \frac{3m(\bar{f}, \bar{x}-\bar{y})(\bar{x}-\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{m}{2}\,\frac{8m-7}{4m-3}\int\limits_0^1 \xi^{\frac{b}{a}+1}\left[\frac{3(\bar{f}, \bar{x}\xi-\bar{y})(\bar{x}\xi-\bar{y})}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^5} - \frac{\bar{f}}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}\right] d\xi \right\} d_yS. \quad (14'')$$

Зокрема, для центра кулі $|\bar{x}|=0$, формула (14″) набуває вигляду

$$\bar{u}(0) = \frac{1}{16\pi R_0^2(3m-2)} \iint\limits_{|\bar{y}|=R_0} \left[(7m-8)\bar{f} + \frac{15m(\bar{f}, \bar{y})\bar{y}}{R_0^2}\right] d_yS. \quad (15)$$

Формула (15) дає значення вектор-функції $\bar{u}(x)$ в центрі кулі через граничні значення цієї функції на поверхні сфери. З неї випливає, що коли на сфері задані лише нормальні однакові і протилежно спрямовані на кінцях кожного діаметру зсуви, то зсув в центрі сфери дорівнює нулю. Вона по суті співпадає з формулою, наведеною С. Г. Міхліним.

2. ІНТЕГРАЛЬНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ, ПОСТАВЛЕНОЇ ДЛЯ ЗОВНІШНОСТІ СФЕРИ ПРИ ЗАДАНИХ НА СФЕРІ ЗСУВАХ

В згаданій вище роботі Лур'є розв'язок цієї задачі дається формулою

$$\bar{u}(x) = \bar{v} - \frac{m}{2}(R_0^2 - R^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{v}_{-n-1}}{(3m-4)(n+1)+2m-2} =$$

$$= \bar{v} - \frac{m}{2}(R_0^2 - R^2)\operatorname{grad}\operatorname{div}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\bar{v}_{-n-1}}{an+b_1}, \quad (16)$$

де $a=3m-4$, $b_1=5m-6$; R_0 — радіус сфери; R — радіус, проведений з центра сфери (початок координат) в точку поза сферою ($R>R_0$); гармонічний вектор $\bar{v}(x)$ приймає на сфері ті ж самі задані значення $\bar{f}(y)$, що і вектор зсуву $\bar{u}(x)$ і виражається за формулою

$$\bar{v}=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{v}_{-n-1}\,. \tag{17}$$

Виведемо спочатку для зовнішності сфери формулу, аналогічну формулі (3), яка справедлива лише для внутрішності сфери.

Відомо, що гармонічний поза сферою вектор $v(x)$, який приймає задані на сфері значення $F(x)$ виражається за формулою Пуассона

$$\bar{v}(x)-\frac{1}{4\pi R_0}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}\frac{R^2-R_0^2}{(R^2-2RR_0\cos\gamma+R_2^0)^{\frac{3}{2}}}\,d_yS.$$

Звідси маємо

$$\bar{v}(x)=\frac{\varrho_1}{4\pi R_0^2}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}\bar{f}(y)\frac{1-\varrho_1^2}{(1+\varrho_1^2-2\varrho_1\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\,d_yS,$$

де $\varrho_1\,\frac{R_0}{R}$ — величина, менша від одиниці.

Але, як вказано вище, справедливий розклад

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\varrho_1\cos\gamma+\varrho_1^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\varrho_1^n P_n(\cos\gamma),$$

де P_n є n-й поліном Лежандра.

Продиференціюємо цю рівність по ϱ_1, помножимо обидві частини одержаного виразу на $2\varrho_1$ і складемо з самою рівністю.

Тоді маємо

$$\frac{1-\varrho_1^2}{(1+\varrho_1^2-2\varrho_1\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\varrho_1^n P_n(\cos\gamma).$$

Підставивши останнє у вираз для $\bar{v}(x)$, одержимо

$$\bar{v}(x)=\frac{1}{4\pi R_0^2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\,\varrho_1^{\,n+1}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}P_n(\cos\gamma)\bar{f}(y)\,d_yS. \tag{18}$$

Формула (18) дає вираз для будь-якого гармонічного поза сферою вектора $\bar{v}(x)$ за його заданими значеннями на сфері.

Порівнюючи вирази (17) і (18), знаходимо

$$\bar{v}_{-n-1}=\frac{2n+1}{4\pi R_0^2}\,\varrho_1^{n+1}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}P_n(\cos\gamma)\bar{f}(y)\,d_yS. \tag{19}$$

Підставляючи (19) в рівність (16), одержимо

$$\bar{u}(x)=\bar{v}-\frac{m}{8\pi R_0^2}(R_0^2-R^2)\operatorname{grad}\operatorname{div}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}\bar{f}(y)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{an+b_1}\varrho_1^{n+1}P_n(\cos\gamma)\right]d_yS. \tag{20}$$

Обчислимо тепер суму

$$\Psi_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{an+b_1}\varrho_1^{n+1}P_n(\cos\gamma). \tag{21}$$

Спочатку перепишемо цю формулу у вигляді

$$\Psi_1=\frac{2\varrho_1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\varrho_1^nP_n(\cos\gamma)+\varrho_1\left(1-\frac{2b_1}{a}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varrho_1^nP_n(\cos\gamma)}{an+b_1}, \tag{21'}$$

або

$$\Psi_1=\frac{2\varrho_1}{a}\Phi_0(\varrho_1)+\varrho_1\left(1-\frac{2b_1}{a}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varrho_1^nP_n(\cos\gamma)}{an+b_1}. \tag{21''}$$

Залишається просумувати вираз

$$\Phi_1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varrho_1^nP_n(\cos\gamma)}{an+b_1}. \tag{22}$$

Продиференціювавши (22) по ϱ_1, помноживши на $a\varrho_1$, а рівність (22) — на b_1, і склавши результати, матимемо слідуюче лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$a\,\varrho_1\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varrho_1}+b_1\Phi_1=\Phi_0(\varrho_1)\varrho_1^n. \tag{23}$$

Це рівняння цілком аналогічне рівнянню (9) з тією лише різницею, що величина $\frac{b_1}{a}$ міститься в інтервалі $\left(\frac{5}{3},2\right)$, що легко доводиться.

Тому в рівнянні $d\left(\varrho_1^{\frac{b_1}{a}}\Phi_1\right)=\left(\Phi_0\frac{\varrho_1^{\frac{b_1}{a}-1}}{a}\right)d\varrho_1$ праву частину можна інтегрувати при нижній границі, рівній нулю. Тоді одержимо

$$\varrho_1^{\frac{b_1}{a}}\Phi_1=\frac{1}{a}\int_0^{\varrho_1}t^{\frac{b_1}{a}-1}\Phi_0(t)\,dt.$$

Звідси

$$\Phi_1=\frac{\varrho^{-\frac{b_1}{a}}}{a}\int_0^{\varrho_1}t^{\frac{b_1}{a}-1}\Phi_0(t)\,dt.$$

Інтегруючи частинами, а потім вводячи підстановку $t=\varrho_1$, ξ, одержимо

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_0(\varrho_1)}{b_1} - \frac{\varrho_1}{b_1}\int_0^1 \xi^{\frac{b_1}{a}} \frac{\partial \Phi_0(\varrho_1 \xi)}{\partial(\varrho_1\xi)} d\xi. \tag{24}$$

Підставивши значення (24) в (21′), після зведення подібних членів, будемо мати

$$\Psi_1 = \frac{\varrho_1}{b_1}\Phi_0(\varrho_1) - \frac{\varrho_1^2}{ab_1}(a-2b_1)\int_0^1 \xi^{\frac{b_1}{a}} \frac{\partial \Phi_0(\varrho_1\xi)}{\partial(\varrho_1\xi)} d\xi. \tag{25}$$

Зауважимо, що

1) $\varrho_1 = \dfrac{R_1}{|\bar{x}|}$; 2) $\Phi_0(\varrho_1) = \dfrac{|\bar{x}|}{|\bar{x}-\bar{y}|}$;

3) $\varrho_1 \Phi_0(\varrho_1) = \dfrac{R_0}{|\bar{x}-\bar{y}|}$; 4) $\dfrac{\partial \Phi_0(\varrho_1\xi)}{\partial(\varrho_1\xi)} = \dfrac{|\bar{x}|^2[\xi R_0^2 - (\bar{x}, \bar{y})]}{R_0|\bar{x}-\xi\bar{y}|^3}$;

5) $\varrho_1^2 \dfrac{\partial \Phi_0(\varrho_1\xi)}{\partial(\varrho_1\xi)} = -\dfrac{R_0[R_0^2\xi - (\bar{x}, \bar{y})]}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^3}$.

Тоді одержимо вираз для $\operatorname{grad}\operatorname{div}\Psi_1\bar{f}$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\Psi_1\bar{f} = \frac{R_0}{b_1}\left\{\frac{3(\bar{f}, \bar{x}-\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|^5} - \frac{\bar{f}}{|\bar{x}-\bar{y}|^3} + \right.$$

$$+\frac{a-2b_1}{a}\int_0^1 \xi^{\frac{b_1}{a}}\left[\frac{3(\bar{y}, \bar{f})(\bar{x}-\xi\bar{y})}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5} + \frac{3(\bar{f}, \bar{x}-\xi\bar{y})\bar{y}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5} - \frac{3[R_0^2\xi-(\bar{x}, \bar{y})]\bar{f}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{15[R_0^2\xi - (\bar{x}, \bar{y})](\bar{f}, \bar{x}-\xi\bar{y})(\bar{x}-\xi\bar{y})}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^7}\right] d\xi\right\}. \tag{26}$$

Підставивши (26) та значення $v(x)$ в формулу (20) знайдемо остаточно

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{4\pi R_0}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0} \bar{f}(y) \frac{R^2 - R_0^2}{(R_0^2 + R^2 - 2RR_0\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}} d_yS -$$

$$-\frac{m(R_0^2-R^2)}{8\pi R_0 b_1}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}\left\{\frac{3(\bar{f}, \bar{x}-\bar{y})(\bar{x}-\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|^5} - \frac{\bar{f}}{|\bar{x}-\bar{y}|^3} + \right.$$

$$+\frac{a-2b_1}{a}\int_0^1 \xi^{\frac{b_1}{a}}\left[\frac{3(\bar{y}, \bar{f})(\bar{x}-\xi\bar{y})}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5} + \frac{3(\bar{f}, \bar{x}-\xi\bar{y})\bar{y}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5} - \frac{3[R_0^2\xi-(\bar{x}, \bar{y})]\bar{f}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5} + \right.$$

$$+\frac{15\,[R_0^2\xi-(\bar{x},\bar{y})](\bar{f},\ \bar{x}-\xi\bar{y})(\bar{x}-\xi\bar{y})}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^7}\Bigg]d\xi\Bigg\}d_yS. \qquad (27)$$

З формули (27) виходить, що зсув на безмежності прямує до нуля. Можна легко показати справедливість слідуючих тотожностей:

$$5\int_0^1\xi^{\frac{b_1}{a}}\frac{[R_0^2\xi-(\bar{x},\bar{y})](\bar{f},\ \bar{x}-\xi\bar{y})}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^7}(\bar{x}-\xi\bar{y})d\xi=-\frac{(\bar{f},\ \bar{x}-\bar{y})(\bar{x}-\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|^5}+$$

$$+\frac{b_1}{a}\int_0^1\frac{\xi^{\frac{b_1}{a}-1}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5}[(\bar{f},\ \bar{x}-\xi\bar{y})(\bar{x}-\xi\bar{y})-\xi(\bar{f},\bar{y})(\bar{x}-\xi\bar{y})-$$

$$-\xi(\bar{f},\ \bar{x}-\xi\bar{y})\bar{y}]\,d\xi; \qquad (28)$$

$$-\int_0^1\xi^{\frac{b_1}{a}}\frac{[R_0^2\xi-(\bar{x},\bar{y})]\bar{f}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5}d\xi=\frac{\bar{f}}{3|\bar{x}-\bar{y}|^3}-\frac{b_1}{3a}\int_0^1\xi^{\frac{b_1}{a}-1}\frac{\bar{f}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^3}d\xi. \qquad (29)$$

Підставивши (28) та (29) у (27), побачимо, що ряд членів взаємно знищується. Поєднавши члени, в які не входять інтеграли по ξ, одержимо остаточно вираз для зсуву в довільній точці поза сферою

$$\bar{u}(x)=\frac{3}{4m-3}\cdot\frac{R^2-R_0^2}{4\pi R_0^2}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}\Bigg\{\frac{(m-1)\bar{f}}{|\bar{x}-\bar{y}|^3}+\frac{m(\bar{f},\ \bar{x}-\bar{y})}{|\bar{x}-\bar{y}|^5}(\bar{x}-\bar{y})-$$

$$-\frac{m(2m-3)}{2(4m-3)}\int_0^1\xi^{\frac{b_1}{a}-1}\left[\frac{3(\bar{f},\ \bar{x}-\xi\bar{y})}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^5}(\bar{x}-\xi\bar{y})-\frac{\bar{f}}{|\bar{x}-\xi\bar{y}|^3}\right]d\xi\Bigg\}d_yS. \qquad (30)$$

Зауваження I. Якщо на поверхні сфери $|\bar{y}|=R_0$ задано вектор напруги $\bar{P}$, розв'язок відповідної граничної задачі теорії пружності для внутрішності сфери може бути поданим в слідуючій інтегральній формулі:

$$2G\bar{u}=\frac{1}{4\pi R_0}\iint\limits_{|\bar{y}|=R_0}\Bigg\{\frac{2R_0\bar{P}}{|\bar{x}-\bar{y}|}-2\bar{P}+\int_0^1\frac{1}{\xi}\left(\frac{R_0}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|}-1\right)d\xi\,\bar{P}-$$

$$-\bar{R}\times\left[\int_0^1\left(\frac{R_0(\bar{x}\xi-\bar{y})}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}-\frac{3R_0(\bar{x}\xi-\bar{y})}{\xi|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}-\frac{3\bar{y}}{\xi R_0^2}\right)d\xi+\frac{\bar{y}}{R_0^2}\right]\times\bar{P}+$$

$$+\bar{R}\left[2\int_0^1\frac{(\bar{x}\xi-\bar{y},\bar{P})}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}d\xi-\frac{R_0}{m}\int_0^1\frac{(A\xi^{-n_1}+B\xi^{-n_2})(\bar{x}\xi-\bar{y},\ \bar{P})}{|\bar{x}\xi-\bar{y}|^3}d\xi\right]+$$

$$+R_0 R^2\left[\int_0^1(\xi-3)\left(\frac{\overline{P}}{|\overline{x}\xi-\overline{y}|^3}-\frac{3(\overline{x}\xi-\overline{y},\ \overline{P})(\overline{x}\xi-\overline{y})}{|\overline{x}\xi-\overline{y}|^5}\right)d\xi\right]+$$

$$+R_0\frac{R_0^2-3R^2}{2}\int_0^1(A_1\,\xi^{1-n_1}+B_1\,\xi^{1-n_2})\left(\frac{\overline{P}}{|\overline{x}\xi-\overline{y}|^3}-\right.$$

$$\left.-\frac{3(\overline{x}\xi-\overline{y},\ \overline{P})}{|\overline{x}\xi-\overline{y}|^5}(\overline{x}\xi-\overline{y})\right)d\xi\Big\}d_yS, \qquad (31)$$

де

$$A=\frac{(2n_1+1)[(m-4)\,n_1-2\,(m-1)]}{n_1\,(n_1-n_2)};$$

$$B=-\frac{(2n_2+1)[(m-4)\,n_2-2\,(m-1)]}{n_2\,(n_1-n_2)};$$

$A_1=\dfrac{2n_1+1}{n_1-n_2}$; $B_1=-\dfrac{2n_2+1}{n_1-n_2}$; n_1 і n_2 — корені рівняння $mn^2-(m-2)\,n+$ $+m-1=0$.

Всі внутрішні інтеграли формули (31), до яких не входять ξ^{-n_1}, ξ^{-n_2}, ξ^{1-n_1}, ξ^{1-n_2}, обчислюються до кінця. Між тим, більш зручно формулу (31) залишити в наведеному вигляді.

З формули (31) легко обчислюється значення зсуву в центрі сфери та одержується

$$2G\overline{u}\,(0)=\frac{1}{4\pi R_0^2}\ \frac{5m}{7m-5}\iint\limits_{|\overline{y}|=R_0}\left(\overline{P}-\frac{3(\overline{y},\ \overline{P})\,\overline{y}}{R_0^2}\right)d_yS. \qquad (32)$$

З а у в а ж е н н я 2. Розв'язок задачі теорії пружності для зовнішності сфери, коли на поверхні її задані напруги, дається слідуючою інтегральною формулою:

$$2G\overline{u}=-\frac{1}{4\pi R_0}\iint\limits_{|\overline{y}|=R_0}\left\{\frac{2R_0}{|\overline{x}-\overline{y}|}+\int_0^1\frac{R_0}{|\overline{x}-\xi\overline{y}|}\,d\,\xi+\overline{x}\times\right.$$

$$\times\left[R_0\int_0^1\frac{(\overline{x}-\xi\,\overline{y})(1-3\xi)}{|\overline{x}-\xi\,\overline{y}|^3}\right]\times\overline{P}-\overline{x}\,R_0\int_0^1(A_2+B_2\,\xi^{-n_1-1}+$$

$$+C_2\,\xi^{-n_2-1})\,\frac{(\overline{x}-\xi\,\overline{y},\ \overline{P})}{|\overline{x}-\xi\,\overline{y}|^3}-R_0\int_0^1\left[\frac{\overline{P}}{|\overline{x}-\xi\,\overline{y}|^3}-\right.$$

$$-\frac{3(\overline{x}-\xi\,\overline{y},\ \overline{P})(\overline{x}-\xi\,\overline{y})}{|\overline{x}-\xi\,\overline{y}|^5}\Big[\,|\overline{x}|^2\,(A_3+B_3\xi^{-n_1-1}+C_3\xi^{-n_2-1})+$$

$$\left.\left.+\frac{m}{2}(|\overline{x}|^2-R_0^2)(B_4\,\xi^{-n_1-1}+C_4\,\xi^{-n_2-1})\right]d\,\xi_1\right\}, \qquad (33)$$

де A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3, B_4 и C_4 — конкретні числа; n_1 і n_2 — корені рівняння $mn^2+(3m-2)n+3(m-1)=0$.

Формула (33) дає можливість обчислити зсув $\bar{u}(x)$ в довільній точці поза сферою $|\bar{y}|=R_0$ за заданими на поверхні сфери напругами.

В цій формулі всі інтеграли, до яких не входять ξ^{-n_1-1} та ξ^{-n_2-1}, обчислюються до кінця.

Але через громіздкість цих інтегралів, ми вважаємо більш зручним залишити формулу (33) у вказаному вигляді.

З а у в а ж е н н я 3. Підкреслимо, що ряди, які дають розв'язки відповідних задач при розривних граничних умовах, збігаються повільно, в той час, як інтегральні представлення вільні від цього недоліку.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

М. О. ІГНАТЬЄВ

ПРО ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ВІДОБРАЖЕНЬ ДО СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

В даній роботі обчислені регулярні частини матриці Гріна для півпростору і кола. На підставі цих обчислень одержується перетворення відповідних розв'язків, які являють собою аналоги відомого перетворення Кельвіна.

Регулярні частини матриці Гріна виражені через фундаментальну матрицю Сомільяна та її похідні. Можливість такого представлення випливає з відомої теореми Фредгольма про вираження головної частини розв'язку системи рівнянь пружності через фундаментальну матрицю та її похідні.

При обчисленні регулярної частини матриці Гріна для півпростору ми виходимо з відомих інтегральних представлень розв'язків відповідних задач (див., напр., [2]).

Побудова регулярних частин матриці Гріна для обох основних задач теорії пружності для півпростору зводиться до обчислення ряду інтегралів.

При обчисленні регулярної частини матриці Гріна для кола, завдяки комплексному представленню розв'язків, вдалося уникнути обчислення громіздких інтегралів, які прийшлося б обчислювати, якщо виходити з інтегрального представлення розв'язку першої основної задачі (див., напр., [3], стор. 304).

ПОБУДОВА РЕГУЛЯРНИХ ЧАСТИН МАТРИЦІ ГРІНА

1. Згідно з визначенням матриці Гріна, знаходження регулярного додатка до матриці Сомільяна $\omega(x-y)$ зводиться до розв'язку системи рівнянь

$$(\Delta + \tau\partial\partial')P(x) = 0 \tag{1}$$

при граничній умові $P(x_1, x_2, 0; y_1, y_2, y_3) = \omega(x_1-y_1; x_2-y_2; -y_3)$,

де

$$\omega(x-y) = \frac{1}{8\pi(\tau+1)}\left[\frac{\tau+2}{|x-y|}E + \frac{\tau(x-y)(x-y)'}{|x-y|^3}\right].$$

Але розв'язок системи (1) при заданих граничних умовах виражається за формулою (див., напр., [2])

$$P(x; y) = \frac{x_3}{2\pi(\tau+2)}\int\limits_{\infty}\left[\frac{2E}{|x-z|^3} - \frac{3\tau(x-z)(x-z)'}{|x-z|^5}\right]\overline{f}(z)\,dz, \tag{2}$$

де $\overline{f}(z)$ — задана на границі області вектор-функція.

Підставимо граничну умову в рівність (2) і одержимо

$$P(x, y)=\kappa x_3\left[2(\tau+2)E\int\limits_{\infty}\frac{dz}{|z-y|\,|x-z|^3}+2\tau\int\limits_{\infty}\frac{(z-y)(z-y)'\,dz}{|z-y|^3\,|x-z|^3}+\right.$$

$$\left.+3\tau(\tau+2)\int\limits_{\infty}\frac{(x-z)(x-z)'\,dz}{|z-y|\,|x-z|^5}+3\tau^2\int\limits_{\infty}\frac{(x-z)(x-z)'(z-y)(z-y)'}{|z-y|^3\,|x-z|^5}\,dz\right],$$

де
$$\kappa=-\frac{1}{16\pi^2(\tau+1)(\tau+2)}.$$

В останньому виразі позначимо перший, другий, третій та четвертий інтеграли відповідно через I_1, I_2, I_3 і I_4. Тоді одержимо

$$P(x; y)=\kappa x_3\left[2(\tau+2)I_1E+2\tau I_2+3\tau(\tau+2)I_3+3\tau^2I_4\right]. \qquad (3)$$

Інтеграли I_2, I_3, I_4 можуть бути обчислені з допомогою виразу інтеграла I_1. Але інтеграл I_1 може бути легко виражений за формулою

$$I_1=\int\limits_{\infty}\frac{dz}{|z-x|\,|x-z|^3}=\frac{2\pi}{x_3\,|x-\tilde{y}|}. \qquad (4)$$

Якщо підставимо в рівність (3) обчислені вирази I_1, I_2, I_3, I_4 і виконаємо відповідні спрощення, то одержимо

$$P(x; y)=2\pi\kappa\begin{Vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{Vmatrix} \qquad (5)$$

де

$$a_{11}=\frac{(\tau+2)}{|x-\tilde{y}|}+\frac{2\tau^2x_3y_3}{|x-\tilde{y}|^3}+\frac{\tau(x_1-y_1)^2}{|x-\tilde{y}|^3}\left[\tau+2-\frac{6\tau x_2y_3}{|x-\tilde{y}|^2}\right];$$

$$a_{12}=a_{21}=\frac{(x_1-y)(x_2-y_2)}{|x-\tilde{y}|^3}\left[\tau+2-\frac{6\tau x_3y_3}{|x-\tilde{y}|^2}\right];$$

$$a_{13}=\frac{\tau(x_1-y_1)}{|x-\tilde{y}|^3}\left[(\tau+2)(x_3-y_3)+\frac{6\tau x_3y_3(x_3+y_3)}{|x-\tilde{y}|^2}\right];$$

$$a_{22}=\frac{(\tau+2)^3}{|x-\tilde{y}|}+\frac{2\tau_2x_3y_3}{|x-\tilde{y}|^3}+\frac{\tau(x_2-y_2)^2}{|x-\tilde{y}|}\left[\tau+2-\frac{6\tau x_3y_3}{|x-\tilde{y}|^2}\right];$$

$$a_{23}=\frac{\tau(x_2-y_2)}{|x-\tilde{y}|^3}\left[(\tau+2)(x_3-y_3)+\frac{6\tau x_3y_3(x_3+y_3)}{|x-\tilde{y}|^2}\right];$$

$$a_{31}=\frac{\tau(x_1-y_1)}{|x-\tilde{y}|^3}\left[(\tau+2)(x_3-y_3)-\frac{6\tau x_3y_3(x_3+y_3)}{|x-\tilde{y}|^2}\right];$$

$$a_{32}=\frac{\tau(x_2-y_2)}{|x-\tilde{y}|^3}\left[(\tau+2)(x_3-y_3)-\frac{6\tau x_3 y_3(x_3+y_3)}{|x-\tilde{y}|^2}\right];$$

$$a_{33}=\frac{(\tau+2)^2}{|x-\tilde{y}|}+\frac{2(x_3-y_3)^2\tau}{|x-\tilde{y}|^3}+\frac{\tau(x_3^2-y_3^2)}{|x-\tilde{y}|^3}+\frac{6\tau^2 x_3 y_3(x_3+y_3)^2}{|x-\tilde{y}|^5}.$$

Якщо виразимо матрицю з формули (5) через матрицю Сомільяна, та її похідні, знайдемо

$$P=\omega(x-\tilde{y})+\frac{2\tau y_3}{\tau+2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\omega(x-\tilde{y})}{\partial x_i}(e_3 e'_i+e_i e'_3)+$$

$$+\frac{\tau y_3^2}{\tau+2}\Delta_x\omega(x-\tilde{y})(e_3 e'_3-e_2 e'_2-e_1 e'_1), \qquad (6)$$

де

$$\omega(x-\tilde{y})=\frac{1}{8\pi(\tau+1)}\left[\frac{\tau+2}{|x-\tilde{y}|}E+\frac{\tau(x-\tilde{y})(x-\tilde{y})'}{|x-\tilde{y}|^3}\right];$$

$$(x-\tilde{y})=\left\|\begin{matrix}x_1-y_1\\x_2-y_2\\x_3+y_3\end{matrix}\right\| \qquad (x-\tilde{y})'=\|x_1-y_1;\ x_2=y_2;\ x_3+y_3\|;$$

$$|x-\tilde{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3+y_3)^2};$$

$$e_1=\left\|\begin{matrix}1\\0\\0\end{matrix}\right\|;\qquad e_2=\left\|\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}\right\|;\qquad e_3=\left\|\begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix}\right\|;$$

$$e'_1=\|1,0,0\|;\ e'_2=\|0,1,0\|;\ e'_3=\|0,0,1\|;$$

$$\tau=\frac{m}{m-2};$$

m є числом Пуассона.

2. Якщо на границі півпростору задані напруги, то розв'язок системи в області $x_3>0$, що задовольняє в кожній точці площини $x_3=0$ граничній умові

$$B^{(e_3)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\overline{u}(x)|_{x_3=0}=\overline{f}(x_1,x_2),$$

де $\overline{f}(x_1,x_2)$ — задана неперервна і обмежена вектор-функція, а $B^{(e_3)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матриця граничних умов, виразиться за формулою (див., напр., [2])

$$\overline{u}(x)=\int_{\infty}G^{(e_3)}(x-z)\overline{f}(z)\,dz, \qquad (7)$$

де ядро другого потенціалу

$$G^{(e_3)}(x-z)=-\frac{1}{8\pi}\left\{\frac{2\tau+1}{|x-z|}E-\frac{2\tau(x-z)(x-z)'}{|x-z|^4}+\right.$$

$$+\frac{(x_2-z_2)^2-(x_1-z_1)^2}{|x-z|\,[|x-z|+x_3]^2}(e_1e'_1-e_2e'_2)-\frac{2(x_1-z_1)(x_2-z_2)(e_1e'_2+e_2e'_1)}{|x-z|\,[|x-z|+x_3]^3}+$$

$$\left.+\frac{2[e_3(x-z)'-(x-z)e'_3}{|x-z|\,[|x-z|+x_3]}+\frac{e_3e'_3}{|x-z|}\right\}. \tag{8}$$

Регулярний в області $x_3>0$ додаток задачі цього пункту позначимо через $Q(x;\ y)$.

Згідно з визначенням функції Гріна, ми повинні мати

$$B^{(e_3)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)[\omega(x-y)-Q(x,y]\,|_{x_3=0}=0,$$

або

$$B^{(e_3)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)Q(x;\ y)\,|_{x_3=0}=B^{(e_3)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\omega(x-y)\,|_{x_3=0}.$$

Але відомо:

$$B^{(e_3)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=-\frac{1}{4\pi(\tau+1)}\left[\frac{y_3}{|z-y|^3}E+\frac{3\tau y_2(z-y)(z-y)'}{|z-y|^5}+\right.$$

$$\left.+\frac{z_1-y_1}{|z-y|^3}(e_3e'_1-e_1e'_3)+\frac{z_2-y_2}{|z-y|^3}(e_3e'_2-e_2e'_3)\right]. \tag{9}$$

Підставивши (8) та (9) у формулу (7), а потім обчисливши відповідні інтеграли та зробивши деякі спрощення, одержимо

$$Q=-\frac{\tau+2}{\tau}\omega(x-\tilde{y})-2y_3\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\omega(x-\tilde{y})}{\partial x_i}(e_3e'_i-e_ie'_3)+$$

$$+y_3^2\Delta_x\omega(x-\tilde{y})(e_1e'_1+e_2e'_2-e_3e'_3)+$$

$$+\frac{\tau+1}{\tau}\int_{\infty}^{y_3}(y_3-\alpha)\Delta\omega(x-\tilde{y}_\alpha)\,d\alpha\,(e_1e'_1+e_2e_2'-e_3e'_3)+$$

$$+\frac{2}{\tau}\int_{\infty}^{y_3}(y_3-\alpha)\left[\frac{\partial^2\omega(x-\tilde{y}_\alpha)}{\partial x_1\partial x_2}(e_1e'_2+e_2e'_1)+\frac{\partial^2\omega(x-\tilde{y}_\alpha)}{\partial x_1^2}e_2e'_2-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^2\omega(x-\tilde{y}_\alpha)}{\partial x_2^2}e_1e'_1\right]d\alpha, \tag{10}$$

де

$$x-\tilde{y}_\alpha=(x_1-y_1;\ x_2-y_2;\ x_3+\alpha).$$

З формули (6) виходить, що у випадку, коли на границі півпростору задані зміщення, регулярна частина матриці Гріна має особливість в точці $\tilde{y}$, яка є дзеркальним відображенням точки особливості y матриці Сомільяна.

Коли ж на границі півпростору задані напруги, то регулярна частина матриці Гріна має особливість вздовж променю, паралельного нормалі до границі області $x_3=0$, що виходить з точки $\tilde{y}_3$ і йде в точку $-\infty$ (див. формулу (10)).

3. Якщо на границі кола задані зміщення, то «регулярний» додаток матриці Гріна в середині кола можна знайти елементарними методами.

За формулою Г. В. Колосова компоненти зміщення $\begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix}$ виражаються через аналітичні функції $\varphi(z)$ та $\psi(z)$ слідуючим чином:

$$2\mu(u_1+iu_2)=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\varphi(\zeta)-\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}, \tag{11}$$

де $\zeta=x_1+ix_2$.

Введемо позначення

$$\frac{\lambda+3\mu}{2\mu(\lambda+\mu)}\varphi(z)=\Phi(z); \quad -\frac{\psi(z)}{2\mu}=\Psi(z);$$

$$\kappa=\frac{2(\lambda+\mu)\mu}{\lambda+3\mu}; \quad \varepsilon=\begin{Vmatrix} 1 \\ i \end{Vmatrix}; \quad \varepsilon'=\|1, \ i\|.$$

Тоді очевидно, що $u_1+iu_2=\varepsilon'u$ і рівність (11) переписується у вигляді

$$\varepsilon' u=\Phi(\zeta)-\kappa\zeta\overline{\Phi'(\zeta)}+\overline{\Psi(\zeta)}. \tag{11'}$$

Переходячи в формулі (11′) до комплексно-спряжених значень, одержимо

$$\overline{\varepsilon' u}=\overline{\Phi(\zeta)}-\kappa\bar{\zeta}\Phi'(\zeta)+\Psi(\zeta). \tag{11''}$$

Очевидні слідуючі тотожності:

$$E=\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\varepsilon'+\frac{1}{2}\varepsilon\bar{\varepsilon}', \tag{12}$$

де E — одинична матриця розмірів 2×2,

$$u(\zeta)=\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\varepsilon' u+\frac{1}{2}\varepsilon\bar{\varepsilon}' u; \tag{13}$$

$$u(\zeta)=\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}[\Phi(\zeta)-\kappa\zeta\overline{\Phi'(\zeta)}+\overline{\Psi(\zeta)}]+\frac{1}{2}\varepsilon[\overline{\Phi(\zeta)}-\kappa\bar{\zeta}\Phi'(\zeta)+\Psi(\zeta)]. \tag{14}$$

В формулі (14) $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ — функції (а не матриці).

Якщо ж формулу (14) будемо застосовувати до квадратної матриці $\omega(\zeta)$, то $\Phi(\zeta)$ та $\Psi(\zeta)$ повинні бути функціональними рядками.

Введемо ще такі позначення:

$$x = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\|; \quad y = \left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right\|; \quad \eta = y_1 + i y_2.$$

Відомо, що матриця Comiльяна з особливістю в точці y у випадку площини має вигляд:

$$\omega(x-y) = 2c\left[E \ln|x-y| - \varkappa \frac{(x-y)(x-y)'}{|x-y|^2}\right], \tag{15}$$

де

$$c = -\frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)}; \qquad \varkappa = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}.$$

З формули (15) одержуємо

$$\varepsilon'\omega(x-y) = 2c\left[\varepsilon' \ln|x-y| - \varkappa \frac{\varepsilon'(x-y)(x-y)'}{|x-y|^2}\right]. \tag{16}$$

Але

$$|x-y| = |\zeta - \eta|; \quad \varepsilon'(x-y) = \zeta - \eta;$$

$$\overline{\varepsilon}'(x-y) = \overline{\zeta} - \overline{\eta}; \quad |x-y|^2 = (\zeta - \eta)(\overline{\zeta} - \overline{\eta}).$$

Тому, застосовуючи формулу (13) до стовпця, одержимо

$$\|x-y\| = \frac{1}{2}\overline{\varepsilon}\varepsilon'(x-y) + \frac{1}{2}\varepsilon\overline{\varepsilon}'(x-y) = \frac{\zeta-\eta}{2}\overline{\varepsilon} + \frac{(\overline{\zeta}-\overline{\eta})}{2}\varepsilon.$$

Тоді рівність (16) дає

$$\varepsilon\omega(x-y) = 2c\left[\ln|\zeta-\eta|\,\varepsilon' - \frac{\varkappa}{2}\frac{\zeta-\eta}{\overline{\zeta}-\overline{\eta}}\overline{\varepsilon}' - \frac{\varkappa}{2}\varepsilon'\right]. \tag{17}$$

Через те, що матриця Comiльяна визначається з точністю до сталого доданка, у виразі (17) член, рівний $-c\varkappa\varepsilon'$ можемо відкинути. Позначимо частину матриці Comiльяна, що залишається, через Ω. Тоді маємо

$$\varepsilon'\Omega(x-y) = c\left[2\ln|\zeta-\eta|\,\varepsilon' - \frac{\varkappa(\zeta-\eta)}{\overline{\zeta}-\overline{\eta}}\overline{\varepsilon}'\right]. \tag{18}$$

Легко бачити, що рядок $\varepsilon'\Omega(x-y)$ можна подати у вигляді

$$\varepsilon'\Omega(x-y) = \Phi_0(\zeta) - \varkappa(\zeta-\eta)\frac{\partial}{\partial\zeta}\overline{\Phi_0(\zeta)} + \overline{\Psi_0(\zeta)}, \tag{19}$$

де покладено

$$\Psi_0(\zeta) = c\ln(\zeta-\eta)\overline{\varepsilon}' \text{ і } \Phi_0(\zeta) = c\ln(\zeta-\eta)\varepsilon'.$$

Будемо тепер шукати «доданок» $\varepsilon' g(x, y)$ у вигляді

$$\varepsilon' g(x, y) = \Phi_1(\zeta, \eta) - \varkappa(\zeta-\eta)\overline{\frac{\partial\Phi_1}{\partial\zeta}} + \overline{\Psi_1(\zeta, \eta)}.$$

З граничної умови

$$\varepsilon' g(x, y) = \varepsilon' \Omega (x, y), \tag{20}$$

випливає

$$\varepsilon' g = \Phi_1(\zeta, \eta) - \varkappa(\zeta - \eta)\overline{\frac{\partial \Phi_1}{\partial \varepsilon}} + \overline{\Psi}_1(\zeta, \eta) =$$

$$= c\ln(\zeta - \eta)\varepsilon' + c\ln(\overline{\zeta} - \overline{\varepsilon})\varepsilon' - \frac{c\varkappa(\zeta - \eta)\overline{\varepsilon'}}{\overline{\zeta} - \overline{\eta}}.$$

Якщо позначити через η_1 точку, інверсійну з точкою η відносно кола, одержимо

$$|\eta|\ |\eta_1| = R_0^2;\ \eta\overline{\eta}_1 = R_0^2.$$

Крім того, якщо точка ζ знаходиться на колі, то справедливі рівності

$$\zeta \cdot \overline{\zeta} = R_0^2;\quad \frac{|\zeta - \eta|}{|\zeta|} = \frac{|\zeta - \eta^1|}{R_0}.$$

Тому з (20) маємо

$$\varepsilon' g = c\varepsilon' \ln(\eta_1 - \zeta) + c\varepsilon' \ln(\overline{\eta}_1 - \overline{\zeta}) + 2c\varepsilon' \ln\frac{|\eta|}{R_0} +$$

$$+ c\varkappa\varepsilon' \frac{R_0^2 - \eta\overline{\eta}}{R_0^2\overline{\eta}}\left(\zeta + \eta_1 + \frac{\eta^2}{\zeta - \eta_1}\right) + cx(\zeta - \delta)\left[\frac{\overline{\varepsilon'}}{\overline{\eta}_1 - \overline{\varepsilon}} +\right.$$

$$\left. + \frac{\varkappa(R_0^2 - \eta\overline{\eta})\varepsilon'}{R_0^2\eta^2}\left(\frac{R_0^2\overline{\eta}}{(\overline{\zeta} - \overline{\eta}_1)^2} - \eta\right) - \frac{\varkappa^2 c\varepsilon'(R_0^2 - \eta\overline{\eta})}{R_0\eta}\left(\eta + \frac{R_0^2}{\overline{\eta}_1 - \overline{\zeta}}\right)\right]. \tag{21}$$

Враховуючи відкинутий член $-c\,x\varepsilon'$ для «доданка» з поправкою $\varepsilon' g$, знайдемо

$$\varepsilon' g_s = c\varepsilon'\omega(x - \widetilde{y}) + 2c\varepsilon' \ln\frac{|\eta|}{R_0} + \frac{c\varkappa}{R_0^2}[\overline{\varepsilon}_1(\zeta + h_1)(h_1 - h) - \varkappa\varepsilon'\zeta(\overline{\eta}_1 - \overline{\eta})] -$$

$$- \frac{c\varkappa\varepsilon'(\overline{\eta}_1 - \overline{\eta})}{\overline{\zeta} - \overline{\eta}_1} + \frac{c\varkappa\overline{\varepsilon}'(\eta_1 - \eta)\eta_1^2}{R_0^2(\varepsilon - \eta_1)} + \frac{c\varkappa^2\varepsilon'\overline{\eta}_1(\overline{\eta}_1 - \overline{\eta})(\zeta - \eta)}{\eta(\overline{\zeta} - \overline{\eta}_1)^2}. \tag{22}$$

Застосовуючи до формули (22) формулу (13), одержимо

$$g_s = \omega(x - \widetilde{y}) + 2cE\ln\frac{|\eta|}{R_0} + \frac{c\varkappa}{2R_0^2}[\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'(\zeta - \eta_1)(\eta_1 - \eta) - \varkappa\varepsilon\overline{\varepsilon}'(\overline{\eta}_1 - \overline{\eta})] +$$

$$+ \frac{c\varkappa}{2R_0^2}[\varepsilon\varepsilon'(\overline{\zeta} + \overline{\eta}_1)(\overline{\eta}_1 - \overline{\eta}) - \varkappa\varepsilon\overline{\varepsilon'}\,\overline{\zeta}(\eta_1 - \eta)] - \frac{c\varkappa}{2}\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'\frac{\eta_1 - \eta}{\overline{\zeta} - \overline{\eta}} -$$

$$- \frac{c\varkappa}{2}\varepsilon\varepsilon'\frac{\overline{\eta}_1 - \overline{\eta}}{\overline{\zeta} - \eta^2} + \frac{c\varkappa^2}{2}\overline{\varepsilon}\varepsilon'\frac{\overline{\eta}_1 - \overline{\eta}}{\overline{\zeta} - \overline{\eta}_1} + \frac{c\varkappa^2\overline{\varepsilon}\overline{\varepsilon}'(\eta_1 - \eta)}{2(\zeta - \eta_1)} +$$

$$+\frac{c\varkappa}{2R_0^2}\frac{\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'(h_1-\eta)\,h_1^2}{\zeta-\eta_1}+\frac{c\varkappa\varepsilon\varepsilon'(\overline{\eta}_1-\overline{\eta})\,\overline{\eta}^2}{2R_0^2(\overline{\zeta}-\overline{\eta}_1)^2}+\frac{c\varkappa^2\overline{\varepsilon}\varepsilon'\,\eta_1(\overline{\eta}_1-\overline{\eta})}{2\eta}\cdot\frac{\zeta-\eta}{(\overline{\zeta}-\overline{h}_1)^2}+$$

$$+\frac{c\varkappa^2\,\varepsilon\overline{\varepsilon}'\,\eta_1(\eta_1-\eta)(\overline{\varepsilon}-\overline{\eta})}{2\overline{\eta}\,(\zeta-\eta_1)^2}. \qquad (23)$$

Якщо вираз (23) представимо через матрицю Сомільяна з особливістю в точці η_1, то одержимо

$$g_s=\omega(x-\widetilde{y})+\frac{\partial\omega(x-\widetilde{y})}{\partial x_1}A+\frac{\partial\omega(x-\widetilde{y})}{\partial x_2}B+\Delta_x\,\omega(x-\widetilde{y})\,C+D, \qquad (24)$$

де

$$A=R_e\left[\frac{\varkappa}{2}\,\frac{(\overline{\eta}_1-h)(\overline{\eta}_1-\overline{\eta})}{\eta}\,\varepsilon\varepsilon'\right];$$

$$B=I_m\,\frac{\varkappa}{2}\left[\frac{(\overline{\eta}_1+\overline{\eta})(\overline{\eta}_1+\overline{\eta})}{\eta}\,\varepsilon\varepsilon'\right];$$

$$C=\frac{\varkappa}{4}\,R_0\left[\frac{(\overline{\eta}_1-\overline{\eta})(\eta_1-\eta)\,\overline{\eta}}{\eta}\,\varepsilon\varepsilon'\right];$$

$$D=\frac{\varkappa c}{R_0^2}R_e\left[(\zeta-\eta_1)(\eta_1-\eta)\,\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'-\varkappa\varepsilon\varepsilon'\,(\overline{\eta}_1-\overline{\eta})\right]+2E\ln\frac{|\eta|}{R_0}.$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ЛЯМЕ

Слідуючі зауваження легко перевіряються.

З а у в а ж е н н я 1. Система рівнянь Ляме $(\Delta_y+\tau\partial\partial')\,u=0$ може бути перетвореною до вигляду

$$2(\tau+2)\,|\eta|^4\frac{\partial^2 u}{\partial\eta_1\partial\overline{\eta}}+\tau\left[\overline{\eta}_1^4\,\varepsilon\varepsilon'\frac{\partial^2 u}{\partial\overline{\eta}_1^2}+\eta_1^4\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}.\frac{\partial^2 u}{\partial\eta_1^2}+\right.$$

$$\left.+2\overline{\eta}_1^3\varepsilon\varepsilon'\frac{\partial u}{\partial\overline{\eta}_1}+2\eta_1^3\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'\frac{\partial u}{\partial\eta}\right]=0, \qquad (25)$$

З а у в а ж е н н я 2. Формула (24) може бути записана слідуючим чином:

$$g_s=\omega(\kappa-\widetilde{y})+\frac{\partial\omega(x-\widetilde{y})}{\partial\eta_1}A_1+\frac{\partial\omega(x-\widetilde{y})}{\partial\eta_1}B_2+\Delta\omega\,C_1+D, \qquad (26)$$

де позначено

$$A_1=\frac{\varkappa\,\overline{\eta}_1^2}{2R_0^2}\left[\frac{\eta_1(\overline{h}_1-\overline{\eta})\,\varepsilon\varepsilon'}{\eta}-(\eta_1-\eta)\,\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'\right];$$

$$B_1=\frac{\varkappa\,\overline{\eta}_1^2}{2R_0^2}\left[\frac{\eta_1(\eta_1-\eta)\,\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'}{\overline{\eta}}-(\overline{\eta}_1-\eta)\,\varepsilon\varepsilon'\right];$$

$$C'_1 = \frac{\varkappa \eta_1^2 \overline{\eta}_1^2}{2R_0}\left[\frac{(\overline{\eta}_1 - \overline{\eta})\overline{\eta}_1(\eta_1 - \eta)}{\eta}\varepsilon\varepsilon' + \frac{\eta_1(\overline{\eta}_1 - \overline{\eta})(\eta_1 - \eta)}{\overline{\eta}}\overline{\varepsilon}\,\overline{\varepsilon}'\right].$$

Зауваження 3. Кожний стовпець регулярної частини D доданка (26) задовольняє системі рівнянь пружності, що перевіряється безпосередньо.

Зауваження 4. Будь-який розв'язок $u(x)$ системи рівнянь Ляме в скінченій області D можна представити з допомогою фундаментальної матриці Сомільяна ω у вигляді

$$u(x) = \int_D \left\{\omega(z-y)A\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)u(z)\right\}ds - \int_S \omega(z-x)\sum_{ij}\gamma_i B_{ij}\frac{\partial u}{\partial z_{ij}}d_z s +$$

$$+\int_S \sum_{ij}\gamma_i(z)\frac{\partial\omega(z-x)}{\partial z_j}B_{ij}u(z)\,d_z s, \tag{27}$$

де $B_{ij} = \mu\delta_{ij}E + \lambda e_i e'_j + \mu e_j e'_i$; δ_{ij} — символ Кронекера; γ_i — проекція одиничної нормалі до границі S області D; оператор пружності

$$A\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = \mu\triangle + (\lambda + \mu)\partial\partial'.$$

Зауваження 5. Якщо на границі S плоскої області D задано вектор зміщення $F(z)$, то розв'язок неоднорідної системи $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = f(x)$ записується з допомогою формули

$$u(x) = \int_D \{G(z-y)f(z)\}\,dz + \int_S \sum_S \gamma_i(z)\frac{\partial G(z-x(}{\partial z_i}B_{ij}F(z)\,d_z s. \tag{28}$$

де G — матриця Гріна.

Зауваження 6. Якщо матриця $u(x)$ регулярна в області D і $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0$, то вона виражається через матрицю Сомільяна ω за формулою

$$u(x) = -\int_S \omega(z-x)\sum_{ij}\gamma_i(z)B_{ij}\frac{ou}{\partial z_j}d_z s + \int_S \sum_{ij}\gamma_i(z)\frac{\partial\omega(z-x)}{\partial z_j}B_{ij}(z)\,d_z s. \tag{29}$$

Теорема 1. Матриця Гріна G для системи рівнянь Ляме має властивість симетрії $G'(x, y) = G(y, x)$, де знак «штрих» означає транспонування. Доведення цієї теореми проводиться звичайним чином на основі формул типу Гріна.

Наслідок перший. Доданок до матриці Гріна g_s має властивість симетрії $g'_s(x, y) = g_s(y, x)$.

Наслідок другий. Матриця $G'(x, y)$, одержана транспонуванням матриці Гріна $G(x, y)$, задовольняє системі рівнянь пружності

$$A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0$$

Наслідок третій. Транспонований додаток $g'(x, y)$ також задовольняє системі рівнянь на координаті y.

Теорема 2. Якщо $u(y)$ є розв'язок системи рівнянь Ляме, то

$$W' = u(\tilde{y}) - A' \frac{\partial u}{\partial y_1} - B' \frac{\partial u}{\partial y_2} + C' \triangle u \tag{30}$$

задовольняє тій самій системі рівнянь.

Позначимо оператор правої частини рівності (30) через $K\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Згідно з зауваженням (5), $u(y)$ виражається за формулою (28)

$$u(y) = -\int_S \omega(z-y) \sum_{ij} \gamma_i(z) B_{ij} \frac{\partial u}{\partial z_j} d_j s + \int_S \sum_{ij} \gamma_i(z) \frac{\partial \omega(z-y)}{\partial z_j} B_{ij} u(z) d_j s.$$

Звідси, замінивши y на $\tilde{y}$, одержимо

$$u(\tilde{y}) = -\int_S \omega(z-\tilde{y}) \sum_{ij} \gamma_i(z) B_{ij} \frac{\partial u}{\partial z_j} d_j s + \\ + \int_S \sum_{ij} \gamma_i(z) \frac{\partial \omega(z-\tilde{y})}{\partial z_j} B_{ij} u(z) d_j s. \tag{31}$$

Застосовуючи до рівності (31) оператор $K\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ будемо мати

$$W'(y) = K\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) u(\tilde{y}) = K\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \left\{ -\int_S \omega(z-\tilde{y}) \sum_{ij} \gamma_i(z) B_{ij} \frac{\partial u}{\partial z_j} d_j s + \right. \\ \left. + \int_S \sum_{ij} \gamma_i(z) \frac{\partial \omega(z-\tilde{y})}{\partial z_j} B_{ij} u(z) d_j s. \right\}. \tag{32}$$

Нам треба довести, що $A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) W'(y) = 0$.

Діючи оператором пружності $A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$ на рівність (32), знаходимо

$$A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) W'(y) = \left\{ -\int_S A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) K\omega(z-\tilde{y}) \sum_{ij} \gamma_i(z) B_{ij} \frac{\partial u}{\partial z_j} d_j s + \right. \\ \left. + \int_S \sum_{ij} \gamma_i(z) \frac{\partial}{\partial z_j} \left[A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) K\omega(z-\tilde{y}) \right] B_{ij} u(z) d_j s \right\}.$$

Але, внаслідок того, що $K\omega(z-\tilde{y})$ задовольняє системі рівнянь пружності по координаті y, одержуємо

$$A\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) W'(y) = 0,$$

що й треба було довести.

Теорема 2 дає аналог, відомого для рівняння Лапласа, перетворення Кельвіна. Формули (6) та (10) також можуть бути використані як аналог перетворення Кельвіна при одержанні перетворень розв'язків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Fredholm Ivar. Sur les e'qutions de le'qulibre d'un corps solide e'lasique par. Acta matematica 23. 1900.

2. Имшенецкая Е. Ф. О некоторых краевых задачах теории упругости. Автореферат диссертации, Львов, 1953.

3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, 1954.

4. Купрадзе В. Д. Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, Гостехиздат, 1950.

5. Граве Д. А. Об основных задачах математической теории построения географических карт. Диссертация на степень доктора чистой математики. Петербург, 1896.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

О. М. КОСТОВСЬКИЙ

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ З ОБМЕЖЕНИМ РОЗХИЛОМ

В геометрії циркуля доводиться, що всі задачі на побудову, які розв'язуються циркулем і лінійкою, можна точно розв'язати і одним циркулем, на радіуси якого жодних обмежень не накладається. Такому циркулю приписується властивість креслити кола будь-яких розмірів. Однак кожному відомо, що даним конкретним циркулем можна описувати кола, радіуси яких не перевищують відрізка, рівного максимальному розхилу ніжок циркуля. Так само цим циркулем не можна описати кола скільки завгодно малих радіусів.

Таким чином, якщо через r позначити радіус будь-якого кола, що описуємо даним циркулем, то завжди можна вказати два відрізки $R_{\min}$ і $R_{\max}$ таких, що

$$R_{\min} \leqslant r \leqslant R_{\max}.$$

Відрізок $R_{\max}$ обмежує величину радіуса кола, яке описуємо даним циркулем, зверху, а відрізок $R_{\min}$ — знизу.

В роботі [2] було доказано, що всі задачі на побудову, які розв'язуються циркулем і лінійкою, можна точно розв'язати одним циркулем, розхили ніжок якого обмежені тільки зверху довільним сталим відрізком $R_{\max}$.

В цій статті буде показано, що всі задачі на побудову, які розв'язуються циркулем і лінійкою, можна також точно розв'язати одним циркулем, розхили ніжок якого обмежені тільки знизу довільним наперед заданим відрізком $R_{\min}$. Таким чином, ми будемо користуватися циркулем, який описує кола будь-якого радіуса $r \geqslant R_{\min}$. Для простоти, замість $R_{\min}$, будемо писати R.

Кожна задача на побудову в планіметрії вважається розв'язаною циркулем і лінійкою, якщо вона може бути зведена до розв'язання слідуючих п'яти основних простіших задач (основних операцій):

1. Через дві дані точки провести пряму лінію.
2. З даної точки описати коло даного радіуса.
3. Знайти точки перетину двох даних кіл.
4. Знайти точки перетину даного кола і даної прямої, заданої двома точками.
5. Знайти точку перетину двох прямих, кожна з яких задана двома точками.

Нижче буде показано, що всі ці п'ять основних задач можуть бути розв'язані одним циркулем, розхили ніжок якого обмежені знизу відрізком R.

З допомогою одного циркуля ми не можемо, звичайно, накреслити неперервну пряму лінію, якщо ця пряма лінія задана двома точками, однак тільки циркулем можна побудувати одну, дві і будь-яке необмежене число точок, розміщених як завгодно щільно на цій прямій. З практичної точки зору, немає, звичайно, підстави вважати пряму побудованою, якщо побудовані деякі її точки. Для побудови прямої лінійка не може бути замінена іншими інструментами, які не призначені для проведення прямої лінії. Так само ми не зможемо накреслити нашим циркулем неперервного кола, якщо радіус цього кола є менше R, однак ми побудуємо на ньому будь-яке число точок, розміщених як завгодно щільно.

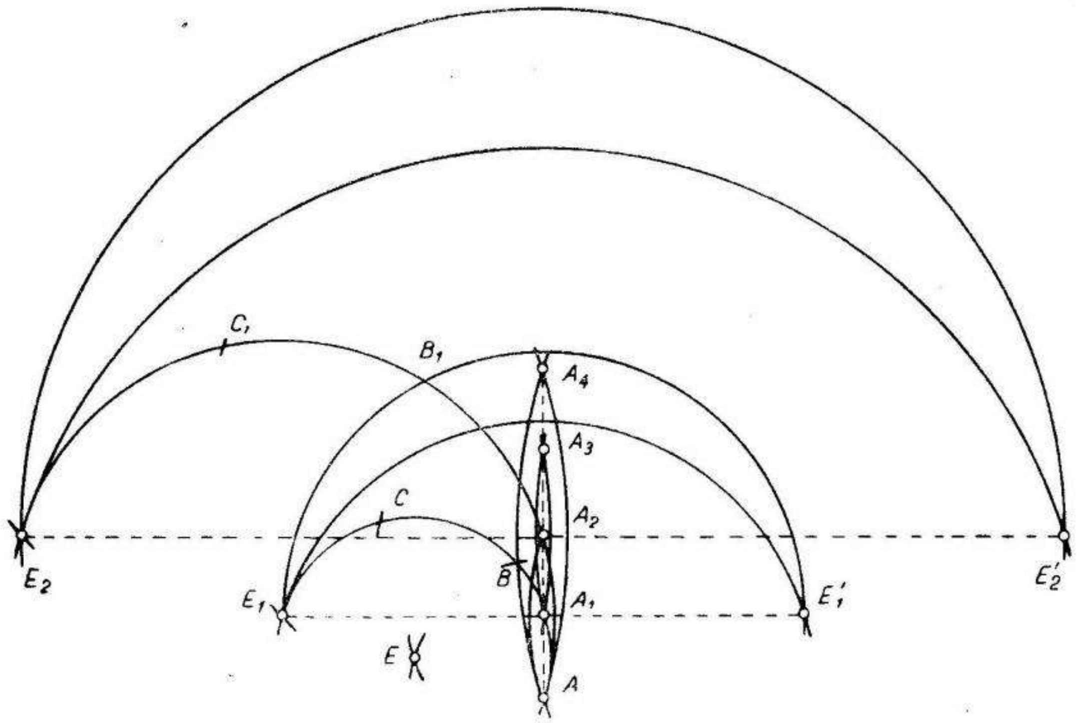

Рис. 1.

Для скорочення запису, фразу «з точки A, як з центра, радіусом BC списуємо коло (або дугу)» умовимося заміняти фразою «Описуємо (A, BC)», або «Проводимо (A, BC)». Замість символа (A, AB) будемо писати (A, B). Для наочності рисунка будемо на ньому проводити пунктирні прямі лінії.[1]

Задача 1. Побудувати відрізок в n разів більший даного відрізка AA_1 (n — натуральне число).

Побудова.

Будуємо відрізок A_1E_1, перпендикулярний до даного відрізка AA_1. Для цього описуємо кола (A, a) і (A_1, a), де a довільний відрізок більший або рівний R; в перетині проведених кіл одержуємо точку E. Проводимо коло (E, A) і відкладаємо на ньому хорди $AB=BC=CE_1=a$. Тоді $A_1E \perp A_1A$. Будуємо потім точку E'_1, симетричну точці E_1, відносно прямої AA_1. Для цього креслимо кола (A, E_1) і (A_1, E_1), в перетині яких одержимо точку E'_1. Будуємо точку A_2 симетричну точці A відносно прямої $E_1E'_1$. Очевидно, $AA_2=2A_1A$.

[1] В побудові ці прямі не будуть приймати участі.

Якщо тепер на колі (E_1, A) радіусом AE_1 відкласти хорди $AB_1 = B_1C_1 = C_1E_2$, одержимо $A_2E_2 \perp AA_2$. Проводимо кола (A, E_2) і (A_2, E_2), в перетині одержимо точку E_2', симетричну точці E_2, відносно прямої AA_2. Нарешті, будуємо точки A_3 і A_4, симетричні точкам A_1 і A відносно прямої $E_2E'_2$, для чого проводимо кола (E_2, A_1), (E'_2, A_1), (E_2, A) і E'_2, A). Одержимо $AA_3 = 3AA_1$, $AA_4 = 4AA_1$. Наступні побудови повторюються аналогічно. Справедливість побудови очевидна. Радіуси всіх кіл даної побудови більші R, значить, ці кола можуть бути проведені даним циркулем.

Якщо $AA_1 \geqslant R$, то можна використати звичайну побудову геометрії циркуля.

Зауваження. Із цієї побудови легко бачити, що точки A_2, A_4, A_8, $A_{16}, \ldots$ можна будувати відразу, пропускаючи при цьому побудову точок A_3, A_5, A_6, A_7, $A_9, \ldots$ тобто знаходити відрізки в 2, 4, 8, 16, ... разів більше даного відрізка AA_1.

Задача 2. Побудувати відрізок, рівний $\frac{1}{n}$ даного відрізка AB. (Розділити даний відрізок на n рівних частин).

а) Побудова у випадку $AB \geqslant R$.

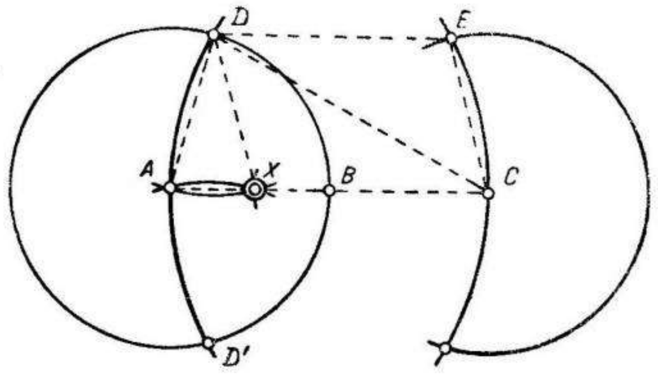

Рис. 2.

Будуємо відрізок $AC = nAB$ (задача 1). Описуємо коло (C, AB) (C, A) і (A, C); в перетині одержимо точки D і E. Якщо тепер провести кола (D, A) і (C, DE), то вони перетнуться в шуканій точці X. Відрізок $AX = \frac{1}{n} AB$.

Доведення. Точка X лежить на прямій AB, через те, що $DE \parallel AC$, а $CX \parallel DE$ (фігура $DECX$ — паралелограм). Тому рівнобедрені трикутники ACD і ADX подібні, звідки $AC : AD = AD : AX$,
або

$$AD^2 = AB^2 = AC \cdot AX = nAB \cdot AX.$$

Отже,

$$AX = \frac{1}{n} AB.$$

Радіуси всіх кіл, проведених в даній побудові, більші або рівні $AB \geqslant R$.

Для того, щоб відрізок AB розділити на n рівних частин, необхідно AX повторити n разів (задача 1).

Примітка. При побудові точки X можна замість кола (C, DE) провести коло (D', A), в цьому випадку виникає необхідність в проведенні кіл (C, AB) і (A, C).

б) Побудова у випадку $AB<R$. Будуємо відрізок $AB' = \kappa AB$ (задача 1), причому натуральне число κ беремо таким, щоб $AB' \geqslant R$. Ділимо відрізок AB' на κn рівних частин (випадок *a* розглядуваної задачі). В результаті одержимо шуканий відрізок

$$AX = \frac{AB'}{\kappa n} = \frac{\kappa AB}{\kappa n} = \frac{AB}{n}.$$

Задача 3. (1 — основна простіша задача). На прямій, заданій двома точками A і B, побудувати одну або декілька точок.

Побудова.

З точок A і B, як з центрів, описуємо два кола довільних радіусів, в перетині одержимо точки C і D. Якщо тепер довільним радіусом опишемо кола (C, r) і (D, r), то одержимо точки X і $У$, які лежать на даній прямій AB. Змінюючи значення радіуса r, ми зможемо побудувати скільки завгодно точок даної прямої.

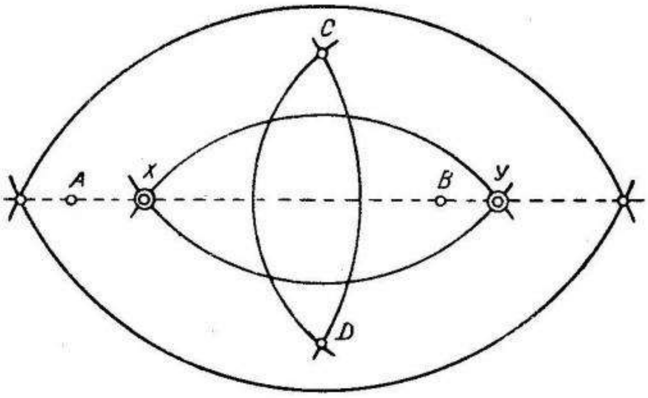

Рис. 3.

Задача 4. (2 основна простіша задача). **З даної точки, як з центра, описати коло даного радіуса r.** Якщо $r \geqslant R$, то побудова циркулем виконується безпосередньо. Якщо $r<R$, то даним циркулем ми не зможемо накреслити коло у вигляді неперервної кривої, в цьому випадку вкажемо метод побудови окремих точок даного кола.

Задачу в останньому випадку краще сформулювати таким чином.

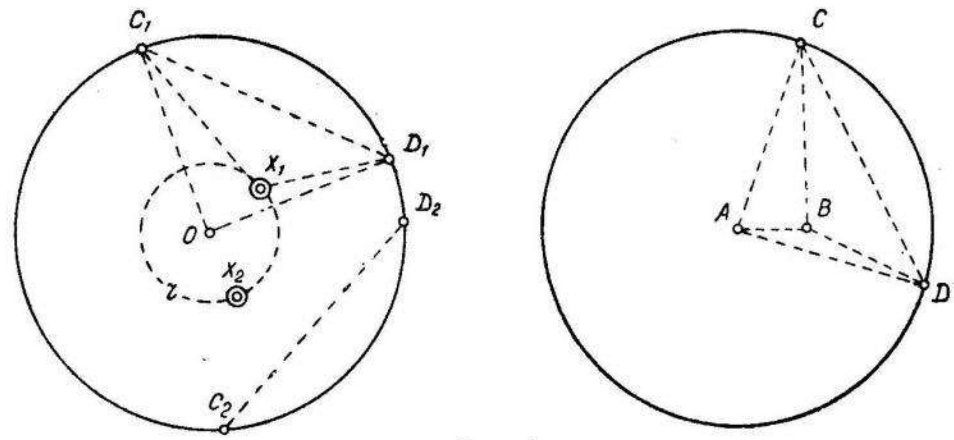

Рис. 4.

На колі, яке задане центром O і радіусом $AB=r$, побудувати одну або декілька точок.

Побудова у випадку $AB = r < R$.

Довільним радіусом a, взятим за умовою $a \geqslant R + r$, опишемо кола (O, a) і (A, a) і відкладемо на цих колах хорди $CD = C_1D_1 \geqslant R$.

Якщо тепер описати кола (C_1, CB) і (D_1, DB), то в перетині одержимо точку X_1. Точка X_1 лежить на колі (O, r). Відклавши хорду

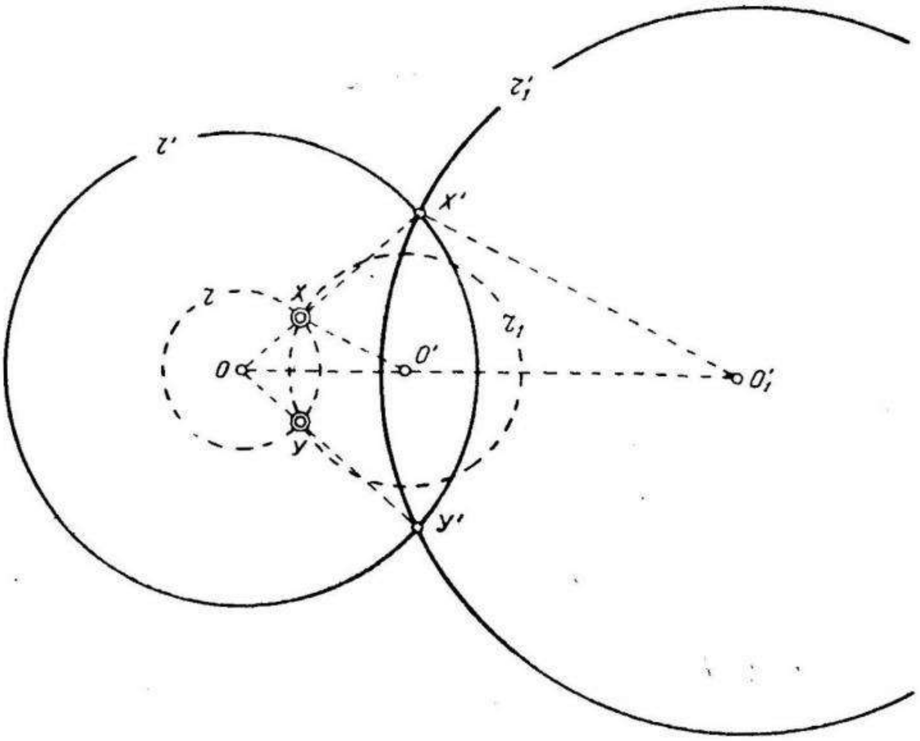

Рис. 5.

$D_2C_2 = CD$, аналогічно побудуємо точку X_2 даного кола. Змінюючи положення хорди D_2C_2, можна побудувати скільки завгодно точок даного кола.

Справедливість побудови негайно випливає із рівності трикутників $\triangle ACD = \triangle OC_1D_1$ і $\triangle BCD = \triangle X_1C_1D_1$ по трьох сторонах, отже, $OX_1 = AB = r$.

Задача 5. (3-я основна простіша задача). Знайти точки перетину двох даних кіл, заданих центрами O і O_1 і радіусами r і r_1.

Побудова у випадку $r \geqslant R$ і $r_1 \geqslant R$ виконується даним циркулем безпосередньо. В противному разі побудову можна виконати так (див. рис. 5).

Побудова.

Будуємо відрізок $r' = nr$ і $r'_1 = nr_1$ (задача 1), при цьому натуральне число n беремо таким, щоб $r' \geqslant R$ і $r'_1 \geqslant R$. Будуємо відрізок $OO'_1 = nOO_1$ і описуємо кола (O, r') і (O'_1, r'_1). Нехай останні два кола перетинаються в точках X' і $У'$. Будуємо відрізки $OX = \frac{1}{n} OX'$ і $OУ = \frac{1}{n} OУ'$ (задача 2). X і $У$ — шукані точки перетину даних кіл.

Справедливість побудови випливає із подібності трикутників $OX'O'_1$ і OXO_1.

Задача 6. Поділити дугу AB кола (O, r) пополам.

а) Побудова у випадку $r \geqslant R$.

Можемо вважати, що хорда $AB \geqslant R$, у противному разі треба відкласти хорди $AA' = BB'$, де вже $A'B' \geqslant R$, і замість дуги AB ділимо пополам дугу $A'B'$. Описуємо кола (O, AB), (A, r) і (B, r), в перетині одержимо точки C і D. Проводимо кола (C, B) і (D, A); обидва ці кола перетнуться в точці E. Якщо тепер провести кола (C, OE) і (D, OE), то в перетині останніх одержимо точки X і X_1. Точка X ділить пополам дугу AB, а точка X_1 — дугу, яка доповнює першу дугу до кола (якщо дуга AB даного кола накреслена, то із двох останніх кіл можна проводити тільки одне).

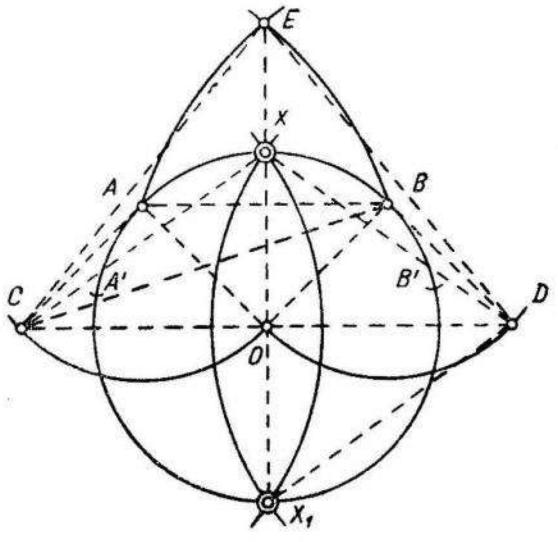

Рис. 6.

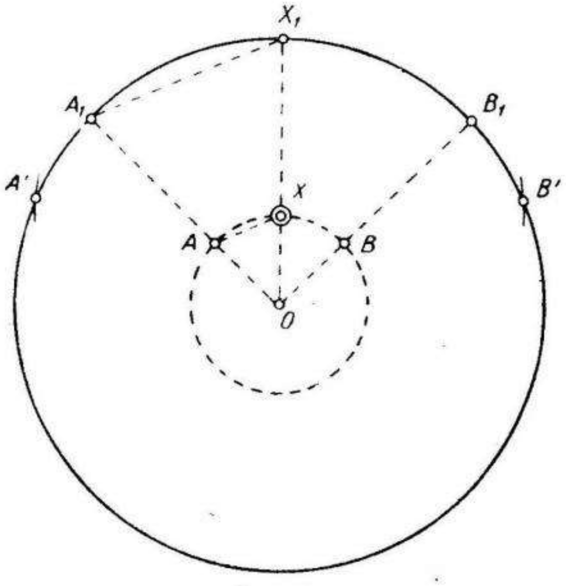

Рис. 7.

Ця побудова належить ще Маскероні. Доведення її можна знайти в кожній роботі по геометрії циркуля (див., напр., [1] § 15).

Всі кола даної побудови більші або рівні $AB \geqslant R$.

б) Побудова у випадку $AB < R$.

Будуємо відрізки $OA_1 = nOA$ і $OB_1 = nOB$ (задача 1), при цьому натуральне число n беремо таким, щоб $r_1 = OA_1 = OB_1 \geqslant R$. Ділимо дугу A_1B_1 кола (O, r_1) точкою X_1 пополам (випадок a цієї задачі). Якщо тепер побудувати відрізок $OX = \frac{1}{n} OX_1$ (задача 2), то одержимо точку X, яка ділить дану дугу AB пополам.

Доведення справедливості приведеної побудови негайно випливає із подібності рівнобедрених трикутників OAX і OA_1X_1.

Примітка. Побудову відрізка $OB_1 = nOB$ можна не проводити, замість цього треба довільним радіусом a провести кола (A, a), (B, a) і (O, A_1), в перетині яких одержимо точки A' і B', тоді, очевидно, замість дуги A_1B_1 можна розділити пополам дугу $A'B'$.

Задача 7. (4-а основна простіша задача). Знайти точки перетину даного кола і даної прямої, заданої двома точками.

Побудова. Пряма AB не проходить через центр даного кола (O, r).

Можна вважати, що $OA \geqslant R$ і $OB \geqslant R$, в противному разі треба спочатку, користуючись задачею 3, визначити другі точки даної прямої.

Будуємо точку O_1, симетричну точці O відносно прямої AB, для чого проводимо кола (A, O) і (B, O). Коло (O_1, r) перетинає дане коло (O, r) в точках X і $У$ (задача 5). Точки X і $У$ — шукані точки перетину даної прямої і кола. Якщо $r<R$, то для знаходження точок X і $У$ використаємо задачу 5.

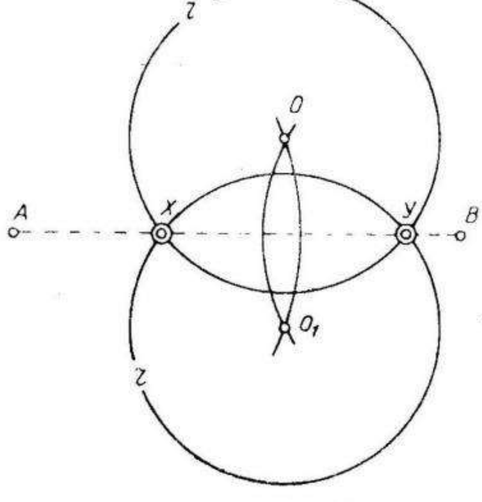

Рис. 8.

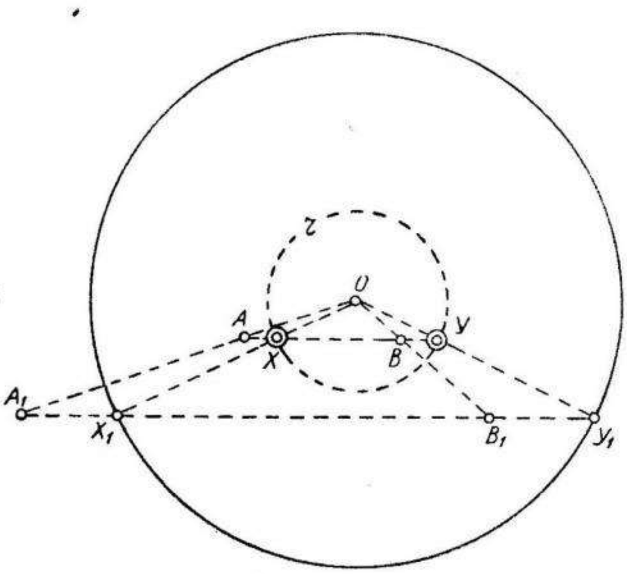

Рис. 9.

Справедливість побудови очевидна з симетрії рисунка.

Побудова. Пряма AB проходить через центр O.

Довільним радіусом $a \geqslant R$ описуємо кола (A, a); точки перетину з даним колом позначимо через A_1 і B_1 (задача 5). Якщо коло (A, a) не перетинає дане коло, то спочатку треба побудувати другу точку прямої AB (задача 3).

Ділимо пополам дуги, на які точки A_1 і B_1 розділили дане коло (задача 6), в результаті знайдемо шукані точки X і $У$ перетину даної прямої і даного кола.

Побудова. (2-й спосіб).

Будуємо відрізки $r_1 = nr \geqslant R$ і $OA_1 = nOA$, $OB_1 = nOB$. Знаходимо точки перетину X_1 і $У_1$ кола (O, r_1) і прямої A_1B_1 (випадок a або $б$ цієї задачі), однак тепер ми зможемо описати кола (O, r_1) і (O_1, r_1). Будуємо відрізки $OX = \frac{1}{n} OX_1$ і $OУ = \frac{1}{n} OУ_1$ (задача 2). Точки X і $У$ — шукані.

Доведення справедливості побудови негайно випливає із подібності трикутників OAX і OA_1X_1.

Задача 8. Побудувати відрізок четвертий, пропорціональний трьом даним відрізкам a, b і c.

Побудова.

Будуємо відрізки $a' = na \geqslant R$, $b' = nb \geqslant R$ і $c' = mc \geqslant R$, і, крім цього, вимагаємо, щоб $c'<2a'$ (що завжди можна задовольнити, збільшуючи натуральне число n).

Беремо в площині довільну точку O і проводимо два концентричні кола (O, a') і (O, b'). На колі (O, a') відкладаємо хорду $AB=c'$. Довільним радіусом d описуємо кола (A, d) і (B, d), в перетині з колом (O, b') одержимо точки A_1 і B_1. Відрізок A_1B_1 четвертий пропорціональний до відрізків a', b' і c'. І, нарешті, будуємо відрізок $x=\frac{1}{m}A_1B_1$ (задача 2). Відрізок x — шуканий відрізок четвертий, пропорціональних до трьох даних відрізків a, b і c.

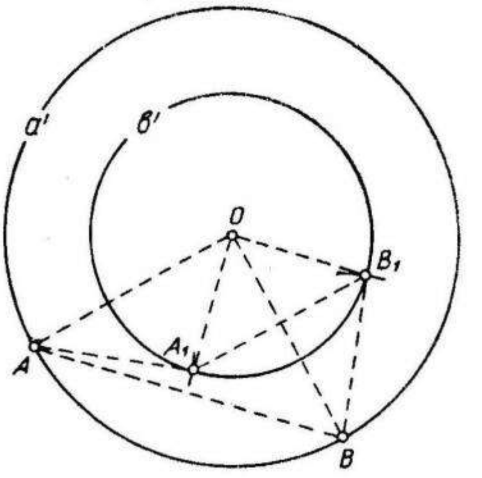

Рис. 10.

Доведення. $\sphericalangle AOA_1=\sphericalangle BOB_1$ (трикутники AOA_1 і BOB_1 рівні). Звідси $\sphericalangle AOB=\sphericalangle A_1OB_1$, отже, трикутники AOB і A_1OB_1 — подібні.

Значить,

$$OA : OA_1 = AB : A_1B_1,$$

або

$$a' : b' = c' : A_1B_1,$$

або ще інакше

$$na : nb = mc : A_1B_1,$$

остаточно

$$a : b = c : \frac{A_1B_1}{m}.$$

Задача 9. (5-а основна простіша задача). Знайти точки перетину двох даних прямих AB і CD, кожна з яких задана двома точками.

Побудова.

Будемо вважати, що $AC\geqslant R$, $AD\geqslant R$, $BC\geqslant R$ і $BD\geqslant R$. У противному разі, користуючись задачею 3, треба знайти інші точки даних прямих, для яких вказані нерівності вже будуть справедливі.

Будуємо точки C_1 і D_1, симетричні відповідно точкам C і D відносно прямої AB, для чого проводимо кола (A, C), (A, D), (B, C) і (B, D). Визначаємо точку E на перетині кіл (D_1, CC_1) і (C, D) (задача 5). Будуємо відрізок x четвертий, пропорціональний до відрізків DE, DD_1 і CD (задача 8). Кола (D, x) і (D_1, x) перетнуться в точці X. Точка X — шукана.

Доведення. Точка C_1 симетрична точці C, точка D_1 симетрична точці D відносно прямої AB; а тому, очевидно, ми знайдемо точку перетину даних прямих, якщо побудуємо точку перетину прямих CD і C_1D_1.

Фігура CC_1D_1E — паралелограм, тому точки D, D_1 і E лежать на одній прямій ($D_1E \parallel CC_1$ і $D_1D \parallel CC_1$).

З подібності трикутників CDE і XDD_1 $(CE \| XD_1)$, випливає

$$DE : DD_1 = CE : D_1X_1,$$

враховуючи, що

$$CE = CD = C_1D_1,$$

робимо висновок, що відрізок $D_1X = x$ є четвертим пропорціональним відрізком до відрізків DE, DD_1 і CD.

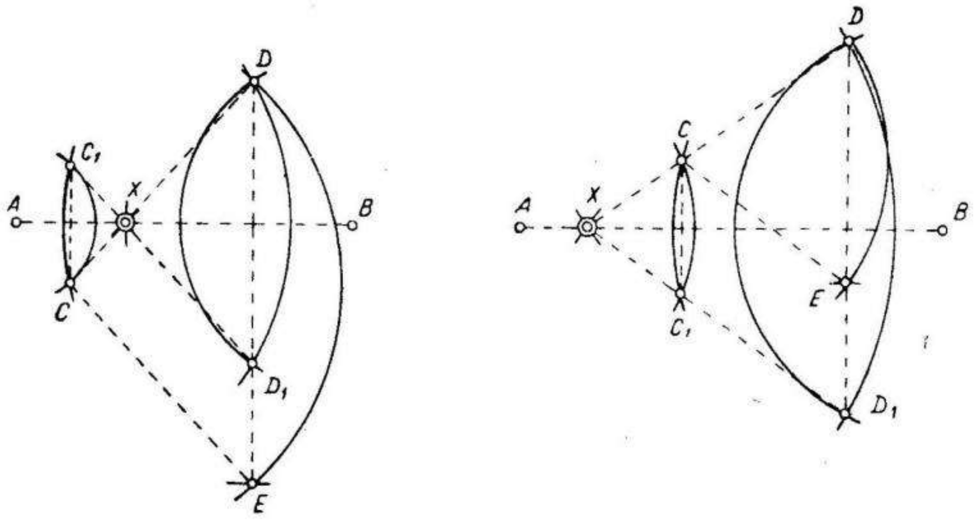

Рис. **11**.

Примітка. При побудові точок C_1 і D_1, симетричних точкам C і D, замість задачі 3 можна використати задачу 5.

На основі вищевикладеного стверджуємо, що всі п'ять основних простіших задач (основних операцій) можуть бути розв'язані (виконані) за допомогою тільки циркуля, розхили ніжок якого обмежені знизу будь-яким наперед заданим постійним числом R.

Припустимо тепер, що ми можемо розв'язувати деяку задачу на побудову циркулем і лінійкою. Уявимо собі, що ця задача розв'язана вказаними інструментами; в результаті розв'язок даної задачі зводиться до виконання деякої скінченої послідовності п'яти основних операцій (розв'язування основних простіших задач). Однак кожна з цих п'яти простіших побудов може бути здійснена одним циркулем з обмеженим розхилом ніжок. Таким чином, основний результат цієї роботи можна сформулювати у вигляді слідуючої теореми:

Теорема. Всі задачі, що розв'язуються з допомогою циркуля і лінійки, можуть бути розв'язані і тільки циркулем з обмеженим розхилом ніжок знизу. Таким циркулем можна описувати кола, радіуси яких не менше деякого наперед заданого постійного відрізка R.

Вкажемо тепер загальний метод розв'язування геометричних задач на побудову одним циркулем, розхили ніжок якого обмежені знизу відрізком R.

Припустимо, що деяку задачу на побудову, що розв'язується з допомогою циркуля і лінійки, потрібно розв'язати одним циркулем з обмеженим розхилом ніжок. Уявимо собі цю задачу, розв'язану одним циркулем за методом Маскероні, тобто, коли на розхили ніжок циркуля ніяких обмежень не накладається. В результаті одержимо деяку фігуру Φ, що складається з одних тільки кіл. Позначимо через r найменший із радіусів всіх кіл, що складають фігуру Φ. Якщо виявиться, що $r \geqslant R$, то виконання вказаної побудови не викликає ніяких утруднень. Коли ж $r < R$, то візьмемо натуральне число n таким, щоб $nr \geqslant R$. Якщо тепер всі відрізки, дані в умові задачі, в тому числі і відрізки, що визначають радіуси заданих кіл (не обмежуючи загальних міркувань, ми можемо припустити, що в умові задачі даються тільки відрізки і кути, хоч заданою може виявитись навіть деяка фігура, що складається із окремих точок і кіл), збільшити в n разів (задача 1) і тоді провести розв'язування задачі, то в результаті побудови одержимо фігуру Φ', подібну фігурі Φ з коефіцієнтом подібності, рівним n. Всі кола фігури Φ' можуть бути проведені нашим циркулем, тому що їх радіуси більше або рівні $nr \geqslant R$. Зауважимо при цьому, що за центр подібності O потрібно брати одну із точок, заданих в умові задачі, наприклад, центр заданого кола або одну з точок, якими визначаються задані відрізки і т. д.

Позначимо через ψ' ту частину фігури Φ', яка приймається за шуканий результат. Будуємо фігуру ψ, подібну фігурі ψ' з центром подібності O і коефіцієнтом подібності $\frac{1}{n}$; для чого будуємо відрізки

$$OX_1 = \frac{1}{n} OX'_1;\ OX_2 = \frac{1}{n} OX'_2, \ldots;\ OX_\kappa = \frac{1}{n} OX_\kappa$$

(задача 2), де через $X'_1, X'_2, \ldots, X'_\kappa$ позначені всі точки перетину кіл фігури ψ і їх центри. Точки $X_1, X_2, \ldots, X_\kappa$ будуть шуканими центрами і точками перетину кіл фігури ψ, які представляють шуканий результат розв'язку даної задачі. Ті кола фігури ψ, радіуси яких більше або рівні R, можуть бути накреслені даним циркулем безпосередньо, останні кола будуються у вигляді окремих точок (задача 4).

Як ілюстрацію до вищесказаного можна привести розв'язок задачі 5. Тут даними умовами задачі являються два відрізки r і r_1 (кожний з них заданий парою точок) і дві точки O і O_1 — центри даних кіл. Фігура Φ складається із кіл (O, r) і (O_1, r_1). Фігура Φ' складається із кіл (O, r) і (O'_1, r'_1). Фігура Ψ' складається з двох точок X' і $У'$. Фігура Ψ — із точок X і $У$ — шуканих точок перетину двох даних кіл. O — центр подібності.

При розв'язуванні задач число n часто буває невідомим, тому що даним циркулем з обмеженим розхилом ніжок знизу ми не можемо будувати фігуру Φ', і таким чином не можемо знати величини r, тобто радіуса найменшого з кіл цієї фігури. В цьому випадку поступаємо так. Проводимо розв'язок задачі даним циркулем до тих пір, поки натрапимо на коло, радіус якого $r_1 < R$. Визначаємо натуральне число n_1 так, щоб $n_1 r_1 \geqslant R$. Збільшуємо дані відрізки в n_1 разів і знову спочатку проводимо розв'язок задачі, в результаті ми або повністю побудуємо фігуру Φ', або прийдемо до кола з радіусом $r_2 < R$. Припиняємо розв'язування задачі і знову збільшуємо відрізки в n_2 разів (в результаті дані відрізки збільшаться в $n_1 \cdot n_2$ разів).

Тоді проводимо розв'язування даної задачі. Після скінченого числа кроків фігура Φ' буде побудована.

Основний результат даної роботи і роботи [2] можна сформулювати у вигляді слідуючої теореми.

Теорема. *Всі задачі на побудову, що розв'язуються циркулем і лінійкою, можна розв'язати і одним циркулем з обмеженим розхилом ніжок тільки знизу, або тільки зверху.*

Залишається відкритим питання про можливість розв'язування геометричних задач на побудову одним циркулем з обмеженим розхилом ніжок одночасно і зверху і знизу, тобто циркулем, яким можна описати кола не менше радіуса R_{min} і не більше радіуса R_{max}. Чи можна таким циркулем розв'язати всі задачі на побудову, що розв'язуються циркулем і лінійкою? Якщо так, то чи може різниця $R_{max}-R_{min}$ бути як завгодно малою? Інакше кажучи, чи можна розв'язати всі задачі на побудову, які розв'язуються циркулем і лінійкою, за допомогою одного циркуля з «майже» постійним розхилом. Як відомо, циркулем з постійним розхилом всі задачі розв'язати не можна.

ЛІТЕРАТУРА

1. Адлер А. Теорія геометричних побудов. Одеса, 1924.
2. Костовський А. Про можливість розв'язування задач на побудову одним циркулем з обмеженим розхилом ніжок. Наукові записки ЛДУ, серія механіко-математична, т. 24, 1954.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

О. С. КОВАНЬКО

ПРО КОМПАКТНІСТЬ СИСТЕМИ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ

Нехай в просторі A_x з елементами $\{x\}$ визначений неперервний функціонал $f(x)$. Простір A_x припускається повним, метричним и сепарабельним. Віддаль між двома будь-якими його елементами x' и x'' (точками) ми позначимо через $\varrho(x', x'')$.

Означення: $f(x)$ називається неперервним в точці x_0, якщо для як завгодно малого $\varepsilon>0$, існує число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ таке, що $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, при $\varrho(x, x_0)<\delta$. Коли $f(x)$ неперервний в кожній точці x, то назвемо його просто неперервним.

Ми ставимо задачу про знаходження необхідних і достатніх умов компактності системи E функціоналів $\{f(x)\}$.

Теорема. Необхідна і достатня умова для того, щоб система неперервних функціоналів $E=\{f(x)\}$ була б компактною в розумінні слабої збіжності до неперервного функціоналу, полягає у виконанні слідуючих вимог:

1) при фіксованому x' відповідна числова система $\{f(x')\}$ завжди обмежена;

2) які б не були $\varepsilon>0$ і $\delta>0$, точка $x \in A_x$, а також множина $B \subset A_x$, що має x своєю точкою скупчення, знайдеться така точка $x' \in B$, що $\varrho(x, x')<\delta$ і щоб $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$ для всіх $f(x) \in E$.

Доведення: умови 1 і 2 необхідні.

Отже, припустимо, що система E компактна у вищеозначеному сенсі. Тоді числова система $\{f(x')\}[f(x) \in E]$ буде компактною в сенсі звичайної збіжності, і, значить, обмеженою. Таким чином, умова 1 виконана.

Тепер розглянемо умову 2. Нехай вона не має місця. Це значить, що знайдеться таке число $\varepsilon_0>0$, точка x_0 і така множина B у вигляді безмежної послідовності $\{x_n\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$, що $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho(x_0 x_n)=0$ і що для кожного номера N існує хоч би один такий функціонал $f_N(x)$, для якого

$$|f_N(x_0)-f_N(x_n)| \geqslant \varepsilon_0 . \quad (n=1, 2, 3 \ldots N). \tag{1}$$

Розглянемо послідовність таких функціоналів $\{f_N(x)\}$ $(N=1, 2, \ldots)$. В силу компактності системи E із цієї послідовності можна вибрати таку підпослідовність $\{f_{N_i}(x)\}$ $(i=1, 2, 3 \ldots)$, яка збігається до неперервного функціоналу $g(x)$.

В силу неперервності останнього можна вибрати n досить великим, щоб

$$|g(x_n)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{6}. \tag{2}$$

Фіксуємо n і вибираємо $N_i>n$ настільки великим, щоб

$$|f_{N_i}(x_0)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{6} \tag{3}$$

і

$$|f_{N_i}(x_n)-g(x_n)|<\frac{\varepsilon_0}{6} \tag{4}$$

З нерівностей (2), (3) і (4) знаходимо

$$|f_{N_i}(x_0)-f_{N_i}(x_n)|\leqslant|f_{N_i}(x_0)-g(x_0)|+|g(x_0)-g(x_n)|+$$

$$+|g(x_n)-f_{N_i}(x_n)|<\frac{\varepsilon_0}{6}+\frac{\varepsilon_0}{6}+\frac{\varepsilon_0}{6}=\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Отже,

$$|f_{N_j}(x_0)-f_{N_i}(x_n)|<\frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{5}$$

Але (5) знаходиться в протиріччі з (1), якщо покласти $N=N_i$. Тим самим доведена умова 2.

Умови 1 і 2 достатні.

Оскільки A_x сепарабельне, ми можемо побудувати всюди щільну в A_x зчисленну множину елементів $A_r\subset A_x$.

Відомим діагональним процесом ми зможемо із будь-якої послідовності функціоналів виділити таку підпослідовність $\{f_n(x)\}$ $(n=1,2,\ldots)$, яка збігається в множині A_r і визначає в границі функціонал $g(r)$. Застосовність такого процесу витікає із умови 1, тобто із обмеженості всіх числових послідовностей $\{f_n(r)\}$ (кожної зокрема).

Виберемо тепер довільну точку $x\in A_x$ і множину $B=A_r$ згідно з умовою 2 даної теореми. В силу цієї ж умови знайдеться така точка $r\in A_r=B$, досить близька до x, що будуть виконуватись слідуючі нерівності:

$$|f_m(x)-f_m(r)|<\frac{\varepsilon}{3}; \tag{6}$$

$$|f_n(x)-f_n(r)|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{7}$$

де m і n — довільні індекси. Вибираємо їх настільки великими, щоб

$$|f_n(r)-f_m(r)|<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{8}$$

згідно з умовою Коші, яка має місце в точці r.

В силу (6), (7), (8) знаходимо

$$|f_m(x)-f_n(x)|\leqslant|f_m(x)-f_m(r)|+|f_m(r)-f_n(r)|+$$

$$+|f_n(r)-f_n(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Отже,

$$|f_m(x)-f_n(x)|<\varepsilon. \tag{9}$$

Таким чином, це є умовою Коші для нашої послідовності в точці x. Але оскільки x довільна точка в A_x, значить, $\{f_n(x)\}$ збігається всюди в A_x. Позначимо її граничну функцію так:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=g(x).$$

Покажемо, що $g(x)$ є неперервний функціонал. Припустимо, що це не так, нехай x_0 являється його точкою розриву, тоді можна знайти таке число $\varepsilon_0>0$ і нескінченну послідовність точок $x_1, x_2, x_3, \ldots x_i, \ldots$, яка прямує до x_0, і для цих точок виконуються нерівності

$$|g(x_i)-g(x_0)|\geqslant\varepsilon_0. \tag{10}$$

Згідно з умовою 2 даної теореми, ми виберемо в ролі множини B нашу послідовність $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Згідно з умовою 2, ми зможемо вибрати n настільки великим, що буде виконуватись нерівність

$$|f_n(x_i)-f_n(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{6}. \tag{11}$$

при будь-якому n.

Виберемо n настільки великим, щоб виконувались нерівності

$$|f_n(x_0)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{6}; \tag{12}$$

$$|f_n(x_i)-g(x_i)|<\frac{\varepsilon_0}{6}; \tag{13}$$

що очевидно в силу збіжності числових послідовностей $\{f_n(x_0)\}$ і $\{f_n(x_i)\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Із (11), (12) і (13) знаходимо $|9(x_i)-g(x_0)|$

$$\leqslant|g(x_i)-f_n(x_i)|+|f_n(x_i)-f_n(x_0)|+$$

$$+|f_n(x_0)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{6}+\frac{\varepsilon_0}{6}+\frac{\varepsilon_0}{6}=\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Отже,

$$|g(x_i)-g(x_0)|<\frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{14}$$

Але (10) і (14) знаходяться між собою в протиріччі, звідки повинна витікати неперервність $g(x)$. Достатність умов теореми доведена. Отже, теорема доведена повністю.

На закінчення відмітимо деякі часткові випадки, Умову 1 теореми можна замінити умовою обмеженості функціоналів нашої системи в їх сукупності, але ця умова з'явиться тільки достатньою, що видно із слідуючого прикладу.

Розглянемо послідовність

$$f_n(x) = \frac{n^2 x}{(1 + n^8 x^2)^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

де x — дійсне змінне в середині відрізку $[0, 1]$. Тут $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$ всюди на $[0, 1]$. Отже, послідовність компактна в нашому сенсі, але функції її необмежені в їх сукупності, оскільки

$$f_n\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{4} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty .$$

Другим частковим випадком може бути той, коли в умові 2 теореми $B = A_x$ і x' люба точка така, що $\varrho(x, x') < \delta$. В цьому випадку система функціоналів рівнозначно рівномірно неперервна, і ми приходимо до теореми Арцеля, коли збіжність розуміти в сенсі рівномірної.

В частковому випадку система може складатися з лінійних функціоналів, і тоді умови теореми значно спрощуються.

Слідуючим кроком в поширенні даної теореми є встановлення необхідних і достатніх умов компактності системи неперервних функціоналів в сенсі слабої збіжності до взагалі розривного функціоналу.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

Г. М. ГЕСТРІН

ОДНА ТЕОРЕМА ПРО ІНТЕГРАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА

Метою даної роботи є розгляд одного випадку рівняння

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,\ \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+f(x) \tag{1}$$

з необмеженим ядром, яке може бути зведеним до еквівалентного інтегрального рівняння Фредгольма з неперервним ядром. Перш за все буде дано вивід однієї елементарної формули, яка узагальнює формулу інтегрування частинами. Нехай на проміжку $[a,\ b]$ задані дві функції $u(x)$ та $v(x)$, з такими властивостями: майже всюди на $[a,\ b]$ існують Шварцеві похідні $u^{[II]}(x)$ та $v^{[II]}(x)$; нехай далі a' і b' деякі внутрішні точки проміжку $[a,\ b]$ і в як завгодно малих оточеннях цих точок обидві функції $u(x)$ та $v(x)$ мають неперервні перші похідні $u'(x)$ та $v'(x)$. Додаткові властивості цих функцій з'ясуються в ході доведення. З того, що a' та b' — внутрішні точки проміжку $[a,\ b]$, випливає, що при достатньо малому h мають сенс інтеграли

$$\left\{\begin{aligned} I(h)&=\int_{a'}^{b'}\frac{\Delta_h^2\,u(x)}{4h^2}\,v(x)\,dx;\\ I_1(h)&=\int_{a'}^{b'}u(x)\,\frac{\Delta_h^2\,v(x)}{4h^2}\,dx.\end{aligned}\right.$$

Запишемо інтеграл $I(h)$ у вигляді інтеграла Стільтьєса

$$I(h)=\int_{a'}^{b'}\frac{\Delta_h^2\,u(x)}{4h^2}\,v(x)\,dx=\int_{a'}^{b'}v(x)\,d\int_{a'}^{x}\frac{\Delta_h^2\,u(t)}{4h^2}\,dt.$$

Легко сформулювати умови прямування інтеграла $I(h)$ до границі: $\int_{a'}^{b'}v(x)\,u^{[II]}(x)\,dx$. Ці умови одержуються з відомої теореми Банаха і полягають у слідуючому:

1) $$\operatorname*{Var}_{a'\leqslant x\leqslant b'}\int_{a'}^{x}\frac{\Delta_h^2\,u(t)}{4h^2}\,dt=\int_{a'}^{b'}\left|\frac{\Delta_h^2\,u(t)}{4h^2}\right|dt<M.$$

2) $\int\limits_{\mu}^{b'}\int\limits_{a'}^{t}\left\{\frac{\Delta_h^2 u(x)}{4h^2} - u^{['']}(x)\right\} dx dt \to 0$ при $h \to 0$.
$a' \leqslant \mu \leqslant b'$

3) $\int\limits_{a'}^{b'} \frac{\Delta_h^2 u(t)}{4h^2} dt \to \int\limits_{a'}^{b'} u^{['']}(t) dt$ при $h \to 0$.

Для того, щоб виконувалася рівність

$$\lim_{h \to 0} I_1(h) = \int\limits_{a'}^{b'} u(t) v^{['']}(t)\, dt,$$

будемо вимагати існування такої додатньої сумової функції $F(x)$, що для всіх досить малих h буде

$$\left|\frac{\Delta_h^2 v(x)}{4h^2}\right| < F(x).$$

Проводимо далі слідуючі прості перетворення інтеграла:

$$\int\limits_{a_{\prime}}^{b'} u(x+2h)\, v(x)\, dx = \int\limits_{a'+2h}^{b'+2h} u(t)\, v(t-2h)\, dt;$$

$$2\int\limits_{a'}^{b'} u(x)\, v(x)\, dx = 2\int\limits_{a'}^{b'} u(t)\, v(t)\, dt;$$

$$\int\limits_{a'}^{b'} u(x-2h)\, v(x)\, dx = \int\limits_{a'-2h}^{b'-2h} u(t)\, v(t+2h) dt;$$

$$I(h) = \frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'+2h}^{b'+2h} u(t)\, v(t-2h)\, dt - \frac{2}{4h^2}\int\limits_{a'}^{b'} u(t)\, v(t)\, dt +$$

$$+\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'-2h}^{b'-2h} u(t)\, v(t+2h)\, dt = \int\limits_{a'+2h}^{b'-2h} u(t) \frac{\Delta_h^2 v(t)}{4h^2}\, dt +$$

$$+\frac{1}{4h^2}\int\limits_{b'-2h}^{b'+2h} u(t)\, v(t-2h)\, dt - \frac{2}{4h^2}\int\limits_{a'}^{a'+2h} u(t)\, v(t)\, dt -$$

$$-\frac{2}{4h^2}\int\limits_{b'-2h}^{b'} u(t)\, v(t) dt + \frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'-2h}^{a'+2h} u(t)\, v(t+2h)\, dt =$$

$$= \int\limits_{a'}^{b'} u(t) \frac{\Delta_h^2 v(t)}{4h^2}\, dt - \int\limits_{e_h = (a',\, a'+2h) + (b'-2h,\, b')} u(t) \frac{\Delta_h^2 v(t)}{4h^2}\, dt +$$

$$+\left\{\frac{1}{4h^2}\int\limits_{b'-2h}^{b'}u(t)\,v(t-2h)dt-\frac{1}{4h^2}\int\limits_{b'-2h}^{b'}u(t)\,v(t)\,dt\right\}+$$

$$+\left\{\frac{1}{4h^2}\int\limits_{b'}^{b'+2h}u(t)\,v(t-2h)\,dt-\frac{1}{4h^2}\int\limits_{b'-2h}^{b'}u(t)\,v(t)\,dt\right\}+$$

$$+\left\{\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'}^{a'+2h}u(t)\,v(t+2h)\,dt-\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'}^{a'+2h}u(t)\,v(t)\,dt\right\}+$$

$$+\left\{\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'-2h}^{a'}u(t)\,v(t+2h)\,dt-\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'}^{a'+2h}u(t)\,v(t)\,dt\right\}=I_1(h)+$$

$$+B_1(h)+B_2(h)+A_1(h)+A_2(h)+\int\limits_{e_h}u(t)\,\frac{\Delta_h^2 v(t)}{4h^2}\,dt,$$

де через $B_1(h)$, $B_2(h)$, $A_1(h)$, $A_2(h)$ позначені відповідні дужки. Переходячи до границі при $h\to 0$, знаходимо

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{e_h}u(t)\,\frac{\Delta_h^2 v(t)}{4h^2}\,dt=0.$$

Обчислимо, наприклад, границю однієї з дужок

$$\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'}^{a'+2h}u(t)\,v(t+2h)\,dt-\frac{1}{4h^2}\int\limits_{a'}^{a'+2h}u(t)\,v(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{2h}\int\limits_{a'}^{a'+2h}u(t)\,\frac{v(t+2h)-v(t)}{2h}\,dt\to u(a')\,v'(a').$$

Справді

$$\left|\frac{1}{2h}\int\limits_{a'}^{a'+2h}u(t)\,\frac{v(t+2h)-v(t)}{2h}\,dt-u(a')\,v'(a')\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{2h}\int\limits_{a'}^{a'+2h}u(t)\left(\frac{v(t+2h)-v(t)}{2h}-u(a')\right)dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2h}\int\limits_{a'}^{a'+2h}v'(a')\,(u(t)-u(a'))\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2h} \int\limits_{a'}^{a'+2h} |u(t)|\,|v'(t+2\Theta h) - v'(a')|\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2h} |v'(a')| \int\limits_{a'}^{a'+2h} |u(t) - u(a')|\,dt \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Аналогічно знайдемо границі інших дужок і одержимо слідуючу формулу:

$$\int\limits_{a'}^{b'} u^{[''']}(x)\, v(x)\, dx = u'(x)\, v(x) \Big|_{a'}^{b'} - y(x)\, v'(x) \Big|_{a'}^{b'} + \int\limits_{a'}^{b'} u(x)\, v^{['']}(x)\, dx.$$

Нехай дано інтегральне рівняння

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{+\pi} K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + f(x). \tag{1}$$

Припустимо, що ядро $K(x, \xi)$, як функція від ξ, інтегроване з квадратом, а як функція від x — воно має майже всюди на $[-\pi, \pi]$ другу похідну Шварца $K_{x^2}^{['']}(x, \xi)$, і при цьому існує така додатня сумовна функція $F(\xi)$, що

$$\left| \frac{\Delta_h^2 K(x, \xi)}{4h^2} \right| \leqslant F(\xi) \text{ при } |h| < \delta.$$

Крім того, припускається, що в деякій граничній смузі ядро дорівнює нулю.

Вільний член $f(x)$ будемо припускати вимірною обмеженою функцією. Зауважимо одразу, що, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $f(x)$ також має Шварцеву похідну. Дійсно, будемо шукати розв'язок рівняння у вигляді $\varphi(x) = z(x) + f(x)$, тоді для $z(x)$ одержимо рівняння

$$z(x) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{+\pi} K(x, \xi)\, z(\xi)\, d\xi + \lambda \int\limits_{-\pi}^{+\pi} K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Новий вільний член, очевидно, має потрібну властивість.

Розглянемо тепер деякий внутрішній квадрат, границя якого лежить в середині тієї смуги, де ядро перетворюється в нуль і сторони якого паралельні до координатних осей. Розглянемо рівняння

$$\varphi^*(x) = \lambda \int\limits_{-\pi+\eta}^{+\pi-\eta} K^*(x, \xi)\, \varphi^*(\xi)\, d\xi + f^*(x); \tag{2}$$

$$K^*(x, \xi) = K(x, \xi);$$

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & -\pi + \eta \leqslant x \leqslant \pi - \eta; \\ 0 & |x| > \pi - \eta. \end{cases}$$

Очевидно, (1) еквівалентно (2).

Розглянемо, нарешті, функцію, що визначається в квадраті рівністю

$$R(x, \xi) = \frac{a_0(x)\xi^2}{4} - \sum_1^\infty \frac{a_\kappa(x)\cos\kappa\xi + b_\kappa(x)\sin\kappa\xi}{\kappa^2};$$

$$\frac{\Delta^2_{hx} R(x, \xi)}{4h^2} = \frac{\Delta^2_h a_0(x)}{4h^2}\,\frac{\xi^2}{4} - \sum_1^\infty \left(\frac{\Delta^2_h a_\kappa(x)}{4h^2}\cos\kappa\xi + \frac{\Delta^2_h b_\kappa(x)}{4h^2}\sin\kappa\xi\right)\frac{1}{\kappa^2};$$

$$a_\kappa(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} K(x, \xi)\cos\kappa\xi\, d\xi;$$

$$\left|\frac{\Delta^2_h a_\kappa(x)}{4h^2}\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\Delta^2_{hx}K(x, \xi)}{4h^2}\cos\kappa\xi\, d\xi\right| < \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\xi)\, d\xi.$$

Через те, що у внутрішньому квадраті останній ряд збігається рівномірно відносно h, то можна перейти до границі при $h \to 0$, після чого одержуємо

$$R^{['']}_{x^2}(x, \xi) = a_0^{['']}(x)\frac{\xi^2}{4} = \sum_1^\infty \left(a_\kappa^{['']}(x)\cos\kappa\xi + b_\kappa^{['']}(x)\sin\kappa\xi\right)\cdot\frac{1}{\kappa^2}.$$

Внаслідок неперервності окремих членів ряду по ξ, сума ряду є також неперервною функцією ξ.

На підставі теореми Рімана про ряди Фурьє маємо

$$K^*(x, \xi) \sim R^{['']}_{\xi^2}(x, \xi).$$

Рівняння (2) записується тепер так:

$$\varphi^*(x) = \lambda\int_{-\pi+\eta}^{+\pi-\eta} R^{['']}_{\xi^2}(x, \xi)\varphi^*(\xi)\, d\xi + f^*(x). \qquad (3)$$

Легко бачити, що $\varphi^*(x)$ має другу похідну Шварца та відповідаючі їй відношення $\left|\frac{\Delta^2_h \varphi^*(x)}{4h^2}\right|$ обмежені. Щоб примінити до правої частини останньої рівності формулу інтегрування частинами, ми повинні перевірити, що функція $R(x, \xi)$ задовольняє переліченим вище вимогам

Маємо

$$\int_{-\pi+\eta}^{+\pi-\eta}\left|\frac{\Delta^2_{h\xi}R(x,\xi)}{4h^2}\right|d\xi\leqslant\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{\Delta^2_{h\xi}R(x,\xi)}{4h^2}\right|d\xi=\int_{-\pi}^{+\pi}\left|\frac{a_0(x)}{2}+\right.$$

$$\left.+\sum_1^\infty(a_m(x)\cos m\xi+b_m(x)\sin m\xi)\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2\right|d\xi\leqslant\sqrt{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\frac{a_0(x)}{2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_1^\infty a_m(x)\cos m\xi+b_m(x)\sin m\xi)\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2\right)^2d\xi\right\}^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{2\pi}\left\{\frac{a_0^2(x)}{4}+\sum_1^\infty a_m^2(x)+b_m^2(x)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

при кожному фіксованому x. Умову 1 виконано. Звернемося до умови 2.

$$\int_\mu^{\pi-\eta}\int_{-\pi+\eta}^t\left\{\frac{\Delta^2_{h\xi}R(x,\xi)}{4h^2}-K(x,\xi)\right\}d\xi dt=\int_\mu^{\pi-\eta}\int_{-\pi+\eta}^t\left\{\frac{a_0(x)}{2}+\right.$$

$$\left.+\sum_1^\infty(a_m(x)\cos m\xi+b_m(x)\sin m\xi)\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2-K(x,\xi)\right\}d\xi dt=$$

$$=\int_\mu^{\pi-\eta}\left\{\int_{-\pi+\eta}^t\frac{a_0(x)}{2}d\xi+\sum_1^\infty\int_{-\pi+\eta}^t(a_m(x)\cos m\xi+\right.$$

$$\left.+b_m(x)\sin m\xi)d\xi\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2-\int_{-\pi+\eta}^tK(x,\xi)d\xi\right\}dt=$$

$$=\int_\mu^{\pi-\eta}\left\{\int_{-\pi+\eta}^t\frac{a_0(x)}{2}d\xi+\sum_1^\infty\int_{-\pi+\eta}^t(a_m(x)\cos m\xi+b_m(x)\sin m\xi)d\xi-\right.$$

$$\left.-\int_{-\pi+\eta}^tK(x,\xi)d\xi\right\}dt+\int_\mu^{\pi-\eta}\sum_1^\infty\int_{-\pi+\eta}^t(a_m(x)\cos m\xi+$$

$$+b_m(x)\sin m\xi)d\xi\left[\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2-1\right]dt.$$

Підінтегральний вираз в першому інтегралі в правій частині дорівнює нулю, бо ряд Фурьє можна інтегрувати почленно. Отже,

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{\mu}^{\pi-\eta}\int\limits_{-\pi+\eta}^{t}\left\{\frac{\Delta_h^2 R(x,\,\xi)}{4h^2}-K(x,\,\xi)\right\}d\xi\,dt=$$

$$=\lim_{h\to 0}\int\limits_{\mu}^{\pi-\eta}\sum_{1}^{\infty}\int\limits_{-\pi+\eta}^{t}(a_m(x)\cos m\xi+b_m(x)\sin m\xi)\left(\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2-1\right)d\xi\,dt=$$

$$=\lim_{h\to 0}\int\limits_{\mu}^{\pi-\eta}\sum_{1}^{\infty}\frac{a_m(x)\sin m\xi-b_m(x)\cos m\xi}{m}\Bigg|_{-\pi+\eta}^{t}\left(\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2-1\right)dt.$$

Тут можна перейти до границі під знаком інтеграла. Справді, підінтегральна функція мажорується так:

$$\left|\sum_{1}^{\infty}\frac{a_m(x)\sin m\xi-b_m(x)\cos m\xi}{m}\Bigg|_{-\pi+\eta}^{t}\left(\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2-1\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{1}^{\infty}\frac{|a_m(x)|+|b_m(x)|}{m}\leqslant 2\sqrt{2}\sqrt{\sum_{1}^{\infty}a_m^2(x)+b_m^2(x)}\cdot\sqrt{\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{m^2}}\,.$$

З другого боку, легко показати, що границя підінтегрального виразу дорівнює нулю:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{a_m(x)\sin m\xi-b_m(x)\cos m\xi}{m}\Bigg|_{-\pi+\eta}^{t}\left(1-\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2\right)=$$

$$=\sum_{1}^{N}\frac{a_m(x)\sin m\xi-b_m(x)\cos m\xi}{m}\Bigg|_{-\pi+\eta}^{t}\left(1-\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2\right)+$$

$$+\sum_{N+1}^{\infty}\frac{a_m(x)\sin m\xi-b_m(x)\cos m\xi}{m}\Bigg|_{-\pi+\eta}^{t}\left(1-\left(\frac{\sin mh}{mh}\right)^2\right).$$

Виберемо спочатку N настільки великим, щоб

$$\sum_{N+1}^{\infty}(a_m^2(x)+b_m^2(x))<\frac{\varepsilon^2}{4\sqrt{\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{m^2}}}\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\,.$$

А потім візьмемо h настільки малим, щоб перша частина суми не перевищувала $\frac{\varepsilon}{2}$. Таким чином,

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{\mu}^{\pi-\eta}\int\limits_{-\pi+\eta}^{t}\left\{\frac{\Delta_{h\xi}^2 R(x,\xi)}{4h^2}-K(x,\xi)\right\}d\,d\xi t=0.$$

Залишається перевірити справедливість останньої умови

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}\frac{\Delta_h^2 R(x,\xi)}{4h^2}\,d\xi=\int\limits_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}K(x,\xi)\,d\xi.$$

Це робиться так само, як і в попередньому випадку. Отже, в формулі (3) можна інтегрувати частинами, і ми приходимо до рівності

$$\varphi^*(x)=\lambda\int\limits_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}R(x,\xi)\,\varphi^{*['']}(\xi)\,d\xi+f^*(x). \tag{4}$$

Тепер, взявши другу Шварцеву похідну від обох частин рівності (4), одержуємо інтегральне рівняння

$$\varphi^{*['']}(x)=\lambda\int\limits_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}R_{x^2}^{['']}(x,\xi)\,\varphi^{*['']}(\xi)\,d\xi+f^{*['']}(x). \tag{5}$$

Ядро цього рівняння ще не є неперервною функцією. Тому проінтегруємо рівняння (5) і запишемо його слідуючим чином:

$$\int\limits_{-\pi+\eta}^{x}\varphi^{*['']}(t)\,dt=\lambda\int\limits_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}\int\limits_{-\pi+\eta}^{x}R_{t^2}^{['']}(t,\xi)\,dt\,d\int\limits_{-\pi+\eta}^{\xi}\varphi^{*['']}(\xi)d\xi+\int\limits_{-\pi+\eta}^{x}f^{*['']}(t)\,dt.$$

Введемо такі позначення:

$$\int\limits_{-\pi+\eta}^{x}\varphi^{*['']}(t)\,dt=u(x);\quad \int\limits_{-\pi+\eta}^{x}R_{t^2}^{['']}(t,\xi)\,dt=v(x,\xi);\quad \int\limits_{-\pi+\eta}^{x}f^{*['']}(t)\,dt=g(x).$$

Тоді остання рівність в цих позначеннях запишеться так:

$$u(x)=\lambda\int\limits_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}v(x,\xi)\,du(\xi)+g(x), \tag{6}$$

або

$$u(x)=-\lambda\int\limits_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}u(\xi)\,v_\xi'(x,\xi)\,d\xi+u(\xi)\,v(x,\xi)\Big|_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}+g(x), \tag{7}$$

або

$$u(x) = -\lambda \int_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta} v'_{\xi}(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi + v(x, \pi-\eta)\, u(\pi-\eta) + g(x). \qquad (8)$$

Перевіримо неперервність ядра нового рівняння. Ми мали вище

$$R_{t^2}^{['']}(t, \xi) = a_0^{['']}(t)\frac{\xi^2}{4} - \sum_1^{\infty} \left(a_\kappa^{['']}(t)\cos\kappa\xi + b_\kappa^{['']}(t)\sin\kappa\xi\right)\cdot\frac{1}{\kappa^2},$$

$a_\kappa^{['']}$, $b_\kappa^{['']}$ — коефіцієнти Фурьє. Тому

$$v(x, \xi) = \int_{-\pi+\eta}^{x} a_0^{['']}(t)dt\,\frac{\xi^2}{4} - \sum_1^{\infty} \frac{\int\limits_{-\pi+\eta}^{x} a_\kappa^{['']}(t)dt\cos\kappa\xi + \int\limits_{-\pi+\eta}^{x} b_\kappa^{['']}(t)dt\sin\kappa\xi}{\kappa^2},$$

$v(x, \xi)$ є неперервною функцією x та ξ.
Далі

$$\int_{-\pi+\eta}^{x} a_\kappa^{['']}(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi+\eta}^{x} K_{x^2}^{['']}(x, \xi)\, dx\cos\kappa\xi\, d\xi$$

є також коефіцієнтом Фурьє.

Тому функція $v(x, \xi)$ має неперервну по ξ при кожному фіксованому x похідну

$$v'_{\xi}(x, \xi) = \sum_1^{\infty} \frac{\int\limits_{-\pi+\eta}^{x} a_\kappa^{['']}(t)\, dt\sin\kappa\xi - \int\limits_{-\pi+\eta}^{x} a_\kappa^{['']}(t)\, dt\cos\kappa\xi}{\kappa} +$$

$$+ \int_{-\pi+\eta}^{x} a_0^{['']}(t)\, dt\,\frac{\xi}{2} = \int_{-\pi+\eta}^{\xi}\int_{-\pi+\eta}^{x} K_{t^2}^{['']}(t, \xi)\, dt\, d\xi.$$

Неперервність функції $v'(x, \xi)$ очевидна.

Цими міркуваннями доведено слідуючу теорему.

Теорема. Якщо λ не є власним значенням ядра $K(x, \xi)$, сумовного з квадратом по ξ, який має майже всюди Шварцеву похідну $K_{x^2}^{['']}(x, \xi)$. і існує така додатня сумовна функція $F(\xi)$, що при досить малих h $\left|\frac{\Delta_{hx}^2 K(x, \xi)}{4h^2}\right| < F(\xi)$ і ядро перетворюється на нуль в деякій граничній смузі квадрату, то рівняння

$$\varphi(x) = \lambda\int_{-\pi}^{+\pi} K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\, d\xi + f(x)$$

може буди зведеним до еквівалентного інтегрального рівняння з неперервним ядром.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

Г. М. ГЕСТРІН

ПРО ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ, ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ

В даній роботі розглядаються лінійні диференціальні оператори другого порядку, інваріантні відносно групи перетворень n-мірного простору. Всюди в дальшому через x позначається точка цього простору. Сама група вважається заданою своїми інфінітезимальними операторами. Далі, через x' буде позначатися точка, в яку переходить точка x під дією групового перетворення з параметрами $a^i (i=1, \ldots, P)$. Нульовим значенням параметрів відповідає тотожне перетворення

$$x'=x'(x, a); \quad x=x'(x, 0).$$

Розглянемо оператор

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{i, k=1}^{n} a_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}+\sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}+a(x). \tag{1}$$

Вимога інваріантності записується в слідуючій матричній формі:

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x'_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial x'_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x'_n}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a_{11}(x) \cdots a_{1n}(x) \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}(x) \cdots a_{nn}(x) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x'_n}{\partial x_1} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial x'_1}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial x'_n}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_{11}(x') \cdots a_{1n}(x') \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}(x') \cdots a_{nn}(x') \end{matrix} \right\|,$$

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x'_1}{\partial x_n} \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial x'_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial x'_n}{\partial x_n} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} \sum_{i, k} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 x'_1}{\partial x_i \partial x_k} \\ \cdots\cdots \\ \sum_{i, k} a_{ik}(x) \frac{\partial^2 x'_n}{\partial x_i \partial x_k} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_1(x') \\ \vdots \\ a_n(x') \end{matrix} \right\|, \quad a(x')=a(x). \tag{2}$$

Припускаючи, що коефіцієнти оператора мають неперервні похідні, доведемо слідуючу теорему.

Теорема 1. Для інваріантності оператора $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ відносно групи G необхідно і достатньо, щоб виконувалися співвідношення

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial \xi_t^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \xi_t^1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi_t^n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \xi_t^n}{\partial x_n}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}\frac{\partial \xi_t^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \xi_t^n}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi_t^1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial \xi_t^n}{\partial x_n}\end{matrix}\right\| =$$

$$= A_t \left\|\begin{matrix}a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{matrix}\right\|;$$

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial \xi_t^1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \xi_t^1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi_t^n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \xi_t^n}{\partial x_n}\end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix}a_1 \\ \vdots \\ a_n\end{matrix}\right\| + \left\|\begin{matrix}\sum\limits_{i,\kappa} a_{i\kappa} \frac{\partial^2 \xi_t^1}{\partial x_i \partial x_\kappa} \\ \dots \\ \sum\limits_{i,\kappa} a_{i\kappa} \frac{\partial^2 \xi_t^n}{\partial x_i \partial x_\kappa}\end{matrix}\right\| = A_t \left\|\begin{matrix}a_1 \\ \vdots \\ a_n\end{matrix}\right\|, \quad A_t a = 0, \qquad (3)$$

де $A_t = \sum\limits_{\kappa=1}^{n} \xi_t^\kappa \frac{\partial}{\partial x_\kappa}$ — інфінітезимальні оператори групи. Ці ж умови необхідні і достатні для того, щоб оператори $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ і A_t були комутативними.

Доведення. Необхідність вказаних умов одержується безпосередньо з формул (2), якщо останні продиференціювати по параметру α^t і перейти до границі при прямуванні до нуля всіх параметрів групи. При цьому слід враховувати, що матриця $\left\|\frac{\partial x'_j}{\partial x_i}\right\|$ прямує до одиничної матриці. Складніше показати, що з (3) випливає (2). На підставі теореми Лі, яка виражається рівностями

$$\frac{\partial x'_\lambda}{\partial \alpha^t} = \sum_s \xi_s^\lambda (x') \psi_t^s(\alpha) \quad (t = 1, \dots, P; \ \lambda = 1, \dots, n)$$

з очевидністю випливає формула, справедлива для всякої функції $f(x)$, що має неперервну похідну

$$\frac{\partial f(x')}{\partial \alpha^q} = \sum_{s=1}^{P} \psi_q^s(\alpha) \left[A_s f(x)\right]_{x=x'}. \qquad (4)$$

Позначимо через $\tilde{x}$ точку, в яку переводиться точка x перетворенням групи з параметрами $z\alpha^t$.

$$\tilde{x}\big|_{z=0} = x; \quad \tilde{x}\big|_{z=1} = x'.$$

Застосовуючи формулу (4) до матриці $\|a_{ij}(x)\|$, ми на підставі (3) одержимо

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^q}\|a_{ij}(x')\| = \sum_{t=1}^{P} \psi_q^t(\alpha)\left\{\left\|\frac{\partial \xi_t^j(x')}{\partial x'_i}\right\| \|a_{ij}(x')\| + a_{ij}(x')\| \left\|\frac{\partial \xi_t^i(x')}{\partial x'_j}\right\|\right\}. \tag{5}$$

Якщо замінити в цій формулі α^t на $z\alpha^t$, помножити рівність з номером q на α^q і просумувати по всіх q від 1 до P, побачимо, що як функція від z матриця $\|a_{ij}(\tilde{x})\|$ задовольняє звичайному диференціальному рівнянню

$$\frac{\partial}{\partial z}\|a_{ij}(\tilde{x})\| = \sum_{q,\,t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha)\left\{\left\|\frac{\partial \xi_t^j(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_i}\right\| \|a_{ij}(\tilde{x})\| + \|a_{ij}(\tilde{x})\| \left\|\frac{\partial \xi_t^i(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_j}\right\|\right\}. \tag{6}$$

З другого боку, буде показано, що загальним розв'язком цього рівняння є матриця $\left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\|$, де $\|c_{ij}\|$ — довільна квадратна матриця, незалежна від z. Справді, підставляючи цю матрицю в праву частину рівняння (6), знайдемо

$$\sum_{q,\,t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha)\left\|\frac{\partial \xi_t^i(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_j}\right\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\| +$$

$$+ \sum_{q,\,t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha)\left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\| \left\|\frac{\partial \xi_t^j(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}_i}\right\| =$$

$$= \sum_{q,\,t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha)\left\|\frac{\partial \xi_t^i(\tilde{x})}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\| + \sum_{q,\,t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha)\left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \xi_t^j(\tilde{x})}{\partial x_i}\right\| =$$

$$= \left\|\frac{\partial}{\partial x_j}\sum_{q,\,t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha)\, \xi_t^i(\tilde{x})\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\| +$$

$$+ \left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{q,\,t=1}^{P} \alpha^q \psi_q^t(z\alpha)\, \xi_t^j(\tilde{x})\right\| =$$

$$= \left\|\frac{d}{dz}\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\| + \left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{d}{dz}\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\| = \frac{d}{dz}\left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\|.$$

Отже, при деякому доборі матриці $\|c_{ij}\|$ одержимо

$$\|a_{ij}(\tilde{x})\| = \left\|\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\| \|c_{ij}\| \left\|\frac{\partial \tilde{x}_j}{\partial x_i}\right\|,$$

Покладаючи тут $z=0$, нарешті одержуємо $\|c_{ij}\|=\|a_{ij}(x)\|$;

$$\|a_{ij}(x')\|=\left\|\frac{\partial x'_i}{\partial x_j}\right\|\,\|a_{ij}(x)\|\left\|\frac{\partial x'_j}{\partial x_j}\right\|,$$

тобто першу групу формул (2). Замінюючи в (4) $f(x)$ на матрицю $\|a_i(x)\|$, аналогічно до попереднього знаходимо

$$\frac{d}{dz}\|a_s(\tilde{x})\|=\sum_{q,\,t=1}^{p}\alpha^q\psi_q^t(z\alpha)\left\|\frac{\partial\xi_t^i(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}_j}\right\|\,\|a_s(\tilde{x})\|+$$

$$+\sum_{q,\,t=1}^{p}\alpha^q\psi_q^t(z\alpha)\left\|\sum_{i,\,\kappa}a_{i\kappa}(\tilde{x})\frac{\partial^2\xi_t^s(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}_i\,\partial\tilde{x}_\kappa}\right\|.$$

Або на підставі вже доведеної першої групи формул це рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dz}\|a_s(\tilde{x})\|=\sum_{q,\,t=1}^{p}\alpha^q\psi_q^t(z\alpha)\left\|\frac{\partial\xi_t^i(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}_j}\right\|\,\|a_s(\tilde{x})\|+$$

$$+\sum_{q,\,t=1}^{p}\alpha^q\psi_q^t(z\alpha)\left\|\sum_{i,\,\kappa}\sum_{l,\,m}a_{lm}(x)\frac{\partial\tilde{x}_i}{\partial x_l}\frac{\partial\tilde{x}_\kappa}{\partial x_m}\frac{\partial^2\xi_t^s(\tilde{x})}{\partial\tilde{x}_i\,\partial\tilde{x}_\kappa}\right\|.$$

Після досить довгого підрахунку доведемо, що загальним розв'язком цього рівняння буде стовбець

$$y=\left\|\frac{\partial\tilde{x}_i}{\partial x_j}\right\|\,\|c_s\|+\left\|\sum_{i,\,\kappa}a_{i\kappa}(x)\frac{\partial^2\tilde{x}_s}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}\right\|,$$

де $\|c_s\|$ довільний стовбець, незалежний від z. Перша частина теореми, таким чином, доведена. Переходячи до доведення другої частини, зручно писати формули вже не в матричній формі

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{a_{il}\frac{\partial\xi_t^j}{\partial x_i}+a_{ij}\frac{\partial\xi_t^l}{\partial x_i}\right\}=A_t\,a_{lj};$$

$$\sum_{i,\,\kappa=1}^{n}a_{i\kappa}\frac{\partial^2\xi_t^j}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial\xi_t^j}{\partial x_i}=A_t\,a_j,\quad A_t\,a=0.$$

Взявши довільну функцію $u(x)$, розглянемо результат впливу на неї оператора $A_t\,L$.

$$A_t L\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u=\sum_{s=1}^{n}\xi_t^s\frac{\partial}{\partial x_s}\left\{\sum_{i,\,\kappa=1}^{n}a_{i\kappa}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}+\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial}{\partial x_i}+a\right\}u;$$

$$A_t \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} A_t u - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_s};$$

$$\begin{aligned} A_t \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{i=1}^{n} (A_t a_i) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} a_i \left\{ \frac{\partial A_t u}{\partial x_i} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_s} \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial A_t u}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{n} \left\{ A_t a_s - \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \right\} \frac{\partial u}{\partial x_s}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_t \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} &= \sum_{s=1}^{n} \xi_t^s \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s} = \sum_{s=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \xi_t^s \frac{\partial u}{\partial x_s} - \frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s} - \right. \\ &\left. - \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_s} - \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s} \right\} = \frac{\partial^2 A_t u}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s} - \\ &- \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_s} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_t \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} &= \sum_{i,k=1}^{n} (A_t a_{ik}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} A_t \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \\ &= \sum_{i,k=1}^{n} (A_t a_{ik}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \left\{ \frac{\partial^2 A_t u}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s} - \right. \\ &\left. - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_s} - \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_s} \right\} = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 A_t u}{\partial x_i \partial x_k} - \\ &- \sum_{s=1}^{n} \left\{ \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i \partial x_k} \right\} \frac{\partial u}{\partial x_s} - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} - \\ &- \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_s} + \sum_{i,k=1}^{n} (A_t a_{ik}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}. \end{aligned}$$

Виконуючи слідуючі очевидні заміни індексів сумування і переставляючи суми, знаходимо

$$\begin{aligned} \sum_{i,k=1}^{n} (A_t a_{ik}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s} = \\ = \sum_{i,k=1}^{n} \left\{ A_t a_{is} - \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_k} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_s}; \end{aligned}$$

$$\sum_{i,s=1}^{n}\left\{A_t a_{is} - \sum_{\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_\kappa}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_s} - \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_\kappa\,\partial x_s} =$$

$$= \sum_{i,s=1}^{n}\left\{A_t a_{is} - \sum_{\kappa=1}^{n}\left(a_{i\kappa}\frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_\kappa} + a_{\kappa s}\frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_\kappa}\right)\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_s}.$$

Але вираз в фігурних дужках дорівнює нулю. Отже, маємо

$$A_t L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 A_t u}{\partial x_i\,\partial x_\kappa} - \sum_{s=1}^{n}\left\{\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}\right\}\frac{\partial u}{\partial x_s} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial A_t u}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{n}\left\{A_t a_s - \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i}\right\}\frac{\partial u}{\partial x_s} + A_t a u =$$

$$= \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 A_t u}{\partial x_i\,\partial x_\kappa} + \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial A_t u}{\partial x_i} + a A_t u + u A_t a +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n}\left\{A_t a_s - \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i\,\partial x_\kappa} - \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i}\right\}\frac{\partial u}{\partial x_s} = L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) A_t u,$$

бо всі фігурні дужки дорівнюють нулю. Доведення того, що з комутативності операторів L та A_t випливають формули (3), одержується безпосередньо з формули

$$A_t L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) A_t u + u A_t a +$$

$$+ \sum_{i,s=1}^{n}\left\{A_t a_{is} - \sum_{\kappa=1}^{n}\left(a_{i\kappa}\frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_\kappa} + a_{\kappa s}\frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_\kappa}\right)\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_s} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n}\left\{A_t a_s - \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i\,\partial x_\kappa} - \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i}\right\}\frac{\partial u}{\partial x_s},$$

якщо в ній покласти послідовно $u=1$, $u=x_s$, $u=x_i x_s$. Теорема 1 повністю доведена. Зауважимо, що лінійні диференціальні оператори, які являють собою поліноми від інфінітезимальних операторів групи і комутативні з кожним інфінітезимальним оператором, були введені у 1950 році І. М. Гельфандом [1].

Природно виникає питання про виділення з усієї множини розв'язків рівняння тих, що не змінюються при групових перетвореннях. Для цього нам буде потрібна слідуюча лема.

Лема 1. Нехай оператор $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ є інваріантний відносно групи а I — інваріант групи. Тоді вирази

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial I}{\partial x_i}\,\frac{\partial I}{\partial x_\kappa}; \qquad \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 I}{\partial x_i\,\partial x_\kappa} + \sum_{i=1}^{n} a_i\frac{\partial I}{\partial x_i}$$

також будуть інваріантами групи. Якщо група G має єдиний незалежний інваріант I, то ці вирази можна записати у вигляді деяких функцій F_1 та F_2 від I

$$F_1(I) = \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa}; \quad F_2(I) = \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial^2 I}{\partial x_i \partial x_\kappa} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial I}{\partial x_i}.$$

Взагалі, якщо група має декілька незалежних інваріантів $I_1, \ldots, I_r$, то вирази

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial I_l}{\partial x_i} \frac{\partial I_s}{\partial x_\kappa} = F_{l,s}$$

також є інваріантами групи.

Доведення. Інваріантність другого з вказаних виразів випливає одразу ж з комутативності $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ та A_t:

$$A_t L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) I = L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) A_t I = 0.$$

Діючи оператором A_t на перший вираз, знаходимо

$$A_t \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} = \sum_{i,\kappa=1}^{n} (A_t a_{i\kappa}) \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} + \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \left(\sum_{s=1}^{n} \xi_t^s \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial I}{\partial x_i} \right) \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} +$$

$$+ \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \left(\sum_{s=1}^{n} \xi_t^s \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} \right) \frac{\partial I}{\partial x_i} = \sum_{i,\kappa=1}^{n} (A_t a_{i\kappa}) \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} -$$

$$- \sum_{i,\kappa=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{l\kappa} \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_l} \right) \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} \frac{\partial I}{\partial x_i} - \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_\kappa} \frac{\partial I}{\partial x_s} \frac{\partial I}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_{i,\kappa=1}^{n} (A_t a_{i\kappa}) \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} - \sum_{i,\kappa=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{l\kappa} \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_l} \right) \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} \frac{\partial I}{\partial x_i} - \sum_{i,\kappa=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} \frac{\partial \xi_t^\kappa}{\partial x_l} \right) \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} =$$

$$= \sum_{i,\kappa=1}^{n} \left\{ A_t a_{i\kappa} - \sum_{l=1}^{n} \left(a_{il} \frac{\partial \xi_t^\kappa}{\partial x_l} + a_{l\kappa} \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_l} \right) \right\} \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} = 0,$$

тобто $\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa} \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa}$ виявляється інваріантом.

Звідси негайно випливає:

Теорема 2. Якщо оператор $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ є інваріантним відносно групи G, причому ця група має єдиний незалежний інваріант I, то рівняння $Lu=0$ має двопараметричне сімейство розв'язків-інваріантів, що можна знайти із звичайного диференціального рівняння

$$F_1(I) \frac{d^2 U}{dI^2} + F_2(I) \frac{dU}{dI} + aU = 0,$$

Доведення. Шукаючи розв'язок-інваріант у вигляді $u=U(I)$, приходимо до вказаного рівняння.

Наведемо приклади використання цієї теореми.

Розглянемо хвильове рівняння в n-мірному просторі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right).$$

Якщо пов'язати з ним оператор $t^2\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\kappa t^2\Delta$, то останній буде інваріантним по відношенню до групи $x'=\alpha x$; $t'=\alpha t$. Незалежними інваріантами цієї групи є функції $\frac{x_1}{t},\ldots,\frac{x_n}{t}$. З них скомбінуємо функцію $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i\frac{x_i}{t}$, де β_i — довільні константи. Маємо

$$F_1(I)=I^2-\kappa\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2;\quad F_2(I)=2I.$$

$$U(I)=c_1\ln\frac{\beta_1 x_1+\cdots+\beta_n x_n-\sqrt{\kappa(\beta_1^2+\cdots+\beta_n^2)}\,t}{\beta_1 x_1+\cdots+\beta_n x_n+\sqrt{\kappa(\beta_1^2+\cdots+\beta_n^2)}\,t}+C_2.$$

Одержане сімейство розв'язків залежить від $n+2$ сталих. Розглянемо ще один приклад

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\kappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right).$$

З цим рівнянням природно пов'язується оператор $t\,\frac{\partial}{\partial t}-\kappa t\Delta$, інваріантний відносно групи $x'=\alpha x$; $t'=\alpha^2 t$. Взявши за I вираз $\left(\sum\frac{x_i^2}{t}\right)^m$ приходимо до рівняння

$$4\kappa m I^{\frac{2m-1}{m}}\frac{d^2U}{dI^2}+\left(I+2\kappa(m-1)I^{\frac{m-1}{m}}\right)U'=0,$$

загальний розв'язок якого виразиться через квадратуру

$$U(I)=C_1\int I^{\frac{n+2(m-1)}{2m}}e^{-\frac{1}{4\kappa}\sqrt[m]{I}}\,dI+C_2.$$

На існуванні розв'язків інваріантів базується зведення найпростішого частинного випадку задачі Діріхле до граничної задачі для звичайного диференціального рівняння. Нехай група має єдине сімейство інваріантних поверхней $I=\mathrm{const}$. Розглядаючи в області, обмеженій поверхнями $I=C_1$ та $I=C_2$ рівняння $Lu=0$, шукаємо його розв'язок, який приймає на поверхні $I=C_1$ стале значення $\tilde{C}_1$, а на поверхні $I=C_2$ друге стале значення $\widetilde{C}_2$. Ми приходимо до задачі знаходження такого розв'язку звичайного диференціального рівняння

$$F_1(I)\frac{d^2 U}{dI^2}+F_2(I)\frac{dU}{dI}+aU=0,$$

який задовольняє граничним умовам

$$U|_{I=C_1}=\widetilde{C}_1; \quad U|_{I=C_2}=\widetilde{C}_2.$$

На завершення буде доведена теорема про одночасну інваріантність відносно однієї і тієї ж групи даного диференціального оператора і оператора, спряженого з ним. Розглянемо векторні поля, породжені коефіцієнтами інфінітезимальних операторів $\vec{P}_t=(\xi_t^1\ldots.\xi_t^n)$.

Справедлива слідуюча теорема.

Теорема 3. Нехай оператор, інваріантний відносно групи G, має ту властивість, що визначник, складений з його старших коефіцієнтів, відмінний від нуля. Тоді для інваріантності відносно G спряженого оператора

$$L^*\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)u=\sum_{i,\kappa=1}^{n}\frac{\partial^2 a_{i\kappa}u}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i u}{\partial x_i}+au$$

необхідно і достатньо, щоб дивергенції векторних полів, породжених операторами A_t були постійними

$$\operatorname{div}\vec{P}_t=\text{const},$$

Доведення. На підставі теореми 1, умови інваріантності спряженого оператора можна виразити формулами

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{a_{il}\frac{\partial\xi_t^j}{\partial x_i}+a_{ij}\frac{\partial\xi_t^l}{\partial x_i}\right\}=A_t a_{ij}\,; \tag{7}$$

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n}a_{i\kappa}\frac{\partial^2\xi_t^j}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}+\sum_{i=1}^{n}\left\{2\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{\partial a_{\kappa i}}{\partial x_\kappa}-a_i\right\}\frac{\partial\xi_t^j}{\partial x_i}=A_t\left\{2\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{\partial a_{\kappa j}}{\partial x_\kappa}-a_j\right\};$$

$$A_t\left\{\sum_{i,\kappa=1}^{n}\frac{\partial^2 a_{i\kappa}}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_i}+a\right\}=0 \qquad (t=1,2,\ldots,P).$$

Перша група цих формул виконується автоматично. З'ясуємо ті умови, при яких задовольняються друга і третя групи формул. Виконуємо деякі прості перетворення другої групи формул

$$2\sum_{i,\kappa=1}^{n}a_{i\kappa}\frac{\partial^2\xi_t^j}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}+2\sum_{i,\kappa=1}^{n}\frac{\partial a_{\kappa i}}{\partial x_\kappa}\frac{\partial\xi_t^j}{\partial x_i}-\sum_{i,\kappa=1}^{n}a_{i\kappa}\frac{\partial^2\xi_t^j}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}-\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial\xi_t^j}{\partial x_i}=$$

$$=2\sum_{\kappa=1}^{n}A_t\frac{\partial a_{\kappa j}}{\partial x_\kappa}-A_t a_j\,. \tag{8}$$

На підставі другої групи формул (3) третій і четвертий члени в лівій частині рівності взаємно знищуються з другим членом правої частини, після чого ми одержуємо

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 \xi^j_t}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}+\sum_{i,\kappa=1}^{n}\frac{\partial a_{\kappa i}}{\partial x_\kappa}\frac{\partial \xi^j_t}{\partial x_\kappa}=\sum_{\kappa=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\xi^s_t\frac{\partial^2 a_{\kappa j}}{\partial x_\kappa\,\partial x_s}=$$

$$=\sum_{\kappa=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\xi^s_t\frac{\partial a_{\kappa j}}{\partial x_s}-\sum_{\kappa,s=1}^{n}\frac{\partial a_{\kappa j}}{\partial x_s}\frac{\partial \xi^s_t}{\partial x_\kappa}=\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}A_t a_{\kappa j}-$$

$$-\sum_{\kappa,s=1}^{n}\frac{\partial a_{\kappa j}}{\partial x_s}\frac{\partial \xi^s_t}{\partial x_\kappa}=\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}\sum_{i=1}^{n}\left(a_{i\kappa}\frac{\partial \xi^j_t}{\partial x_i}+a_{ij}\frac{\partial \xi^\kappa_t}{\partial x_i}\right)-\sum_{\kappa,s=1}^{n}\frac{\partial a_{\kappa j}}{\partial x_s}\frac{\partial \xi^s_t}{\partial x_\kappa}=$$

$$=\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 \xi^j_t}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}+\sum_{\kappa=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_\kappa}\frac{\partial \xi^j_t}{\partial x_i}+\sum_{\kappa=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_\kappa}\frac{\partial \xi^\kappa_t}{\partial x_i}+$$

$$+\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 \xi^\kappa_t}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}-\sum_{\kappa,s=1}^{n}\frac{\partial a_{\kappa j}}{\partial x_s}\frac{\partial \xi^s_t}{\partial x_\kappa}.$$

Звідси випливає

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 \xi^j_t}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}+\sum_{i,\kappa=1}^{n}\frac{\partial a_{\kappa i}}{\partial x_\kappa}\frac{\partial \xi^j_t}{\partial x_i}=\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial^2 \xi^j_t}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}+$$

$$+\sum_{i,\kappa=1}^{n}\frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_\kappa}\frac{\partial \xi^j_t}{\partial x_i}+\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 \xi^\kappa_t}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}.$$

Отже,

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 \xi^\kappa_t}{\partial x_i\,\partial x_\kappa}=0. \tag{9}$$

Очевидно, що від (9) можна повернутися до (8). Таким чином, виявляється, що (9) і є необхідною і достатньою умовою того, щоб виконувалася друга група формул (7). Зауважимо тепер, що в матричній формі умова (9) набирає вигляду

$$\left\|\begin{matrix} a_{11}(x)\cdots a_{1n}(x)\\ \cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}(x)\cdots a_{nn}(x)\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\sum\limits_{\kappa}\dfrac{\partial^2 \xi^\kappa_1}{\partial x_1\,\partial x_\kappa}\cdots\cdots\sum\limits_{\kappa}\dfrac{\partial^2 \xi^\kappa_p}{\partial x_1\,\partial x_\kappa}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum\limits_{\kappa}\dfrac{\partial^2 \xi^\kappa_1}{\partial x_n\,\partial x_\kappa}\cdots\cdots\sum\limits_{\kappa}\dfrac{\partial^2 \xi^\kappa_p}{\partial x_n\,\partial x_\kappa}\end{matrix}\right\|=0.$$

Внаслідок оберненості матриці $\|a_{ij}(x)\|$ одержуємо

$$\left\| \begin{matrix} \sum\limits_{\kappa} \frac{\partial^2 \xi_1^\kappa}{\partial x_1\, \partial x_\kappa} & \ldots\ldots & \sum\limits_{\kappa} \frac{\partial^2 \xi_p^\kappa}{\partial x_1\, \partial x_\kappa} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{\kappa} \frac{\partial^2 \xi_1^\kappa}{\partial x_n\, \partial x_\kappa} & \ldots\ldots & \sum\limits_{\kappa} \frac{\partial^2 \xi_p^\kappa}{\partial x_n \partial x_\kappa} \end{matrix} \right\| = 0,$$

а звідси

$$\sum_\kappa \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_t^\kappa}{\partial x_\kappa} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_\kappa \frac{\partial \xi_t^\kappa}{\partial x_\kappa} = 0$$

і нарешті

$$\sum_\kappa \frac{\partial \xi_t^\kappa}{\partial x_\kappa} = c_t = \text{const}. \tag{10}$$

Залишається тільки показати, що з формул (3) та (10) випливає третя група формул (7). Справді,

$$A_t \sum_{i,\kappa=1}^n \frac{\partial^2 a_{i\kappa}}{\partial x_i\, \partial x_\kappa} - A_t \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \sum_{i,\kappa=1}^n \xi_t^s\, \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_\kappa} \frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_s} - \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \xi_t^s \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial a_i}{\partial x_s} =$$

$$= \sum_{i,\kappa=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_\kappa} \left(\sum_{s=1}^n \xi_t^s \frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_s} \right) - \sum_{i,\kappa=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_s} \frac{\partial^2 \xi_t^s}{\partial x_i\, \partial x_\kappa} -$$

$$- \sum_{i,\kappa=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 a_{i\kappa}}{\partial x_i\, \partial x_s} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_\kappa} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{s=1}^n \xi_t\, \frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_s} \right) - \sum_{i,\kappa=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^3 a_{i\kappa}}{\partial x_\kappa\, \partial x_s\, \partial x_i} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_s} \frac{\partial a_i}{\partial x_s} = \sum_{i,\kappa=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i\, \partial x_\kappa} \left(\sum_{l=1}^n \left(a_{il} \frac{\partial \xi_t^\kappa}{\partial x_l} + a_{l\kappa} \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_l} \right) \right) -$$

$$- \sum_{i,\kappa,s=1}^n \frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_s} \frac{\partial^3 \xi_t^s}{\partial x_i\, \partial x_\kappa} - \sum_{i,\kappa,s=1}^n \frac{\partial^2 a_{i\kappa}}{\partial x_i\, \partial x_s} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_\kappa} - \sum_{i,\kappa,s=1}^n \frac{\partial^2 a_{i\kappa}}{\partial x_\kappa\, \partial x_s} \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} -$$

$$- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{l,\kappa} a_{l\kappa} \frac{\partial^2 \xi_t^i}{\partial x_l\, \partial x_\kappa} + \sum_l a_l \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_l} \right) + \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial \xi_t^s}{\partial x_i} \frac{\partial a_i}{\partial x_s} =$$

$$= \sum_{i,\kappa,l=1}^n \frac{\partial^2 a_{il}}{\partial x_i\, \partial x_\kappa} \frac{\partial \xi_t^\kappa}{\partial x_l} + \sum_{i,\kappa,l=1}^n \frac{\partial a_{il}}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \xi_t^\kappa}{\partial x_\kappa\, \partial x_l} + \sum_{i,\kappa,l=1}^n \frac{\partial^2 a_{l\kappa}}{\partial x_i\, \partial x_\kappa} \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_l} +$$

$$+ \sum_{i,\kappa,l=1}^n \frac{\partial a_{l\kappa}}{\partial x_\kappa} \frac{\partial^2 \xi_t^i}{\partial x_l\, \partial x_i} + \sum_{i,\kappa,l=1}^n \frac{\partial a_{l\kappa}}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \xi_t^i}{\partial x_\kappa\, \partial x_l} + \sum_{i,\kappa,l=1}^n a_{l\kappa} \frac{\partial^3 \xi_t^i}{\partial x_i\, \partial x_\kappa\, \partial x_l} +$$

$$+ \sum_{i,\kappa,l=1}^n \frac{\partial a_{il}}{\partial x_\kappa} \frac{\partial^2 \xi_t^\kappa}{\partial x_i\, \partial x_l} - \sum_{i,\kappa,l=1}^n \frac{\partial a_{i\kappa}}{\partial x_l} \frac{\partial^2 \xi_t^l}{\partial x_i\, \partial x_\kappa} - \sum_{i,\kappa,l=1}^n \frac{\partial^2 a_{i\kappa}}{\partial x_i\, \partial x_l} \frac{\partial \xi_t^l}{\partial x_\kappa} -$$

$$- \sum_{i,\kappa,l=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{i\kappa}}{\partial x_\kappa \partial x_l} \frac{\partial \xi_t^l}{\partial x_i} - \sum_{i,\kappa,l=1}^{n} \frac{\partial a_{l\kappa}}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \xi_t^i}{\partial x_l \partial x_\kappa} - \sum_{i,\kappa,l=1}^{n} a_{l\kappa} \frac{\partial^3 \xi_t^i}{\partial x_i \partial x_l \partial x_\kappa} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial a_l}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_t^i}{\partial x_l} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_l \frac{\partial^3 \xi_t^i}{\partial x_l \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \xi_t^l}{\partial x_i} \frac{\partial a_i}{\partial x_l} = 0,$$

бо перший доданок знищується з десятим, четвертий — з одинадцятим, шостий — з дванадцятим, восьмий — з дев'ятим, чотирнадцятий — з шістнадцятим, другий, третій, п'ятий, сьомий, тринадцятий та п'ятнадцятий зникають на підставі (10). Теорема повністю доведена.

ЛІТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М. Сферические функции на симметрических римановых пространствах. ДАН СССР, 70 № 1, 1950.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

Г. М. ГЕСТРІН

ПРО ВІДДІЛЬНІСТЬ ЗМІННИХ В РІВНЯННЯХ, ІНВАРІАНТНИХ ВІДНОСНО ГРУПИ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Мета цієї статті полягає в встановленні деяких умов, що забезпечують можливість такої заміни змінних в однорідному інваріантному рівнянні з трьома або чотирма аргументами, після якої одне з змінних виявляється відділеним. Суттєву роль в дальшому буде відігравати слідуюча лема.

Лема 1. Нехай A неособлива матриця розмірів 2×2 або 3×3. Тоді існує єдина з точністю до числового множника симетрична матриця X, яка задовольняє рівнянню

$$XA = -A^*X. \tag{1}$$

Доведення. Розглянемо окремо обидва випадки.

1. Матриця має розміри 2×2. Приведемо її до нормальної жорданової форми $A = T\tilde{A}T^{-1}$, де

$$\tilde{A} = \begin{cases} \begin{Vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix} \end{cases}$$

в залежності від того, чи характеристичне рівняння $\det(A+\lambda E)=0$ має двократний корінь λ, чи два різних корені λ_1 і λ_2. Рівняння (1) переписується тепер слідуючим чином:

$$XT\tilde{A}T^{-1} = -T^{-1*}\tilde{A}^*T^*X,$$

або

$$T^*XT\tilde{A} = -\tilde{A}^*T^*XT,$$

або

$$У\tilde{A} = -\tilde{A}^*У,$$

де $У = T^*XT$ є також симетрична матриця. Рівняння (1) має стільки ж незалежних симетричних розв'язків, скільки їх має останнє рівняння. В випадку кратного кореня матриця $У$, а разом з нею і матриця X можуть бути лише нульовими. Справді

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{Vmatrix} = -\begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{Vmatrix};$$

$$\alpha\lambda = -\alpha\lambda;\ \alpha + \beta\lambda = -\beta\lambda;\ \beta + \lambda\gamma = \beta - \lambda\gamma.$$

Але внаслідок того, що $\det A \neq 0, \lambda \neq 0$ і отже, $\alpha = \beta = \gamma = 0$. У випадку різних коренів характеристичного рівняння, матриця $У$ виявиться або нулем, або залежною від одного довільного параметра. Справді

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix} = - \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{Vmatrix};$$

$$\alpha\lambda_1 = -\alpha\lambda_1;\ \beta(\lambda_2 + \lambda_1) = 0;\ \gamma\lambda_2 = -\gamma\lambda_2;\ \alpha = \gamma = 0;$$

отже, якщо $\lambda_1 \neq -\lambda_2$, то $У = 0$, якщо ж $\lambda_1 = -\lambda_2$, то

$$У = \begin{Vmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{Vmatrix} = \beta \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

де β — довільний параметр.

2. Матриця A має розміри 3×3. Відповідаюча їй матриця $\widetilde{A}$ буде мати вигляд

$$\widetilde{A} = \begin{cases} \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}, & \text{якщо корені характеристичного рівняння різні.} \\ \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{Vmatrix}, & \text{якщо корені характеристичного рівняння рівні.} \\ \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{Vmatrix}, & \text{якщо один з коренів характеристичного рівняння двократний.} \end{cases}$$

Дослідивши всі три випадки, переконаємося в тому, що матриця $У$ виявиться або нульовою, або залежною від одного довільного параметра. Лема повністю доведена.

Лема 2. Нехай групі Лі, яка діє в n-мірному просторі, відповідають інфінітезимальні оператори A_t, причому в деякій області D простору оператори $A_1, \ldots, A_{n-1}$ лінійно не зв'язані, а інші виражаються через них формулами

$$A_t = \varphi_1^{(t)} A_1 + \cdots\cdots + \varphi_{n-1}^{(t)} A_{n-1} \qquad (t \geqslant n).$$

Нехай $B_t = \sum_{\kappa=1}^{n-1} \sigma_t^{\kappa}(I, \mu) \frac{\partial}{\partial \mu_\kappa}$ — інфінітезимальні оператори відповідної скороченої групи (оператор B_t одержується з відповідного оператора A_t в результаті переходу до нових незалежних змінних I, $\mu_1 \ldots$, μ_{n-1}, де I є інваріант групи).

Нехай далі між операторами B_t мають місце залежності

$$B_t = v_1^{(t)} B_1 + \cdots\cdots + v_{n-1}^{(t)} B_{n-1}, \qquad (t \geqslant n).$$

Тоді справедлива формула

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^1 \cdots \sigma_1^{n-1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sigma_{n-1}^1 \cdots \sigma_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} \frac{D(v_1^{(t)} \cdots v_{n-1}^{(t)})}{D(\mu_1 \cdots \mu_{n-1})} = \sum_{s=n}^{p} \begin{vmatrix} \eta_1^1(e) \cdots \eta_{n-1}^1(e) \; \varphi_1^{(s)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_1^{n-1}(e) \cdots \eta_{n-1}^{n-1}(e) \; \varphi_{n-1}^{(s)} \\ \eta_1^s(e) \cdots \eta_{n-1}^s(e) \; 0 \end{vmatrix} \tag{2}$$

де $\eta_i^{(\kappa)}(e)$ — коефіцієнти інфінітезимальних операторів приєднаної групи і де слід покласти $e_i = \varphi_i^{(t)}$, якщо $1 \leqslant i \leqslant n-1$, $e_i = 0$, якщо $n-1 < i < t$, $e_t = -1$; $e_i = 0$, якщо $i > t$.

У випадку трьохмірного простору і діючої в ньому трьохпараметричної групи остання формула може бути приведеною до вигляду

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_2^1 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix} \frac{D(v_1, v_2)}{D(\mu_1, \mu_2)} = \psi_2(\varphi_1, \varphi_2, -1), \tag{2'}$$

де $\psi_2(e)$ — коефіцієнт при ω в характеристичному поліномі Кіллінга

$$\varphi(\omega) = -|\eta_i^j(e) - \delta_i^j \omega|.$$

За нестачею місця ми не подаємо доведення цієї леми.

Нехай тепер нам дано лінійний диференціальний оператор

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_\kappa} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + a(x), \quad (n = 3, 4),$$

інваріантний відносно групи перетворень, яка задовольняє умовам, переліченим в лемі 2. Переходячи в операторі $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ та в операторах A_t до змінних I та $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ (в умовах леми 2 може існувати лише єдиний незалежний інваріант), вимагатимемо перш за все, щоб в перетвореному операторі $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ не були присутніми змішані похідні. Ця вимога приводить до знаходження $n-1$ незалежних розв'язків рівняння

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}(x) \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial \mu}{\partial x_\kappa} = 0. \tag{3}$$

Припускаючи, що в області D простору відмінний від нуля вираз (див. нашу статтю «Про лінійні диференціальні оператори, інваріантні відносно групи перетворень» в даному збірнику)

$$F_1(I) = \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}(x) \frac{\partial I}{\partial x_i} \frac{\partial I}{\partial x_\kappa} \neq 0, \tag{4}$$

ми доведемо слідуючу лему.

Лема 3. Функції I та μ_i незалежні в D, Доведення. Справді, якщо б виявилося, що $F(I, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})=0$, то, діючи оператором $\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial I}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}$ на $F(I, \mu)$, ми одержали б

$$0=F_1(I)F_I'+\sum_{s=1}^{n-1}\left(\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial I}{\partial x_i}\frac{\partial \mu_s}{\partial x_\kappa}\right)F'_{\mu_s}=F_1(I)F_I'.$$

Але з того, що $F_1(I)\neq 0$ виходить, що $F_I'=0$, тобто $F(I, \mu)$ не залежить від I, а в такому разі виявляються функціонально залежними інтеграли μ_i, що неможливо. Лему доведено.

Позначаючи коефіцієнти перетвореного оператора $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ через $\tilde{a}_{ij}$ та $\tilde{a}_e$, ми на підставі теореми 1, доведеної в нашій попередній статті, одержимо, що вони задовольняють слідуючій системі рівняння в частинних похідних першого порядку:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\tilde{a}_{is}\frac{\partial \sigma_t^j}{\partial \mu_i}+\tilde{a}_{ij}\frac{\partial \sigma_t^s}{\partial \mu_i}\right\}=B_t\tilde{a}_{sj}, \quad \mu_0=I;$$

$$\sum_{i,\kappa=0}^{n-1}\tilde{a}_{i\kappa}\frac{\partial^2 \sigma_t^j}{\partial \mu_i\,\partial \mu_u}+\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{a}_i\frac{\partial \sigma_t^j}{\partial \mu_i}=B_t\tilde{a}_j, \quad 1\leqslant t\leqslant P. \tag{5}$$

На підставі того ж припущення (4) з цієї системи легко зробити висновок про незалежність коефіцієнтів σ_t^j, а разом з ними і функцій $v_\kappa^{(t)}$ від I. Справді, покладаючи в першій групі формул (5) $s=0$ і взявши j довільним, ми знайдемо через те, що $\tilde{a}_{0j}=\tilde{a}_j=0$ (за добором змінних μ_i),

$$\tilde{a}_{00}\frac{\partial \sigma_t^j}{\partial \mu_0}=F_1(I)\frac{\partial \sigma_t^j}{\partial I}=0,$$

звідки $\frac{\partial \sigma_t^j}{\partial I}=0$, тобто σ_t^j не залежить від I.

Для дальшого дослідження нам зручно буде писати систему (5) в матричній формі

$$B_t\left\|\tilde{a}_{ij}\right\|=\left\|\frac{\partial \sigma_t^i}{\partial \mu_j}\right\|\left\|\tilde{a}_{ij}\right\|+\left\|\tilde{a}_{ij}\right\|\left\|\frac{\partial \sigma_t^j}{\partial \mu_i}\right\|,$$

$$B_t\left\|\tilde{a}_e\right\|=\left\|\frac{\partial \sigma_t^i}{\partial \mu_j}\right\|\left\|\tilde{a}_e\right\|+\left\|\sum_{i,\kappa=1}^{n-1}\tilde{a}_{i\kappa}\frac{\partial^2 \sigma_t^e}{\partial \mu_i\,\partial \mu_\kappa}\right\|. \tag{6}$$

Враховуючи існуючі між операторами B_t співвідношення, ми покажемо, що з системи (6) випливає, що коефіцієнти $\tilde{a}_{ij}$ та $\tilde{a}_e$ задовольняють деякій алгебричній системі рівнянь, Справді, між коефіцієнтами σ_t^i при $t \geqslant n$ мають місце залежності

$$\sigma_t^i = v_1^{(t)} \sigma_i^i + \cdots + v_{n-1}^{(t)} \sigma_{n-1}^i, \tag{7}$$

з яких виходить

$$\frac{\partial \sigma_t^i}{\partial \mu_i} = \frac{\partial v_1^{(t)}}{\partial \mu_i} \sigma_1^i + \cdots + \frac{\partial v_{n-1}^{(t)}}{\partial \mu_i} \sigma_{n-1}^i + v_1^{(t)} \frac{\partial \sigma_1^i}{\partial \mu_i} + \cdots + v_{n-1}^{(t)} \frac{\partial \sigma_{n-1}^i}{\partial \mu_i}. \tag{8}$$

Вживаючи співвідношення (7) до формул (6), одержуємо

$$\sum_{\kappa=1}^{n-1} v_\kappa^{(t)}(\mu) \left\| \frac{\partial \sigma_\kappa^i}{\partial \mu_j} \right\| \left\| \tilde{a}_{ij} \right\| + \left\| \tilde{a}_{ij} \right\| \left\| \sum_{\kappa=1}^{n-1} v_\kappa^{(t)}(\mu) \right\| \left\| \frac{\partial \sigma_\kappa^j}{\partial \mu_i} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{\partial \sigma_t^i}{\partial \mu_j} \right\| \left\| \tilde{a}_{ij} \right\| + \left\| \tilde{a}_{ij} \right\| \left\| \frac{\partial \sigma_t^i}{\partial \mu_i} \right\|.$$

Та аналогічно для молодших коефіцієнтів

$$\sum_{\kappa=1}^{n-1} v_\kappa^{(t)}(\mu) \left\| \frac{\partial \sigma_\kappa^i}{\partial \mu_j} \right\| \left\| \tilde{a}_e \right\| + \left\| \sum_{i,\kappa=1}^{n-1} \tilde{a}_{i\kappa} \sum_{s=1}^{n-1} v_s^{(t)}(\mu) \frac{\partial^2 \sigma_s^e}{\partial \mu_i \partial \mu_\kappa} \right\| =$$

$$= \left\| \frac{\partial \sigma_t^i}{\partial \mu_j} \right\| \left\| \tilde{a}_e \right\| + \left\| \sum_{i,\kappa=1}^{n-1} \tilde{a}_{i\kappa} \frac{\partial^2 \sigma_t^e}{\partial \mu_i \partial \mu_\kappa} \right\|.$$

Користуючись співвідношеннями (8), знайдемо

$$\left\| \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\partial v_\kappa^{(t)}}{\partial \mu_i} \sigma_\kappa^j \right\| \left\| \tilde{a}_{ij} \right\| = - \left\| \tilde{a}_{ij} \right\| \left\| \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\partial v_\kappa^{(t)}}{\partial \mu_j} \sigma_\kappa^i \right\|;$$

$$\left\| \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\partial v_\kappa^{(t)}}{\partial \mu_i} \sigma_\kappa^j \right\| \left\| \tilde{a}_e \right\| = \left\| \sum_{i,\kappa=1}^{n-1} \tilde{a}_{i\kappa} \left(\sum_{s=1}^{n-1} v_s^{(t)} \frac{\partial^2 \sigma_s^e}{\partial \mu_i \partial \mu_\kappa} - \frac{\partial^2 \sigma_t^e}{\partial \mu_i \partial \mu_\kappa} \right) \right\|. \tag{9}$$

Зауважимо тепер, що

$$R_t = \left\| \sum_{\kappa=1}^{n-1} \frac{\partial v_\kappa^{(t)}}{\partial \mu_i} \sigma_\kappa^j \right\| = \left\| \frac{\partial v_i^{(t)}}{\partial \mu_j} \right\| \left\| \sigma_j^i \right\|; \quad \det R_t = \left| \sigma_j^i \right| \frac{D(v_1^{(t)} \cdots v_{n-1}^{(t)})}{D(\mu_1 \cdots \mu_{n-1})}. \tag{10}$$

З допомогою (10) система (9) може бути записаною, нарешті, в слідуючій формі:

$$\left\| \tilde{a}_{ij} \right\| \left\| \sigma_i^j \right\| \left\| \frac{\partial v_j^{(t)}}{\partial \mu_i} \right\| = - \left\| \frac{\partial v_i^{(t)}}{\partial \mu_j} \right\| \left\| \sigma_j^i \right\| \left\| \tilde{a}_{ij} \right\|$$

$$\left\| \frac{\partial v_i^{(t)}}{\partial \mu_j} \right\| \left\| \sigma_j^i \right\| \left\| \tilde{a}_e \right\| = \left\| \sum_{i,\kappa=1}^{n-1} \tilde{a}_{i\kappa} \left(\sum_{s=1}^{n-1} v_s^{(t)} \frac{\partial^2 \sigma_s^e}{\partial \mu_i \partial \mu_\kappa} - \frac{\partial^2 \sigma_t^e}{\partial \mu_i \partial \mu_\kappa} \right) \right\|. \tag{11}$$

Розглядаючи частину цієї системи, до якої входять лише коефіцієнти $\tilde{a}_{ij}$ перетвореного оператора, і маючи на увазі симетрію матриці $\left\| \tilde{a}_{i\kappa} \right\|$, ми бачимо, що знаходимося в умовах леми 1, якщо тільки матриця $\|\sigma_i^j\| \left\|\frac{\partial v_i^{(t)}}{\partial \mu_i}\right\|$ виявляється не особливою. Але для того, щоб це виконувалося, ми повинні послатися на лему 2. Ця лема дозволяє виразити умову оберненості матриці $\|\sigma_i^j\| \left\|\frac{\partial v_i^{(t)}}{\partial \mu_i}\right\|$ безпосередньо в термінах самої групи перетворень. Отже, з леми 1 виходить $\|\tilde{a}_{ij}\| = \Phi(I, \mu)\|\tilde{a}_{ij}(\mu)\|$. Тоді друга частина системи (11) дозволяє зробити висновок, що $\|\tilde{a}_l\| = \Phi(I, \mu)\|\tilde{a}_l(\mu)\|$.

Але матрицю $\|\tilde{a}_{ij}(\mu)\|$ можна розглядати як розв'язок системи (6), а тому

$$B_t\, \Phi(I, \mu)\|\tilde{\alpha}_{ij}(\mu)\| = \Phi(I, \mu)\left\{\left\|\frac{\partial \sigma_t^i}{\partial \mu_j}\right\|\|\tilde{\alpha}_{ij}(\mu)\| + \|\tilde{\alpha}_{ij}(\mu)\|\left\|\frac{\partial \sigma_t^j}{\partial \mu_i}\right\|\right\}.$$

Звідси $B_t\, \Phi(I, \mu) = 0$, бо $\|\tilde{a}_{ij}(\mu)\| \neq 0$. Таким чином, виявляється, що ція $\Phi(I, \mu)$ є інваріантом скороченої групи. Але скорочена група транзитивна, і отже функція не може залежати від μ. Підсумком наведених міркувань є слідуюча теорема.

Теорема. Нехай в просторі трьох або чотирьох вимірів задано лінійний диференціальний оператор

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_\kappa} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} + a(x) \qquad (n = 3, 4)$$

інваріантний відносно групи Лі, діючої в цьому просторі і маючої p параметрів $(p \geqslant n)$. Нехай далі в деякій області D простору між породжуючими групу інфінітезимальними операторами A_t мають місце умови зв'язаності

$$A_t = \varphi_1^{(t)} A_1 + \cdots + \varphi_{n-1}^{(t)} A_{n-1} \qquad (t \geqslant n),$$

причому оператори $A_1, \ldots, A_{n-1}$ лінійно не зв'язані. Нехай, нарешті, в області D відмінний від нуля вираз

$$F_1(I) = \sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}(x)\frac{\partial I}{\partial x_i}\frac{\partial I}{\partial x_\kappa}$$

і відмінна від нуля принаймні для одного значення t слідуюча сума:

$$\sum_{s=n}^{p}\begin{vmatrix} \eta_1^1(e)\cdots\cdots\eta_{n-1}^1(e)\,\varphi_1^{(s)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_1^{n-1}(e)\cdots\eta_{n-1}^{n-1}(e)\,\varphi_{n-1}^{(s)} \\ \eta_1^s(e)\cdots\cdots\eta_{n-1}^s(e)\;\;0 \end{vmatrix},$$

де $\eta_i^{\kappa}(e)$ — коефіцієнти інфінітезимальних операторів приєднаної групи і

$$e_i=\varphi_i^{(t)}\ 1\leqslant i\leqslant n-1,\ e_i=0\ \ n\leqslant i<t,\ e_t=-1,\ e_i=0\ \ i>t.$$

Тоді, переходячи в операторі $L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ до нових незалежних змінних I та $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, де μ_i — незалежні в D розв'язки рівняння

$$\sum_{i,\kappa=1}^{n} a_{i\kappa}\frac{\partial I}{\partial x_i}\frac{\partial \mu}{\partial x_\kappa}=0,$$

ми приведемо його до вигляду

$$L\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)=F_1(I)\frac{\partial^2}{\partial I^2}+F_2(I)\frac{\partial}{\partial I}+a+\Phi(I)\,L_1\left(\mu, \frac{\partial}{\partial \mu}\right).$$

При цьому оператор $L_1\left(\mu, \frac{\partial}{\partial \mu}\right)$, що відщеплюється, інваріантний відносно скороченої групи.

У випадку трьохмірного простору і діючої в ньому трьохпараметричної групи замість вимоги відмінності від нуля вказаної вище суми, слід вимагати, щоб був відмінним від нуля вираз $\psi_2(\varphi_1, \varphi_2, -1)$, де $\psi_2(e)$ — коефіцієнт при ω в характеристичному поліномі Кіллінга.

Розглянемо декілька прикладів.

1. Група обертань в трьохмірному просторі. Поліном Кіллінга має вигляд

$$\varphi(\omega)=-\begin{vmatrix}-\omega & e_3 & -e_2\\ -e_3 & -\omega & e_1\\ e_2 & -e_1 & -\omega\end{vmatrix}=\omega^3+\omega(e_1^2+e_2^2+e_3^2).$$

$\psi_2(e)=e_1^2+e_2^2+e_3^2$ відмінно від нуля при e_i, не рівних нулю одночасно.

2. Група в трьохмірному просторі породжена трьома слідуючими операторами:

$$A_1=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y},\quad A_2=y\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial y},\quad A_2=x\frac{\partial}{\partial z}+z\frac{\partial}{\partial x}.$$

Її інваріантом буде функція $x^2+y^2-z^2$. Між операторами мають місце такі структурні співвідношення: $[A_1, A_2]=-A_3$; $[A_1, A_3]=A_2$; $[A_2, A_3]=A_1$.

Далі, функції φ_1 і φ_2 поза площиною $y=0$ будуть $\varphi_1=\frac{z}{y}$, $\varphi_2=\frac{x}{y}$. Поліном Кіллінга має вигляд

$$\varphi(\omega)=-\begin{vmatrix}-\omega & -e_3 & e_2\\ -e_3 & -\omega & -e_1\\ e_2 & -e_2 & -\omega\end{vmatrix}.$$

Отже, $\psi_2(e)=e_1^2-e_2^2-e_3^2$, $\psi_2(\varphi_1, \varphi_2, -1)=\varphi_1^2-\varphi_2^2-1$.

Тому у будь-якій області, яка не перетинається поверхнею $z^2-x^2-y^2=0$ та площиною $y=0$ в інваріантному відносно цієї групи рівнянні, можна добитися відділення змінних.

3. Група рухів, паралельних площині $z=0$. Її поліном Кіллінга буде $\varphi(\omega)=\omega^3+\omega e_3^2$. Тому $\psi_2(\varphi_1, \varphi_2, -1)=+1$. Між іншим, в цьому прикладі віддільність змінних безпосередньо випливає з того, що загальний вид оператора, інваріантного відносно цієї групи, такий:

$$a(z)\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}+b(z)\frac{\partial^2}{\partial z^2}+a(z)\frac{\partial}{\partial z}+d(z).$$

На зв'язок групових властивостей диференціального оператора з віддільністю змінних є деякі вказівки в книжці Г. Біркгофа «Гидродинамика».

ЛІТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Гидродинамика. ИЛ, М., 1954.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

М. О. ЗАРИЦЬКИЙ

ДЕЯКІ ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ

В цій статті розглядаються властивості деяких числових послідовностей, які будуть в іншій роботі використані для арифметичного визначення такої функції, що дає топологічне (неперервне і взаємооднозначне) відображення певної множини, одна з яких має, а друга не має міри Лебега.

I

Якщо s, κ і n є натуральними числами, то формула $n=2^{s-1}(2\kappa-1)$ дає взаємооднозначну відповідність між множиною натуральних чисел $\{n\}$ і множиною пар натуральних чисел $\{s, \kappa\}$.

Наприклад, кожному з натуральних чисел $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15$, відповідає взаємооднозначно пара натуральних чисел.

$$(s, \kappa)=(1,1), (2,1), (1,2), (3,1), (1,3), (2,2), (1,4), (4,1), (1,5), (2,3), (1,6), (3,2), (1,7), (2,4), (1,8).$$

Означимо тепер послідовність $\{u_n\}$ з допомогою формул

$$u_1=0, \ u_{n+1}=u_n+3^{s-1}, \text{ де } n=2^{s-1}(2\kappa-1).$$

Перші члени послідовності $\{u_n\}$ мають значення

$$0, 1, 4, 5, 14, 15, 18, 19, 46, 47, 50, 51, 60, 61, 64, 65, 146, 147.$$

З формули $n=2^{s-1}(2\kappa-1)$ виходить, що для непарного n буде $s=1$, отже

$$u_{n+1}=u_n+1. \tag{A}$$

Виведемо тепер слідуючі властивості послідовності $\{u_n\}$:

(1) $u_{2n}=n+3u_n$;

(2) $u_{2n+1}=n+3u_{n+1}$;

(3) $u_{2n-1}=n+3u_n-1$;

(4) $u_{2^n}=3^n-2^n$;

(5) $u_{2^{n+1}}-u_{2^n}=2\cdot 3^n-2^n$;

(6) $\sum_{i=1}^{n}u_{2i-1}-\sum_{i=1}^{n-1}u_{2i}=3u_n$;

(7) $u_{2^n}=u_{2^n-i}+u_{i+1}$ для $i=0, 1, 2,\dots (2^n-1)$,
$n=1, 2, 3,\dots$

Доведення. Формула (1) вірна для $n=1$. Якщо ця формула вірна для $n=m$, вона буде також вірна для $n=m+1$.

Треба довести, що $u_{2(m+1)}=m+1+3u_{m+1}$, якщо $u_{2m}=m+3u_m$.

Справді, для $m=2^{s-1}(2\kappa-1)$ маємо $u_{m+1}=u_m+3^{s-1}$, а також

$$u_{2m+1}-u_{2m}=3^s \text{ (бо } 2m=2^s(2\kappa-1));$$

$$u_{2m+1}-u_{2m}=3\cdot 3^{s-1}=3(u_{m+1}-u_m);$$

$$u_{2(m+1)}=u_{2m+2}=u_{2m+1}+1=u_{2m}+3u_m-3u_m+1.$$

Але за умовою $u_{2m}=m+3u_m$, отже $u_{2(m+1)}=m+1+3u_{m+1}$ і формула (1) вірна для $n=1, 2, 3, \ldots$ Формула (2) випливає з формули (1) і з зауваження (A). Маємо $u_{2n+2}=n+1+3u_{n+1}$ і $u_{2n+2}=u_{2n+1}+1$, отже

$$u_{2n+1}=n+3u_{n+1}.$$

З (A) і (1) випливає також формула (3). Справді одержуємо

$$u_{2n}=u_{2n-1}+1 \text{ і } u_{2n-1}=u_{2n}-1,\ u_{2n}=n+3u_n,$$

отже $u_{2n-1}=n+3u_n-1$.

Формула (4) вірна для $n=1$. Але якщо вона вірна для $n=m$, то вона вірна і для $n=m+1$.

З формули (1) виходить

$u_{2^{m+1}}=u_{2\cdot 2^m}=2^m+3u_{2^m}$, отже з прийнятої умови випливає

$$u_{2^{m+1}}=2^m+3(3^m-2^m)=3^{m+1}-2^{m+1}.$$

Формула (5) випливає безпосередньо з формули (4)

$$u_{2^{n+1}}-u_{2^n}=3^{n+1}-2^{n+1}-3^n+2^n=3^n(3-1)-2^n(2-1)=2\cdot 3^n-2^n.$$

Для доведення формули (6) беремо до уваги рівність

$\sum\limits_{i=1}^{n}(u_{2i}-u_{2i-1})=n$, яка випливає з зауваження (A).

Одержуємо

$$\sum_{i=1}^{n}u_{2i-1}-\sum_{i=1}^{n-1}u_{2i}=\sum_{i=1}^{n}(u_{2i-1}-u_{2i})+u_{2n}=u_{2n}-n=n+3u_n-n=3u_n.$$

Щоб довести формулу (7), зауважимо передусім, що ця формула вірна для будь-якого натурального числа n і для $i=0$.

Припустимо тепер, що формула вірна для $i=r<2^n-1$ і доведемо, що вона буде тоді вірна для $r+1<2^n$.

Нехай $r+1=2^{s-1}(2\kappa-1)<2^n$.

Тоді

$$2^n-(r+1)=2^n-2^{s-1}(2\kappa-1)=2^{s-1}(2^{n-s+1}-2\kappa+1).$$

Але $2^{s-1}(2\kappa-1)<2^n$, отже, $2\kappa-1<2^{n-s+1}$ і $2^{n-s+1}-2\kappa+1$ є найбільшим непарним множником виразу $2^n-(r+1)$, а найвищим степенем числа 2, що міститься в цьому виразі, є степінь 2^{s-1}. Таким чином, при тому самому показнику $s-1$ маємо

$$r+1=2^{s-1}(2\kappa-1);$$

$$2^n-(r+1)=2^{n-1}(2^{n-s+1}-2\kappa+1).$$

Можемо тепер написати

$$u_{2^n-(r+1)+1}=u_{2^n-(r+1)}+3^{s-1};$$

$$u_{r+2}=u_{r+1}+3^{s-1},$$

а далі

$$u_{r+2}-u_{r+1}+u_{2^n-r}-u_{2^n-(r+1)};$$

$$u_{2^n-(r+1)}+u_{r+2}=u_{2^n-r}+u_{r+1}=u_{2^n}.$$

Отже, формула (7) вірна для всякого натурального $i<2^n$.

II

Означимо тепер послідовність $\{p_n\}$ з допомогою таких умов:

$$p_n=2r+1, \text{ якщо } 2^m\leqslant n=2^m+r<2^{m+1}.$$

Зауважимо передусім, що для всякого натурального n нерівності $2^n\leqslant n=2^m+r<2^{m+1}$ визначають однозначно таке m і таке r, що задовольняють ці нерівності.

Перші члени означеної так послідовності, від $n=1$ до $n=18$, мають такі значення:

1,1, 3,1, 3,5, 7,1, 3,5, 7,9, 11, 13, 15, 1,3, 5.

Виведемо деякі властивості послідовності $\{p_n\}$

(8) $p_{2n}=2p_n-1$.

З умов $2^m\leqslant n=2^m+r<2^{m+1}$ і $p_n=2r+1$ виходить

$$2^{m+1}\leqslant 2n=2^{m+1}+2r<2^{m+2},\ p_{2n}=4r+1;$$

$$p_{2n}=2(p_n-1)+1=2p_n-1;$$

(9) $p_{2^n-1}=2^n-1$.

Якщо $2^m\leqslant 2^n-1<2^{m+1}$, то $n=m+1$, якщо ж $2^n-1=2^m+r$, то $r=2^n-2^m-1=2^{n-1}-1$.

Врешті дістаємо

$$p_{2^n-1}=2(2^{n-1}-1)+1=2^n-1.$$

(10) $p_{2^n}=1$.

Ця формула випливає безпосередньо з означення, бо для кожного n $r=0$.

(11) Якщо $n+1$ не є степенем числа 2, то $p_{n+1}=2+p_n$.

Коли $2^m\leqslant n=2^m+r<2^{m+1}$, тобто $p_n=2r+1$, то маємо

$$2^m\leqslant n+1=2^m+r+1<2^{m+1},\ \text{бо } n+1\neq 2^{m+1},$$

тому

$$p_{n+1}=2(r+1)+1=2r+3=2+p_n.$$

(12) $p_{4n-3}=2p_{2n-1}-3$, для $n=2, 3, 4,\ldots$

З формули (8) одержуємо $p_{4n-3}=2p_{2n-1}-1$, а за формулою (11):

$$p_{4n-3}=2p_{2n-1}-3;$$

(13) $p_{4n-1}=2p_{2n-1}+1$.

Ця формула випливає також з формул (8) і (11).

III

Нехай за означення буде

$$b_n=p_n+u_{p_n+1};$$

p_n+1 є завжди першим членом, отже, за формулою (A) маємо

$$u_{p_n+1}=u_{p_n}+1, \text{ а також } b_n=p_n+u_{p_n}+1.$$

Напишемо 18 перших членів послідовності $\{b_n\}$:

2, 2, 8, 2, 8, 20, 26, 2, 8, 20, 26, 56, 62, 74, 80, 2, 8, 20.

(14) $b_{2^m+i}+b_{2^{m+1}-i-1}=1+3^{m+1}$ для $m=0, 1, 2\ldots, i=0, 1, 2\ldots(2^m-1)$.
Маємо $p_{2^m+i}=2i+1$ і $p_{2^{m+1}-2-1}=p_{2^m+(2^m-i-1)}$.
З нерівності $2^m-i-1<2^m$ дістаємо $p_{2^m-i-1}=2(2^m-i-1)+1=2^{m+1}-2i-1$.
Дістаємо тепер

$$b_{2^m+i}+b_{2^{m+1}-i-1}=p_{2^m+i}+u_{p_{2^m+i}}+1+p_{2^{m+1}-i-1}+u_{p_{2^{m+1}-i-1}}+1=$$

$$=2i+1+u_{2i+1}+1+2^{m+1}-2i-1+u_{2^{m+1}-i-1}+1=$$

$$=2+2^{m+1}+u_{2i+1}+u_{2^{m+1}-2i-1}.$$

З формул (7) і (4) виводимо

$$u_{2^{m+1}-2i-1}=u_{2^{m+1}}-u_{2i+2}=3^{m+1}-2^{m+1}-u_{2i+2}=3^{m+1}-$$

$$-2^{m+1}-u_{2i+2}-1.$$

Знаходимо врешті

$$b_{2^m+i}+b_{2^{m+1}-i-1}=2+2^{m+1}+u_{2i+1}+3^{m+1}-2^{m+1}-$$

$$-u_{2i+1}-1=1+3^{m+1}.$$

(15) $b_{2^n+2i}=3b_{2^n+i}-4$, для $n=1, 2, 3,\ldots,\ i=1, 2,\ldots(2^{n-1}-2)$.
Маємо

$$b_{2^n+i}=p_{2^n+i}+u_{p_{2^n+i}}+1;$$

$$b_{2^n+2i}=p_{2^n+2i}+u_{p_{2^n+2i}}+1.$$

За умовою $2i<2^n$, отже

$$p_{2n+i}=2i+1,\ p_{2^n+2i}=4i+1,$$

отже,

$$b_{2^n+i}=2i+1+u_{2i+1}=2i+2+u_{2i+1};$$

$$b_{2^n+2i}=4i+1+u_{4i+1}+1=4i+2+u_{4i+1}.$$

З формули (2) одержуємо

$$b_{2^n+2i}=4i+2+2i+3u_{2i+1}=bi+2+3u_{2i+1};$$

$$3b_{2^n+i}=bi+b+3u_{2i+1},$$

і врешті

$$b_{2^n+2i}=3b_{2^n+i}-4.$$

(16) $b_{2^n+4i-3}=3b_{2^n+2i-1}-16$, якщо $4i-3<2^n$, $n=1, 2, 3,\ldots$ З означень $p_{2^n+4i-3}=8i-5$, $p_{2^n+2i-3}=4i-1$ виходить, що

$$b_{2^n+4i-3}=8i-4+u_{8i-5};$$

$$b_{2^n+2i-1}=4i+u_{4i-1}.$$

З формул (2), (1) і (3) випливає

$$u_{8i-5}=u_{2(4i-3)+1}=4i-3+3u_{4i-2}=4i-3+3(2i-1+3u_{2i-1})=$$

$$=10i-6+9u_{2i-1}=10i-6+9(i+3u_i-1)=19i-15+27u_i;$$

$$u_{4i-1}=2i+3u_{2i}-1=2i-1+3(i+3u_i)=5i-1+9u_i.$$

З цього виходить

$$b_{2^n+4i-3}=27i+27u_i-19,\ b_{2^n+2i-1}=9i+9u_i-1$$

і врешті

$$b_{2^n+4i-3}=3b_{2^n+2i-1}-16.$$

(17) Якщо $4i-1<2^n$, то $b_{2^n+4i-1}=3b_{2^n+2i-1}+2$ для $n=1, 2, 3,\ldots$

З рівностей $p_{2^n+4i-1}=8i-1$ і $p_{2^n+2i-1}=4i-1$ виходить

$$b_{2^n+4i-1}=8i+u_{8i-1},\ b_{2^n+2i-1}=4i+u_{4i-1}.$$

З формули (3) дістаємо

$$u_{8i-1}=4i+3u_{4n}-1,\ u_{4i-1}=u_{4i}-1.$$

З цих формул знаходимо

$$b_{2^n+4i-1}=12i+3u_{4i}-1,\ b_{2^n-2i-1}=4i+u_{4i}-1$$

і

$$b_{2^n+4i-1}=3b_{2^n+2i-1}+2.$$

(18) $b_{2^n}=2$ для $n=1, 2, 3,\ldots$ Справді маємо

$$b_{2^n}=p_{2^n}+u_{p_{2^n}}+1=1+u_1+1=2.$$

IV

Неважко довести, що числа b_{2^n}, b_{2^n+1}, $b_{2^n+2}, \dots b_{2^{n+1}-1}$ утворюють зростаючу прогресію та що найбільше з них $b_{2^{n+1}-1} = 3^{n+1} - 1$.

Але з розгорнення $3^{n+1}-1 = 2\cdot 3^0 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + \dots + 2\cdot 3^n$ виходить, що (при $i=0, 1, 2, \dots (2^n-1)$) кожне число b_{2^n+i} розгортається за трійковою системою в многочлен $b_{2^n+i} = \alpha_0 + \alpha_1\cdot 3 + \alpha_2\cdot 3^2 + \dots + \alpha_n\cdot 3^n$, де кількість членів не більша, ніж $n+1$, а числа α_v ($v=0, 1, \dots n$) можуть мати одне з слідуючих значень: 0, 1, або 2.

(19) Доведемо таку теорему:

Теорема. Якщо $b_{2^n+i} = \sum_{v=0}^{n} \alpha_v 3^v$ (для $i=0, 1, \dots (2^n-1)$), то

1) $\alpha_0 = 2$

2) $\alpha_v \neq 1$

для $v = 1, 2, \dots n$, (для кожного n). Обчислюємо [беремо до уваги формулу (2)] $b_{2^n+i} = 2i + 1 + u_{2i+1} + 1 = 3(i + u_{i+1}) + 2$, отже $\alpha_0 = u$.

Щоб довести другу частину теореми (19), треба вивести дві допоміжні теореми:

(а) Якщо $i=0, 2, 4, \dots (2^n-2)$, то $\alpha_1 = 0$.

(б) Якщо $i=1, 3, 5, \dots (2^n-1)$, то $\alpha_1 = \alpha$.

Нехай буде $b_{2^n+m} = 2 + \alpha_1\cdot 3 + \alpha_2\cdot 3^2 + \dots + \alpha_n\cdot 3^n$;

$$b_{2^n+2m} = 2 + \beta_1\cdot 3 + \beta_2\cdot 3^2 + \dots + \beta_n\cdot 3^n.$$

З формули (15) виходить

$$b_{2^n+2m} = 3b_{2^n+m} - 4 = -4 + 6 + \alpha_1\cdot 3^2 + \alpha_2\cdot 3^3 + \dots = 2 +$$
$$+ \alpha_1\cdot 3^2 + \alpha_2\cdot 3^3 + \dots, \text{ отже, } \beta_1 = 0.$$

Для доведення другої допоміжної теореми обчислимо

$$b_{2^n+2m+1} - b_{2^n+2m} = 4m + 3 + u_{4m+3} + 1 - 4m - 1 - u_{4m-1} - 1 =$$
$$= 2 + u_{2(2m+1)+1} - u_{2(2m+1)-1} = 2 + 2m + 1 + 3u_{2m+2} -$$
$$- 2m - 1 - 3u_{2m+1} + 1 = 3 + 3(u_{2m+2} - u_{2m+1}) =$$
$$= 3 + 3(u_{2m+1} + 1 - u_{2m+1}) = 6 = 2\cdot 3.$$

Нехай

$$b_{2^n+2m} = 2 + \alpha_2\cdot 3^2 + \dots, \quad b_{2^n+2m+1} = 2 + \alpha_1\cdot 3 + \alpha_2\cdot 3^2 + \dots$$

Маємо тепер

$$b_{2^n+2m+1} = b_{2^n+2m} + 2\cdot 3 = 2 + 2\cdot 3 + \alpha_2\cdot 3^3 + \dots \quad \text{отже, } \alpha_1 = \alpha.$$

Доведемо тепер (19) насамперед для непарного i, тобто для $i=4m-3$, або для $i=4m-1$ (де $m=1, 2, 3, \dots$).

Ми довели раніше формули

$$b_{2^n+4m-3}=3b_{2^n+2m-1}-16 \text{ для } 4m-3<2^n;$$

$$b_{2^n+4m-1}=3b_{2^n+2m-1}+2 \text{ для } 4m-1<2^n.$$

Припустимо, що теорема (19) вірна для $i=2m-1=1, 3, 5, \dots r$ і доведемо, що тоді вона вірна також і для $i=r+2$.

Якщо $\frac{r+1}{2}$ є непарне число (тобто $r=1, 5, 9, 13, \dots$), то покладемо в формулі (17) $2m-1=\frac{r+1}{2}$, тобто $4m-1=r+2$. Тоді дістанемо

$$b_{2^n+r+2}=3b_{2^n+\frac{r+3}{2}}-16\cdot$$

Нехай, за умовою в розгорненні $b_{2^n+r}=2+2\cdot 3+\alpha_2\cdot 3^2+\alpha_3\cdot 3^3+\dots$ цифри α_v мають значення 0 або 2. Тоді, залежно від того, яке значення буде мати $r=1, 5, 9, \dots$ або $3, 7, 11, \dots$ дістанемо

$$b_{2^n+r+2}=2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\alpha_2\cdot 3^3+\alpha_3\cdot 3^4+\dots$$

або

$$b_{2^n+r+2}=-16+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\alpha_2\cdot 3^3+\alpha_3\cdot 3^4+\dots=$$

$$=2+2\cdot 3+\alpha_2\cdot 3^3+\alpha_3\cdot 3^4+\dots$$

Бачимо, що в трійковому розгорненні числа b_{2^n+r+2} жодна цифра α_i не дорівнює 1.

Для доведення, що теорема (19) вірна для парного i, обчислимо різницю (на основі (2))

$$b_{2^n+2m+1}-b_{2^n+2m}=4m+2+1+u_{4m+3}=4m-1-u_{4m+1}=$$

$$=2+u_{4m+3}-u_{4m+1}=2+u_{2(2m+1)}+1-u_{2(2m+1)}-1=$$

$$=2+2m+1+3u_{2m+2}-2m-3u_{2m+1}=3+3u_{2m+2}-$$

$$-3u_{2m+1}=2+5m+4+9u_{m+1}-5m-9u_{m+1}=2\cdot 3.$$

Одержуємо

$$b_{2^n+2m}=b_{2^n+2m+1}-6=2+\alpha_2\cdot 3^2+\alpha_3\cdot 3^3+\dots$$

Бачимо, що теорема (19) вірна для $i=0, 1, 2, \dots (2^n-1)$.

Таким чином, кожне число b_n можна записати у вигляді трійкової системи без цифри 1.

Числа $a_n=b_n-1$ мають в трійковій системі вигляд

$$a_n=1+\alpha_1\cdot 3+\alpha_2\cdot 3^2+\dots+\alpha_m\cdot 3^m, \text{ де } \alpha_v=0 \text{ або } 2.$$

Зважаючи на те, що $1=2\cdot 3^{-1}+2\cdot 3^{-2}+2\cdot 3^{-3}, \dots$, можемо a_n записати у вигляді періодичного числа з періодом 2 без цифри 1

$$a_n=\alpha_m\cdot 3^m+\alpha_{m-1}\cdot 3^{m-1}+\dots+\alpha_1\cdot 3+2\cdot 3^{-1}+2\cdot 3^{-2}+\dots$$

V

Можна довести, що кожне ціле додатне число, яке в трійковій системі може бути записане без цифри 1 і перша цифра якого $v_0=2$, є певним членом послідовності $\{b_n\}$.

(20) Якщо $b=2+\alpha_1\cdot 3+\alpha_2\cdot 3^2+\ldots+\alpha_n\cdot 3^n$ (де $\alpha_v=0$ або 2), то існує одне і тільки одне таке число i $(0\leqslant i\leqslant 2^{n-1})$, для якого $b=b_{2^n+i}$.

Ми мали раніше

$$b_{2^n+i}=2i+1+u_{2i+1}+1,$$

$$i+u_{i+1}=\frac{b_{2^n+i}-2}{3}.$$

Якщо тепер

$$b_{2^n+i}=2+\alpha_1\cdot 3+\alpha_2\cdot 3^2+\ldots+\alpha_m\cdot 3^m,\ (\alpha_v=0 \text{ або } 2,\ \alpha_m=2)$$

то маємо

$$i+u_{i+1}=\alpha_1+\alpha_2\cdot 3+\alpha_3\cdot 3^2+\ldots+\alpha_m 3^{m-1}.$$

Маємо, очевидно, $i_1+u_{i_1+1}<i_2+u_{i_2+1}$ якщо $i_1<i_2$.

(21) Якщо тепер покладемо $c_\kappa=\kappa+u_{\kappa+1}$, де $\kappa=1, 2, 3, 4, \ldots$, то послідовність $\{c_\kappa\}$ є зростаючою за величиною послідовністю всіх натуральних чисел, в трійковому записі яких немає цифри 1.

Для $\kappa=1, 2, \ldots 18$ члени цієї послідовності мають значення

2, 6, 8, 18, 20, 24, 26, 54, 56, 60, 62, 72, 74, 78, 80, 162, 164, 168.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

А. Б. ДРАПКІН

ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ З ПАРАМЕТРОМ

В цій роботі розглядаються граничні задачі типу Діріхле для одного класу еліптичних систем з параметром і відповідних систем без параметра. Провадиться побудова матриць Гріна для цих задач і розв'язки самих задач представляються з допомогою побудованих матриць Гріна. Виводяться оцінки для матриць Гріна і їх частин.

1. Тривиміровий простір Евкліда D_∞ вважається далі віднесеним до прямокутної системи координат x_1, x_2, x_3. Буде розглядатися також конечна область $D \subset D_\infty$, обмежена поверхнею S типу Ляпунова.[1] Точки простору ототожнюються з відповідними радіус-векторами. Якщо a є вектор із складовими a_1, a_2, a_3, то тою самою буквою будемо позначати в матричному записі стовпець з елементами a_1, a_2, a_3.

Розглядається матричний диференціальний оператор вигляду

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum_{i, j=1}^{3} A_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} A_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + A_0(x), \tag{1}$$

коефіцієнти якого є дійсними функціональними квадратними матрицями порядку 3, визначеними для значень $x = (x_1, x_2, x_3)$ з деякої конечної області Ω $(\overline{D} \subset \Omega)$.

Припускається, що в цій області $A_0(x), A_i(x), A_{ij}(x)$ неперервно диференційовані відповідно 2, 3, 4 рази. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $A_{ij}(x) = A_{ji}(x)$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Нехай $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ є оператор еліптичного типу: для кожної дійсної точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$ і довільного $x \in \Omega$

$$\det A_2(x, \alpha) = \det \left\{ \sum_{i, j=1}^{3} A_{ij}(x)\, \alpha_i \alpha_j \right\} \neq 0.$$

Розглядається система диференціальних рівнянь з параметром $\lambda > 0$

$$\left[A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right] u(x) = -\Phi(x) \tag{2}$$

(E — одинична матриця, $\Phi(x)$ — достатньо гладкий заданий стовпець)

---

[1] Всі результати цієї роботи вірні для будь-якого конечно-вимірового простору Евкліда з числом вимірів $n \geq 2$. Для простоти запис ведеться для тривимірового випадку.

і вважається, що для значень $\lambda\epsilon[0, +\infty)$ відповідна задача типу Діріхле для системи (2), тобто задача

$$\left[A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right] u(x) = -\Phi(x) \quad (x\epsilon D); \quad u(x) = 0 \quad (x\epsilon S)$$

однозначно розв'язна.

2. Побудуємо з допомогою методу Е. Е. Леві [1] фундаментальну матрицю $g(x, y; \lambda)$ оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$ (означення фундаментальної матриці для еліптичного оператора довільного порядку дано Я. Б. Лопатинським в [2]).

Розглянемо допоміжний оператор $A_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$, де y деяка фіксована точка, і побудуємо фундаментальну матрицю $g_0(x-y, y; \lambda)$ для цього матричного диференціального оператора з постійними коефіцієнтами. Будемо шукати частинний розв'язок системи рівнянь

$$\left[A_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right] u(x) = -\Phi(x) \tag{3}$$

з допомогою трансформації Фурьє в цілому просторі D_∞. Замінимо шуканий стовпець $u(x)$ і даний $\Phi(x)$ їх трансформаціями Фурьє

$$\Phi(x) = \iiint\limits_{D_\infty} e^{i(\alpha, x)} \tilde{\Phi}(\alpha)\, d\alpha; \qquad u(x) = \iiint\limits_{D_\infty} e^{i(\alpha, x)} \tilde{u}(\alpha)\, d\alpha. \tag{4}$$

Маємо формули «обертання»

$$\tilde{\Phi}(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{D_\infty} e^{-i(\alpha, y)} \Phi(y)\, dy; \; \tilde{u}(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{D_\infty} e^{-i(\alpha, y)} u(y)\, dy. \tag{5}$$

Підставляючи значення $u(x)$ і $\Phi(x)$ з (4) в (3) одержимо, враховуючи, що в силу позначення $A_2(y, i\alpha) = -A_2(y, \alpha)$,

$$\iiint\limits_{D_\infty} e^{i(\alpha, x)} \left\{[A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]\, \tilde{u}(\alpha) - \tilde{\Phi}(\alpha)\right\} d\alpha = 0.$$

Звідки

$$\tilde{u}(\alpha) = [A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]^{-1}\, \tilde{\Phi}(\alpha).$$

(Припускається, що матриця $[A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]$ оборотня для значень $\lambda\epsilon[0, +)$. З цього припущення випливає, що всі λ — корені рівняння $\det[A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E] = 0$ комплексні).

Підставляючи в (4), маємо

$$u(x) = \iiint\limits_{D_\infty} e^{i(\alpha, x)} [A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]^{-1}\, \tilde{\Phi}(\alpha). \tag{6}$$

Взагалі інтеграл (6) розуміється як головне значення по Коші, тобто як границя інтеграла по кулі при прямуванні радіуса кулі до безмежності. Введемо допоміжний стовпець

$$u_2(x)=\iiint\limits_{|\alpha|<R} e^{i(\alpha, x)}[A_2(y, \alpha)+\lambda^2 E]^{-1}\tilde{\Phi}(\alpha)\,d\alpha.$$

Внаслідок того, що інтеграл (6) збігається, існує конечний $\lim\limits_{R\to\infty} u_R(x)=u(x)$. Підставляючи в останній інтеграл значення $\tilde{\Phi}(\alpha)$ з (5) і змінивши порядок інтегрування, одержимо

$$u_R(x)=\iiint\limits_{D_\infty} g_0^R(x-(y, y;\lambda)\,\Phi(y)\,dy,$$

де

$$g_0^R(x-y, y;\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{|\alpha|<R_1} e^{i(x-y, \alpha)}[A_2(y, \alpha)+\lambda^2 E]^{-1}\,d\alpha. \tag{7}$$

Доведемо, що існує конечний $\lim\limits_{R\to\infty} g_0^R(x-y, y;\lambda)$, тобто що можна в (7) переходити до границі при $R\to\infty$. Доведемо, що збігається інтеграл

$$g_0(x-y, y;\lambda)=\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{D\infty} e^{i(x-y, \alpha)}[A_2(y, \alpha)+\lambda^2 E]^{-1}\,d\alpha. \tag{8}$$

Тоді шуканий частинний розв'язок системи (3) запишеться у вигляді

$$u(x)=\iiint\limits_{D\infty} g_0(x-y, y;\lambda)\,\Phi(y)\,dy.$$

Матриця $g_0(x-y, y;\lambda)$ є фундаментальна матриця оператора $A_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)-$ $-\lambda^2 E$.

Замінимо в (7) $x-y$ на x і зробимо заміну змінних $\alpha=\lambda\tilde{\alpha}$ (причому, для простоти позначимо $\tilde{\alpha}$ знову через α). Одержимо

$$g_0^R(x, y;\lambda)=\frac{\lambda}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{|\alpha|<R_1} e^{i\lambda(x, \alpha)}[A_2(y, \alpha)+E]^{-1}\,d\alpha, \tag{7'}$$

де $R_1=\frac{R}{\lambda}$. Отже, необхідно оцінити $g_0^R(x, y;\lambda)$ при $R\to\infty$ і $x\neq 0$.

Маємо

$$g_0^R(x, y;\lambda)=\frac{1}{i(2\pi)^3|x|^2}\iiint\limits_{|\alpha|<R_1}\left\{\left(x_1\frac{\partial}{\partial\alpha_1}+x_2\frac{\partial}{\partial\alpha_2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+x_3\frac{\partial}{\partial\alpha_3}\right)e^{i\lambda(x, \alpha)}\right\}[A_2(y, \alpha)+E]^{-1}\,d\alpha.$$

Нехай S_1 — поверхня кулі $|\alpha|<R_1$. Застосувавши до останнього інтегралу формулу Остроградського, одержимо вираз $g_0^R(x, y;\lambda)$ у вигляді суми двох інтегралів по S_1 і по $|\alpha|<R_1$. Легко довести, що

$$g_0^R(x, y, \lambda) = \frac{i}{(2\pi)^3 |x|^2} \iiint\limits_{|\alpha|<R_1} e^{i\lambda(x,\alpha)} \left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + x_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \right) [A_2(y, \alpha) + E]^{-1} \right\} d\alpha + O\left(\frac{1}{R_1 |x|^3} \right). \qquad (9)$$

Залишається довести, що останній інтеграл збігається при $R \to \infty$. Перейдемо до полярних координат з полюсом в центрі кулі $|\alpha| < R_1$ і з полярною віссю, співпадаючою з x (x є перпендикуляр до полярної площини). Тоді $d\alpha = \varrho^2 \sin\Theta d\varrho d\varphi d\partial$ і оператор $x_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3}$ виразиться в змінних ϱ, φ, Θ, що й розуміється в усіх дальших формулах цього пункту. Покладемо $\alpha = \varrho\xi$, де ξ — орт α; $(x, \alpha) = |x|\varrho\cos\Theta$. Таким чином,

$$I = \iiint\limits_{|\alpha|<R_1} e^{i\lambda(x,\alpha)} \left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \right) [A_2(y, \alpha) + E]^{-1} \right\} d\alpha =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \int\limits_0^{R_1} \varrho^2 e^{i\lambda|x|\varrho\cos\Theta} \left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + x_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \right) [A_2 y, \varrho\xi + E]^{-1} \right\} d\varrho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R_1} \varrho^2 d\varrho \int\limits_{-1}^{1} e^{i\lambda|x|\varrho t} \left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \right) [A_2(y, \varrho\xi + E]^{-1} \right\} dt.$$

Під внутрішнім інтегралом в останньому виразі маємо аналітичну функцію від t всюди, крім $t = \pm 1$. Зсунемо шлях інтегрування в цьому інтегралі, взявши замість відрізка $[-1, +1]$ дійсної осі контур L, що лежить в верхній півплощині (де $Imt > 0$) і з'єднує точки $t = \pm 1$. Одержимо

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R_1} \varrho^2 d\varrho \int\limits_L e^{i\lambda|x|\varrho t} \left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \right) [A_2(y, \varrho\xi + E]^{-1} \right\} dt.$$

Кожний елемент матриці $[A_2(y, \varrho\xi) + E]^{-1}$ має вигляд частки двох поліномів по ϱ: четвертого степеня (чисельник) з вільним членом $=1$ або $=0$ і шостого степеня (знаменник) з вільним членом $=1$. Тому

$$[A_2(y, \varrho\xi) + E]^{-1} = O\left(\frac{1}{1 + \varrho^2} \right).$$

Далі

$$\left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \right) [A_2(y, \varrho\xi) + E]^{-1} \right\} = O\left(\frac{1}{1 + \varrho^3} \right).$$

Обчислюючи інтеграл по контуру L частинами, позначивши $e^{i\lambda|x|\rho t}\,dt = dv$ і враховуючи вказані оцінки, можна твердити, що інтеграл I збігається при $R \to \infty$.

Переходячи в (9) до границі при $R \to \infty$ і позначивши $\lim\limits_{R\to\infty} g_0^R(x, y; \lambda) = g_0(x, y; \lambda)$ (ця границя існує в силу збіжності інтегралу I), одержимо

$$g_0(x, y; \lambda) = \frac{i}{(2\pi)^3 |x|^3} \iiint\limits_{D_\infty} e^{i\lambda(x, \alpha)} \left\{ \left(x_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} \right) [A_2(y, \alpha) + E]^{-1} \right\} \partial\alpha. \tag{10}$$

Отже, можна в (7′), а значить і в (7), переходити до границі при $R \to \infty$. Таким чином, збіжність інтегралу (8) доведена і фундаментальна матриця $g_0(x-y, y; \lambda)$ (з особливістю в точці $x=y$; коефіцієнти залежать від y) побудована.

3. В цьому пункті одержимо оцінки для матриці $g_0(x-y, y; \lambda)$ і її похідних.

Перетворимо прямокутну систему $O\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ в нову прямокутну систему $O\tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2\tilde{\alpha}_3$, повернувши вісі так, щоб додатній напрям вісі α_3 і вектора x співпадали. Через спеціальний вибір вісі α_3 маємо $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0$, $\tilde{x}_3 = |x|$. Тому

$$(x, \alpha) = |x|\,\tilde{\alpha}_3 \qquad x_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + x_3 \frac{\partial}{\partial \alpha_3} = |x| \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_3}.$$

Легко підрахувати, що $d\alpha = d\tilde{\alpha}$. Переопозначимо для простоти $\tilde{\alpha}$ знову через α і позначивши через S_∞ координатну площину, перпендикулярну до вісі α_3, перепишемо (10) у вигляді

$$g_0(x, y; \lambda) = \frac{i}{(2\pi)^3 |x|} \iint\limits_{S_\infty} d\alpha_1\, d\alpha_2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda|x|\alpha_3} \frac{\partial}{\partial \alpha_3} [\tilde{A}_2(y, \alpha) + E]^{-1} d\alpha_3. \tag{11}$$

Під внутрішнім інтегралом в (11) маємо аналітичну функцію від α_3. Зсунемо шлях інтегрування з дійсної вісі комплексної площини α_3 в верхню півплощину, замінивши його контуром l, паралельним дійсній вісі півплощи α_3 і віддаленим від цієї вісі на $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = \text{const}$, фіксовано і достатньо мало). На контурі l маємо $\alpha_3 = \tilde{\alpha}_3 + i\varepsilon$ ($\tilde{\alpha}_3$ — дійсне). Отже, одержимо

$$g_0(x, y; \lambda) = \frac{i e^{-\lambda\varepsilon|x|}}{(2\pi)^3 |x|} \iint\limits_{S_\infty} d\alpha_1\, d\alpha_2 \int\limits_{l} e^{i\lambda|x|\tilde{\alpha}_3} \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_3} [\tilde{A}_2(y, \varepsilon; \tilde{\alpha}) + E]^{-1} d\tilde{\alpha}_3.$$

[1] Подібні оцінки були одержані Д. П. Мельник в її кандидатській дисертації, Львів.

Замінивши x на $x-y$, маємо оцінку

$$g_0(x-y, y; \lambda) = O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{|x-y|}\right), \tag{12}$$

справедливу як при великих $|x-y|$, так і при наближенні x до y.

Відмітимо, що матрицю $g_0(x-y, y; \lambda)$ можна неперервно диференціювати по x скільки завгодно разів при $x \neq y$, а по y стільки ж, скільки неперервно диференційовні коефіцієнти $A_{ij}(y)$ $(i, j=1, 2, 3)$. Виходячи з (11) і повністю повторюючи міркування, проведені при виведенні оцінки (12) для матриці $g_0(x, y; \lambda)$, одержимо оцінки для похідних по x матриці $g_0(x-y, y; \lambda)$, замінивши у відповідних оцінках похідних матриці $g_0(x, y; \lambda)$ x на $x-y$. Отже, одержимо[1]

$$\frac{\partial g_0(x-y, y; \lambda)}{\partial x_j} = O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{|x-y|^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g_0(x-y, y; \lambda)}{\partial x_i \partial x_j} = O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{|x-y|^3}\right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \tag{13}$$

При наближенні точки x до точки y маємо ще й слідуючу оцінку

$$\frac{\partial g_0(x-y, y; \lambda)}{\partial x_j} + \frac{\partial g_0(x-y, y; \lambda)}{\partial y_j} = O\left(\frac{1}{|x-y|}\right) \quad (j = 1, 2, 3). \tag{14}$$

Для матриць з точковою особливістю справедлива слідуюча оцінка, що відіграє дуже велику роль надалі.[2]

Якщо в області Ω маємо для матриць $L(x, z)$ і $N(z, y)$ оцінки

$$L(x, z) = O\left(\frac{1}{|x-z|^{\alpha}}\right), \quad N(z, y) = O\left(\frac{1}{|z-y|^{\beta}}\right), \quad (\alpha, \beta < 3).$$

а при $x \neq z$ матриця $L(x, z)$ і при $z \neq y$ матриця $N(z, y)$ неперервні по сукупності аргументів, то

$$M(x, y) = \iiint_{\Omega} L(x, z) N(z, y)\, dz = O\left(\frac{1}{|x-y|^{\alpha+\beta-3}}\right), \tag{15}$$

причому цей інтеграл збігається абсолютно.

4. Переходимо тепер до побудови фундаментальної матриці $g(x, y; \lambda)$ оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$. Згідно [1], матриця $g(x, y; \lambda)$ розшукується у вигляді

$$g(x, y; \lambda) = g_0(x-y, y; \lambda) + g_1(x, y; \lambda). \tag{16}$$

де $g_0(x-y, y; \lambda)$ — визначена в цілому D_∞ (а тому і в $\overline{\Omega} \subset D_\infty$) фундаментальна матриця оператора $A_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$, а

[1] Можна твердити, що оцінки (12), (13) справедливі в цілому D_∞ з єдиним у всіх оцінок фіксованим $\varepsilon > 0$.

[2] Цю оцінку див., напр., в [3], стор. 28.

$$g_1(x, y; \lambda) = \iiint\limits_{\Omega} g_0(x - z, z; \lambda)\, h(z, y; \lambda)\, dz. \tag{17}$$

Матриця $h(z, y; \lambda)$ підлягає визначенню. $h(z, y; \lambda)$ достатньо гладка при $z \neq y$ і має при наближенні z до y оцінку $h(z, y; \lambda) = O\left(\frac{1}{|z - y|^{\alpha}}\right)$, $\alpha < 3$.

Матрицю $h(z, y; \lambda)$ треба підібрати так, щоб в силу означення фундаментальної матриці

$$\left\{A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right\} g(x, y; \lambda) = 0. \qquad (x \neq y)$$

Для перевірки справедливості останньої рівності припадає двічі диференціювати по x (при $x \neq y$) інтеграл (17). При цьому з допомогою оцінок (12), (13), (14), (15) і враховуючи одну з властивостей фундаментальної матриці, ми одержуємо, позначивши

$$\left\{A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right\} g_0(x - y, y; \lambda) = -P(x, y; \lambda),$$

слідуючу систему інтегральних рівнянь для визначення матриці h:

$$h(x, y; \lambda) = P(x, y; \lambda) + \iiint\limits_{\Omega} P(x, z; \lambda)\, h(z, y; \lambda)\, dz. \tag{18}$$

Визначивши матрицю $h(x, y; \lambda)$ як розв'язок системи рівнянь (18), ми, згідно (16), знайдемо фундаментальну матрицю $g(x, y; \lambda)$.

З допомогою (12) і (13) легко доводиться, що

$$P(x, y; \lambda) = O\left(\frac{e^{-\lambda_3 |x-y|}}{|x - y|^3}\right). \tag{19}$$

Приймаючи до уваги оцінку (19), доведемо, що при великих значеннях параметру λ можна до системи рівнянь (18) застосувати метод послідовних наближень (цей метод для систем інтегральних рівнянь викладено в роботі М. Манда [4], див пункт 1), і вона, таким чином, розв'язана за першою теоремою Фредгольма. Саме в силу цієї обставини фундаментальна матриця $g(x, y; \lambda)$ розшукується у вигляді (16) без додаткового доданка. Отже, фундаментальна матриця $g(x, y; \lambda)$ побудована.

Вкажемо тепер оцінки для матриць $g_1(x, y; \lambda)$ і $g(x, y; \lambda)$.

Виходячи з (19), легко одержуємо оцінки для ітерованих ядер, і, таким чином і для резольвенти $R^*(x, y; \lambda)$ системи (18). Виявляється, що

$$R^*(x, y; \lambda) = O\left(\frac{e^{-\lambda_3 |x-y|}}{|x - y|^2}\right).$$

Але резольвента сама задовольняє системі інтегральних рівнянь (див.

[4], стор. 338), з допомогою якої, враховуючи (18), ми приходимо до висновку, що $R^*(x, y; \lambda) = h(x, y; \lambda)$.

Одержавши оцінку для $h(x, y; \lambda)$, з (17) з допомогою (12) маємо

$$|g_1(x, y; \lambda)| \leqslant C_1 e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}(|\ln|x-y|| + 1). \tag{20}$$

З (16), враховуючи (12) і (20), знайдемо

$$|g(x, y; \lambda)| \leqslant \frac{C e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{|x-y|}. \tag{21}$$

$(C, C_1 = \mathrm{const})$.

5. В цьому пункті ми розглянемо систему рівнянь без параметра, відповідну раніш розглянутій системі (2), тобто систему

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = -\Phi(x), \tag{22}$$

побудуємо фундаментальну матрицю $g(x, y)$ оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ і одержимо оцінки для частин цієї матриці. Міркування, які тут проводяться, являються в дуже значній мірі повторенням попередніх міркувань.

Матриця $g(x, y)$ розшукується у вигляді

$$g(x, y) = g_0(x-y, y) + g_1(x, y), \tag{23}$$

де $g_0(x-y, y)$ є фундаментальна матриця оператора $A_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, а

$$g_1(x, y) = \iiint\limits_{\Omega} g_0(x-z, z)\, h(z, y)\, dz.$$

Матриця $h(z, y)$ знаходиться як розв'язок системи інтегральних рівнянь Фредгольма. Матриця $g_0(x-y, y)$ має вигляд

$$g_0(x-y, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{D_\infty} e^{i(x-y, \alpha)} A_2^{-1}(y, \alpha)\, d\alpha. \tag{24}$$

(Матриця $A_2^{-1}(y, \alpha)$ існує в силу еліптичності оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ для кожної точки $y \in \Omega$ і довільної дійсної точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$. Причому

$$A_2^{-1}(y, \alpha) = O\left(\frac{1}{|\alpha|^2}\right).$$

Міркування, подібні попереднім, приводять нас до слідуючих оцінок:

$$g_0(x-y, y) = O\left(\frac{1}{|x-y|}\right); \tag{25}$$

$$|g_1(x, y)| \leqslant \tilde{C}_1(|\ln|x-y|| + 1), \quad \tilde{C}_1 = \mathrm{const}, \tag{26}$$

Для самої матриці $g(x, y)$ маємо з (23), (25), (26) оцінку

$$|g(x, y)| \leqslant \frac{\tilde{C}}{|x-y|}, \quad \tilde{C} = \mathrm{const}, \tag{27}$$

що відповідає означенню цієї матриці.

6. Для системи рівнянь (22) ставиться гранична задача типу Діріхле, тобто задача

$$\begin{cases} A\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = -\Phi(x) & (x \in D) \quad \text{(I)} \\ \qquad u(x) = 0 & (x \in S). \quad \text{(II)} \end{cases}$$

Розв'язок задачі (I)—(II), як це доведено Я. Б. Лопатинським [5], представляється у вигляді

$$u(x) = \iiint\limits_{D} G(x, y)\, \Phi(y)\, dy, \tag{28}$$

де $G(x, y)$ є матриця Гріна оператора $A\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ з граничною умовою (II). Матриця $G(x, y)$ розшукується у вигляді

$$G(x, y) = g(x, y) - a(x, y), \tag{29}$$

де $g(x, y)$ є визначена формулою (23) фундаментальна матриця системи (22), а матриця $a(x, y)$ знаходиться як розв'язок задачі

$$\begin{cases} A\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) a(x, y) = 0 & (x \in D) \quad (\alpha) \\ \qquad a(x, y) = g(x, y) & (x \in S) \quad (\beta) \end{cases}$$

Задача (α)—(β) розв'язана в [6] шляхом зведення до системи регулярних інтегральних рівнянь, з якої випливає, що

$$a(x, y) = \iint\limits_{S} H(x, z)\, g(z, y)\, d_z S. \tag{30}$$

В [6] показано, що справедлива оцінка

$$H(x, z) = O\left(\frac{1}{|x-y|^{2-\varkappa}}\right),$$

де $0 < \varkappa \leqslant 1$ є показник в умові Ляпунова для поверхні S.

З (30) на підставі останньої оцінки і (27) одержується з допомогою (15) оцінка

$$a(x, y) = O\left(\frac{1}{|x-y|^{1-\varkappa}}\right). \tag{31}$$

Таким чином, для матриці Гріна (29) маємо оцінку

$$G(x, y) = O\left(\frac{1}{|x-y|}\right). \tag{32}$$

7. Розглянемо тепер граничну задачу типу Діріхле для системи рівнянь (2), тобто задачу

$$\begin{cases} \left[A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right] u(x) = -\Phi(x) & (x \in D) \quad (\mathrm{I}') \\ u(x) = 0 & (x \in S). \quad (\mathrm{II}') \end{cases}$$

Розв'язок задачі (I′)—(II′) в силу (28) представляється у вигляді

$$u(x) = -\lambda^2 \iiint\limits_D G(x, y)\, u(y)\, dy + \iiint\limits_D G(x, y)\, \Phi(y)\, dy, \tag{33}$$

де $G(x, y)$ є матриця Гріна оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ з граничною умовою (II), раніш визначена формулою (29). Нехай $R(x, y; \lambda)$ — резольвента системи інтегральних рівнянь (33). Для всякого значення $-\lambda^2$, що не є власним значенням $\lambda_к$ задачі

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_к(x) = -\lambda_к u_к(x) \quad (x \in D), \qquad u_к(x) = 0 \quad (x \in S)$$

системи рівнянь (33) має одинаковий розв'язок виду (див. [4], стор. 338)

$$u(x) = \iiint\limits_D G(x, y)\, \Phi(y)\, dy -$$

$$- \lambda^2 \iiint\limits_D R(x, z; \lambda) \left\{ \iiint\limits_D G(z, y)\, \Phi(y)\, dy \right\} dz,$$

звідки з допомогою системи інтегральних рівнянь для резольвенти маємо

$$u(x) = \iiint\limits_D R(x, y; \lambda)\, \Phi(y) dy. \tag{34}$$

Отже, розв'язок задачі (I′)—(II′) представляється у вигляді (34). З іншої сторони, розв'язок цієї задачі представляється у вигляді

$$u(x) = \iiint\limits_D G(x, y; \lambda)\, \Phi(y)\, dy, \tag{35}$$

де $G(x, y; \lambda)$ є матриця Гріна оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$ з граничною умовою (II′).

Дійсно, аналогічно (29) розшукуємо матрицю Гріна у вигляді

$$G(x, y; \lambda) = g(x, y; \lambda) - a(x, y; \lambda), \tag{36}$$

де $g(x, y; \lambda)$ є визначена формулою (16) фундаментальна матриця системи (2), а матриця $a(x, y; \lambda)$ підлягає визначенню. Таким чином, доведення законності представлення (35) полягає в розв'язуванні задачі

$$\begin{cases} \left[A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^3 E\right] a(x, y; \lambda) = 0 & (x \in D) \quad (\gamma) \\ a(x, y; \lambda) = g(x, y; \lambda) & (x \in S) \quad (\delta) \end{cases}$$

Але задача (γ)—(δ) по суті нічим не відрізняється від задачі (α)—(β), розглянутої в пункті 6, тому що оператор $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$ відрізняється від оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ лише вільним членом.

Отже, справедливість формули (35) доведена.

З (34) і (35), враховуючи, що $\Phi(y)$ — довільний, достатньо гладкий стовпець, випливає, що $R(x, y; \lambda) = G(x, y; \lambda)$. Тому матриця Гріна задовольняє слідуючим системам інтегральних рівнянь

$$G(x, y; \lambda) = G(x, y) - \lambda^2 \iiint\limits_D G(x, z; \lambda)\, G(z, y)\, dz;$$

$$G(x, y; \lambda) = G(x, y) - \lambda^2 \iiint\limits_D G(x, z)\, G(z, y; \lambda)\, dz. \tag{37}$$

Відмітимо на закінчення, що розв'язок задачі (γ)—(δ) ми одержуємо, повторюючи міркування пункту 6 у вигляді

$$a(x, y; \lambda) = \iint\limits_S H(x, z; \lambda)\, g(z, y; \lambda)\, d_z S, \tag{38}$$

де для фундаментальної матриці $g(z, y; \lambda)$ справедлива оцінка (21). Для матриці $H(x, z; \lambda)$ маємо оцінку

$$|H(x, z; \lambda| \leqslant \frac{C(\lambda)}{|x - z|^{2-\varkappa}}, \tag{39}$$

де $0 < \varkappa \leqslant 1$ і функція $C(\lambda)$ залишається обмеженою при $\lambda \to \infty$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Леви Э. Э. Усп. мат. наук, VIII, 1940.
2. Лопатинский Я. Б. ДАН СССР, 71, № 3, стор. 433—436, 1950.
3. Лопатинский Я. Б. Укр. мат. журн. III, № 1, стор. 3—38, 1951.
4. Mendes M, Jornal de Math. pur, et. appl., 32, Série 9, № 4, стор. 335—386, 1953.
5. Лопатинський Я. Б. ДАН УРСР, № 2, стор. 107—112, 1956.
6. Лопатинський Я. Б. ДАН УРСР, № 2, стор. 5—9, 1956.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

А. Б. ДРАПКІН

АСИМПТОТИКА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ І ФУНКЦІЙ ЗАДАЧ ТИПУ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ

Нехай D конечна область n-вимірового простору Евкліда D_∞, обмежена поверхнею S типу Ляпунова.* Далі розглядається диференціальний оператор вигляду

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} A_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + A_0(x); \quad A_{ij}(x) = A_{ji}(x),$$

коефіцієнти якого є дійсними функціональними квадратними матрицями порядку 3, визначеними для значень $x = (x_1, x_2, x_3)$ з деякої конечної області Ω $(\overline{D} \subset \Omega)$ і достатньо гладкі в цій області.

Припускається, що

α) $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ є оператор еліптичного типу, тобто для кожної дійсної точки $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \neq 0$ і довільного $x \in \Omega$

$$\det A_2(x, \alpha) = \det \left\{ \sum_{i,j=1}^{3} A_{ij}(x) \alpha_i \alpha_j \right\} \neq 0.$$

β) $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ є варіаційний оператор від додатньо визначеного функціоналу.

В цих припущеннях, використовуючи метод Т. Карлємана [1], будуть одержані асимптотичні вирази власних значень λ_κ і власних функцій (стовпців) $u_\kappa(x)$ задачі

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_\kappa(x) = -\lambda_\kappa u_\kappa(x) \quad (x \in D), \quad u_\kappa(x) = 0 \quad (x \in S) \tag{1}$$

1. З припущення β) випливає, що для значень $\lambda \in [0, +\infty)$ задача

$$\left[A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right] u(x) = -\Phi(x) \quad (x \in D), \quad u(x) = 0 \quad (x \in S) \tag{2}$$

(E — одинична матриця, $\Phi(x)$ — достатньо гладкий відомий стовпець) однозначно розв'язна. Покажемо це.

* Всі результати цієї роботи вірні при $n \geqslant 2$, для простоти запис ведеться для $n=3$.

Розглянемо білінійну форму (всюди в подальшому штрих при функціональному стовпці або матриці означає транспонування).

$$B(u, v) = \sum_{i, j=1}^{3} \frac{\partial u'}{\partial x_i} B_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{3} u' C_i(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u'}{\partial x_i} C'_i(x) v - u' B_0(x) v, \quad (3)$$

причому в силу припущення $B(u, v) = B(v, u)$ маємо $B_{ij}(x) = B'_{ji}(x)$; $B_0(x) = B'_0(x)$. Нехай далі функціонал $\iiint\limits_D B(u, v)\, dx$ додатньо визначений. Зокрема для стовпця u, що дає мінімум цьому функціоналу, маємо

$$I(u) = \iiint\limits_D B(u, u)\, dx > 0. \quad (4)$$

Складаючи варіаційну систему Ейлера для функціоналу $I(u)$, одержимо в силу умови β)

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \sum_{i, j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(B_{ji}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(C'_i(x) u\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{3} C_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + B_0(x) u. \quad (5)$$

Звідки випливає, що оператор $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ є самоспряжений. З допомогою (3) і (5) і застосувавши формулу Остроградського, одержимо аналог першої формули Гріна для варіаційного оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ у вигляді

$$\iiint\limits_D \left\{ u' A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + B(u, u) \right\} dx =$$

$$= \iint\limits_S \left\{ \sum_{i, j=1}^{3} u' B_{ij}(z) \frac{\partial u}{\partial z_j} \cos(n, z_i) + \sum_{i=1}^{3} u' C'_i(z) u \cos(n, z_i) \right\} d_z S. \quad (6)$$

Нехай, від супротивного, задача (2) має два розв'язки $u_1(x) \neq u_2(x)$. Тоді $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ є розв'язком задачі

$$\left[A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right] u(x) = 0 \quad (x \in D), \quad u(x) = 0 \quad (x \in S).$$

Застосувавши формулу (6) до розв'язку $u(x)$ останньої задачі, одержимо

$$\lambda^2 \iiint\limits_D u'(x) u(x)\, dx = - \iiint\limits_D B(u, u) dx.$$

Враховуючи (4), ми одержуємо при $\lambda \in [0, +\infty)$ протиріччя, яке доводить твердження. Таким чином, доведено, що всі одержані в [2] результати справедливі, зокрема і для класу еліптичних систем, що розглядаються в цій роботі. Ми скористаємось в подальшому позначеннями й результатами [2].

2. В [2] розглядалась гранична задача (2). Була побудована матриця Гріна

$$G(x, y; \lambda) = g(x, y; \lambda) - a(x, y; \lambda) = g_0(x-y; \lambda) + g_1(x, y; \lambda) - a(x, y; \lambda)$$

цієї задачі і розв'язок самої задачі представлено з допомогою матриці $G(x, y; \lambda)$. При цьому одержані оцінки

$$|g_0(x-y, y; \lambda)| \leqslant \frac{C_0 e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{|x-y|};$$

$$|g_1(x, y; \lambda)| \leqslant C_1 e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}(|\ln|x-y|| + 1),$$

де $\varepsilon > 0$ фіксоване достатньо мале число і C_0, $C_1 = \text{const}$. Далі

$$a(x, y; \lambda) = \iint\limits_S H(x, z; \lambda)\, g(z, y; \lambda)\, d_z S$$

і справедливі оцінки

$$|g(z, y; \lambda)| \leqslant \frac{Ce^{-\lambda\varepsilon|z-y|}}{|z-y|}; \quad |H(x, z; \lambda)| \leqslant \frac{C(\lambda)}{|x-z|^{2-\varkappa}}$$

де $0 < \varkappa \leqslant 1$, $C = \text{const}$ і $C(\lambda)$ залишається обмеженою при $\lambda \to \infty$.

В роботі [2] розглядалась також гранична задача

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = -\Phi(x) \quad (x \in D), \qquad u(x) = 0 \quad (x \in S). \tag{7}$$

Була побудована матриця Гріна

$$G(x, y) = g(x, y) - a(x, y) = g_0(x-y, y) + g_1(x, y) - a(x, y)$$

цієї задачі і розв'язок задачі (7) було представлено з допомогою побудованої матриці $G(x, y)$. Були одержані оцінки

$$|g_0(x-y, y)| \leqslant \frac{\widetilde{C}_0}{|x-y|}; \quad |g_1(x, y)| \leqslant \widetilde{C}_1 (|\ln|x-y|| + 1);$$

$$|G(x, y)| \leqslant \frac{C^*}{|x-y|}; \qquad |a(x, y)| \leqslant \frac{C_2}{|x-y|^{1-\varkappa}},$$

де $\widetilde{C}_0$, $\widetilde{C}_1$, C^*, $C_2 = \text{const}$. Доказано також, що $G(x, y; \lambda)$ є резольвента ядра $G(x, y)$.

Застосувавши формулу типу другої формули Гріна для самоспряженого оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ми доводимо, як звичайно, симетрію матриці Гріна: $G(x, y) = G'(y, x)$. Але у випадку симетричного ядра відомий розклад резольвенти за власними функціями (стовпцями) ядра*. Маємо

* Див. [3], стор. 366. Тут — матричний запис.

$$G(x, y; \lambda) = G(x, y) - \lambda^2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{u_\kappa(x) u'_\kappa(y)}{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa + \lambda^2)},$$

де λ_κ — власні значення, а $u_\kappa(x)$ — повна ортонормована система власних функцій (стовпців) ядра $G(x, y)$ або, що те саме, власні значення і функції (стовпці) задачі (1).

Таким чином, з допомогою системи інтегральних рівнянь для резольвенти $G(x, y; \lambda)$ (див. в [2] формули (37)) одержимо

$$\Psi(x; \lambda) = \iiint_D G(x, z; \lambda) G(z, x)\, dz =$$

$$= \iiint_D G(x, z) G(z, x; \lambda)\, dz = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{u_\kappa(x) u'_\kappa(x)}{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa + \lambda^2)}. \qquad (8)$$

3. Доведемо, що

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \Psi(x; \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{D_\infty} \{[A_2(x, \alpha)][A_2(x, \alpha) + E]\}^{-1} d\boldsymbol{\alpha}. \qquad (9)$$

Перш за все покажемо, що

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \Psi(x; \lambda) = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda \iiint_D g_0(x - z, x; \lambda) g_0(z - x, x)\, dz. \qquad (10)$$

Доведення рівності (10) зводиться до доведення того, що при $\lambda \to \infty$ (і рівномірно відносно $x \in D_i$, де $\overline{D_i} \subset D$ — будь-яка підобласть D)

1) $\left| \lambda \iiint_D g_0(x - z, x; \lambda) g_1(z, x)\, dz \right| \to 0,$

2) $\left| \lambda \iiint_D g_0(x - z, x; \lambda) a(z, x)\, dz \right| \to 0,$

3) $\left| \lambda \iiint_D g_1(x, z; \lambda) G(z, x)\, dz \right| \to 0,$

4) $\left| \lambda \iiint_D a(x, z; \lambda) G(z, x)\, dz \right| \to 0.$

Співвідношення 1)—4) доведемо з допомогою вказаних в пункті 2 оцінок. Маємо

$$\left| \lambda \iiint_D g_0(x - z, x; \lambda) g_1(z, x)\, dz \right| \leqslant \lambda C_0 \widetilde{C}_1 \iiint_{D_\infty} \frac{e^{-\lambda \varepsilon |x-z|}}{|x - z|} (|\ln |x-z|| + 1) dz =$$

$$= 4\pi\lambda C_0 \widetilde{C}_1 \int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon\rho} \rho (\ln \rho + 1)\, d\rho.$$

(Ми перейшли до сферичних координат з центром в точці x). Обчислюючи останній інтеграл частинами, одержимо

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon\rho}\rho(\ln\rho+1)\,d\rho=\frac{1}{\lambda\varepsilon}\int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon\rho}(\ln\rho+2)\,d\rho=$$

$$=\frac{2}{\lambda^2\varepsilon^2}-\frac{1}{\lambda^2\varepsilon^2}(C+\ln\lambda\varepsilon),$$

де C — постійна Ейлера. Отже, при $\lambda\to\infty$

$$\left|\lambda\iiint\limits_D g_0(x-z,x;\lambda)\,g_1(z,x)\,dz\right|\leqslant\frac{4\pi C_0\widetilde{C}_1}{\lambda\varepsilon^2}\{2-(C+\ln\lambda\varepsilon)\}\to 0.$$

Точно до такого ж інтегралу ми приходимо при доведенні співвідношення 3). Таким чином, справедливість 1) і 3) доведена. Діючи аналогічно попередньому, маємо

$$\left|\lambda\iiint\limits_D g_0(x-z,x;\lambda)\,a(z,x)\,dz\right|\leqslant\lambda C_0C_2\iiint\limits_{D_\infty}\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-z|}}{|x-z|^{2-\varkappa}}\,dz=$$

$$=4\pi C_0C_2\int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon\rho}\rho^\varkappa\,d\rho.$$

Але відомо, що $\int_0^\infty e^{-qx}x^{p-1}\,dx=\frac{\Gamma(p)}{q^r}$, де Γ — функція Ейлера $p>-1$, а q може бути й комплексним з $Req>0$. В нашому випадку маємо

$$\left|\lambda\iiint\limits_D g_0(x-z,x;\lambda)\,a(z,x)\,dz\right|\leqslant 4\pi C_0C_2\frac{\Gamma(\varkappa+1)}{(\lambda\varepsilon)^{\varkappa+1}}\to 0 \text{ при } \lambda\to\infty,$$

бо $0<\varkappa\leqslant 1$. Отже, справедливість співвідношення 2) також доведена.

Переходимо до доведення 4). Маємо

$$I=\left|\lambda\iiint\limits_D a(x,z;\lambda)\,G(z,x)\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\lambda\iiint\limits_D\left\{\iint\limits_S|H(x,t;\lambda)|\,|g(t,z;\lambda)|\,d_tS\right\}|G(z,x)|\,dz\leqslant$$

$$\leqslant\lambda C_1(\lambda)\iint\limits_S\frac{d_tS}{|x-t|^{2-\varkappa}}\iiint\limits_D\frac{e^{-\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|\,|x-z|}\,dz,$$

де $C_1(\lambda)$ залишається обмеженою при $\lambda\to\infty$. Навколо біжучої точки t, границі S області D опишемо дві кулі: одну D_μ з деяким малим радіусом μ, вибір якого буде далі уточнено, другу D_R радіусом R, яка обіймає область D. Маємо далі

$$I\leqslant\lambda C_1(\lambda)\iint\limits_S\frac{d_tS}{|x-t|^{2-\varkappa}}\left\{\iiint\limits_{D_R-D_\mu}+\iiint\limits_{D_\mu}\right\}\frac{e^{-\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|\,|x-z|}\,dz. \tag{*}$$

Розглянемо інтеграл по кулі D_μ. Вводячи сферичні координати з центром в точці t, одержимо

$$\iiint_{D_\mu} \frac{e^{-\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|\,|x-z|}\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \int_0^{\mu} \frac{e^{-\lambda\varepsilon\rho}}{|x-z|}\varrho d\varrho \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\Theta \int_0^{\mu} \frac{e^{-\lambda\varepsilon\rho}}{|x-z|}\varrho d\varrho.$$

Будемо вважати радіус μ настільки малим, щоб під час інтегрування по D_μ $|x-z|>\delta$, де $\delta>\mu$. Тоді одержимо

$$\iiint_{D_\mu} \frac{e^{-\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|\,|x-z|}\,dz < \frac{2\pi^2}{\delta}\int_0^{\mu} e^{-\lambda\varepsilon\rho}\varrho d\varrho = -\frac{2\pi^2}{\delta}\left[\frac{\mu}{\lambda\varepsilon}e^{-\lambda\varepsilon\mu} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda^2\varepsilon^2}\left(e^{-\lambda\varepsilon\mu}-1\right)\right]. \qquad (**)$$

Розглянемо інтеграл по $D_R - D_\mu$. Застосувавши нерівність Буняковського, одержуємо

$$\iiint_{D_R-D_\mu} \frac{e^{-\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|\,|x-z|}\,dz \leqslant \sqrt{\iiint_{D_R-D_\mu} \frac{e^{-2\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|}\,dz}\;\sqrt{\iiint_{D_R} \frac{dz}{|z-x|^2}}\,.$$

Маємо далі оцінку

$$\iiint_{D_R} \frac{dz}{|z-x|^2} \leqslant \iiint_{\widetilde{D}} \frac{dz}{|z-x|^2} < K^2,$$

де $\widetilde{D}$ — будь-яка достатньо велика куля, що вміщує будь-яку кулю радіусом R з центром в першій-ліпшій точці $t \in S$. Далі

$$\left|\iiint_{D_R-D_\mu} \frac{e^{-2\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|^2}\,dz\right| \leqslant \left|\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \int_{\mu}^{R} e^{-2\lambda\varepsilon\rho}\,d\varrho\right| \leqslant \frac{\pi^2}{\lambda\varepsilon}\left(e^{-2\lambda\varepsilon\mu} - e^{-2\lambda\varepsilon R}\right).$$

Таким чином,

$$\iiint_{D_R-D_\mu} \frac{e^{-\lambda\varepsilon|t-z|}}{|t-z|\,|x-z|}\,dz \leqslant \frac{K\pi}{\sqrt{\lambda\varepsilon}}\sqrt{e^{-2\lambda\varepsilon\mu} - e^{-2\lambda\varepsilon R}}. \qquad (***)$$

Підставляючи значення інтегралів з (**) і (***) в (*), одержимо

$$I \leqslant C_1(\lambda)\left\{\frac{K\pi}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\lambda e^{-2\lambda\varepsilon\mu} - \lambda e^{-2\lambda\varepsilon R}} - \frac{2\pi^2}{\delta}\left[\frac{\mu}{\varepsilon_1}e^{-\lambda\varepsilon\mu} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\lambda\varepsilon^2}\left(e^{-\lambda\varepsilon\mu}-1\right)\right]\right\}\iint_S \frac{d_t S}{|t-x|^{2-\varkappa}}\,.$$

Тому при $\lambda \to \infty$ $I \to 0$ і 4) доведено. Отже, справедливість формули (10) доведена. Доведемо тепер (9). Матриці

$$g_0(x-y, y; \lambda) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{D_\infty} e^{i(x-y, \alpha)} [A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]^{-1} d\alpha;$$

$$g_0(x-y, y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{D_\infty} e^{i(x-y, \alpha)} [A_2(y, \alpha)]^{-1} d\alpha,$$

побудовані в [2], можна розглядати, як трансформації Фурьє відповідно від матриць $[A_2(y, \alpha) + \lambda^2 E]^{-1}$ і $[A_2(y, \alpha)]^{-1}$. Як відомо*

$$\iiint\limits_{D_\infty} g_0(x-z, x; \lambda)\, g_0(z-x, x)\, dz =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{D_\infty} \Big\{ [A_2(x, \alpha)]\, [A_2(x, \alpha) + \lambda^2 E] \Big\}^{-1} d\alpha.$$

Замінимо в останньому інтегралі змінні $\alpha = \lambda\tilde{\alpha}$. Одержимо, переопозначивши для спрощення запису $\tilde{\alpha}$ знову через α,

$$\iiint\limits_{D_\infty} g_0(x-z, x; \lambda)\, g_0(z-x, x)\, dz =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3 \lambda} \iiint\limits_{D_\infty} \Big\{ [A_2(x, \alpha)]\, [A_2(x, \alpha) + E] \Big\}^{-1} d\alpha. \tag{11}$$

Легко показати, що

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \iiint\limits_{D_\infty - D} g_0(x-z, x; \lambda)\, g_0(z-x, x)\, dz = 0. \tag{12}$$

Дійсно, з допомогою оцінок, вказаних в пункті 2, маємо при $\lambda \to \infty$

$$\left| \lambda \iiint\limits_{D_\infty - D} g_0(x-z, x; \lambda)\, g_0(z-x, x)\, dz \right| \leqslant \lambda C_0 \tilde{C}_0 \iiint\limits_{D_\infty - D_1} \frac{e^{-\lambda\varepsilon |x-z|}}{|x-z|^3}\, dz =$$

$$= \lambda C_0 \tilde{C}_0 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\Theta\, d\Theta \int\limits_{R_1}^{\infty} e^{-\lambda\varepsilon\rho} d\rho = \frac{4\pi C_0 \tilde{C}_0}{\varepsilon} e^{-\lambda\varepsilon R_1} \to 0.$$

(Ми замінили область D найбільшою кулею $D_1 \leqslant D$ радіусом R_1 і потім перейшли до сферичних координат з центром в точці x). З (10), (11), (12) безпосередньо випливає справедливість формули (9).

На підставі (8) і (9) одержуємо

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{u_\kappa(x)\, u'_\kappa(x)}{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa + \lambda^2)} = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{D_\infty} \{ [A_2(x, \alpha)]\, [A_2(x, \alpha) + E] \}^{-1} d\alpha.$$

* Див. [4], стор. 98, де відповідна формула вказана для одновимірового випадку. Формула аналогічна в багатовимірововому просторі.

Взявши сліди цих матриць і переопозначивши λ^2 через λ, одержимо

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\lambda}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{a_\kappa(x)}{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa+\lambda)}=\frac{C^*(x)}{4\pi}, \tag{13}$$

де введені слідуючі позначення

$$Sp\,u_\kappa(x)\,u'_\kappa(x)=u'_\kappa(x)\,u_\kappa(x)=a_\kappa(x),$$

$$C^*(x)=\frac{1}{2\pi^2}\iiint\limits_{D_\infty}Sp\left\{[A_2(x,\alpha)]\,[A_2(x,\alpha)+E]\right\}^{-1}d\alpha. \tag{14}$$

Формула (13) відіграє в дальшому важливу роль.

4. Покажемо, що власні значення λ_κ задачі (1) додатні. Застосувавши до розв'язку $u_\kappa(x)$ задачі (1) формулу (6), одержимо

$$\lambda_\kappa\iiint\limits_D u'_\kappa(x)\,u_\kappa(x)\,dx=\iiint\limits_D B(u,u)\,dx.$$

Враховуючи (4), ми приходимо до висновку, що $\lambda_\kappa>0$.

Використання формули (13) для виводу асимптотичних виразів власних значень і функцій (стовпців) задачі (1) засновано на слідуючій теоремі типу Таубера (див. [5], стор. 703—704 і стор. 706—715).

Якщо ряд

$$s(\lambda)=\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{c_\kappa}{\lambda_\kappa+\lambda},\qquad (c_\kappa\geqslant 0,\ \lambda_\kappa>0),$$

де $0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots,\ \lambda_n\to\infty$ збігається при $\lambda>0$ і $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sqrt{\lambda}\ s(\lambda)=H$, то $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum\limits_{\lambda_\kappa\leqslant\lambda}c_\kappa=\frac{2H}{\pi}$, причому в останній сумі підсумовування поширюється на ті значення κ, для яких $\lambda_\kappa\leqslant\lambda$. Застосуємо цю теорему до ряду (13). У нас $c_\kappa=\frac{a_\kappa(x)}{\lambda_\kappa}$, $H=\frac{C^*(x)}{4\pi}$. Тому $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sum\limits_{\lambda_\kappa\leqslant\lambda}\frac{a_\kappa(x)}{4\pi}=\frac{C^*(x)}{2\pi^2}$. Або, що те саме,

$$\Phi(x;\lambda)\equiv\sum_{\lambda_\kappa\leqslant\lambda}\frac{a_\kappa(x)}{\lambda_\kappa}=\frac{C^*(x)}{2\pi^2}\sqrt{\lambda}+\varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}, \tag{15}$$

причому $\varepsilon(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to\infty$. Якщо взяти в (15) $\lambda=\lambda_n$, то одержимо

$$\sigma_n(x)=\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{a_\kappa(x)}{\lambda_\kappa}=\frac{C^*(x)}{2\pi^2}\sqrt{\lambda_n}+\varepsilon_n\sqrt{\lambda_n}, \tag{16}$$

де $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$. Функція $\Phi(x;\lambda)$ неспадна функція від λ, причому

$$\Phi(x;\lambda)=0 \text{ при } \lambda<\lambda_1 \text{ і } \Phi(x;\lambda)=\sigma_m(x) \text{ при } \lambda_m\leqslant\lambda<\lambda_{m+1}. \tag{17}$$

Виведемо асимптотичні вирази для $\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa(x)$ і для λ_n при великих n. З допомогою перетворення Абеля маємо

$$\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa(x) = \sigma_1(x)(\lambda_1 - \lambda_2) + \sigma_2(x)(\lambda_2 - \lambda_3) + \\ + \cdots + \sigma_{n-1}(x)(\lambda_{n-1} - \lambda_n) + \sigma_n(x)\lambda_n. \tag{18}$$

Функція $\Phi(x; \lambda) = \frac{C^*(x)}{2\pi^2}\sqrt{\lambda} + \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}$ інтегровна по λ по будь-якому конечному проміжку, і, таким чином, другий доданок правої частини також інтегровна функція. В силу (15) і (17) одержуємо

$$\int_0^{\lambda_n} \Phi(x; \lambda)\, d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sigma_1(x)\, d\lambda + \int_{\lambda_2}^{\lambda_3} \sigma_2(x)\, d\lambda + \cdots + \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \sigma_{n-1}(x)\, d\lambda.$$

Таким чином

$$\sigma_1(x)(\lambda_2 - \lambda_1) + \sigma_2(x)(\lambda_3 - \lambda_2) + \cdots + \sigma_{n-1}(x)(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = \\ = \frac{C^*(x)}{3\pi^2}\lambda_n^{3/2} + \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\, d\lambda. \tag{19}$$

Легко показати, що при $n \to \infty$

$$\frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\, d\lambda \to 0. \tag{20}$$

Дійсно, нехай $\delta > 0$ задане число. Фіксуємо p настільки великим, щоб мати $|\varepsilon(\lambda)| \leqslant \delta$ при $\lambda_n \geqslant \lambda_p$. Ми знаходимо

$$\left| \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\, d\lambda \right| \leqslant \int_0^{\lambda_p} |\varepsilon(\lambda)| \sqrt{\lambda}\, d\lambda + \frac{2}{3}\delta\left(\lambda_n^{3/2} - \lambda_p^{3/2}\right). \qquad (n > p)$$

Звідки випливає, що

$$\left| \frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\, d\lambda \right| \leqslant \frac{2}{3}\delta + \left[\frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int_0^{\lambda_p} |\varepsilon(\lambda)| \sqrt{\lambda}\, d\lambda - \frac{2\delta\lambda_p^{3/2}}{3\lambda_n^{3/2}} \right].$$

При достатньо великих n вираз в квадратних дужках за абсолютною величиною $\leqslant \frac{1}{3}\delta$, тобто $\left| \frac{1}{\lambda_n^{3/2}} \int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\, d\lambda \right| \leqslant \delta$ при великих n. Звідки і випливає (20), тобто $\int_0^{\lambda_n} \varepsilon(\lambda)\sqrt{\lambda}\, d\lambda = \varepsilon'_n \lambda_n^{3/2}$, причому $\varepsilon'_n \to 0$ при $n \to \infty$. В силу (19) маємо

$$\sigma_1(x)(\lambda_2-\lambda_1)+\sigma_2(x)(\lambda_3-\lambda_2)+\cdots+\sigma_{n-1}(x)(\lambda_n-\lambda_{n-1})= \\ =\frac{C^*(x)}{3\pi^2}\lambda_n^{3/2}+\varepsilon'_n\lambda_n^{3/2}.$$

Підставивши останнє в (18) з допомогою (16), одержимо

$$\sum_{\kappa=1}^{n} a_\kappa(x)=\frac{C^*(x)}{6\pi^2}\lambda_n^{3/2}+\varepsilon''_n\lambda_n^{3/2}, \tag{21}$$

причому $\varepsilon''_n\to 0$ при $n\to\infty$. Таким чином, враховуючи позначення (14), ми одержуємо слідуючий асимптотичний вираз для власних функцій (стовпців) задачі (1):

$$\sum_{\kappa=1}^{n} u'_\kappa(x)\,u_\kappa(x)\sim\frac{1}{12\pi^4}\iiint\limits_{D_\infty} Sp\{[A_2(x,\alpha)]\,[A_2(x,\alpha)+E]\}^{-1}\,d\alpha\cdot\lambda_n^{3/2}. \tag{22}$$

Інтегруючи (21) по x в області D і враховуючи ортонормованість власних стовпців і позначення (14), одержуємо асимптотичний вираз для власних значень λ_n задачі (1)

$$n\sim\frac{1}{12\pi^4}\iiint\limits_{D}\left\{\iiint\limits_{D_\infty} Sp\{[A_2(x,\alpha)]\,[A_2(x,\alpha)+E]\}^{-1}\,d\alpha\right\}dx\,\lambda_n^{3/2}. \tag{23}$$

Зокрема, коли коефіцієнти вихідного оператора $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ постійні, формула (22) і формула (23) приймають відповідно вигляд

$$\sum_{\kappa=1}^{n} u'_\kappa(x)\,u_\kappa(x)\sim\frac{1}{12\pi^4}\iiint\limits_{D_\infty} Sp\{[A_2(\alpha)]\,[A_2(\alpha)+E]\}^{-1}\,d\alpha\,\lambda_n^{3/2}, \tag{24}$$

$$n\sim\frac{V}{12\pi^4}\iiint\limits_{D_\infty} Sp\{A_2(\alpha)]\,[A_2(\alpha)+E]\}^{-1}d\alpha\,\lambda_n^{3/2}, \tag{25}$$

де V об'єм області D. Установлення формул (22), (23), а також (24), (25) і було метою цієї роботи.

Для фактичних підрахунків за формулами (22), (23) доцільно спочатку спростити інтеграл по D_∞ в цих формулах. Перейдемо в цьому інтегралі до сферичних координат з центром в початку і покладемо потім $\alpha=\varrho\alpha_0$, де α_0 є орт α. Тоді одержимо (переопозначивши α_0 через α)

$$\iiint\limits_{D_\infty} Sp\{[A_2(x,\alpha)]\,[A_2(x,\alpha)+E]\}^{-1}\,d\alpha= \\ =\frac{1}{2}\,Sp\iint\limits_{|\alpha|=1}[A_2(x,\alpha)]^{-1}\,dS\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[\varrho^2A_2(x,\alpha)+E]^{-1}\,d\varrho,$$

де dS є елемент поверхні одиничної сфери. Для обчислення внутрішнього інтегралу в останньому виразі застосуємо теорію лишків. В силу того, що кожний елемент матриці $[\varrho^2A_2(x,\alpha)+E]^{-1}$ є аналітична функція від ϱ в цілій верхній півплощині, включаючи дійсну вісь за винятком конечного числа полюсів, а безмежно віддалена точка є нуль другого порядку, то, як відомо, має місце формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [\varrho^2 A_2(x, \alpha) + E]^{-1} d\varrho = 2\pi i \, \Sigma \operatorname{res} [\varrho^2 A_2(x, \alpha) + E]^{-1}, \tag{26}$$

де $\Sigma \operatorname{res}[\varrho^2 A_2(x, a) + E]^{-1}$ є сума лишків відносно полюсів, що лежать в верхній півплощині. Таким чином,

$$\iiint_{D_\infty} Sp\{[A_2(x, \alpha)][A_2(x, \alpha) + E]\}^{-1} d\alpha =$$

$$= \pi i \iint_{|\alpha|=1} \Sigma \operatorname{res} Sp\{[A_2(x, \alpha)][A_2(x, \alpha)\varrho^2 + E]\}^{-1} dS.$$

Підставляючи значення останнього інтегралу в (22) і (23), ми одержуємо слідуючі розрахункові формули:

$$\sum_{\kappa=r}^{n} u'_\kappa(x) u_\kappa(x) \sim$$

$$\sim \frac{i}{12\pi^3} \iint_{|\alpha|=1} \Sigma \operatorname{res} Sp\{[A_2(x, \alpha)][A_2(x, \alpha)\varrho^2 + E]\}^{-1} dS \, \lambda_n^{3/2}; \tag{27}$$

$$n \sim \frac{i}{12\pi^3} \iiint_D \left\{ \iint_{|\alpha|=1} \Sigma \operatorname{res} Sp\{[A_2(x, \alpha)] \, [A_2 x, \alpha)\varrho^2 + E]\}^{-1} dS \right\} dx \, \lambda_n^{3/2}. \tag{28}$$

А у випадку постійних коефіцієнтів вихідного оператора маємо з (24), (25) відповідно

$$\sum_{\kappa=1}^{n} u'_\kappa(x) u_\kappa(x) \sim \frac{i}{12\pi^3} \iint_{|\alpha|=1} \Sigma \operatorname{res} Sp\{[A_2(\alpha)][A_2(\alpha)\varrho^3 + E]\}^{-1} dS \, \lambda_n^{3/2}, \tag{29}$$

$$n \sim \frac{iv}{12\pi^3} \iint_{|\alpha|=1} \Sigma \operatorname{res} Sp\{[A_2(\alpha)] \, [A_2(\alpha)\varrho^2 + E]\}^{-1} dS \, \lambda_n^{3/2}. \tag{30}$$

5. Розглянемо важливий окремий випадок. Нехай

$$A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j} + \sum_{i=1}^{3} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + a_0(x)$$

одинокий еліптичний оператор. В цьому пункті будуть одержані, виходячи з формул (22), (23), асимптотичні вирази для власних значень і функцій задачі

$$A^*\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_\kappa(x) = -\lambda_\kappa u_\kappa(x) \quad (x \in D), \quad u_\kappa(x) = 0 \quad (x \in S). \tag{31}$$

Нехай $a(x, \alpha) = \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x) \alpha_i \alpha_j$. В силу еліптичності оператора $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ квадратична форма $a(x, \alpha)$ додатньо визначена для всіх $x \in \overline{D}$. Нехай

$A(x)$ — матриця, складена з коефіцієнтів $a_{ij}(x)$, $\triangle(x)$ — визначник цієї матриці. Інтеграл, що входить в (22), (23), перепишеться так:

$$\iiint\limits_{D_\infty} Sp\{[A_2(x,\alpha)][A_2(x,\alpha)+E]\}^{-1} d\alpha = \iiint\limits_{D_\infty} \frac{d\alpha}{a(x,\alpha)[a(x,\alpha)+1]}.$$

Форму $a(x,\alpha)$ можна записати слідуючим способом: $a(x,\alpha) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\alpha_i\alpha_j = \alpha' A(x)\alpha$. Замінимо в останньому інтегралі змінні, поклавши $\alpha = P\xi$, де ξ — стовбець нових змінних, а P — деяка матриця порядку 3, вибір якої буде уточнено далі. Тоді одержимо $a(x,\alpha) = \xi' P' A(x) P\xi$. Виберемо матрицю P так, щоб $P'A(x)P = E$ (такий вибір матриці P при умові $\det P \neq 0$ завжди можна зробити, якщо $\det A(x) \neq 0$). Тоді $a(x,\alpha) = \xi'\xi = |\xi|^2$. Далі $d\alpha = |\det P| d\xi$, але тому що $\det P = \det P'$, то $\det P = \frac{\pm 1}{\sqrt{\triangle(x)}}$ і, таким чином, $d\alpha = \frac{d\xi}{\sqrt{\triangle(x)}}$. Отже

$$\iiint\limits_{D_\infty} Sp\{[A_2(x,\alpha)][A_2(x,\alpha)+E]\}^{-1} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\triangle(x)}} \iiint\limits_{D_\infty} \frac{d\xi}{|\xi|^2(|\xi|^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\triangle(x)}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \int_0^{\infty} \frac{d\varrho}{\varrho^2+1} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{\triangle(x)}}. \qquad (32)$$

З (22) і (23) одержимо з допомогою (32) асимптотичні вирази власних значень і функцій розглядуваної задачі (31) у вигляді

$$\sum_{\kappa=1}^{n} [u_\kappa(x)]^2 \sim \frac{1}{6\pi^3\sqrt{\triangle(x)}} \lambda_n^{3/2}; \quad \lambda_n \sim \left[\frac{1}{6\pi^2}\iiint\limits_D \frac{dx}{\sqrt{\triangle(x)}}\right]^{-2/3} \cdot n^{2/3}$$

Остання формула являє собою результат Т. Карлемана (див. в [1] теорему VI) для самоспряженого рівняння.

З формул (22) і (23) випливають також результати Ф. Браудера [6] для випадку рівняння другого порядку. Покажемо це.

Маємо еліпсоїд $a(x,\alpha) = 1$. Його об'єм є $\iiint\limits_{a(x,\alpha)<1} d\alpha.$

Для вираження цього об'єму безпосередньо через півосі еліпсоїда приведемо квадратичну форму до канонічного виду

$$a(x,\alpha) = a(x,\xi) = N_1(x)\xi_1^2 + N_2(x)\xi_2^2 + N_3(x)\xi_3^2.$$

В силу додатньої визначеності форми $N_1(x) > 0$, $N_2(x) > 0$, $N_3(x) > 0$ для всіх $x \in \overline{D}$. Легко перевірити, що $N_1(x)N_2(x)N_3(x) = \det A(x) = \Delta(x)$. Але об'єм еліпсоїда $N_1(x)\xi_1^2 + N_2(x)\xi_2^2 + N_3(x)\xi_3^2 = 1$ складає

$$\frac{4}{3}\pi\frac{1}{\sqrt{N_1(x)N_2(x)N_3(x)}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{\triangle(x)}} = \iiint\limits_{a(x,\alpha)<1} d\alpha. \qquad (33)$$

В силу (32) і (33) маємо

$$\frac{1}{12\pi^4}\iiint\limits_{D_\infty} Sp\left\{[A_2(x,\alpha)]\,[A_2(x,\alpha)+E]\right\}^{-1} d\alpha =$$

$$= \frac{1}{6\pi^2\sqrt{\triangle(x)}} = \frac{1}{8\pi^3}\,\frac{4\pi}{3\sqrt{\triangle(x)}} = \frac{1}{8\pi^3}\iiint\limits_{a(x,\alpha)<1} d\alpha.$$

Підставляючи останній вираз в (22) і (23), одержимо асимптотичні вирази власних значень і функцій задачі (31) у вигляді

$$\sum_{\kappa=1}^{n}[u_\kappa(x)]^2 \sim \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{a(x,\alpha)<1} d\alpha\,\lambda_n^{3/2};\qquad n \sim \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{D}\left\{\iiint\limits_{a(x,\alpha)<1} d\alpha\right\} dx\,\lambda_n^{3/2}$$

Дві останні формули одержані Ф. Браудером.

6. Як приклад, знайдемо асимптотичні вирази для власних значень і власних вектор-функцій задачі типу Діріхле для системи рівнянь теорії пружності (рівняння Ламе для ізотропного та однорідного пружного тіла). Отже, розглянемо задачу

$$\mu A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u_\kappa(x) = -\lambda_\kappa u_\kappa(x) \quad (x\in D), \quad u(x)=0 \quad (x\in S), \tag{34}$$

де

$$\mu A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \mu\begin{pmatrix}\tau+1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \mu\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \tau+1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \mu\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \tau+1\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} +$$

$$+\mu\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \tau\\ 0 & \tau & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial x_3} + \mu\begin{pmatrix}0 & 0 & \tau\\ 0 & 0 & 0\\ \tau & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_3} + \mu\begin{pmatrix}0 & \tau & 0\\ \tau & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_2}.$$

$\Big($тут $\tau = \dfrac{\lambda+\mu}{\mu}$; λ, μ — постійні Ламе. Відмітимо, що замість $\lambda>0$, $\mu>0$ часто вводять постійні $a=\lambda+2\mu$, $b=\mu\Big)$. Скористуємось розрахунковими формулами (29), (30), бо коефіцієнти оператора $\mu A\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ постійні. Обчислимо

$$Sp\left\{[A_2(\alpha)]\,[A_2(\alpha)\varrho^2+E]\right\}^{-1} = Sp\,[A_2(\alpha)]^{-1}\,[A_2(\alpha)\varrho^2+E]^{-1}.$$

При обчисленнях будемо враховувати, що $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$. В нашому випадку $A_2(\alpha)=\mu A(\alpha)$ і безпосередній підрахунок дає:

$$Sp\left\{[A_2(\alpha)]\,[A_2(\alpha)\varrho^2+E]\right\}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\mu(\tau+1)}\cdot\frac{(3+4\tau+2\tau^2)\mu^2\varrho^4+(6+6\tau+2\tau^2)\mu\varrho^2+(3+2\tau)}{(1+\tau)\mu^3\varrho^6+(3+2\tau)\mu^2\varrho^4+(3+\tau)\mu\varrho^2+1}.$$

Як неважко підрахувати, одержимо

$$\sum \operatorname{res} Sp\left\{[A_2(\alpha)]\,[A_2(\alpha)\varrho^2+E]\right\}^{-1} = \frac{2(1+\tau)\sqrt{1+\tau}+1}{2i\,\mu\sqrt{\mu}\,(1+\tau)\sqrt{1+\tau}}$$

або, вводячи постійні a, b, маємо

$$\sum \operatorname{res} Sp\{[A_2(\alpha)]\,[A_2(\alpha)\varrho^2+E]\}^{-1}=\frac{1}{2i}(a^{-3/2}+2b^{-3/2}).$$

Підставляючи останнє в (29), (30) і враховуючи, що $\iint\limits_{|\alpha|=1} dS=4\pi$, знаходим

$$\sum_{\kappa=1}^{n} u'_\kappa(x)\,u_\kappa(x)\sim\frac{1}{6\pi^2}(a^{-3/2}+2b^{-3/2})\,\lambda_n^{3/2}.$$

Ця формула являє собою результат А. Плежеля (див. [7], стор. 75).

$$n\sim\frac{V}{6\pi^2}(a^{-3/2}+2b^{-3/2})\,\lambda_n^{3/2}.$$

Остання формула є результат Г. Вейля (див. [8], формула (70)). Тут V об'єм області D, зайнятої пружним тілом.

ЛІТЕРАТУРА

1. Carleman T. Berichte Verhandl. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Klasse, 88, 1936, стор. 119—132.
2. Драпкін А. Б. Наукові записки ЛДУ, серія механіко-математична, в. 8, 1957.
3. Mendes M. Jornal de Math. pur et appl., 32 Série 9, № 4, 1953, стор. 335—386.
4. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1951.
6. Browder F. Comptes rendus Acad. Sci., 236, № 22, 1953, стор. 2140—2142.
7. Pleijel A. Arkiv för matem., astr. och. fysik, 27A, № 13, 1940 стор. 1—100.
8. Weyl H. Rendiconti Circolo mat. Palermo, 39, 1915 стор. 1—50.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

А. Б. ДРАПКІН

АСИМПТОТИКА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ НЕСАМОСПРЯЖЕНИХ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ

Ця замітка примикає до роботи [1] позначення і результати якої тут використовуються. Буде доведено, що одержана в [1] асимптотична формула (23) залишається справедливою і для задачі

$$\tilde{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_\kappa(x) = -\lambda_\kappa u_\kappa(x) \quad (x \in D), \quad u_\kappa(x) = 0 \quad (x \in S), \tag{1}$$

де оператор $\tilde{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ являє собою суму розглянутого в [1] варіаційного оператора від додатньо визначеного функціоналу $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ і оператора

$$A_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum_{i=1}^{3} A_i^*(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + A_0^*(x).$$

(Матриці $A_i^*(x)$, $A_0^*(x)$ мають відповідно ту саму гладкість, що й $A_i(x)$, $A_0(x)$). Припустимо, що для значень $\lambda \in [0, +\infty)$, задача

$$\left[\tilde{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E\right] u(x) = -\Phi(x) \quad (x \in D), \quad u(x) = 0 \quad (x \in S)$$

однозначно розв'язна.

При цьому всі результати пунктів 2 і 3 роботи [1], за винятком симетрії матриці Гріна і відповідного розкладу за власними функціями, залишаються справедливими.

Нехай $\tilde{G}(x, y; \lambda)$ є матриця Гріна оператора $\tilde{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) - \lambda^2 E$ з граничною умовою $\tilde{G}(x, y; \lambda) = 0$ $(x \in S)$, a $\tilde{G}(x, y)$ — матриця Гріна оператора $\tilde{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ з граничною умовою $\tilde{G}(x, y) = 0$ $(x \in S)$. Тоді

$$\tilde{\Psi}(x; \lambda) = \iiint_D \tilde{G}(x, z; \lambda)\, \tilde{G}(z, x)\, dz = \iiint_D \tilde{G}(x, z)\, \tilde{G}(x z; \lambda)\, dz;$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \iiint_D W(x; \lambda)\, dx = -\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_D \left\{ \iiint_{D_\infty} Sp \left\{ [A_2(x, \alpha)]\, [A_2(x, \alpha) + E] \right\}^{-1} d\alpha \right\} dx, \tag{2}$$

де введено позначення $-\lambda^2 Sp \tilde{\Psi}(x; \lambda) = W(x; \lambda)$.

В силу доведеної Т. Карлеманом теореми (див. [2], стор. 122) і враховуючи, що систему інтегральних рівнянь можна, за І. Фредгольмом, трактувати як одно інтегральне рівняння, маємо

$$\frac{1}{\lambda}\iiint_D W(x;\lambda)\,dx=\lambda\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa-\lambda^2)}. \tag{3}$$

Тут λ_κ — власні значення задачі (1), або, що те саме, власні значення ядра $\tilde{G}(x, y)$. З (2) і (3) маємо (замінивши λ^2 на λ)

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\lambda}\sum_{1=\kappa}^{\infty}\frac{1}{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa-\lambda)}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\iiint_D W(x;\lambda)dx=$$

$$=-\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint_D\left\{\iiint_{D_\infty}S_p\{[A_2(x,\alpha)][A_2(x,\alpha)+E]\}^{-1}\,d\alpha\right\}dx. \tag{4}$$

Через те, що оператор $\tilde{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ несамоспряжений, то λ_κ — взагалі комплексні числа, а власні функції (стовбці) $u_\kappa(x)$ — взагалі комплексні.

Існує нескінчена множина власних значень λ_κ. Дійсно, якби їх було конечне число, то ми мали б в (3) і в (4) конечну суму і, переходячи до границі при $\lambda\to\infty$, одержали б рівність нулю правої частини (4), що не можливо в силу доведеної в [1] формули (23).

Нехай $\lambda_\kappa=\xi_\kappa+i\,\eta_\kappa$ є власне значення, а $u_\kappa(x)$ — відповідний власний стовбець задачі (1). Власні стовбці вважаються ортонормованими. Маємо з (1)

$$\iiint_D \bar{u}'_\kappa(x)\left[A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)+A_1\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]u_\kappa(x)\,dx+\lambda_\kappa=0.$$

Враховуючи, що оператор $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ є варіаційний і тому для нього справедлива формула (5) з [1], інтегруючи частинами і позначивши $(C_i(x)-A_i^*(x))'=D_i(x)$ і $B_0(x)+A_0^*(x)=E(x)$, одержуємо

$$\lambda_\kappa=\iiint_D\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\bar{u}'_\kappa}{\partial x_i}B_{ij}(x)\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_j}\,dx+\iiint_D\left\{\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\bar{u}'_\kappa}{\partial x_i}C'_i(x)\,u_\kappa+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u'_\kappa}{\partial x_i}D_i(x)\bar{u}_\kappa+\bar{u}'_\kappa E(x)\,u_\kappa\right\}dx. \tag{5}$$

Внаслідок того, що оператор $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ варіаційний від додатньо визначеного функціоналу, то

$$\iiint_D\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\bar{u}'_\kappa}{\partial x_i}B_{ij}(x)\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_j}\,dx>\gamma\iiint_D\sum_{j=1}^{3}\left|\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_j}\right|^2dx=\gamma M, \tag{6}$$

де γ — додатня константа, і остання сума (фактично подвійна) розуміється як сума по всім j і по всім складовим стовбцям $\frac{\partial u_\kappa}{\partial x_j}$.

Відділивши в (5) дійсну і уявну частини, одержимо з допомогою (6)

$$\xi_\kappa > c_1 M - c_2; \quad |\eta_\kappa| < c_3 \sqrt{M},$$

де c_1, c_2, c_3 — додатні константи, і остання нерівність одержана з допомогою нерівності Буняковського. Таким чином

$$M < \frac{1}{c_1}(\xi_\kappa + c_2); \quad |\eta_\kappa| < c_3 \sqrt{\frac{\xi_\kappa + c_2}{c_1}}.$$

Отже, всі власні значення λ_κ задачі (1) лежать всередині параболи $\eta^2 = \kappa_0(\xi - \xi_0)$, $\kappa_0 > 0$, де ξ_κ, η_κ суть координати точки в площині комплексного змінного λ_κ. Останнє твердження для одинакового еліптичного рівняння доведено в [2] Т. Карлеманом, якому ми в точності слідуємо в дальшому. З (3), замінивши там λ^2 на λ, маємо, бо $\lambda_\kappa = \xi_\kappa + i\eta_\kappa$

$$f(z) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_\kappa(\xi_\kappa - z)} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_\kappa(\lambda - z)} + \sum_{\kappa=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\xi_\kappa(\xi_\kappa - z)} - \frac{1}{\lambda_\kappa(\lambda_\kappa - z)}\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\iiint\limits_D W(x; z)\, dx + g(z). \tag{7}$$

Будемо вважати, що ξ_κ впорядковані за неспадаючою величиною. Через те, що ряд $\sum\limits_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\xi_\kappa^2} = C$ збігається, існує таке δ, що $\frac{\kappa}{\xi_\kappa^2} < \delta$. Буквально повторюючи відповідні викладки з [2], одержимо для $r > 0$

$$g(-r) = \frac{c'\Theta(r)}{\sqrt[4]{r}} f(-r) + \frac{c'\Theta(r)C^{3/4}\delta^{1/4}}{r^{3/4}},$$

де c' незалежна від κ і r постійна, а функція $\Theta(r)$ така, що $|\Theta(r)| \leqslant 1$. Підставивши останнє в (7) і перейшовши до границі при $r \to \infty$, одержимо в силу (4) слідуюче асимптотичне представлення для $f(-r)$:

$$f(-r) \sim \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{r}} \iiint\limits_D \left\{ \iiint\limits_{D_\infty} Sp\{[A_2(x, \alpha)][A_2(x, \alpha) + E]\}^{-1} d\alpha \right\} dx.$$

Застосуємо тепер до ряду (7), сума якого має тільки що вказане асимптотичне представлення, слідуючу теорему типу Таубера, доведену в [2] (див. стор. 120).

Нехай α_κ і ξ_κ дійсні числа, задовольняючі умовам $\alpha_\kappa \geqslant 0$, $\xi_\kappa > \xi_0$ $(\kappa = 1, 2, 3, \ldots)$. Нехай далі ряд $f(z) = \sum\limits_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\alpha_\kappa}{\xi_\kappa - z}$ для $z < \xi_0$ збігається.

Якщо $f(-r)$ має при $r \to \infty$ асимптотичне представлення $f(-r) \sim \frac{A}{r^\alpha}$, де $0 < \alpha < 1$ і A дійсна константа, то

$$\sum_{\xi_\kappa < y} \alpha_\kappa \sim \frac{A}{\pi} \cdot \frac{\sin \pi\alpha}{1 - \alpha} y^{1-\alpha},$$

причому в останній сумі підсумовування поширюється на ті значення κ, для яких $\xi_\kappa \leqslant y$.

В нашому випадку

$$\alpha_\kappa = \frac{1}{\xi_\kappa}; \quad \alpha = \frac{1}{2}; \quad A =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_D \left\{ \iiint\limits_{D_\infty} Sp \left\{ [A_2 x, \alpha)] [A_2(x, \alpha) + E] \right\}^{-1} d\alpha \right\} dx. \qquad (8)$$

Отже, одержимо

$$M(y) = \sum_{\xi_\kappa < y} \frac{1}{\xi_\kappa} \sim \frac{2A}{\pi} \sqrt{y}.$$

Позначимо через $N(y)$ число власних значень λ_κ, для яких $Re\lambda_\kappa = \xi_\kappa < y$. Очевидно, маємо

$$N(y) = \sum_{\xi_\kappa < y} 1 = \int_0^y t dM(t) = yM(y) - \int_0^y M(t) dt \sim \frac{2A}{3\pi} y^{3/2}.$$

Поклавши в останньому $y = \xi_n$, одержимо $n \sim \frac{2A}{3\pi} \xi_n^{3/2}$. Але тому, що $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\xi_n}{\lambda_n} = 1$, бо $\eta_n \sim \sqrt{\xi_n}$, то $\xi_n \sim \lambda_n$, і тому, враховуючи позначення (8), маємо

$$n \sim \frac{1}{12\pi^4} \iiint\limits_D \left\{ \iiint\limits_{D_\infty} Sp \left\{ [A_2(x, \alpha)] [A_2(x, \alpha) + E] \right\}^{-1} d\alpha \right\} \cdot dx \lambda_n^{3/2}. \qquad (9)$$

Встановлення формули (9) ї було метою цієї замітки.

Отже, враховуючи доведене в [1] (див. пункт 5), ми можемо твердити, що результат Т. Карлємана і для одинокого несамоспряженого еліптичного рівняння випливає з (9).

ЛІТЕРАТУРА

1. Драпкін А. Б. Наукові записки ЛДУ, серія механіко-математична, вип. 8, 1957.

2. Carleman T. Berichte Verhandl. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math.-Phys. Klasse, 88, 1936, стор. 119—132.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

С. П. ГАВЕЛЯ

ПРО ПОВЕДІНКУ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПОБЛИЗУ ДЕЯКИХ МНОЖИН ЇХ ОСОБЛИВОСТЕЙ

Методом, подібним до методу І. Фредгольма [1], який розглядав те ж саме питання для розв'язків системи рівнянь пружної рівноваги, Я. Б. Лопатинський [2] дослідив поведінку розв'язків лінійних еліптичних систем диференціальних рівнянь в околицях ізольованих особливих точок, виражаючи їх через фундаментальну матрицю та її похідні, характер особливостей яких добре досліджено ([3], [4]). Мета цієї замітки полягає в одержанні аналогічного представлення розв'язків таких же систем, особливості яких складають деякі щільні множини. Одержуване представлення має вигляд інтеграла по деякій околиці такої множини. Подається приклад такого представлення ядра потенціала, що зводить до регулярних інтегральних рівнянь задачу типу Пуанкаре для гармонійних функцій. При цьому з метою стислості викладу використовуються позначення та припущення роботи [2], за винятком окремо обумовлених випадків.

Отже, нехай, на відміну від [2], особливі точки $z=(z_1, \ldots, z_n)$ розв'язку $\Psi(x, \sigma)$ утворюють множину σ, розміщену на деякій m-мірній (причому спочатку припускається, що $m<n$) поверхні

$$\Sigma \quad \begin{cases} x_{m+1}=f_{m+1}(x_1, \ldots, x_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=f_n(x_1, \ldots, x_m) \end{cases} \tag{1}$$

Функції $f_\kappa(x_1, \ldots, x_m)$, $(\kappa=m+1, \ldots, n)$ вважаються кусково-гладкими на деякій околиці проекції множини σ на площину $x_{m+1}=\ldots=x_n=0$. (Цей особливий спосіб параметризації, очевидно, не обмежує загальності міркувань).

Умовимось позначати з допомогою $\tilde{\sigma}$ деяку вимірну (m-мірну) околицю множини σ на поверхні Σ, а з допомогою $S_{\tilde{\varrho}}$ — границю множини точок, віддалених від $\tilde{\sigma}$ не більше, ніж на ρ. При цьому зауважимо, що для будь-якої неперервної поблизу $S_{\tilde{\varrho}}$ (проте, можливо, розривної на $\tilde{\sigma}$) функції $\Phi(x, \tilde{\sigma})$ буде

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n-1}_{S_{\tilde{\rho}}} \Phi(x, \tilde{\sigma}) d_x S = \overbrace{\int \cdots \int}^{m}_{\tilde{\sigma}'} \left\{ \overbrace{\int \cdots \int}^{n-m-1}_{\delta_{\tilde{\rho}}} \Phi(x, \tilde{\sigma})\, d_x \delta \right\} \xi(x') d\tilde{\sigma}' =$$

$$= \int \overbrace{\cdots}^{m} \int_{\tilde{\sigma}} \left\{ \int \overbrace{\cdots}^{n-m-1} \int_{\delta_{\tilde{\rho}}} \tilde{\Phi}(x, \tilde{\sigma})\, d_x \delta \right\} \eta(x')\, d\tilde{\sigma}.$$

Тут $\delta_{\tilde{\rho}}$ — $(m-m-1)$-мірний) контур, утворений, перетином поверхні $S_{\tilde{\rho}}$ з площиною $x_1 = C_1, \ldots, x_m = C_m$ ($C_\kappa = \mathrm{const}$), $d\delta$ — його елемент.

$\tilde{\sigma}'$ — проекція множини $\tilde{\sigma}$ на площину $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$, елемент якої позначено $d\tilde{\sigma}'$ (так що $dS = \xi(x')\, d\delta d\tilde{\sigma}'$), а її точка позначається $x' = (x_1, \ldots, x_m)$.

$d\tilde{\sigma} = \dfrac{\xi(x')}{\eta(x')} d\tilde{\sigma}'$ — елемент поверхні $\tilde{\sigma}$, причому внаслідок наших припущень $\xi(x')$ та $\eta(x')$ — кусково-неперервні на $\tilde{\sigma}'$ функції.

При умові існування

$$\lim_{\tilde{\rho} \to 0} \int \overbrace{\cdots}^{n-m-1} \int_{\delta_{\tilde{\rho}}} \tilde{\Phi}(x, \tilde{\sigma})\, \eta(x')\, d_x \delta = \varphi(x')$$

очевидно буде

$$\lim_{\tilde{\rho} \to 0} \int \overbrace{\cdots}^{n-1} \int_{S_\rho} \Phi(x, \tilde{\sigma})\, d_x S = \int \overbrace{\cdots}^{m} \int_{\tilde{\sigma}} \varphi(x')\, d\tilde{\sigma}.$$

Аналогічно [2], застосовуючи формулу

$$u(x) A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) - \left(A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u'(x)\right)' v(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} 2 B^j_x (u(x), v(x))$$

до функцій $\omega(y, x)$ і $\Psi(x, \sigma)$ та інтегруючи обидві частини одержуваного таким чином співвідношення по області, обмеженій поверхнею $S - S_y - S_{\tilde{\varrho}}$, дістанемо

$$\int \overbrace{\cdots}^{n-1} \int_{S_y} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j - y_j}{\varrho} B^j_x(\omega(y, x), \Psi(x, \sigma))\, d_x S -$$

$$- \int \overbrace{\cdots}^{n-1} \int_{S_{\tilde{\rho}}} \sum_{j=1}^{n} \nu_j B^j_x(\omega(y, x), \Psi(x, \sigma))\, d_x S +$$

$$+ \int \overbrace{\cdots}^{n-1} \int_{S} \sum_{j=1}^{n} \nu_j(x) B^j_x(\omega(y, x), \Psi(x, \sigma))\, d_x S = 0,$$

де $\nu_j(x)$ $(j=1, \ldots, n)$ позначають косинуси напрямних кутів внутрішньої нормалі до відповідної поверхні інтегрування в її точці $x=(x_1, \ldots, x_n)$.

Користуючись означаючою властивістю фундаментальної матриці [4]

$$\lim_{\rho\to 0}\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{S_y}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j-y_j}{\varrho}B_x^j(\omega(y, x), \Psi(x, \sigma))\,d_xS=-\Psi(y,\sigma)$$

та переходячи до границі при $\varrho\to 0$, одержимо

$$\Psi(y,\sigma)=-\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{S_\rho^{\sim}}\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)\,B_x^j(\omega(y, x), \Psi(x, \sigma))d_xS+\Psi_0(y,\sigma), \quad (3)$$

де

$$\Psi_0(y,\sigma)=\overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{S}\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)\,B_x^j(\omega(y, x), \Psi(x, \sigma))\,d_xS$$

t разів неперервно диференційовна в V функція (без особливостей в точках $z\epsilon\sigma$). (В згадуваному в [2] аналітичному випадку належить вважати $t=\infty$ та відповідні ряди, що виникають далі, рівномірно збіжними).

В наших умовах кожній точці $x=(x_1, \ldots, x_n)$ поверхні $\tilde{S_\varrho}$ відповідає деяка така точка $\zeta=(x_1, \ldots, x_m, f_{m+1}, \ldots, f_n)=(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ (де $f_\kappa=f_\kappa(x_1, \ldots, x_m)$) поверхні Σ, що $x_i=\zeta_i$ при $i=1, \ldots, m$. Умовимося позначати частину поверхні Σ, що має спільну з $\tilde{S_\varrho}$ проекцію на площину $x_{m+1}=\ldots=x_n=0$, з допомогою, $\tilde{\sigma}$, так що $\zeta\epsilon\tilde{\sigma}$.

Зауважимо, що розклад (1) з [2] в точці $x_1=y_1, \ldots, x_m=y_m$ матиме вигляд

$$u(x)=\sum_{\kappa=1}^{t}\vartheta_\kappa(x, y)\frac{\partial^\kappa}{\partial y^n}u(y)+R^{(u)}(x, y),$$

де, як і скрізь надалі, позначено

$$\sum_{\kappa_{m+1}+\ldots+\kappa_n=0}^{\kappa_{m+1}+\ldots+\kappa_n<t}=\sum_{\kappa=0}^{t}; \qquad \vartheta_{\kappa_{m+1}, \ldots, \kappa_n}=\vartheta_\kappa;$$

$$\frac{\partial^{\kappa_{m+1}+\ldots+\kappa_n}}{\partial x_{m+1}^{\kappa m+1}\ldots\partial x_n^{\kappa n}}=\frac{\partial^\kappa}{\partial x^\kappa}.$$

Застосовуючи цей розклад до функції $\omega(y, x)$ відносно точки ζ, будемо мати

$$\omega(y, x)=\sum_{\kappa=0}^{t}\vartheta_\kappa(x, \zeta)\frac{\partial^\kappa}{\partial\zeta^\kappa}\omega(y, \zeta)+R^{(\omega)}(y, x, \zeta), \quad (4)$$

причому

$$|x-\zeta|^{l_1+\ldots+l_n-t}\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}R^{(\omega)}(y,\,x,\,\zeta)$$

обмежені при $l_1+\ldots+l_n<t$.

Внісши цей розклад (4) до виразу (3), одержимо

$$\Psi(y,\sigma)=-\sum_{\kappa=0}^{t}\int\overbrace{\cdots}^{n-1}\int_{S_{\tilde\rho}}\frac{\partial^{\kappa}}{\partial\zeta^{\kappa}}\;\omega(y,\zeta)\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)B_x^j(\vartheta_n(x,\zeta),\Psi(x,\sigma))d_xS-$$

$$-\int\overbrace{\cdots}^{m}\int_{\sigma'}\left\{\int\overbrace{\cdots}^{n-m-1}\int_{\delta_{\tilde\rho}}\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)B_x^j(R^{(\omega)}(y,\,x,\,\zeta),\Psi(x,\sigma))d_x\delta\right\}\eta(x')d_x\sigma+\Psi_0(y,\sigma).$$

Аналогічно [2] умовимось вважати функцію $\Phi(x,\sigma)$ такою, що належить до класу $\tilde K_q$, якщо при $x\neq\zeta$, x, $\zeta\in V$, $\Phi(x,\sigma)$ неперервна, а $|x-\zeta|^q\Phi(x,\sigma)$ при $q>0$, $\Phi(x,\sigma)/\ln|x-\zeta|$ при $q=0$ та $\Phi(x,\sigma)$ при $q<0$ обмежені.

Якщо тепер покласти, що

$$\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_n^{l_n}}\Psi(x,\sigma)\in\tilde K_{n-s+l_1+\ldots+l_n+t-m-0},$$

то, очевидно, буде $B_x^j(R^{(\omega)}(y,x,\zeta),\Psi(x,\sigma))\in\tilde K_\chi$,

де $\chi=n-m-1-0$,
так що

$$\int\overbrace{\cdots}^{n-m-1}\int_{\delta_{\tilde\rho}}\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)\,B_x^j\,(R^{(\omega)}(y,\,x,\,\zeta),\,\Psi(x,\sigma))\,d_x\,\delta\to0$$

при $x\to\zeta$, $S_{\tilde\rho}\to\sigma$, $\tilde\varrho\to0$.

З другого боку, з (2) випливає незалежність від $\tilde\varrho$ виразу

$$I=\int\overbrace{\cdots}^{n-1}\int_{S_{\tilde\rho}}\frac{\partial^{\kappa}}{\partial\zeta^{\kappa}}\omega(y,\zeta)\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)B_x^j(\nu_\kappa(x,\zeta),\Psi(x,\sigma))\,d_xS,$$

внаслідок чого

$$I=\lim_{\tilde\rho\to0}\int\overbrace{\cdots}^{m}\int_{\sigma'}\frac{\partial^{\kappa}}{\partial\zeta^{\kappa}}\omega(y,\zeta)\left\{\int\overbrace{\cdots}^{n-m-1}\int_{\delta_{\tilde\rho}}\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)\,B_x^j(\vartheta_\kappa(x,\zeta),\Psi(x,\sigma))d_x\delta\right\}\times$$

$$\times\eta(x')\,d_x\delta = -\int\overset{m}{\overbrace{\cdots}}\int_{\tilde{\sigma}}\frac{\partial^\kappa}{\partial z^\kappa}\,\omega(y,z)\,\tau_\kappa^{(\psi)}(z)\,d_z\sigma,$$

де

$$\tau_\kappa^{(\psi)}(z) = -\lim_{\tilde{\rho}\to 0}\int\overset{n-m-1}{\overbrace{\cdots}}\int_{\delta_\rho}\sum_{j=1}^{n}\nu_j(x)B_x^j(\vartheta_\kappa(x,\eta),\,\psi(x,\sigma))\,d_x\delta\eta(x')$$

Отже, теорема з [2] видозмінюється слідуючим чином.

Теорема. Якщо при $x\overline{\in}\sigma$ функція $\Psi(x, \sigma)$ неперервно диференційовна s разів по x,

$$\frac{\partial^{\kappa_1+\ldots+\kappa_n}}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x^{\kappa_n}}\Psi(x,\sigma)\in\underset{(\kappa_1+\ldots+\kappa_n<s)}{\tilde{K}_{t-s+\kappa_1+\ldots+\kappa_n+n-m-0}};$$

$$A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x,\sigma)=0;$$

оператор $A\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ та множина σ точок розриву функції $\Psi(x, \sigma)$ мають описані вище (та в [2]) властивості, то має місце представлення

$$\Psi(x,\sigma)=\sum_{\kappa=0}\int\overset{m}{\overbrace{\cdots}}\int_{\sigma}\frac{\partial^\kappa}{\partial z^\kappa}\,\omega(x,z)\,\tau_\kappa^{(\psi)}(z)\,d_z\sigma+\Psi_0(x,\sigma).$$

З а у в а ж е н н я 1. Все наведене вище залишиться справедливим також і у випадку $m=n$, якщо в цьому останньому під σ мати на увазі ($(n-1)$-мірну) границю множини точок розриву функції $\Psi(x, \sigma)$, вживаючи у відповідних випадках число $n-1$ замість числа m.

З а у в а ж е н н я 2. Твердження 1 з [2] в розглядуваному випадку видозмінюється слідуючим чином.

Якщо

$$|x-\zeta|^{n-m-1}\frac{\partial^{\kappa_1+\ldots+\kappa_n}}{\partial x_n^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}}\Psi(x,\sigma)\underset{x\to 0}{\to} 0$$

при $0\leqslant\kappa_1+\ldots+\kappa_n<s$, то $\Psi(x, \sigma)$ неперервно диференційовна t разів по x в V (особливість усувається).

З а у в а ж е н н я 3. Цілком аналогічні результати мають місце також і у випадку, коли Σ складається з конечного числа частин, які можуть бути представлені аналогічно (1).

Приклад. Визначення поправки до відомого ядра потенціала, що зводить задачу типу Пуанкаре для гармонійних функцій до регулярних інтегральних рівнянь, на випадок неопуклих областей.

Побудоване в [6] ядро (зберігаються позначення [6])

$$q(x,y)=-\frac{1}{\pi}\frac{\left(|x-y|\frac{\alpha(y)}{|\alpha(y)|}+x-y\right)}{\left||x-y|\frac{\alpha(y)}{|\alpha(y)|}+x-y\right|^2}$$

в системі координат, для якої $y=0$, $a\frac{\alpha(y)}{|\alpha(y)|}=(0,0,1)$, буде

$$q(x)=-\frac{\bar{\nu}}{2\pi r}\left(\frac{x_1}{r+x_3},\ \frac{x_2}{r+x_3},\ 1\right),\ \text{де}\ r=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}.$$

Таким чином, це ядро розривне вздовж від'ємної півосі ox_3 в нових координатах і, отже, непридатне для областей, з якими такі півосі перетинаються.

Представлення (5) для таких функцій буде

$$\frac{x_1}{r(r+x_3)}=-\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\varrho}\,d\xi=-\frac{x_1}{\varrho(\varrho+x_3+\xi)}\Big|_0^\infty;$$

$$\frac{x_2}{r(r+x_3)}=-\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{\varrho}\,d\xi=-\frac{x_2}{\varrho(\varrho+x_3+\xi)}\Big|_0^\infty;$$

$$\frac{1}{r}=-\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{\varrho}\,d\xi=-\frac{1}{\varrho}\Big|_0^\infty,\ \left(\varrho=\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3+\xi)^2}\right).$$

Замінюючи тепер в цьому представленні проміжок інтегрування $(0,\infty)$ на $(0,h)$, де h — деяке позитивне постійне число, дістанемо нове ядро

$$\tilde{q}(x)=q(x)+\Delta q(x),$$

причому поправка $\Delta q(x)$ буде

$$\Delta q(x)=\frac{\bar{\nu}}{2\pi R}\left(\frac{x_1}{R+x_3+h},\ \frac{x_2}{R+x_3+h},\ 1\right),$$
$$\left(R=\sqrt{x_1^2+x_2^2+(x_3+h)^2}\right).$$

Збереження означаючих властивостей новим ядром не викликає сумнівів. Дійсно, його поведінка поблизу початку не відрізняється від попереднього внаслідок аналітичності поправки $\Delta g(x)$ в початку, гармонійність же легко перевіряється. З аналітичності ж нового ядра зовні відрізка $x_1=x_2=0$, $-h\leqslant x_3\leqslant 0$ випливає його придатність для областей, з якими не перетинаються лише такі відрізки (останні можуть бути вибрані як завгодно малої довжини), тобто цим здійснюється вказівка Г. Вейля [5] про відтинання нескінчених антен до деякої постійної довжини h. (Більш грунтовно це питання розглядається в [7]).

ЛІТЕРАТУРА

1. Fredholm J. Acta Math., 23, 1900.
2. Лопатинский Я. Б. ДАН СССР, 79, № 5, 1951.
3. Лопатинский Я. Б. Укр. мат. журн. 3, № 3, 1951.
4. Лопатинский Я. Б. Укр. мат. журн. 3, № 3, 1951.
5. Weyl H. Rend. C. Pal. XXXIX, 24. 1915.
6. Лопатинский Я. Б. Наукові записки ЛДУ, серія фізико-математична, в. 5, 1953.
7. Гавеля С. П. Наукові записки ЛДУ, серія механіко-математична, в. 8, 1957.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

С. П. ГАВЕЛЯ

ПРО ЗВЕДЕННЯ ДО РЕГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ НЕОПУКЛИХ ОБЛАСТЕЙ

Розроблений Я. Б. Лопатинським метод приведення до регулярних інтегральних рівнянь граничних задач для еліптичних систем диференціальних рівнянь, викладений в роботі [1], побудовано в припущенні опуклості розглядуваної області та, згідно з зауваженням його автора ([2], стор. 6), з допомогою перетворення аргументів може бути безпосередньо поширений і на деякі неопуклі області, гомеоморфні кулі. За цим методом розв'язки відповідних задач представляються у вигляді потенціалів, ядра яких, маючи на увазі як метод їх побудови,* так і аналітичність в дотичному до границі області півпросторі, ми дозволимо собі називати надалі «півпросторовими». Вимога опуклості області пояснюється тим, що ці «півпросторові» ядра мають, взагалі кажучи, необмежені множини точок розриву, що виявляються лише у випадку опуклої області завжди зовні останньої. Це явище добре прослідкувати, наприклад, на задачі про пружну рівновагу тіла при заданих напруженнях на його поверхні, для якої «півпросторове» ядро виявляється розривним вздовж зовнішніх півнормалей до поверхні тіла (Г. Вейль називає їх антенами ([3], стор. 14), що робить це ядро непридатним для тіл, такі півнормалі яких потрапляють до їх середин. Г. Вейль з цього приводу зауважує: «...Якщо ж припущення про те, що зовнішні нормалі ніде не зустрічають тіла, не виконано, то належить видозмінити наші міркування, відтинаючи всі антени до деякої постійної висоти, вибраної настільки малою, щоб відтяті антени ніде більше з тілом не перетинались. Математичне формулювання цієї ідеї легко здійснити» ([3], стор. 24). Проте це здійснення, безперечно, викликає інтерес.

З допомогою деякого узагальнення цього замислу Г. Вейля на загальний випадок розглядуваних в [1] задач тут будується метод одержання поправок до «півпросторових» ядер, що роблять їх придатними і для неопуклих (в тому числі й негомеоморфних кулі) областей. Це дозволяє розглядати багатозв'язні та деякі необмежені області, що виключались раніше. Викладене ілюструється результатом обчислення такої поправки для згадуваної вище задачі теорії пружності. Крім того, робляться зауваження про поширення деяких результатів Я. Б. Лопатинського на випадок неопуклих областей. При цьому використовуються позначення та припущення розділу 3 роботи [1], за винятком випадків, в яких це окремо зауважено.

---

* Головна частина такого ядра являє собою ядро потенціалу, що дає явне представлення розв'язку відповідної граничної задачі для дотичного до границі області півпростору при зафіксованих в точці дотику коефіцієнтах рівняння.

ПРО АНАЛІТИЧНЕ ПРОДОВЖЕННЯ «ПІВПРОСТОРОВИХ» ЯДЕР

Нагадаємо деякі позначення.

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0 \quad (x \in V) \tag{1}$$

— розглядувана система лінійних диференціальних рівнянь.

$$\lim_{x \to y} B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = f(y) \quad (x \in V,\ y \in S) \tag{2}$$

— граничні умови.

$A_0\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ і $B_0\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ — відповідно головні частини операторів $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ та $B\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Користуючись так званою місцевою системою координат, у якій $y=0$, $\nu = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{n-1}, 1)$, та позначаючи місцеві координати вектора $\tau + \lambda\nu$ з допомогою α_i $(i=1, \ldots, n)$, так що $\alpha_n = \lambda$, а α_j $(j=1, \ldots, n-1)$ — місцеві координати вектора τ, вираз κ-стовбця головного члена «півпросторового» ядра ([1], стор. 147) запишемо

$$F_\kappa(x) = \int\limits_{|\alpha'|=1} \overbrace{\ldots}^{n-2} \int d_{\alpha'} \, T \int\limits_{+} \Phi^{(s-s_\kappa-1)}(x, \alpha) A_0^{-1}(\alpha) Q_\kappa(\alpha) \, d\alpha_n,$$

де

$$Q_\kappa(\alpha') = (E, \ldots, \alpha_n^{s-1} E) R_\kappa(\alpha');$$

$R_\kappa(\alpha')$ — κ-стовбець матриці $R(\alpha)$, правої оберненої до матриці

$$I_1 = \int\limits_{+} B_0(\alpha) A_0^{-1}(\alpha) (E, \ldots, \alpha_n^{s-1} E) \, d\alpha_n,$$

а також

$$A_0(\alpha) = A_0(0, \alpha); \qquad B_0(\alpha) = B_0(0, \alpha).$$

Хай для довільного $\alpha' \in T$, за винятком, можливо, деякої множини нульової міри, буде

$$\det A_0(\alpha) = a_0 \prod_{j=1}^{\varkappa} [(\alpha_n - \mu_j)(\alpha_n - \bar{\mu}_j)]^{\nu_j} \qquad \left(\sum_{j=1}^{\varkappa} \nu_j = \frac{ps}{2}\right).$$

Тоді

$$I_1 = 2\pi i \sum_{j=1}^{\varkappa} \lim_{\alpha_n \to \mu_j} C_j \frac{\partial^{\nu_j - 1}}{\partial \alpha_n^{\nu_j - 1}} \left\{ (\alpha_n - \mu_j)^{\nu_j} B_0(\alpha) A_0^{-1}(\alpha) (E, \ldots, \alpha_n^{s-1} E) \right\}.$$

Умовимося відмічати степені деяких форм відповідними верхніми індексами у квадратних дужках. Оскільки

$B_0(\alpha)=\left(B_{\kappa l}^{[\sigma_{\kappa l}]}(\alpha)\right)_{\kappa=1;\ l=1}^{\frac{ps}{2};\ p}$ ($\sigma_{\kappa l}$ — цілі невід'ємні числа, що не перевищують s_κ),

і також $A_0(\alpha)=A_0^{[ps]}(\alpha)$, то

$$\int\limits_{+} B_0(\alpha) A_0^{-1}(\alpha)\,\alpha_n^t\, E d\alpha_n =$$

$$=2\pi i \sum_{j=1}^{\varkappa} \lim_{\alpha_n\to\mu_j} \left(B_{\kappa l}^{[\sigma_{\kappa l}+t+\delta_j-1]}(\alpha,\mu_j)\right)_{\kappa=1;\ l=1}^{\frac{ps}{2};\ p} (t=0,\ldots,s-1);$$

$$I_1=\frac{2\pi i\left(B^{[m]}(\alpha',\mu),\ldots,B^{[m+s-1]}(\alpha',\mu)\right)}{\Lambda^{[\delta_j]}(\alpha',\mu)}$$

де

$$B^{[m+t]}(\alpha',\mu)=\left(B_{\kappa l}^{[\sigma_{\kappa l}+t+\delta-1]}\ \alpha',\mu)\right)_{\kappa=1;\ l=1}^{\frac{ps}{2};\ p},$$

δ та δ_j — деякі цілі невід'ємні числа,

$$\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_\kappa).$$

Отже,

$$R_\kappa(\alpha')=\frac{1}{2\pi i}\Lambda^{[\delta]}(\alpha',\mu)\,\Gamma_\kappa^{-1}(\alpha'),$$

де Γ_κ^{-1} — κ-стовбець матриці, правої оберненої до матриці

$$\Gamma(\alpha')=\left(B^{[m]}(\alpha',\mu),\ldots,B^{[m+s-1]}(\alpha',\mu)\right).$$

Далі

$$I_2=\int\limits_{+} \Phi^{(s-s_\kappa-1)}(x,\alpha)\,A_0^{-1}(\alpha)(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)=$$

$$=2\pi i\sum_{j=1}^{\varkappa}\lim_{\alpha_n\to\mu_j} C_j\frac{\partial^{\nu_j-1}}{\partial\alpha_n^{\nu_j-1}}\left\{(\alpha_n-\mu_j)^{\nu_j}\Phi^{(s-s_\kappa-1)}(x,\alpha)A_0^{-1}(\alpha)(E,\ldots,\alpha_n^{s-1}E)\right\}.$$

З цього видно, що, позначаючи з допомогою $\Psi_j(x,\alpha)$ строчку s матриць порядка p функцій, аналітичних при $(x,\alpha)\neq 0$, можемо представити

$$I_2=2\pi i\frac{\sum\limits_{j=1}^{\varkappa}\Psi_j(x,\alpha^j)}{\Lambda^{[\delta]}(\alpha',\mu)},$$

де $\alpha^j(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\,\mu_j)$.

Таким чином,

$$F_n(x) = \int \overset{n-2}{\overbrace{\dots}} \int_{|\alpha'|=1} I_2 R_\kappa(\alpha') d_{\alpha'} T = \int \overset{n-2}{\overbrace{\dots}} \int_{|\alpha'|=1} \left\{ \sum_{j=1}^{\varkappa} \Psi_j(x, \alpha^j) \right\} \Gamma_\kappa^{-1}(\alpha') \, d_{\alpha'} T.$$

Слід зауважити, що при продовженні функції $\Psi_j(x, \alpha^j)$ в комплексний простір шляхом заміни α^j на $\widetilde{\alpha}^j$, де

$$\widetilde{\alpha}^j = \alpha'^j + i\alpha''^j; \qquad \alpha'^j = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-1}, \mu'_j(\alpha', \alpha''));$$

$$\mu_j(\alpha'_1 + i\alpha'') = \mu'_j(\alpha', \alpha'') + i\mu''_j(\alpha', \alpha'');$$

$$\alpha''^j = (\alpha''_1, \dots, \alpha''_{n-1}, \mu''_j(\alpha', \alpha'')).$$

їх аналітичність зовні $(x, \widetilde{\alpha}^j) = 0$ зберігається.

Аналітичність же матриці $\Gamma^{-1}(\widetilde{\alpha}')$ буде порушуватись лише в точках, де продовження в комплексний простір рангового мінора $\Delta(\alpha')$ матриці $I_1(\alpha')$ обертається в нуль, внаслідок чого множина таких точок буде зображуватись рівнянням

$$\Delta(\widetilde{\alpha}') = 0, \tag{3}$$

еквівалентним системі

$$\begin{cases} \Delta'(\alpha', \alpha'') = 0 \\ \Delta''(\alpha', \alpha'') = 0, \end{cases} \tag{4}$$

де

$$\Delta(\widetilde{\alpha}') = \Delta'(\alpha', \alpha'') + i\Delta''(\alpha', \alpha'');$$

$$\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-1}); \ \alpha'' = (\alpha''_1, \dots, \alpha''_{n-1}).$$

Вирази $\Delta'(\alpha', \alpha'')$ та $\Delta''(\alpha', \alpha'')$ або $\Delta(\widetilde{\alpha}')$ є форми степеня не вище $g = s - 1 + \sum_{\kappa=1}^{\frac{ps}{2}} s_\kappa$ від $\alpha'_1, \alpha''_1, \dots, \alpha'_{n-1}, \alpha''_{n-1}, \mu'_1, \mu''_1 \dots, \mu'_\varkappa, \mu''_\varkappa$, або від $\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_{n-1}, \mu_1, \dots, \mu_\kappa$ відповідно, причому μ'_j та μ''_j або μ_j є однорідні функції першого степеню від $\alpha'_1, \alpha''_1, \dots, \alpha'_{n-1}, \alpha''_{n-1}$, або від $\widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_{n-1}$ відповідно. Тому кожне з співвідношенъ (3) та (4) зображує не більше, ніж g, різних зв'язних конічних множин $\widetilde{C}_\kappa$ та C_κ (з спільним центром в початку координат) в $(n-1)$-мірному комплексному або $(2n-2)$-мірному дійсному просторі відповідно.

Нагадаємо далі, що κ-стовбець «півпросторового» ядра визначається формулами ([1], стор. 135—138, 147—148).

$$G_n(x) = \sum_{l=0}^{s-s_\kappa-1} F_{\kappa l}(x) + u_\kappa(x), \tag{5}$$

$$u_\kappa(x) = -\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{V} \omega(x, y)\, v_\kappa(y)\, dy;$$

$$v_\kappa(x) = \sum_{l=0}^{s-s_\kappa-1} \overbrace{\int \cdots \int}^{n-2}_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'}\, T \int_{+} \sum_{q=-t}^{s-l-1} L_q\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi^{(l)}(x, \alpha)\, P_{\kappa,l}(\alpha)\, d\alpha_n. \tag{6}$$

$$F_{nl}(x) = \overbrace{\int \cdots \int}^{n-2}_{|\alpha'|=1} d_{\alpha'}\, T \int_{+} \Phi^{(l)}(x, \alpha)\, P_{\kappa,l}(\alpha)\, d\alpha_n. \tag{7}$$

$\omega(x, y) = (\omega_{\kappa_1 l}(x, y))^{p}_{\kappa, l=1}$ — фундаментальна матриця, відповідна матриці $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Матриці $P_{\kappa,l}(\alpha)$ обчислюються з слідуючої системи:

$$\sum_{q=j-m}^{s} \widetilde{L}_q\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial x}\right) P_{\kappa, j-q}(\alpha) = 0 \tag{8}$$

$$(j = s, \ldots, s + m - 1; \quad m = s - s_\kappa - 1),$$

причому

$$P_{\kappa m}(\alpha) = A_0^{-1}(\alpha)\, Q_\kappa(\alpha),$$

а також

$$F_{\kappa m}(x) = F_\kappa(x).$$

Символи $L_q\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)$ позначають лінійні диференціальні оператори з аналітичними коефіцієнтами виду

$$L_q\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) = \sum_{\kappa_1 + \ldots + \kappa_n - j_1 - \ldots - j_n = q} L^{\kappa_1 \ldots \kappa_n}_{j_1 \ldots j_n} \alpha_1^{j_1} \ldots \alpha_n^{j_n} \frac{\partial^{\kappa_1 + \ldots + \kappa_n}}{\partial \alpha_1^{\kappa_1} \ldots \partial \alpha_n^{\kappa_n}}.$$

$L^{\kappa_1 \ldots \kappa_n}_{j_1 \ldots j_n}$ — постійні матриці, q — ціле число, що називається вагою однорідної матриці.

$\widetilde{L}_q\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)$ — оператор, спряжений до $L_q\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right)$.

При цьому для матриці $\widetilde{L}_s\left(\alpha, \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) = A_0(\alpha)$ існує обернена.

Користуючись наведеними формулами, легко переконатись, що при цьому має місце слідуюче зауваження.

З а у в а ж е н н я 1. При належному виборі області V в (6) «півпросторове» ядро може бути аналітично продовжене на таку довільну область, замикання якої, за винятком початку координат, являється конечною підобластю області аналітичності його головного члена.

Дійсно, співвідношення (8) свідчать про співпадання множин особливостей матриць $P_{\kappa,l}$ при $l=0,\dots,m$. З цього випливає аналітична продовжувальність молодших членів $F_l(x)$ ядра $G(x)$ на область аналітичної продовжувальності його головного члена $F(x)$. Решта випливає безпосередньо з формул (6).

Умовимось тепер позначати з допомогою $\tilde{T}$ зв'язну суму не більше g таких $(n-2)$-мірних* множин $\tilde{T}_\kappa$ точок $\tilde{\alpha}'=\alpha+i\alpha''$, які допускають неперервне взаємне перетворення довільних двох з T, $\tilde{T}_\kappa$, не зачіпаючи решти. Аналітичність функції

$$\tilde{F}(x)=\sum_{j=1}^{\varkappa}\overbrace{\int\cdots\int}^{n-2}_{\tilde{T}}\Psi_j\,(x,\,\tilde{\alpha}_j)\,\Gamma^{-1}(\tilde{\alpha}')\,d_{\tilde{\alpha}'}\tilde{T}$$

може порушуватись лише в точках, де $(x,\tilde{\alpha}^j)=0$, тобто де

$$\begin{cases}(x,\,\alpha'^j)=0\\(x,\,\alpha''^j)=0\end{cases}\tag{9}$$

хоча б при одному $j=1,\dots,\varkappa$. При фіксованому $\tilde{\alpha}'=\alpha'+i\alpha''$ ці співвідношення визначають деяку $(n-2)$-мірну дійсну площину (перетин двох $(n-1)$-мірних дійсних площин), а при русі точки $\tilde{\alpha}'$ вздовж множини $\tilde{T}$ — деяку формально $(2n-4)$-мірну конічну поверхню з вершиною в початку координат, яку можна розглядати, наприклад, як $(n-3)$-параметричну сім'ю $(n-1)$-мірних конічних поверхонь в n-мірному дійсному просторі. Таким чином, кожній множині $\tilde{T}$ відповідає деяка поверхня σ розриву функції $F(x)$ (обернена відповідність неоднозначна). Зокрема, при $\alpha''=0$, $\mu''_j\,(\alpha',\alpha'')\neq 0$ для всіх $j=1,\dots,\varkappa$, тобто при інтегруванні по дійсній множині, поверхня σ співпадає з площиною $x_n=0$.

При цьому має місце слідуюче

З а у в а ж е н н я 2. Якщо поверхні σ' та σ'' не перетинаються, то їм відповідні множини $\tilde{T}'$ та $\tilde{T}''$ також не перетинаються (проте не навпаки).

Дійсно, якби $\tilde{\alpha}'_0=\alpha'_0+i\alpha''_0$ була спільною точкою множин $\tilde{T}'$ та $\tilde{T}''$, то відповідні поверхні σ' та σ'' повинні були б мати спільну ($(n-2)$-мірну) площину

$$\begin{cases}(x,\,\alpha_0'^j)=0\\(x,\,\alpha_0''^j)=0.\end{cases}$$

В неправильності оберненого твердження переконує слідуючий приклад:

$$\text{множинам}\begin{cases}\alpha''=0\\|\alpha'|=C_1\end{cases}\text{та}\begin{cases}\alpha''=0\\|\alpha'|=C_2\end{cases}\text{при}\begin{cases}\mu'(\alpha',0)=0\\\mu''(\alpha',0)\neq 0\end{cases}(C_1\neq C_2)$$

відповідає одна й та ж поверхня σ — площина $x_n=0$.

---

* Розмірність множин тут і далі визначається кількістю дійсних параметрів.

Умовимося називати множину Ω_1 достатньо (скільки завгодно) близькою до Ω_2, якщо точна верхня грань віддалей точок першої з них від другої достатньо (скільки завгодно) мала (проте не обов'язково навпаки).

Із співвідношень (9) безпосередньо випливає

Зауваження 3. Якщо множина $\tilde{T}'$ достатньо близька до $\tilde{T}''$, то відповідна першій поверхня σ' скільки завгодно близька до відповідної другій — σ''.

Із однорідності відносно $\tilde{\alpha}'$ лівих частин співвідношень $(x, \tilde{\alpha}'^{j})=0$ випливає зауваження 4. Двом точкам $\tilde{\alpha}'_1$ та $\tilde{\alpha}'_2\in\tilde{T}$, що лежать на одній і тій самій центральній комплексній прямій, відповідає та сама твірна ($(n-2)$-мірна дійсна площина) конуса σ.

Зауваження 5. Існує деяка $(n-2)$-мірна скільки завгодно близька до T і гомеоморфна останній множина $\overline{T}$, відповідна якій поверхня $\overline{\sigma}$ лежить між двома відмінними від $x_n=0$ $(n-1)$-мірними дійсними площинами з довільним, проте спільним для обох, напрямом проекцій ν'_1 та ν'_2 їх нормалей ν_1 і ν_2 на площину $x_n=0$.

Внаслідок можливості попереднього повороту координатної системи навколо осі ox_n, не обмежуючи загальності, можна вважати

$$\nu'_1=(\nu^{(1)}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-2}); \quad \nu'_2=(\nu^{(2)}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-2}).$$

($\nu^{(1)}$ та $\nu^{(2)}$ — деякі відмінні від нуля постійні).

Множина $\overline{T}$ може бути визначена співвідношеннями

$$\alpha''_2=\ldots=\alpha''_{n-1}=0; \quad \delta>\alpha''_1=\mathrm{const}>0; \quad |\alpha'|=1.$$

В цьому випадку, очевидно, буде

$$\nu_1=(\nu^{(1)}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-3}, \max_j\{\mu''_j(\alpha', \alpha'')\}), \quad \nu^{(1)}=\alpha''_1;$$

$$\nu_2=(\nu^{(2)}, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-3}, \min_j\{\mu''_j(\alpha', \alpha'')\}), \quad \nu^{(2)}=\alpha''_1.$$

При цьому $0<\min_j\{\mu_j(\alpha', \alpha'')\}\leqslant\max_j\{\mu_j(\alpha', \alpha'')\}<\infty$ внаслідок умови еліптичності та неперервності функцій $\mu_j(\alpha', \alpha'')$.

При достатньо малому α''_1 множина $\overline{T}$ буде скільки завгодно близькою до T. З цього та виконання так званої умови розв'язності $\Big($рівність ранга матриці I_1 числу $\frac{ps}{2}$ ([1], стор. 147), тобто відмінність від нуля неперервної в комплексній околиці множини T функції $\Delta(\tilde{\alpha}')$ на T, а значить і на близькій до неї $T\Big)$ випливає

Зауваження 6. Будь-яке «півпросторове» ядро $G(x)$ може бути аналітично продовжене на довільну конечну частину півпростору $x_n<0$ аж до деякої, ніде, крім початку, не співпадаючої з площиною $x_n=0$ конічної поверхні.

Розглядаючи далі $(n-1)$-мірну комплексну площину $\tilde{\alpha}_n=0$ як $(2n-2)$-мірну дійсну, опишемо в ній сферу

$$|\tilde{\alpha}'|=R \tag{10}$$

довільного радіуса R, і нехай T' — $(n-2)$-мірна (центральна з центром в початку координат проекція множини T на цю сферу. Проведемо, далі, через T' на сфері (10) $(n-1)$-мірну (замкнуту) аналітичну поверхню χ, і нехай C'_κ та $C'=\sum\limits_{\kappa=1}^{g} C'_\kappa$ — $(n-2)$-мірні границі перетинів зі сферою (10) множин C_κ та $C=\sum\limits_{\kappa=1}^{g} C_\kappa$ відповідно.

При цьому поверхня χ вважається такою, що C' непусте. Хай, крім того, $\tilde{T}'$ — одна з визначених вище множин $\tilde{T}$, що лежить на (10) достатньо близько до C', і не перетинається з C, і нехай також $x=(x_1,\dots,x_n)$ — довільна точка, що не належить відповідній C поверхні розриву Σ. Якщо тепер $\tilde{T}$ — множина, що лежить в спільній з $\tilde{T}'$ конічній з вершиною в початку координат поверхні і гомеоморфна останній, то має місце слідуюче

З а у в а ж е н н я 7.

Функція $$\tilde{F}_j(x)=\underbrace{\int\cdots\int}_{n-2}\limits_{\tilde{T}} \Psi_j(x,\tilde{\alpha}^j)\,\Gamma^{-1}(\tilde{\alpha}')\,d_{\tilde{\alpha}}\,\tilde{T}$$

аналітична в точці x.

Справедливість цього зауваження випливає з можливості вибору $\tilde{T}'$ настільки близького до C', щоб згідно з зауваженням 3 точка x опинилась зовні відповідної $\tilde{T}'$ (і, внаслідок зауваження 4, також зовні відповідної $\tilde{T}$) поверхні розриву.

З попередніх зауважень випливає нижченаведена теорема.

Теорема 1. При прийнятих вище припущеннях та позначеннях «півпросторове» ядро $G(x)$ є аналітично продовжуваним на довільну конечну частину півпростору $x_n \leqslant 0$ аж до поверхні σ, що відповідає як завгодно близькій до C' множині $\tilde{T}'$.

Переконатись в цьому можна, наприклад, слідуючим чином.

Виберемо на $\tilde{T}'$ два оточення $\tilde{T}'_1 \subset \tilde{T}'_2$ деякої точки $\tilde{\alpha}' \ni \tilde{T}'$ та утворимо множину $\tilde{T}'$ з $\tilde{T}'_2$, неперервно з'єднаної (не зачіпаючи точок $\tilde{\alpha}' \in C'$) з множиною, одержаною з $\tilde{T}_1'$ шляхом зміни знака всіх координат її точок. Будову конічної поверхні розриву $\tilde{\sigma}$, відповідної такій множині $\tilde{T}'$, зручно представити з допомогою перетину її деякою n-мірною сферою. Цей перетин буде, очевидно, складатись з відповідних $\tilde{T}'_1$ та $\tilde{T}'_2$ двох частин аналогічних перетинів різних полостей поверхні σ, неперервно з'єднаних поверхнями $\tau^{(1)}$ та $\tau^{(2)}$, що перетинаються з перетинами площини $x_n=0$ тією ж сферою. Якщо при цьому вибирати множину $\tilde{\tilde{T}}'$ таким чином, щоб $\tau^{(1)}$ та $\tau^{(2)}$ не перетинались між собою, то кожна полость конуса, обмеженого поверхнею $\tilde{\sigma}$, буде містити в собі оточення деякої конечної точки x, як завгодно близької до другої полості та до точки $\tilde{x}$, що відповідає точці $\tilde{\alpha}'$. Тому заміна множини інтегрування T з допомогою $\tilde{\tilde{T}}'$ у виразах (6) та (7), а також належний вибір області V в (5)) дозволяє аналітично продовжити ядро $G(x)$ на точки цього останнього оточення. Неперервно пересуваючи точку $\tilde{\alpha}'$ вздовж множини $\tilde{T}'$, можна, очевидно, переконатись в аналітичній продовжуваності ядра $G(x)$, як це зазначено в теоремі 1.

Нехай тепер $\tilde{T}$ позначає множину, центральна проекція (з початку) якої на сферу (10) співпадає з $\tilde{T}'$. Тоді вираз аналітичного продовження «півпросторового» ядра на частину півпростору $x_n \leqslant 0$, що міститься в довільно вибраній конечній області V з (5) і обмежена поверхнею $\tilde{\sigma}$, може бути одержаний з (5) шляхом заміни виразів (6) та (7) слідуючими:

$$v_\kappa(x) = \sum_{l=0}^{s-s_\kappa-1} \underbrace{\int \cdots \int}_{\tilde{\tilde{T}}}^{n-2} d_{\tilde{\alpha}'}\, \tilde{\tilde{T}} \int_{+} \sum_{q=-t}^{s-l-1} L_q\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Phi^{(l)}(x, \tilde{\alpha}) P_{\kappa,l}(\tilde{\alpha})\, d\alpha_n;$$

$$F_{\kappa,l}(x) = \underbrace{\int \cdots \int}_{\tilde{\tilde{T}}}^{n-2} d_{\tilde{\alpha}'}\, \tilde{\tilde{T}} \int_{+} \Phi^{(l)}(x, \tilde{\alpha}) P_{\kappa,l}(\tilde{\alpha})\, d\alpha_n.$$

З а у в а ж е н н я 8. При $n-1<2n-3$, тобто при $n>2$ у випадку існування множин C_κ, що ніде, крім початку, не перетинаються, та відповідних їм поверхонь σ_κ, які також не перетинаються при $x \neq 0$, «півпросторове» ядро $G(x)$ може бути аналітично продовжене на будь-яку конечну частину всього простору, за винятком початку координат.

Справедливість цього твердження випливає з можливості проведення поверхонь χ' та χ'' через кожне з будь-яких двох різних C'_n окремо, що, по-попередньому, дозволяє аналітично продовжити $G(x)$ до поверхонь, як завгодно близьких до кожної з різних σ_κ.

УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА ЗДІЙСНЕННЯ ЗАМИСЛУ Г. ВЕЙЛЯ

Наслідки приведеного в попередньому параграфі вивчення «півпросторових» ядер дозволяють побудувати слідуючий метод реалізації згаданої ідеї Г. Вейля.

Нехай обмежуюча область V поверхня S, що задовольняє прийнятим вище умовам ([1], стор. 147), за винятком, можливо, вимоги опуклості, допускає побудову в кожній своїй точці y такої конічної поверхні σ, що деяка частина її оточення цієї точки σ_h, яка належить неперервно залежній від координат точки y сім'ї і розташована в півпросторі $x_n<0$, не мала б спільних точок з $V+S$ (крім самої точки y).

Представимо поблизу початку (місцевої системи) аналітично продовжене аж до частини σ_- поверхні σ, що міститься в півпросторі $x_n<0$, «півпросторове» ядро $G(x)$ у вигляді інтеграла від розв'язків рівняння (1) тільки з точковими особливостями, розповсюдженого по деякій такій поверхні Ω, що

а) $\Omega \supset \sigma_h$,

б) для всіх $x \in \Omega - \sigma_n$ буде $|x| \geqslant h > 0$.

З цією метою можна скористатись слідуючою формулою Гріна:

$$u(x) = -\int_{\widetilde{S}} \overbrace{\cdots}^{n-1} \int \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(\omega(x, z), u(z))\, d_z \widetilde{S}, \tag{11}$$

де $\widetilde{S}$ — деяка замкнута поверхня, яка обмежує таку допустиму ([4], стор. 57), область Q, що $u(x)$ задовольняє рівнянню (1) в $Q+S$. Цю формулу одержують шляхом інтегрування співвідношення

$$\omega(x, z)\, A\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) u(z) - \left(A'\left(z, \frac{\partial}{\partial z}\right) \omega(x, z)\right)' u(z) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} B_z^j(\omega(x, z), u(x))$$

по області, обмеженій з одного боку поверхнею $\widetilde{S}$, а з другого — сферою з центром в точці $x \in Q$ достатньо малого радіуса δ та наступного граничного переходу при $\delta \to 0$.

Позначаючи з допомогою S_ρ та σ_ρ відповідно належним чином орієнтовані частини сфери радіуса ϱ з центром в початку, що відтинається поверхнею σ_-, та частину поверхні σ_-, що відтинається цією сферою, а також вважаючи Ω вибраним таким чином, щоб можна було покласти $\widetilde{S} = \Omega - \sigma_\rho + S_\rho$. використовуючи формулу (11) та незалежність одержуваного виразу від ϱ, можемо записати

$$G(x) = -\lim_{\rho \to 0} \int_{\Omega - \sigma_\rho + S_\rho} \overbrace{\cdots}^{n-1} \int \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(\omega(x, z), G(z))\, d_z \widetilde{S}. \tag{12}$$

У випадку існування при $x \neq 0$.

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{S_\rho} \overbrace{\cdots}^{n-1} \int \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(\omega(x, z), G(z))\, d_z \widetilde{S} = -g(x)$$

вираз (12) можна записати

$$G(x) = -\int_{\Omega} \overbrace{\cdots}^{n-1} \int \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(\omega(x, z), G(z))\, d_z \Omega + g(x).$$

В протилежному випадку, користуючись лемою Я. Б. Лопатинського з [9], згідно якій при умові достатньої гладкості коефіцієнтів рівняння (1)

$$\omega(x, z) = \sum_{l=0}^{t} \vartheta_l(z) \left\{ \frac{\partial^l}{\partial y^l} \omega(x, y) \right\} \Bigg|_{y=0} + R(x; z, 0),$$

$$\left(\text{тут позначено} \sum_{l=0}^{t} = \sum_{\substack{0 \leq l_1 + \ldots + l_n < t \\ 0 \leq l_n < s}}; \ \frac{\partial^l}{\partial y^l} = \frac{\partial^{l_1 + \ldots l_n}}{\partial y_1^{l_1} \ldots \partial y_n^{l_n}}; \ \vartheta_l(z) = \vartheta_{l_1 \ldots l_n}(z, 0) \right),$$

одержимо аналогічно попередньому

$$G(x) = -\overbrace{\int \ldots \int}^{n-1}_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j (R(x; z, 0), G(z)) \, d_z \Omega + \tilde{g}(x).$$

Тут

$$\tilde{g}(x) = -\lim_{\rho \to 0} \overbrace{\int \ldots \int}^{n-1}_{S_\rho} \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j (R(x; z, 0), G(z)) \, d_z S -$$

$$- \sum_{l=0}^{t} \left\{ \frac{\partial^l}{\partial y^l} \omega(x, y) \right\} \Bigg|_{y=0} \overbrace{\int \ldots \int}^{n-1}_{\Omega - \sigma_\rho + S_\rho} \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j (\vartheta_l(z), G(z)) d_z \tilde{S}.$$

(З огляду на те, що матриці $\vartheta_l(z)$ є розв'язками рівняння (1), коефіцієнти

$$\overbrace{\int \ldots \int}^{n-1}_{\Omega - \sigma_\rho + S_\rho} \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j (\vartheta_l(z), G(z)) d_z \tilde{S}$$

не залежать від ϱ.

Число t, очевидно, повинно бути вибране настільки великим, щоб розглядувана границя існувала).

Зауважимо, що у випадку достатньо швидкого спадання функцій $G(z)$ та $\omega(x, z)$ при $z \to \infty$ під Ω можна було б у виразі (12) мати на увазі поверхню σ.

Аддитивну поправку $\Delta G(x)$ до «півпросторового» ядра $G(x)$, додавання якої створювало б нове ядро $\tilde{G}(x) = G(x) + \Delta G(x)$, придатне і для розглядуваних в цьому параграфі невипуклих областей V, можна визначити слідуючим чином

$$\Delta G(x) = \overbrace{\int \ldots \int}^{n-1}_{\Omega - \sigma_h} \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j (\omega(x, z), G(z)) \, d_z \Omega.$$

Дійсно, по-перше, така поправка не впливає на поведінку ядра поблизу початку (тобто вона зберігає властивість «стрибка», а також не порушує забезпечуючих регулярність оцінок) внаслідок її аналітичності в достатньо малому його оточенні.

По-друге, будучи розв'язком рівняння (1), вона також забезпечує задоволення цьому рівнянню нового ядра

$$\widetilde{G}(x) = -\int \overbrace{\cdots}^{n-1} \int_{\sigma_h} \sum_{j=1}^{n} \nu_j B_z^j(\omega(x, z), G(z))\, d_z\sigma, \tag{13}$$

аналітичність якого зовні σ_h не викликає сумнівів.

Користуючись результатами (а також припущеннями та позначеннями) замітки [6], замість представлення (12) можна вживати слідуюче:

$$G(x) = \sum_{\kappa=0}^{t} \int \overbrace{\cdots}^{n-1} \int_{\sigma_0} \frac{\partial^\kappa}{\partial z^\kappa} \omega(x, z)\, \tau_\kappa^{(G)}(z)\, d_z\sigma + G_0(x), \tag{14}$$

де σ_0 — границя множини, зв'язаної з C співвідношенням (9).

Аналогічно попередньому аддитивна поправка $\Delta_0 G(x)$ у цьому випадку може бути визначена

$$\Delta_0 G(x) = -\sum_{\kappa=0}^{t} \int \overbrace{\cdots}^{n-1} \int_{\sigma_0^- - \sigma_0^h} \frac{\partial^h}{\partial z^h} \omega(x, z)\, \tau_\kappa^{(G)}(z)\, d_z\sigma, \tag{15}$$

де σ_0^h — достатньо мале оточення початку на $\sigma_{\bar{o}}$.

Згідно з зауваженням [6] сім'ю поверхонь σ з необхідними властивостями можна побудувати для будь-якої гладкої границі S області V, внаслідок чого розглядуваний метод дозволяє зовсім звільнитись від обмеження опуклості області V.

Приведемо застосування побудованого тут метода до задачі про пружну рівновагу тіла при заданих напруженнях на його поверхні. В цьому випадку система (1) може бути записана

$$\mu(\operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot})\, u(x) + (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} u(x) = 0 \tag{16}$$

(λ та μ — так звані сталі Ляме — числа, що характеризують пружні властивості тіла).

Побудоване вперше Г. Вейлем ([3], стор. 23) «півпросторове» ядро цієї задачі можна представити у вигляді

$$G(x) = \frac{1}{\lambda + \mu} \left\{ \frac{1}{2} \Phi(x) + (\lambda + 2\mu) P(x) \right\},$$

де

$$P(x) = \frac{1}{2(\lambda + 2\mu)} P_1(x) + \frac{1}{2\mu} P_2(x);$$

де

$$\Phi(x)=\left\|\begin{matrix} \frac{1}{r}+\frac{r(r+x_3)-x_2^2}{r(r+x_3)^2}, & \frac{x_1 x_2}{r(r+x_3)^2}, & \frac{x_1}{r(r+x_3)} \\ \frac{x_2 x_1}{r(r+x_3)^2}, & \frac{1}{2}+\frac{r(r+x_3)-x_1^2}{r(r+x_3)^2}, & \frac{x_2}{r(r+x_3)} \\ -\frac{x_1}{r(r+x_3)}, & -\frac{x_2}{r(r+x_3)}, & \frac{1}{r} \end{matrix}\right\|;$$

$$P_1(x)=\left\|\begin{matrix} \frac{1}{r}-\frac{x_1^2}{r^3}, & -\frac{x_1 x_2}{r^3}, & -\frac{x_1 x_3}{r^3} \\ -\frac{x_2 x_1}{r^3}, & \frac{1}{r}-\frac{x_2^2}{r^3}, & -\frac{x_2 x_3}{r^3} \\ -\frac{x_3 x_1}{r^3}, & -\frac{x_3 x_2}{r_3}, & \frac{1}{r}-\frac{x_3^2}{r^3} \end{matrix}\right\|;$$

$$P_2(x)=\left\|\begin{matrix} \frac{1}{r}+\frac{x_1^2}{r^3}, & \frac{x_1 x_2}{r^3}, & \frac{x_1 x_3}{r^3} \\ \frac{x_2 x_1}{r^3}, & \frac{1}{r}+\frac{x_2^2}{r^3}, & \frac{x_2 x_3}{r^3} \\ \frac{x_3 x_1}{r^3}, & \frac{x_3 x_2}{r^3}, & \frac{1}{r}+\frac{x_3^2}{r^3} \end{matrix}\right\|.$$

Позначаючи з допомогою $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ та $\Phi_3(x)$ відповідно перший, другий та третій стовбці матриці $\Phi(x)$, представлення виду (14) можна записати

$$\Phi_1(x)=\int_0^\infty \left\{\operatorname{rot}\left(0;\frac{1}{\varrho};\frac{\xi x_2}{\varrho^3}\right)'\right. d\xi;$$

$$\Phi_2(x)=-\int_0^\infty \left\{\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\varrho};0;\frac{\xi x_1}{\varrho^3}\right)'\right. d\xi;$$

$$\Phi_3(x)=-\int_0^\infty \left\{\operatorname{grad}\frac{1}{\varrho}\right\}' d\xi.^*$$

$\left(\text{Тут}\quad \varrho=\sqrt{x_1^2+x_1^2+(x_3+\xi)^2}\right)$.

Шукана аддитивна поправка до цього ядра буде

$$\Delta_0 G(x)=\Phi'(x)+\Phi''(x),$$

* Штрих позначає транспонування.

причому

$$\Phi' x = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{R} + \frac{R(R+x_3+h)-x_2^2}{R(R+x_3+h)^2}, & \frac{x_1 x_2}{R(R+x_3+h)}, & \frac{x_1}{R(R+x_3+h)} \\ \frac{x_1 x_2}{R(R+x_3+h)^2}, & \frac{1}{R} + \frac{R(R+x_3+h)-x_1^2}{R(R+x_3+h)^2}, & \frac{x_2}{R(R+x_3+h)} \\ -\frac{x_1}{R(R+x_3+h)}, & -\frac{x_2}{R(R+x_3+h)}, & \frac{1}{R} \end{matrix} \right\|;$$

$$\Phi''(x) = -$$

$$- \left\| \begin{matrix} \frac{h}{R(R+x_3+h)} - \frac{hx_2^2(2R+x_3+h)}{R^3(R+x_3+h)}, & \frac{hx_1 x_2(2R+x_3+h)}{R^3(R+x_3+h)^2}, & 0 \\ \frac{hx_1 x_2(2R+x_3+h)}{R^3(R+x_3+h)^2}, & \frac{h}{R(R+x_3+h)} - \frac{hx_1^2(2R+x_3+h)}{R^3(R+x_3+h)^2}, & 0 \\ 0 \quad , & 0 & , 0 \end{matrix} \right\|.$$

(Тут $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^3 + (x_3+h)^2}$).

Представлення

$$\Phi''(x) = h(\Phi''_1(x), \Phi''_2(x), \Phi''_3(x));$$

$$\Phi''_1(x) = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2};\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2};\ 0\right);$$

$$\Phi''_2(x) = \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial x_1};\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2};\ 0\right);$$

$$\Phi''_3(x) = (0; 0; 0);$$

$$w = \ln(R + x_3 + h,$$

з якого легко помітити, що

$$\operatorname{div}\Phi''_1(x) = \operatorname{div}\Phi''_2(x) = \operatorname{div}\Phi''_3(x) = 0,$$

$$(\operatorname{grad}\operatorname{div} - \operatorname{rot}\operatorname{rot})\,\Phi''(x) = 0,$$

переконує в задоволенні функції $\Phi''(x)$ рівнянню (16).

Внаслідок аналітичності функцій $\Phi'(x)$ та $\Phi''(x)$ в оточенні початку та аналогії між матрицями $\Phi(x)$ та $\Phi'(x)$, наявність решти необхідних властивостей у цієї поправки $\Delta_0 G(x)$ сумнівів не викликає.

Аналітичність нового ядра $\widetilde{G}(x) = G(x) + \Delta_0 G(x)$ зовні відрізка $x_1 = x_2 = 0, -h \leqslant x_3 \leqslant 0$ свідчить про його придатність для довільної області, відрізок довжини h зовнішньої півнормалі до границі якої, проведеної в будь-якій її точці, завжди виявляється зовні області та її границі, що, очевидно, завжди має місце для областей, обмежених гладкими поверхнями.

ДЕЯКІ ПРИКЛАДАННЯ

На прикладі результатів Я. Б. Лопатинського, наведених в роботах [2], [7], [8], ілюструємо можливість уникнення обмеження опуклості області в тих випадках, коли останнє мотивоване наявністю у «півпросторових» ядер згадуваних вище (розділ 1) конічних множин особливостей. Таке уникнення може бути досягнуте шляхом застосування побудованих в розділі 2 поправок. Прослідкуємо це в кожному окремому випадку, зберігаючи при цьому, з метою стислості позначення відповідних робіт.

1. Доведення леми 1 з [2] про можливість для довільного двічі неперервно диференційовного розв'язку

$\tilde{u}(x)$ системи
$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{u}(x)=0 \tag{17}$$

побудування ядра $G(x, y)$ з тими ж властивостями, що і $G_0(x, y)$, та підбору такої неперервної густини $\tilde{\mu}(y)$, щоб розв'язок

$$\int_S G(x, z)\tilde{\mu}(z)\,d_zS$$

тієї ж системи (17) співпадав з $\tilde{u}(x)$ на границі S розглядуваної області, грунтується, по-перше, на представленні розв'язку $\tilde{u}(x)$ у вигляді інтегралів по S, аналогічному (11), не залежному від опуклості області, та, по-друге, на використанні слідуючих властивостей «півпросторового» ядра $G_0(x, y)$:

а) $G_0(x, y)$ — функціональна матриця, визначена та неперервна разом з своїми похідними

$$\frac{\partial^{\kappa_1+\ldots+\kappa_n+l_1+\ldots+l_n}}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}\partial y_1^{l_1}\ldots\partial y_n^{l_n}}\,G_0(x, y)$$

при $\kappa_1+\ldots+\kappa_n\leqslant\max\{2; t\}$, $l_1+\ldots+l_n\leqslant t$, $x\in D+S$, $y\in S$, $x\neq y$.

При малому $|x-y|$ головний член будь-якої з цих похідних визначається відповідною похідною головного члена $\tilde{G}_0(x, y)$ первісної матриці $G_0(x, y)$.

При цьому $\tilde{G}_0(z, y)=O\left(\frac{z,\, v(y)}{|z|^n}\right)$ і при диференціюванні $\tilde{G}_0(z, y)$ по y порядок особливості зберігається, а при кожному диференціюванні по z — взагалі підвищується на одиницю.

б) $A\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)G_0(x, y)=0$ при $x\in D$; $y\in S$;

в) при $x\in D$, $y\in S$,

$$\lim_{x\to y}\int_S G_0(x, z)\,\mu(z)\,d_zS=\mu(y)+\int_S G_0(y, z)\,\mu(z)\,d_zS.$$

Оскільки внесення визначеної формулами (13) або (15) поправки не порушує цих властивостей а)—в) ядра, забезпечуючи, проте, аналітичність нового ядра всередині розглядуваної області (з гладкою границею) незалежно від її опуклості, то отже при збереженні всіх інших припущень використання будь-якої з цих поправок дозволяє звільнитись від обмеження опуклості, не порушуючи справедливості леми.

Так само може бути поширена на випадок неопуклих областей лема 2, що доводить існування взаємнооднозначної відповідності між многовидністю розв'язків рівняння

$$\psi(y) + \int_S \psi(z)\, G(z, y)\, d_z S = 0$$

та многовидністю неперервно диференційовних в $D+S$ (та двічі — в D) розв'язків спряженої з (17) системи, що анулюються на границі S.

Таким чином, для областей, що задовольняють вказаним в цитованій роботі вимогам, за винятком вимоги опуклості, (в тому числі також і негомеоморфних кулі) залишається справедливою доведена в [2] теорема 2 про необхідність та достатність відсутності ненульових неперервно-диференційовних в $D+S$ розв'язків спряженої однорідної задачі

$$A'\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) = 0, \qquad (x \in D),$$

$$v(y) = 0, \qquad (y \in S)$$

для існування неперервно диференційовного в $D+S$ та двічі — в D розв'язку задачі

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) = 0, \qquad (x \in D),$$

$$u(y) = f(y), \quad (y \in S)$$

при довільній неперервній на S функції $f(y)$.

2. Не зупиняючись на уникненні обмеження опуклості областей D, що фігурують в умові теореми 1 з [7], з огляду на малоістотність цього обмеження, переконаємося в можливості такого уникнення в теоремі 2 тієї ж роботи [7]. З цією метою досить зауважити, що при заміні «півпросторового» ядра $G_0(x, y)$, яке вживається в її доведенні, з допомогою $\widetilde{G}_0(x, y) = G_0(x, y) + \Delta G_0(x, y)$, де $\Delta G_0(x, y)$ — визначена однією з формул (13) або (15) поправка, по-перше, можлива побудова представлення, аналогічного (10),

$$\widetilde{G}(x, y) = \widetilde{G}_0(x, y) + \sum_{i=1}^{r} \omega(x, x_j)\, \Theta_i(y)$$

та, по-друге, внесення такої поправки не порушує одержуваних з представлення (11) оцінок.

Таким чином, дійсно, використання побудованих в розділі 2 поправок до «півпросторових» ядер дозволяє поширити на неопуклі області й цю теорему 2 з [7] про збереження розв'язаності та стійкість розв'язку при малих змінах границі області та граничних значень.

3. Цілком аналогічно може бути поширена на випадок неопуклої області D також і теорема з [8] про стійкість розв'язку відповідної однозначно розв'язаної задачі при малих змінах коефіцієнтів рівнянь разом з деякими їх похідними.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лопатинский Я. Б. Укр. мат. журн. 5, 1953, стор. 123.
2. Лопатинский Я. Б. ДАН УРСР 1, 5, 1956.
3. Weyl H., Rend. C. Pal., XXXIX, 1915, стор. 1—49.
4. Рашевский П. К. Геометрическая теория уравнений с частными производными. М., 1947.
5. Лопатинский Я. Б. Укр. мат. журн. 3, 1951.
6. Гавеля С. П. Наукові записки ЛДУ, серія механіко-математична, в. 8. 1957.
7. Лопатинський Я. Б. ДАН УРСР, 2, 107 1956.
8. Лопатинський Я. Б. ДАН УРСР, 3, 211, 1956.
9. Лопатинский Я. Б. ДАН СССР, т. 79, № 5, 1951.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

О. І. КОРОНКЕВИЧ

ЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ ПІД ДІЄЮ ВИПАДКОВИХ СИЛ

1. Однією з основних задач, що виникають при дослідженні системи диференціальних рівнянь з випадковими членами, є дослідження зв'язку між статистичними характеристиками розв'язку і статистичними характеристиками випадкових членів рівняння. В даній роботі з цієї точки зору досліджуються лінійні системи диференціальних рівнянь першого порядку; вільні члени являють собою випадкові функції. Будуть розглянуті системи з постійними та періодичними коефіцієнтами. В дальшому розглядається поширення одержаних результатів на нелінійні системи з малим параметром, що допускають представлення розв'язку в вигляді ряду по степеням цього параметра.

Динамічні системи під дією випадкових сил, зокрема, лінійні динамічні системи, розглядались в роботах [1, 2, 3, 4] та ряді інших. В роботі [3] показано, що система лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами та випадковими стаціонарними функціями в правій частині має стаціонарний частинний розв'язок, якщо всі корені характеристичного рівняння лежать в лівій півплощині. Метод одержання явного виразу такого розв'язку через задані випадкові функції в роботі не вказаний.

В цій статті розглядається загальний метод визначення стаціонарного частинного розв'язку в явній формі; при цьому буде показано, що подана в [3] достатня умова існування цього розв'язку є занадто обмежуюча.

Будемо розглядати рівняння виду

$$A_n(y)=\xi(t), \tag{1}$$

де A_n — лінійний диференціальний оператор n-го порядку з постійними коефіцієтами. Припускаємо, що характеристичне рівняння не має нульових або чисто уявних коренів. $\xi(t)$ — випадкова стаціонарна функція, що, як відомо, (див. напр. [5]), може бути представленою у вигляді

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,dZ(\lambda). \tag{2}$$

Припускаючи існування стаціонарного частинного розв'язку рівняння (1), запишемо в аналогічному вигляді спектральний розклад розв'язку

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\,dW(\lambda). \tag{3}$$

Подібно до [2], підставляючи (2), (3) в (1), одержуємо відповідне співвідношення між диференціалами випадкових функцій $dZ(\lambda)$ і $dW(\lambda)$

$$dW(\lambda) = \frac{1}{A_n(i\lambda)} dZ(\lambda). \tag{4}$$

Розкладаючи дріб, що стоїть в правій частині (4), на прості дроби, одержимо:

а) при відсутності кратних коренів

$$dW(\lambda) = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{c_\kappa}{i\lambda - \alpha_\kappa} \tag{5}$$

де α_κ — корені характеристичного рівняння.

Тоді частинний стаціонарний розв'язок рівняння (1) може бути представлений у формі $y(t) = \sum\limits_{\kappa=1}^{n} y_k(t)$,

де

$$y_\kappa(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} dW(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \frac{c_\kappa}{i\lambda - \alpha_\kappa} dZ(\lambda). \tag{6}$$

Легко бачити, що інтеграл (6) завжди має сенс, якщо тільки $Re\ (\alpha_\kappa) \neq 0$ [6].

Таким чином, частинний розв'язок, який ми шукаємо, одержується як сума окремих компонент, що, як легко перевірити, можуть бути явно виражені через подану випадкову функцію, а саме

$$y_\kappa(t) = c_\kappa \int_0^{\infty} e^{\alpha_\kappa \tau} \xi(t - \tau) \text{ при } Re(\alpha_\kappa) < 0; \tag{7}$$

$$y_\kappa(t) = c_\kappa \int_0^{\infty} e^{-\alpha_\kappa \tau} \xi(t + \tau) \text{ при } Re(\alpha_\kappa) > 0; \tag{8}$$

б) нехай характеристичне рівняння має кратний корінь α_κ, кратності m. Приймемо для визначенності $Re(\alpha_\kappa) > 0$. Тоді при розкладі на прості дроби будемо мати групу доданків

$$\left\{ \frac{c_1}{i\lambda - \alpha_\kappa} + \ldots + \frac{c_e}{(i\lambda - \alpha_\kappa)^l} + \ldots + \frac{c_m}{(i\lambda - \alpha_\kappa)^m} \right\} dW(\lambda). \tag{9}$$

Кожному з цих доданків відповідає компонента частинного розв'язку у вигляді

$$y_e = c_e \int_0^{\infty} \int_{\tau_l}^{\infty} \ldots l - 1 \ldots \int_{\tau_2}^{\infty} e^{-\alpha_\kappa \tau_1} \xi(t + \tau_1)\, d\tau_1 \ldots d\tau_l; \quad l = 1, \ldots m. \tag{10}$$

Аналогічно одержимо відповідний вираз для випадку кратних коренів при $Re(\alpha_k) < 0$.

Обчислюючи статистичні характеристики розв'язку, і використовуючи комутативність операцій математичного сподівання і інтегрування [9], легко показати, що, коли подана випадкова функція стаціонарна в розумінні О. Я. Хінчина [7] (перший і другий моменти інваріантні відносно зсуву параметра), або в розумінні [3] (всі моменти інваріантні відносно зсуву параметра), то в тому ж розумінні буде стаціонарним одержаний частинний розв'язок.

Очевидно, все сказане відповідно поширюється на системи лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$\frac{dy_s}{dt}=\sum_{j=1}^{n} b_{sj}y_j+\xi_s(t);\ s=1\dots n, \tag{11}$$

де b_{sj} — сталі коефіцієнти; $\xi_s(t)$ — стаціонарні і стаціонарно-зв'язані випадкові функції.

Зауважимо, що одержаний розв'язок для системи (11) може бути записаний в матричній формі

$$У(t)=\int_{\pm\infty}^{t} e^{B(t-\tau)}\xi(\tau)d\tau, \tag{12}$$

де $У(t)$ — стовбець частинних розв'язків; $\xi(\tau)$ — стовбець випадкових функцій; $e^{B(t-\tau)}$ — фундаментальна матриця Гріна. Позначення нижньої границі інтегрування $\pm\infty$ означає, що при інтегруванні елемента, який має множник $e^{\alpha t(t-\tau)}$ при $Re(\alpha)<0$ беремо $-\infty$; при $Re(\alpha)>0$ беремо $+\infty$. Нагадаємо, що, згідно з умовою, характеристичне рівняння не має коренів з нульовою дійсною частиною. Розглядаючи розв'язок в формі (12), легко безпосередньою перевіркою переконатися в тому, що він являє собою многомірну стаціонарну випадкову функцію.

Будемо говорити, що випадкова функція визначена єдиним способом, якщо вона визначена з точністю до випадкової функції, яка при довільному значенні t, з імовірністю одиниця, приймає значення нуль. Тоді неважко показати, що одержаний розв'язок визначається однозначно.

На основі сказаного легко переконатися, що має місце

Теорема 1. Достатньою умовою існування єдиного стаціонарного частинного розв'язку лінійного диференціального рівняння (1) або лінійної системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами (11), при умові, що вільні члени є випадкові стаціонарні і стаціонарно-зв'язані функції, — є відсутність коренів характеристичного рівняння з дійсною частиною, рівною нулю. При цьому, якщо випадкова стаціонарна функція $\xi(t)$ має компоненту з неперервним спектром і кожна з похідних спектральних функцій $\frac{dF_s(\lambda)}{d\lambda}$ відмінна від нуля всюди, де вона існує, — ця умова є також необхідною.

Висновок. Дано рівняння (1) або система (11), в правій частині якої — випадкова функція з стаціонарними m-тими похідними, Тоді відносно існування частинного розв'язку з стаціонарними m-тими похідними має місце теорема 1.

Розглянемо загальне представлення неперервної випадкової стаціонарної функції [8]

$$\xi(t) = \zeta_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \zeta_\kappa e^{i\lambda_\kappa t} + \xi_1(t), \tag{13}$$

де $\zeta_0, \zeta_\kappa, \xi_1(t)$ — ортогональні частоти; λ_κ — власні частоти; $\xi_1(t)$ — компонента випадкової функції, яка має неперервний спектр. На основі представлення (13) легко одержати такий результат:

Теорема 2. При умовах теореми 1, кожній компоненті неперервної випадкової функції $\xi(t)$, представленої в формі (13), відповідає аналогічна компонента частинного стаціонарного розв'язку рівняння (1) або, відповідно, системи (11). При цьому спектри власних частот поданої випадкової стаціонарної функції і частинного стаціонарного розв'язку — однакові.

2. Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь з змінними коефіцієнтами. Будемо додержуватися матричної форми запису.

$$\frac{dY}{dt} = P(t)Y + \xi(t), \tag{14}$$

де $P(t)$ — матриця коефіцієнтів; $\xi(t)$ — стовбець випадкових функцій, що можна розглядати як многомірну випадкову функцію. Нагадаємо, що многомірну випадкову функцію називаємо стаціонарною, якщо всі її елементи — стаціонарні і стаціонарно-зв'язані [6].

Нехай система (14) приводима [10] з допомогою перетворення $Y = Z(t)X$. При такому перетворенні система (14) переходить в систему

$$\frac{dX}{dt} = BX + Z^{-1}(t)\xi(t), \tag{15}$$

де B — постійна матриця, яка дорівнює

$$B = Z^{-1}(t)P(t)Z(t) - Z^{-1}(t)\frac{dZ(t)}{dt} \tag{16}$$

Будемо вважати, що матриця B не має характеристичних чисел, які лежать на уявній осі. Тоді частинний розв'язок системи (14) можна записати в слідуючій формі, де позначення нижньої границі інтегрування вживається в тому ж розумінні, що і в (12):

$$Y(t) = \int_{\pm\infty}^{t} Z(t) e^{B(t-\tau)} Z^{-1}(\tau)\,\xi(\tau)\,d\tau. \tag{17}$$

Розглянемо випадок, коли елементи матриці коефіцієнтів системи (14) — періодичні функції, які мають один і той самий період ω. Тоді елементи матриці $Z(t)$ — також періодичні функції, період яких в загальному випадку дорівнює 2ω [11].

Нехай $\xi(t)$ — многомірна стаціонарна випадкова функція. Тоді, очевидно, частинний випадковий розв'язок (17) системи лінійних рівнянь з періодичними коефіцієнтами має властивості

$$MУ(t+2\omega)=MУ(t); \tag{18}$$

$$MУ(t+2\omega)(У(s+2\omega))^*=MУ(t)(У(s))^*. \tag{19}$$

Знак * тут і далі означає, що матриця (в даному випадку — стовбець) транспонується і її елементи замінюються комплексно спряженими. Останню рівність можна так само записати інакше, в формі, яка в дальшому буде для нас більш зручною. Позначимо кореляційну матрицю

$$MУ(t)(У(s))^*=B_{yy}(t;\,s)=B_{yy}(t;\,t-\tau), \tag{20}$$

де $\tau=t-s$. Тоді можна сказати, що кореляційна матриця $B_{yy}(t;\,t-\tau)$ при довільному значенні τ є періодична функція відносно t. Випадкову функцію, яка має властивості (18), (19), будемо називати періодичною випадковою функцією.

Розв'язок (17), який має ці властивості, визначається однозначно. Це можна довести, виходячи з того, що відповідна однорідна система, внаслідок умов, накладених на матрицю B, не має випадкових розв'язків з обмеженим квадратом модуля на всій осі t. Сказане дає можливість висловити теореми, які являють собою узагальнення теорем Нейгебауера і Бора [11] для випадкових функцій.

Теорема 3. Дано систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з періодичними коефіцієнтами; вільні члени утворюють многомірну випадкову стаціонарну функцію; система не має характеристичних показників, дійсна частина яких дорівнює нулю. Тоді в класі випадкових періодичних функцій існує однозначно визначений частинний розв'язок системи.

Теорема 4. Дано систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з періодичними або постійними коефіцієнтами. Система не має характеристичних показників (відповідно, при постійних коефіцієнтах відсутні корені характеристичного рівняння), дійсна частина яких дорівнює нулю. Вільні члени утворюють многомірну випадкову періодичну функцію з періодом, рівним періоду коефіцієнтів.

Тоді в класі випадкових періодичних функцій існує однозначно визначений розв'язок системи.

Введене поняття періодичних випадкових функцій можна розглядати як узагальнення поняття стаціонарних випадкових функцій, тому що для останніх рівності (18), (19) виконуються при довільних значеннях величини ω.

Будь-яку стаціонарну випадкову функцію можна подати у вигляді суми сталої величини і стаціонарної випадкової функції, середнє значення якої дорівнює нулю. Аналогічно, будь-яку періодичну випадкову функцію $\xi(t)$ можна представити у вигляді:

$$\xi(t)=\varphi(t)+\zeta(t), \tag{21}$$

де $\varphi(t)=M\xi(t)$ — періодична функція; $\zeta(t)$ — випадкова періодична функція з середнім значенням, рівним нулю. З (17) випливає, що, коли $M\xi(t)=0$, то і $MУ(t)=0$. Тому поняття періодичної випадкової функції, середнє значення якої дорівнює нулю, природньо виникає як розв'язок лінійної системи з періодичними коефіцієнтами, якщо вільні члени утворюють стаціонарну випадкову функцію з середнім значенням, рівним нулю.

Періодичні випадкові функції з середнім значенням, рівним нулю, цікаві тим, що для них можна довести ергодичну теорему, яка звичайно доводиться для стаціонарних випадкових функцій [6; 8; 12; 13]. А саме, відповідно змінивши методику доведення [13], можна показати, що має місце

Теорема 5. Нехай $\xi(t)$ — періодична випадкова функція, яка задовольняє умові $M\xi(t)=0$; $M\xi(t+\tau)(\xi(t))^* \underset{|\tau|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ рівномірно відносно t. Тоді $\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\xi(t)dt \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в розумінні збіжності в середньому квадратичному.

Справді, необхідно довести

$$M\left|\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\xi_i(t)dt\right|^2 \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{22}$$

для кожного елемента $\xi_i(t)$; $i=1, 2, \ldots n$. Позначимо $M\xi_i(t_1)\,\xi_i(t_2)= =B_{ii}(t_1;t_2)$ і замість t_2 введемо змінну $\tau=t_2-t_1$.

Одержимо

$$M\left|\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\xi_i(t)dt\right|^2 =$$

$$=\frac{1}{T^2}\left|\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} B_{ii}(t_1;t_2)\,dt_1\cdot dt_2\right| \leqslant \frac{1}{T^2}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} dt_1\int\limits_{-T}^{T}\left|B_{ii}(t_1;\ t_1+\tau)\right|d\tau.$$

Згідно з умовою теореми, можна для довільного $\varepsilon>0$, вказати таке τ_0, що при $|\tau|>\tau_0$, для всіх значень t_1 маємо $|B_{ii}(t_1;\ t_1+\tau)|<\varepsilon$. Припускаючи, що величина ε вказана, відповідне значення τ_0 — фіксовано, і, в усякому разі, довжина проміжка інтегрування $T>\tau_0$, розіб'ємо проміжок інтегрування у внутрішньому інтегралі на три частини $-T$, $-\tau_0$; $-\tau_0$, $+\tau_0$; τ_0, T. Позначимо $m=\max|B_{ii}(t_1;\ t_1+\tau)$. Тоді одержимо слідуючі оцінки:

$$\int\limits_{-T}^{-\tau_0}|B_{ii}(t_1;\ t_1+\tau)|\,d\tau<\varepsilon(T-\tau_0);\ \int\limits_{\tau_0}^{T}|B_{ii}(t_1;t_1+\tau)|\,d\tau<\varepsilon(T-\tau_0);$$

$$\int\limits_{-\tau_0}^{\tau_0}|B_{ii}(t_1;t_1+\tau)|\,d\tau<2\,m\,\tau_0.$$

Таким чином

$$M\left|\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\xi_i(t)\,dt\right|^2 < \frac{1}{T}2\,\varepsilon(T-\tau_0)+\frac{m}{T}2\,\tau_0. \tag{23}$$

Візьмемо тепер величину T настільки великою, що $\frac{m}{T}\tau_0 < \varepsilon$; тоді

$$M\left|\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\xi_i(t)\,dt\right|^2 < 4\varepsilon, \tag{24}$$

де ε — як завгодно мала величина. Теорему доведено.

Теорема 6. Дано систему лінійних диференціальних рівнянь з періодичними або постійними коефіцієнтами. Система не має характеристичних показників (відповідно при постійних коефіцієнтах — відсутні корені характеристичного рівняння), дійсна частина яких дорівнює нулю. Вільний член $\xi(t)$ є многомірна стаціонарна або періодична випадкова функція, яка задовольняє умовам теореми 5. Тоді $\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} У(t)\,dt \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} 0$ в розумінні збіжності в середньому квадратичному.

Для доведення треба показати, що з умови $M\xi(t+\tau)\,(\xi(t))^* \underset{\tau\to\infty}{\longrightarrow} 0$ рівномірно відносно t, випливає також $MУ(t+\tau)\,(У(t))^* \underset{|\tau|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ рівномірно відносно t. В цьому легко переконатися, якщо взяти до уваги обмеження, накладені на матрицю B, і використати представлення розв'язку в формі (17).

Зауважимо, що, коли дана система — з постійними коефіцієнтами і випадкова функція $\xi(t)$ — стаціонарна, умова теореми 5 $M\xi(t)=0$ стає, як це і зрозуміло, зайвою.

3. Розглядаємо далі систему лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами; вільні члени утворюють періодичну многомірну випадкову функцію. Нехай період періодичної випадкової функції не має спільної міри з періодом коефіцієнтів. Тоді майже очевидно, що частинний розв'язок нашої системи, взятий в формі (17), має такі властивості:

а) $MУ(t)$ — майже-періодична функція;

б) $MУ(t)\,(У(t-\tau))^* = B_{yy}(t; t-\tau)$, при довільному значенні τ, є майже-періодична функція t.

Многомірну випадкову функцію, яка має ці властивості, будемо називати майже-періодичною многомірною випадковою функцією. Тоді неважко перевірити, що виявляються вірними слідуючі теореми, аналогічні теоремам 3, 4.

Теорема 7. Дано систему лінійних диференціальних рівнянь першого порядку з періодичними коефіцієнтами; вільні члени утворюють періодичну многомірну випадкову функцію, період якої не має спільної міри з періодом коефіцієнтів рівнянь. Система не має характеристичних показників з дійсною частиною, рівною нулю. Тоді в класі випадкових майже-періодичних функцій існує однозначно визначений розв'язок системи.

Теорема 8. Дано систему лінійних диференціальних рівнянь з періодичними або постійними коефіцієнтами. Система не має характеристичних показників (відповідно при постійних коефіцієнтах — відсутні корені характеристичного рівняння), дійсна частина яких дорівнює нулю, Вільні члени утворюють многомірну випадкову майже-періодичну функцію. Тоді в класі майже-періодичних випадкових функцій існує однозначно визначений розв'язок системи.

Для випадкових майже-періодичних функцій, середнє значення яких дорівнює нулю, залишаються вірними також ергодичні теореми, цілком аналогічні теоремам 5, 6.

4. Дано нелінійну систему, аналогічну розглянутим в [3]

$$\frac{dУ}{dt} = PУ + \xi(t) + \mu\,\Phi(y_1, \ldots y_n, \mu\xi_1, \ldots \mu\xi_n), \tag{25}$$

де Φ — стовбець функцій, аналітичних відносно всіх своїх аргументів. Система (25) така, що її розв'язок може бути представлений у вигляді ряду по степеням параметра μ, який рівномірно збігається при $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. В роботі [3] розглянуто, зокрема, випадок, коли коефіцієнти системи — сталі величини. При цьому автор вводить поняття стаціонарності в слідуючому розумінні:

$$M\,\xi_1(t_1)\,\xi_2(t_2) \ldots \xi_j(t_j) = f(t_1 - t_j; \ldots t_{j-1} - t_j), \tag{26}$$

тобто довільні моменти випадкових функцій інваріантні відносно зміщення параметра t. Для таких систем і таких випадкових функцій подано теорему, яка стверджує, що серед розв'язків системи є стаціонарний, якщо корені характеристичного рівняння лежать в лівій півплощині.

Згідно з висновками пункту 1 ясно, що результати [3] можна посилити. Розглянемо випадкову функцію

$$\zeta(t) = \xi_1^{m_1}(t) \ldots \xi_j^{m_j}(t), \tag{27}$$

де $\xi_i(t)$ — компоненти випадкової функції $\xi(t)$; $m_1, \ldots m_j$ — довільні цілі числа.

Будемо називати многомірну випадкову функцію $\xi(t)$ цілком стаціонарною, якщо кожна випадкова функція (27) є стаціонарною в розумінні О. Я. Хінчина і кожні дві такі функції є стаціонарно зв'язані (26). Тоді має місце слідуюче узагальнення теореми 1.

Теорема 9. Дано систему диференціальних рівнянь (25); $\xi(t)$ — многомірна цілком стаціонарна випадкова функція. Матриця P — постійна. Характеристичне рівняння не має коренів з дійсною частиною, яка дорівнює нулю. Тоді в класі многомірних цілком стаціонарних випадкових функцій існує однозначно визначений розв'язок системи, який може бути представлений у вигляді ряда по степеням параметра μ.

Далі аналогічно узагальнимо поняття періодичних і майже-періодичних випадкових функцій. Будемо називати многомірну випадкову функцію $\xi(t)$ — цілком періодичною (цілком майже-періодичною) випадковою функцією, якщо кожна випадкова функція (27) є періодична (майже-періодична) випадкова функція. Тоді, якщо система (25) має постійні або періодичні коефіцієнти, а $\xi(t)$ — многомірна цілком періодична, або цілком майже-періодична випадкова функція, то для таких нелінійних систем теореми 3, 4, 7, 8 узагальнюються подібно до того, як для системи з постійними коефіцієнтами і цілком стаціонарною випадковою функцією, узагальнюючи теорему 1, одержуємо теорему 9.

ЛІТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике, Изд. АН УССР, 1945.
2. Бэтчолор Дж. Теория однородной турбулентности, ИЛ., 1955.
3. Ворович И. И. Изв. АН СССР, серия математическая, т. 20, № 1, 17—32, 1956
4. Солодовников В. В. Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. М.—Л., 1952.
5. Колмогоров А. Н. Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром. Юбилейный сборник АН СССР, т. 1, 1947.
6. Яглом А. М. Усп. мат. наук, т. 7, в. 5, 1952. стор. 3—168.
7. Хинчин А. Я. Усп. мат. наук, т. 5, 1938, стор. 42—51.
8. K. Karhunen. Über lineare metoden in der Warscheinlichkeitsrechnung. Ann. Acad. Sci. Fennicae. A. I, № 37. Helsinki, 1947, стор. 79.
9. Пугачев В. С. Основы общей теории случайных функций. Акад. арт. наук, 1952.
10. Еругин Н. П. Приводимые системы. Тр. мат. института им. В. А. Стеклова. XIII, Л.—М., 1946.
11. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., 1956.
12. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., 1954.
13. Бунимович В. Н. Флюктуационные процессы в радиоприемных устройствах, Изд. Советское радио, 1951.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

О. І. КОРОНКЕВИЧ

РЕЗОНАНС В ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ ПРИ ДІЇ ВИПАДКОВИХ СИЛ

1. В роботі [1] були розглянуті системи диференціальних рівнянь першого порядку з постійними або періодичними коефіцієнтами та вільними членами, які являли собою випадкові функції; системи не мали характеристичних показників (у випадку сталих коефіцієнтів, відповідно-характеристичне рівняння не мало коренів) з дійсною частиною, рівною нулю. Згідно з прийнятою термінологією (див., напр., [2]), цей випадок будемо називати нерезонансним. В даній роботі розглядається випадок резонансу для систем з постійними коефіцієнтами, тобто випадок, коли серед коренів характеристичного рівняння є уявні або нульові.

Розглядаємо системи

$$\frac{dY}{dt}=AY+\xi(t), \tag{1}$$

де Y — стовбець розв'язків; $\xi(t)$ — стовбець випадкових функцій, який можна розглядати, як многомірну випадкову функцію; A — постійна матриця коефіцієнтів. Припустимо, що $\xi(t)$ — многомірна стаціонарна функція, тобто всі її компоненти — стаціонарні і стаціонарно-зв'язані; середнє значення $M\xi(t)=0$. Тоді, якщо характеристичне рівняння не має коренів з дійсною частиною, рівною нулю, то існує однозначно визначений частинний стаціонарний розв'язок системи (1), який дорівнює [1]

$$Y(t)=\int\limits_{\pm\infty}^{t} e^{A(t-\tau)}\xi(\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

де позначення нижньої границі інтегрування показує, що при інтегруванні елемента, який має множник $e^{\alpha(t-\tau)}$ при $Re(\alpha)<0$, беремо $-\infty$, при $Re(\alpha)>0$, беремо $+\infty$. У випадку, коли характеристичне рівняння має уявні, або нульові корені, інтеграл (2) не існує. Тоді будемо розглядати розв'язок в формі

$$Y(t)=\int\limits_{\pm\infty;\,0}^{t} e^{A(t-\tau)}\xi(\tau)\,d\tau, \tag{3}$$

де позначення нижньої границі інтегрування говорить про те, що при інтегруванні функції, яка має множник $e^{\alpha(t-\tau)}$ і $Re(\alpha)=0$, беремо нижню границю рівною нулю. Така форма частинного розв'язку дає можливість кожну функцію $y_s(t)$ стовбця $У(t)$ подати у вигляді суми стаціонарних і нестаціонарних компонент. Крім того, з умови $M\xi(t)=0$ випливає, що середнє значення частинного розв'язку (3) $MУ(t)=0$.

Нашою найближчою метою буде дослідження залежності дисперсії нестаціонарних компонент від параметра t, а також дослідження можливості існування стаціонарних розв'язків у випадку резонансу.

Перш за все треба сказати, що коли уявний, або нульовий корінь характеристичного рівняння, якому відповідає елементарний дільник матриці A степені κ, співпадає з власною частотою випадкової функції [6], то, як легко зрозуміти, виходячи з загальної теорії диференціальних рівнянь, такому кореню відповідає нестаціонарна компонента частинного розв'язку з середнім значенням, яке дорівнює нулю, і дисперсією, яка росте пропорціонально $t^{2\kappa}$. В дальшому приймаємо, що корені характеристичного рівняння, які лежать на уявній осі, не співпадають з власними частотами стаціонарної функції $\xi(t)$.

Нехай серед коренів характеристичного рівняння є корені $\pm i\beta$, яким відповідають прості елементарні дільники матриці A. Кожному з цих коренів буде відповідати нестаціонарна випадкова компонента частинного розв'язку $y_s(t)$; $s=1,\dots n$, яка має вигляд

$$\zeta_s^j(t)=c_s e^{i\beta t}\int_0^t e^{-i\beta\tau}\,\xi_j(\tau)\,d\tau\,. \tag{4}$$

Розглянемо одну з таких компонент; її дисперсія

$$M\,|\,\zeta_s^j(t)\,|^2=|\,c_s\,|^2\int_0^t\int_0^t e^{-i\beta(\tau_1-\tau_2)}\,B(\tau_1-\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2\,, \tag{5}$$

де $B(\tau_1-\tau_2)=M\xi_j(\tau_1)\,\overline{\xi_j(\tau_2)}$.

Очевидно, величина інтеграла (5) зберігається, якщо взяти границі інтегрування $-\frac{t}{2}$, $+\frac{t}{2}$. Замінюючи змінні $\tau_1-\tau_2=p$; $\tau_1+\tau_2=q$, ми при безмежному збільшенні t прийдемо до розглядання

$$\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}dq\int_{-T}^{T}e^{-i\beta p}\,B(p)dp=\lim_{T\to\infty}2\,T\int_{-T}^{T}e^{-i\beta p}\,B(p)dp\,,$$

або, повертаючись до звичайних позначень

$$\lim_{T\to\infty}2\,T\int_{-T}^{T}e^{-i\beta\tau}\,B(\tau)d\tau\,.$$

Ясно, що коли інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\beta\tau}B(\tau)d\tau$ — скінчений і відмінний від нуля, то при безмежному збільшенні t

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M\,|\,\zeta_s^j(t)\,|^2}{t} \tag{6}$$

— скінчений.

Якщо існує спектральна щільність $f_j(\tau)$, то $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta\tau} B(\tau)\,d\tau = f_j(\beta)$ — значення спектральної щільності випадкової функції $\xi_j(t)$ в точці $\lambda=\beta$. Звідси ясно, у відповідності з теоремою 1 [1], що у випадку, коли спектральні щільності $f_j(\lambda)$ компонент многомірної випадкової функції $\xi_j(t)$; $j=1,\dots n$ відмінні від нуля при всіх значеннях λ, то, якщо характеристичне рівняння системи має нульові або уявні корені, стаціонарні розв'язки відсутні. Приймемо надалі, що $f_j(\lambda)$ існує та $f_j(\lambda)\neq 0$.

Зауважимо, що, коли вільні члени являють собою функції $\Phi_j(t)$ в звичайному розумінні (не випадкові), які мають перетворення Фурьє $\varphi_j(\lambda)$, то з того, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\beta\tau}\Phi_j(\tau)d\tau = \varphi_j(\beta)$ є величиною скінченою, випливає, що модуль відповідної компоненти розв'язку лишається обмеженим при необмеженому збільшенні t.

У тому випадку, коли степінь елементарних дільників, що відповідають кореням $\pm i\beta$, дорівнює κ, і корінь $i\beta$ співпадає з власною частотою випадкової функції, дисперсія відповідної нестаціонарної компоненти $M|\zeta_s^j(t)|^2$ збільшується, як вже було вказано вище, пропорціонально $t^{2\kappa}$. Коли корінь $\pm i\beta$ не співпадає з власними частотами, то, як легко показати, $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{M|\zeta_s^j(t)|^2}{t^{2\kappa-1}}$ — скінчений. Таким чином, для випадкових функцій в тому випадку, коли уявний корінь характеристичного рівняння не співпадає з власними частотами, і спектральна щільність $f_j(\beta)\neq 0$, має місце явище, яке може бути названо слабим резонансом.

2. Нехай характеристичне рівняння має два уявних кореня $\pm i\beta$; відповідні елементарні дільники прості. Нехай кореню $\pm i\beta$ у функції $y_s(t)$ відповідає нестаціонарна компонента (5). Розглянемо докладно залежність дисперсії (6) цієї компоненти від t при необмеженому збільшенні параметра t. Будемо припускати, що кореляційна функція має спектральну щільність і, таким чином,

$$B(\tau_1-\tau_2)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(\tau_1-\tau_2)} f_j(\lambda)\,d\lambda. \tag{7}$$

Підставляючи вираз (7) в (5) і зауваживши, що умови теореми Фубіні задовольняються, тому що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_j(\lambda)\,d\lambda$ — скінчена величина, змінюємо порядок інтегрування і після нескладних перетворень одержуємо

$$M|\zeta_s^j(t)|^2 = 2|c_s|^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_j(\lambda)\frac{1-\cos(\beta-\lambda)t}{(\beta-\lambda)^2}\,d\lambda =$$

$$=2|c_s|^2\left\{\int\limits_0^{\infty}\frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz+\int\limits_0^{\infty}\frac{f_j(-z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz\right\}. \tag{8}$$

Розглянемо поведінку інтеграла $\int_0^\infty \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz$ при зростанні величини t. Перш за все,

$$\int_0^\infty \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz = \int_0^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz +$$

$$+\int_A^\infty \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz. \tag{9}$$

Зважаючи на те, що спектральна щільність випадкової стаціонарної функції — невід'ємна [5], підінтегральний вираз також невід'ємний, тому

$$\int_A^\infty \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz < 2\int_A^\infty \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}\,dz. \tag{10}$$

Оберемо $A=\frac{2\kappa\pi}{t}$; $\kappa=n[t]$, де n — ціле число, $[t]$ — ціла частина від t. Розгляд проводимо при деякому фіксованому t, вважаючи його в усякому разі більшим від одиниці. Очевидно, $A=\frac{2n[t]\pi}{t}\geqslant\frac{2n[t]\pi}{[t+1]}\geqslant\pi n$.

Оскільки інтеграл $\int_{-\infty}^\infty f_j(\lambda)\,d\lambda$ — скінчений, то для як завгодно малої величини $\varepsilon_1>0$ можна вибрати таке n, що при $z>\pi n$, і тим більше при $z>A$, буде мати місце $f_j(z+\beta)<\varepsilon_1$. Таким чином,

$$\int_A^\infty \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}\,dz<\frac{\varepsilon_1}{A};\ \int_0^\infty \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz=$$

$$=\int_0^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz+\eta_1(t), \tag{11}$$

де $\eta_1(t)<\frac{\varepsilon_1}{A}$ (нерівність зберігається при як завгодно великому t).

Інтеграл $\int_0^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz$ будемо розглядати як

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz.$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)\,dz=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\left\{(1-\cos zt)\int_1^z \frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}\,d\zeta\,\Big|_\varepsilon^A - t\int_\varepsilon^A\left[\int_1^z \frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}\,d\zeta\right]\sin zt\,dz\right\}.$$

Внаслідок вибору $A=\frac{2\pi\kappa}{t}$, позаінтегральний член зникає, і одержуємо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{A}\frac{f_j(z+\beta)}{z^2}(1-\cos zt)dz = t\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\int_{\varepsilon}^{A} z\left[\int_{1}^{z}\frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}d\,\zeta\right]\frac{\sin zt}{z}dz\right\}. \quad (12)$$

Покажемо

$$\lim_{z\to 0}\left\{-z\int_{1}^{z}\frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}d\,\zeta\right\}=f_j(\beta). \quad (13)$$

Справді, виберемо довільно мале $\varepsilon_2>0$ і таке $\delta>0$, що при $|z|<\delta$, $|f_j(z+\beta)|-f_j(\beta)|<\varepsilon_2$. Зауважимо, що $f_j(\beta)=\lim_{z\to 0}\left\{-z\int_{1}^{z}\frac{f_j(\beta)}{\zeta^2}d\,\zeta\right\}$. Тоді

$$\lim_{z\to 0}\left|-z\int_{1}^{z}\frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}d\zeta+z\int_{1}^{z}\frac{f_j(\beta)}{\zeta^2}d\,\zeta\right|\leqslant\lim_{z\to 0}\left\{\left|-z\int_{\delta}^{z}\frac{f_j(\zeta+\beta)-f_j(\beta)}{\zeta^2}d\,\zeta\right|+\right.$$

$$\left.+\left|z\int_{1}^{\delta}\frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}d\,\zeta\right|+\left|z\int_{1}^{\delta}\frac{f_j(\beta)}{\zeta^2}d\,\zeta\right|\right\}\leqslant\varepsilon_2.$$

І тому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\int_{\varepsilon}^{A}z\left[\int_{1}^{z}\frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}d\,\zeta\right]\frac{\sin zt}{z}dz\right\}=-\int_{0}^{A}z\left[\int_{1}^{z}\frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^2}d\,\zeta\right]\frac{\sin zt}{z}dz. \quad (14)$$

Зважаючи на те, що вираз (14) являє собою інтеграл Діріхле, і беручи до уваги, що всі міркування дослівно повторюються для другого інтегралу, що знаходиться в правій частині рівності (8), з (9)—(14) одержуємо, що уявному кореню $i\beta$ відповідає нестаціонарна компонента розв'язку, дисперсія якої задовольняє умові

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M|\zeta_s^j(t)|^2}{t}=2\pi|c_s|^2 f_j(\beta). \quad (15)$$

Аналогічний вираз будемо мати для нестаціонарної компоненти, що відповідає кореню $-i\beta$ або нульовому кореню характеристичного рівняння; очевидно, в цих випадках замість $f_j(\beta)$ буде $f_j(-\beta)$, або $f_j(0)$.

3. Нехай кореню $i\beta$ відповідає κ елементарних дільників характеристичної матриці, степені яких $m_1,\dots m_\kappa$. Елементарному дільнику степеня m_q відповідають нестаціонарні компоненти, які входять в функцію $y_s(t)$, вигляду

$$\zeta_s^p(t)=c_s^p\int_0^t e^{i\beta(t-\tau)}(t-\tau)^{p-1}\xi_j(\tau)\,d\,\tau,\qquad p=1,\dots m_q. \quad (16)$$

Позначимо через m яке-небудь m_q і розглянемо нестаціонарну компоненту розв'язку

$$\zeta_s^m(t) = c_s^m \int_0^t e^{i\beta(t-\tau)} (t-\tau)^{m-1} \xi_j(\tau)\, d\tau =$$

$$= c_s^m\ (m-1)! \int_0^t \ldots m \ldots \int_0^{\tau_2} e^{i\beta(t-\tau_1)} \xi_j(\tau_1)\, d\tau_1\, d\tau_2 \ldots d\tau_m. \qquad (17)$$

Очевидно, $M\zeta_s^m(t) = 0$. Наше завдання надалі також полягає в тому, щоб вивчити поведінку дисперсії $M\,|\,\zeta_s^m(t)\,|^2$ при необмеженому збільшенні t. Підставляючи у вираз для дисперсії значення кореляційної функції (7), міняючи порядок інтегрування і виконуючи інтегрування по τ, подібно до того, як це робилося в попередньому розділі, одержимо

а) при m непарному; $m > 1$

$$M\,|\,\zeta_s^m(t)\,|^2 = |\,c_s^m|^2 [(m-1)!]^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_j(\lambda)}{(\beta-\lambda)^{2m}} \left\{ \left[\cos(\beta-\lambda)\,t - 1 + \ldots \right.\right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{m+1}{2}} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (\beta-\lambda)^{m-1} \right]^2 + \left[\sin(\beta-\lambda)\,t - \ldots + \right.$$

$$\left.\left. + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} (\beta-\lambda)^{m-2} \right]^2 \right\} d\lambda; \qquad (18)$$

б) при m парному

$$M\,|\,\zeta_s^m(t)\,|^2 = |\,c_s^m\,|^2 [(m-1)!]^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_j(\lambda)}{(\beta-\lambda)^{2m}} \left\{ \left[\cos(\beta-\lambda)\,t - 1 + \ldots \right.\right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} (\beta-\lambda)^{m-2} \right]^2 + \left[\sin(\beta-\lambda)\,t - \ldots + \right.$$

$$\left.\left. + (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} (\beta-\lambda)^{m-1} \right]^2 \right\} d\lambda. \qquad (19)$$

Розглянемо випадок, коли m непарне; при m парному всі міркування аналогічні. Перш за все, повторюючи міркування попереднього параграфа і позначаючи для скорочення запису вираз у фігурних дужках через $R(t; z)$, одержимо

$$M\,|\,\zeta_s^m(t)\,|^2 = |\,c_s^m\,|^2 [(m-1)!]^2 \left\{ \int_0^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^{2m}} R(t; z)\, dz + \right.$$

$$\left. + \int_0^A \frac{f_j(-z+\beta)}{z^{2m}} R(t; z)\, dz + 2\,\eta(t)\, t^{2m-2} \right\} \qquad (20)$$

де $\eta(t) < \frac{\varepsilon_1}{A}$; ε_1 — як завгодно мале, Розглядаючи інтеграл $\int\limits_0^{A}$ як $\lim \int\limits_{\varepsilon}^{A}$, виконуємо інтегрування частинами. Зауважимо, що оскільки $\cos At = 1$; $\sin At = 0$, позаінтегральний член при підстановці нижньої границі дає нуль, а при підстановці верхньої границі — величину, яку можна представити у вигляді $c_1(t) \cdot t^{2m-2}$, де $c_1(t)$ — обмежена величина при довільному значенні t. В результаті одержимо

$$\int\limits_0^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^{2m}} R(t; z)\, dz =$$

$$= -2\frac{t^m}{(m-1)!}(-1)^{\frac{m+1}{2}} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{A} z^{m-1} \left[\int\limits_1^z \frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^{2m}}\, d\zeta\right] \cdot \left[\sin zt - zt + \ldots + \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} z^{m-2}\right] dz + c_1(t)\, t^{2m-2}. \tag{21}$$

Далі знову інтегруємо частинами $(m-2)$ рази. Позаінтегральні члени при підстановці нижньої границі $z=\varepsilon$ і при $\varepsilon \to 0$ дають нулі; при підстановці верхньої границі одержимо величини, суму яких можна представити у вигляді $c_2(t) t^{2m-2}$, де $c_2(t)$ — обмежена при довільному t. При кожному інтегруванні перед інтегралом буде виникати множник $-t$. Остаточно, знак перед інтегралом буде $(-1)^q$, де $q = 1 + \dfrac{m+1}{2} + \dfrac{m-1}{2} + m - 2 = 1 + 2(m-1)$ — непарне число. Тому $(-1)^q = -1$. В результаті одержуємо

$$\int\limits_0^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^{2m}} R(t; z)\, dz =$$

$$= -\frac{2\, t^{2m-2}}{(m-1)!} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{A} \left[\int\limits_1^z \ldots m-2 \ldots \int\limits_1^{\eta_2} \eta_1^{m-1} \int\limits_1^{\eta_1} \frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^{2m}}\, d\zeta\, d\eta_1 \ldots d\eta_{m-2}\right] \times$$

$$\times (\cos zt - 1)\, dz + c(t)\, t^{2m-2}; \quad c(t) = c_1(t) + c_2 t). \tag{22}$$

Ще раз інтегруємо частинами. В цьому випадку позаінтегральний член зникає і одержуємо

$$\int\limits_0^A \frac{f_j(z+\beta)}{z^{2m}} R(t; z) dz =$$

$$= -\frac{2\, t^{2m-1}}{(m-1)!} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{A} z \left[\int\limits_1^z \ldots m-1 \ldots \int\limits_1^{\eta_2} \eta_1^{m-1} \int\limits_1^{\eta_1} \frac{f_j(\zeta+\beta)}{\zeta^{2m}}\, d\zeta\, d\eta_1 \ldots d\eta_{m-1}\right] \times$$

$$\times \frac{\sin zt}{z}\, dz + c(t)\, t^{2m-2}. \tag{23}$$

Розглянемо інтеграл, який знаходиться в квадратних дужках. Покажемо, що

$$\lim_{z\to 0}\left\{ z\int_1^z \ldots m-1 \ldots \int_1^{\eta_2} \eta_1^{m-1}\int_1^{\eta_1}\frac{f_i(\zeta+\beta)}{\zeta^{2m}}\,d\zeta\, d\eta_1\ldots d\eta_{m-1}\right\}=$$

$$=-\frac{1}{2m-1}\,\frac{1}{(m-1)!}f_i(\beta). \tag{24}$$

Справді, візьмемо як завгодно мале $\varepsilon_2>0$ і таке $\delta>0$, що при $|z|<\delta$, $|f_i(z+\beta)-f_i(\beta)|<\varepsilon_2$. Беручи до уваги, що $m-1$ — парне число, маємо очевидну рівність

$$-\frac{1}{2m-1}\,\frac{1}{(m-1)!}f_i(\beta)=$$

$$=\lim_{z\to 0}\left\{ z\int_1^z \ldots m-1 \ldots \int_1^{\eta_2} \eta_1^{m-1}\int_1^{\eta_1}\frac{f_i(\beta)}{\zeta^{2m}}\,d\zeta\, d\eta_1\ldots d\eta_{m-1}\right\}.$$

Далі

$$\lim_{z\to 0}\left| z\int_1^z \ldots m-1 \ldots \int_1^{\eta_2} \eta_1^{m-1}\int_1^{\eta_1}\frac{f_i(\zeta+\beta)-f_i(\beta)}{\zeta^{2m}}\,d\zeta\, d\eta_1\ldots d\eta_{m-1}\right|<$$

$$<\frac{\varepsilon_2}{2m-1}\,\frac{1}{(m-1)!}$$

і остаточно

$$\int_0^A \frac{f_i(z+\beta)}{z^{2m}}R(t;z)\,dz=$$

$$=-\frac{2}{(m-1)!}t^{2m-1}\int_0^A z\left[\int_1^z \ldots m-1 \ldots \int_1^{\eta_2} \eta_1^{m-1}\int_1^{\eta_1}\frac{f_i(\zeta+\beta)}{\zeta^{2m}}\,d\zeta\, d\eta_1\ldots d\eta_{m-1}\right]\times$$

$$\times\frac{\sin zt}{z}\,dz+c(t)\,t^{2m-2}. \tag{25}$$

Беручи до уваги, що (25) являє собою інтеграл Діріхле і що всі міркування так само повторюються для другого інтеграла, який знаходиться в правій частині рівності (20), виходячи з (20), (21), (25), одержуємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M\,|\,\zeta_s^m(t)\,|^2}{t^{2m-1}}=\frac{2\pi\,|\,c_s^m\,|^2}{2m-1}f_i(\beta). \tag{26}$$

Одержані результати можуть бути подані в слідуючому формулюванні:

Теорема 1. Дано систему лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами; вільні члени $\xi_i(t)$ утворюють багатомірну стаціонарну випадкову функцію, середнє значення якої $M\xi(t)=0$. Характеристичне рівняння має уявні корені $\pm i\beta$, які не співпадають з власними частотами випадкових функцій $\xi_j(t)$; цим кореням відповідають елементарні дільники матриці коефіцієнтів системи степені m. Нехай спектральні щільності $f_j(\lambda)$ відмінні від нуля при $\lambda=\pm\beta$. Тоді випадкові функції $y_s(t)$, які дають частинний розв'язок системи, матимуть нестаціонарні компоненти $\zeta_s^p(t)$ з середнім значенням $M\zeta_s^p(t)=0$ і дисперсією, яка задовольняє умові

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M|\zeta_s^p(t)|^2}{t^{2p-1}}=\frac{2\pi|c_s^p|^2}{2p-1}f_j(\pm\beta), \qquad p=1,\dots m.$$

Теорема відповідно поширюється на випадок, коли характеристичне рівняння має нульовий корінь.

4. Нехай характеристичне рівняння має уявні корені $\pm i\beta$, елементарні дільники, що відповідають цим кореням мають степінь, рівну одиниці. Нехай далі в деякому оточенні $\lambda=\beta$ прирости спектральних функцій $\Delta F_j(\lambda)=0$. Виходячи з властивостей спектральної функції, зрозуміло, що це також буде мати місце у відповідному оточенні $\lambda=-\beta$. Розглянемо для визначенності компоненту частинного розв'язку, яка відповідає кореню $+i\beta$ і випадковій функції $\xi_j(t)$, пам'ятаючи, що все сказане нижче поширюється на компоненту частинного розв'язку, що відповідає кореню $-i\beta$.

$$\zeta_s^j(t)=c_s e^{i\beta t}\int_0^t e^{-i\beta\tau}\xi_j(\tau)\,d\tau=c_s e^{i\beta t}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i(\beta-\lambda)t}-1}{-i(\beta-\lambda)}dZ_j(\lambda).$$

Виходячи з умов накладених на функцію $F_j(\lambda)$ і співвідношення [5]

$$F(\lambda+\Delta\lambda)-F(\lambda)=M|Z(\lambda+\Delta\lambda)-Z(\lambda)|^2, \tag{27}$$

інтеграли

$$\chi_j(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\frac{1}{i(\lambda-\beta)}dZ_j(\lambda) \tag{28}$$

і

$$\chi_j(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i(\lambda-\beta)}dZ_j(\lambda) \tag{29}$$

існують і визначають: перший — випадкову стаціонарну функцію, другий — випадкову константу. Середнє значення $M\chi_j(t)=0$ існує тому, що при осередненні полюс компенсується нулем в чисельнику. Так само існує інтеграл, що визначає кореляційну функцію

$$M\chi_j(t)\overline{\chi_j(s)}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda(t-s)}\frac{1}{(\lambda-\beta)^2}dF_j(\lambda). \tag{30}$$

А тому

$$\zeta_s^j(t)=c_s\chi_j(t)+c_s e^{i\lambda t}\chi_j(0). \tag{31}$$

$\zeta_s^j(t)$; $s=1,\ldots n$ — є компонентою частинного розв'язку системи (1); ця компонента відповідає кореню характеристичного рівняння $i\beta$ і випадковій функції $\xi_j(t)$. Але стовбець $c_s e^{i\beta t}\chi_j(0)$, $s=1,\ldots n$ дає частинний розв'язок відповідної однорідної системи. Тому $\tilde{\zeta}_s^j(t)=c_s\chi_j(t)$ є також компонентою частинного розв'язку неоднорідної системи. Випадкова функція $\chi_j(t)$, як це безпосередньо можна бачити, — стаціонарна і стаціонарно-зв'язана з іншими компонентами частинного стаціонарного розв'язку. Зауважимо, що випадкова функція $\zeta_s^j(t)$ має обмежену дисперсію, але не стаціонарна, тому, що $\chi_j(t)$ і $e^{i\beta t}\chi_j(t)$ — зв'язані нестаціонарно.

Нехай тепер степені елементарних дільників матриці коефіцієнтів, що відповідають кореням характеристичного рівняння $\pm i\beta$ дорівнюють m. Тоді, якщо в оточенні $\lambda=\beta$, $\Delta F_j(\lambda)=0$, то відповідна стаціонарна компонента розв'язку може бути представлена у вигляді

$$\tilde{\zeta}_s^j(t)=c_s\chi_j(t)=c_s\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\frac{1}{i^m(\lambda-\beta)^m}dZ_j(\lambda). \tag{32}$$

Таким чином, в нашому випадку, не зважаючи на присутність уявних коренів характеристичного рівняння, існує стаціонарний частинний розв'язок. Але, на відміну від нерезонансного випадку, коли існує однозначно визначений частинний стаціонарний розв'язок в даному разі стовбець $У(t)$, що дає стаціонарний розв'язок системи (1), визначається з точністю до $C^{(1)}e^{i\beta t}\varkappa_1+C^{(2)}e^{-i\beta t}\varkappa_2$, де $C^{(1)}e^{i\beta t}$, $C^{(2)}e^{-i\beta t}$ — стовбці частинних розв'язків однорідної системи, а $\varkappa_1$ і $\varkappa_2$ — випадкові константи, що задовольняють слідуючим умовам: $M\varkappa_1=0$; $M\varkappa_2=0$; $\varkappa_1$ і $\varkappa_2$ — взаємно некорельовані і некорельовані з випадковими функціями $\xi_j(t)$, тобто $M\varkappa_1\varkappa_2=0$; $M\varkappa_\kappa\xi_j(t),=0$; $\kappa=1,2$; $j=1,\ldots n$.

Розглянемо випадок, коли існують спектральні щільності $f_j(\lambda)$. Тоді легко зрозуміти, що для існування частинного стаціонарного розв'язку в випадку уявних коренів $\pm i\beta$ з степенями елементарних дільників m досить вимагати, щоб $f_j(\beta)=0$; $f_j'(\beta)=0;\ldots f_j^{(2m-1)}(\beta)=0$; $f_j^{(2m)}(\beta)$ — скінчена. З того, що спектральна щільність дійсного випадкового процесу — парна функція, випливає, що це також буде мати місце в точці $\lambda=-\beta$.

Оскільки спектральна щільність — невід'ємна, при $f(\lambda_0)=0$, в цій точці функція $f(\lambda)$ має мінімум, і тому $f'(\lambda_0)=0$, і перша відмінна від нуля похідна може бути лише похідною парного порядку.

Все сказане підсумовується теоремою, яка дає достатні умови існування стаціонарних розв'язків в резонансному випадку.

Теорема 2. Дано систему (1). Характеристичне рівняння має уявні корені $\pm i\beta_1\ldots\pm i\beta_\kappa$, серед яких можуть бути також рівні — кожен корінь виписується стільки разів, скільки йому відповідає груп розв'язків однорідної системи. Відповідні степені елементарних дільників: $m_1,\ldots,m_\kappa$ Величини $\pm i\beta_1,\ldots,\pm i\beta_\kappa$ не співпадають з власними частотами випадкової функції $\xi(t)$. В деякому оточенні $\lambda=\beta_p$, $p=1,\ldots\kappa$, прирости спектральних функцій $\Delta F_j(\lambda)=0$ (якщо існують спектральні щільності, то $f_l(\beta_p)=0\ldots f^{(2m_p-1)}(\beta_p)=0$; $f_l^{(2m_p)}(\beta_p)$ — скінчена). Тоді існує частинний стаціонарний розв'язок $У(t)$ системи (1) визначений з точністю до

$$\sum_{p_1=1}^{\kappa} C^{p_1} e^{i\beta_{p_1}t} \varkappa_{p_1} + \sum_{p_2=1}^{\kappa} C^{p_2} e^{-i\beta_{p_2}t} \varkappa_{p_2},$$

де

$$C^{p_1} e^{-i\beta_{p_1}t}, \quad C^{p_2} e^{-i\beta_{p_2}t},$$

— відповідні стовбці рішень однорідної системи, а $\varkappa_{p_1}$ і $\varkappa_{p_2}$ — випадкові константи, середнє значення яких дорівнює нулю і які взаємно некорельовані між собою та некорельовані з випадковими функціями $\xi_j(t)$.

Відповідне поширення теореми на випадок нульових коренів характеристичного рівняння очевидне.

ЛІТЕРАТУРА

1. Коронкевич О. І. Лінійні динамічні системи під дією випадкових сил. Наукові записки ЛДУ, т. 44, серія механіко-математична, в. 8, 1957.
2. Малкин И. Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М., 1956.
3. Хинчин А. Я. Усп. мат. наук, в. 5, 42—51, 1938.
4. Колмогоров А. Н. Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром. Юбилейный сборник АН СССР, т. I, 1947.
5. Яглом А. М. Усп. мат. наук, в. 5, 1952, стор. 3—168.
6. Karhunen K. Über lineare Methoden in der Warscheinlichkeitsrechnung. Ann. Akad. Sci. Fennicae, A, I, № 37, Helsinki, 1947, стор. 79.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

О. І. КОРОНКЕВИЧ

ДЕЯКІ ЗАУВАЖЕННЯ ДО ПИТАННЯ ПРО НЕПЕРЕРВНІСТЬ ВИПАДКОВИХ ФУНКЦІЙ

1. В цій роботі розглядається неперервність сум і добутків випадкових функцій і неперервність розв'язків диференціальних рівнянь, які мають випадкові члени. Стаціонарність випадкових функцій не припускається.

Неперервність випадкової функції розуміють як неперервність по імовірності, тобто [1]

$$P\{|\xi(t+\Delta t)-\xi(t)|<\varepsilon\}\underset{\Delta t\to 0}{\to}1, \tag{1}$$

або, частіше [2, 3, 4, 5], як неперервність в середньому квадратичному

$$M|\xi(t+\Delta t)-\xi(t)|^2\underset{\Delta t\to 0}{\to}0. \tag{2}$$

З (2) на основі нерівності Чебишева випливає (1), так що коли функція $\xi(t)$ неперервна в середньому квадратичному, то вона неперервна і по імовірності. Говорячи про неперервність випадкової функції, ми будемо в дальшому мати на увазі неперервність в розумінні (2).

Припускаючи випадкову функцію $\xi(t)$ — дійсною, позначимо двохточковий момент другого порядку $M\xi(t)\xi(s)=K(t;\ s)$ (коли випадкова функція комплексна — $K(t;\ s)=M\xi(t)\overline{\xi(s)}$). Якщо $M\xi(t)=0$ при довільних t, то $K(t;\ s)$ співпадає з кореляційною функцією [5], між іншим, іноді $K(t;\ s)$ називають кореляційною функцією незалежно від величини $M\xi(t)$ [3].

Використовуючи подані позначення, з (2) одержуємо

$$M|\xi(t+\tau)-\xi(t)|^2\leqslant|K(t+\Delta t,\ t+\Delta t)-K(t+\Delta t,t)|+$$
$$+|K(t,t+\Delta t)-K(t,t)|. \tag{3}$$

Таким чином, неперервність випадкової фунцкії в середньому квадратичному зводиться до неперервності її двохточкового моменту другого порядку у звичайному розумінні. Цей зв'язок розглядається в [3, 5]; результати, які стосуються цього питання, можна висловити в слідуючих формулюваннях, що нам здаються більш точними:

Теорема 1. Якщо момент другого порядку $K(t;\ s)=M\xi(t)\xi(s)$ — неперервний в довільній точці діагоналі квадрата $0\leqslant t\leqslant T;\ 0\leqslant s\leqslant T$ в напрямі однієї з координатних осей, то функція $K(t;\ s)$ неперервна по обом змінним в довільній точці в середині квадрата $T\times T$ і неперервна на границі квадрату при наближенні до неї з середини. В цьому випадку випадкова функція неперервна в середньому квадратичному на замкненому інтервалі $0\leqslant t\leqslant T$.

Зауважимо, що для дійсних випадкових функцій $K(t;\ s)=K(s;\ t)$. Тоді доведення випливає з нерівності

$$|K(t+\Delta t;\ s+\Delta s)-K(t;\ s)|\leqslant|K(t+\Delta t;\ s+\Delta s)-K(t+\Delta t;\ s)|+ \\ +|K(t+\Delta t;\ s)-K(t;\ s)| \tag{4}$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, одержуємо

$$|K(t+\Delta t;\ s+\Delta s)-K(t+\Delta t;\ s)|\leqslant \\ \leqslant\sqrt{M\,\xi^2(t+\Delta t)}\,\sqrt{M[\xi(s+\Delta s)-\xi(s)]^2} \tag{5}$$

Аналогічно оцінюємо модуль $|K(t+\Delta t;\ s)-K(t;\ s)|$, далі з допомогою нерівності (3) закінчуємо доведення першої частини теореми. Доведення другої частини одержуємо безпосередньо з (3). З тих же нерівностей випливає оберненість теореми:

Теорема 2. Якщо випадкова функція $\xi(t)$ неперервна в середньому квадратичному на замкненому інтервалі $0\leqslant t\leqslant T$, то момент другого порядку $K(t;\ s)=M\xi(t)\xi(s)$ є неперервний по обом аргументам в довільній точці всередині квадрата $T\times T$, і також неперервний на границі квадрата при наближенні до неї з середини.

2. Розглянемо випадкову функцію $\zeta(t)$, яка являє собою суму випадкових функцій

$$\zeta(t)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(t), \tag{6}$$

або більш загально

$$\zeta(t_1\ldots t_n)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(t_i). \tag{6'}$$

Очевидно, (6), (6′) можна розглядати як n-мірний випадковий вектор, аргументи якого в першому випадку змінюються на прямій, а в другому — в n-мірному просторі; (6′) можна також розглядати, як випадкове поле спеціального виду. Умова неперервності випадкової функції $\zeta(t_1,\ldots,t_n)$

$$M\left|\sum_{i=1}^{n}[\xi_i(t_i+\Delta t_i)-\xi_i(t_i)]\right|^2\underset{\substack{\Delta t_1\to 0\\ \cdots\cdots\\ \Delta t_n\to 0}}{\longrightarrow}0. \tag{7}$$

Очевидно, ця умова зводиться до неперервності других моментів окремих компонент $K_{ii}(t_i;\ s_i)=M\,\xi_i(t_i)\,\xi_i(s_i)$ і других змішаних моментів $K_{ij}(t_i;\ s_j)=M\,\xi_i(t_i)\,\xi_j(s_j)$, тобто до неперервності матриці $\{K_{ij}(t_i;\ s_j)\}$, яку ми в дальшому будемо називати кореляційною матрицею. Але з нерівності

$$|K_{ij}(t_i+\Delta t_i;\ t_j)-K_{ij}(t_i;\ t_j)|=|M[\xi_i(t_i+\Delta t_i)-\xi_i(t_i)]\,\xi_j(t_j)|\leqslant \\ \leqslant\sqrt{M\xi_j^2(t_j)}\,\sqrt{M[\xi_i(t_i+\Delta t_i)-\xi_i(t_i)]^2} \tag{8}$$

випливає, що неперервність всіх елементів кореляційної матриці виходить з неперервності її діагональних елементів. При цьому майже очевидною є:

Теорема 3. Якщо кожний діагональний елемент кореляційної матриці $K_{ii}(t_i; s_i)$ задовольняє на множині $0 \leqslant t_i \leqslant T$; $0 \leqslant s_i \leqslant T$ умовам теореми 1, то кореляційна матриця неперервна всюди всередині $2n$-мірного паралелепіпеда $0 \leqslant t_i \leqslant T$; $0 \leqslant s_j \leqslant T$; $i, j = 1, \ldots, n$, і неперервна на границі при наближенні до неї з середини.

Висновок. Сума неперервних випадкових функцій є неперервною випадковою функцією; n-мірний випадковий вектор є неперервний, якщо всі його компоненти — неперервні випадкові функції.

3. Нехай $\xi(t)$ — неперервна випадкова функція. Розглянемо умови, при яких момент

$$M\xi^{i_1}(t_1)\ldots\xi^{i_n}(t_n); \ \sum_{j=1}^{n} i_j = N; \ i_j \text{ — цілі числа}, \tag{9}$$

буде неперервною функцією своїх аргументів, і випадкова функція

$$\zeta(t_1; \ldots t_n) = (\xi^{i_1} t_1)\ldots\xi^{i_n}(t_n) \tag{10}$$

також буде неперервною випадковою функцією.

Покажемо, що має місце

Теорема 4. Якщо випадкова функція $\xi(t)$ — неперервна в середньому квадратичному на інтервалі $0 \leqslant t \leqslant T$, і момент $M\xi^{2(N-1)}(t)$ — обмежений, то довільний момент (9) не вище N-го порядку є неперервною функцією в n-мірному просторі; $0 \leqslant t_i \leqslant T$; $i = 1, \ldots, n$.

Справді,

$$|M\xi(t_1 + \Delta t_1)\ldots\xi(t_N + \Delta t_N) - M\xi(t_1)\ldots\xi(t_N)| \leqslant |M\xi(t_1 +$$

$$+ \Delta t_1)\ldots\xi(t_{N-1} + \Delta t_{N-1})\xi(t_N + \Delta t_N) - M\xi(t_1 + \Delta t_1)\ldots\xi(t_{N-1} +$$

$$+ \Delta t_{N-1})|\xi(t_N)| + |M\xi(t_1 + \Delta t_1)\ldots\xi(t_{N-1} + \Delta t_{N-1})\xi(t_N) - M\xi(t_1 +$$

$$+ \Delta t_1)\ldots\xi(t_{N-1})\xi(t_N)| +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ |M\xi(t_1 + \Delta t_1)\xi(t_2)\ldots\xi(t_N) - M\xi(t_1)\ldots\xi(t_N)|. \tag{11}$$

$$|M\xi(t_1 + \Delta t_1)\xi(t_2)\ldots\xi(t_N) - M\xi(t_1)\ldots\xi(t_N)| = |M\xi(t_2)\ldots\xi(t_N)[\xi(t_1 +$$

$$+ \Delta t_1) - \xi(t_1)] \leqslant \sqrt{M\xi^2(t_2)\ldots\xi^2(t_N)}\sqrt{M[\xi(t_1 + \Delta t_1) - \xi(t_1)]^2}. \tag{12}$$

Момент $M\xi^2(t_2)\ldots\xi^2(t_N)$ має порядок $2(N-1)$; легко показати, що

$$M\xi^2(t_2)\ldots\xi^2(t_N) \leqslant \sum_{\kappa=2}^{N} A_\kappa M\xi^{2(N-1)}(t_\kappa), \tag{13}$$

тому з умови теореми випливає, що момент, який знаходиться під першим радикалом — обмежений. Аналогічно оцінюються всі інші модулі. З одержаних нерівностей виходить вірність теореми для моментів N-го порядку. Але з обмеженості момента $M\xi^{2\kappa}(t)$ випливає обмеженість довільного моменту нижчого порядку, і тому теорема є вірною.

Висновок 1. Якщо на інтервалі $0 \leqslant t \leqslant T$ випадкова функція $\xi(t)$ — неперервна в середньому квадратичному і момент $M\xi^{4N_0-2}(t)$ — обмежений, то довільна випадкова функція (10) при $N \leqslant N_0$ — неперервна в середньому квадратичному в n-мірному паралелепіпеді. $0 \leqslant t_i \leqslant T$; $i = 1, \ldots, n$.

Доведення випливає з теореми 4 і з того, що неперервність випадкової функції в середньому квадратичному зводиться до неперервності її кореляційної функції.

Висновок 2. Якщо момент $M\xi^{2\kappa}(t)$ — обмежений для довільного скінченого додатнього числа κ, і випадкова функція $\xi(t)$ — неперервна в середньому квадратичному, то довільний момент (9) є неперервною функцією і довільна випадкова функція (10) також неперервна в середньому квадратичному.

Висновок 3. Добуток неперервних в середньому квадратичному випадкових функцій $\xi(t)\eta(t)$ є неперервною випадковою функцією, якщо $M\xi^6(t)$; $M\eta^6(t)$ — обмежені, або випадкові функції $\xi(t)$; $\eta(t)$ — незалежні.

Перша частина твердження випливає з висновку 1; доведемо вірність другої частини теореми:

$$M[\xi(t+\Delta t)\eta(t+\Delta t) - \xi(t)\eta(t)]^2 = M[\xi^2(t+\Delta t)\eta^2(t+\Delta t) - 2\xi(t+ \\ +\Delta t)\eta(t+\Delta t)\xi(t)\eta(t) + \xi^2(t)\eta^2(t) - \xi^2(t+\Delta t)\eta(t+\Delta t)\eta(t) + \\ + \xi^2(t+\Delta t)\eta(t+\Delta t)\eta(t) - \xi^2(t)\eta(t+\Delta t)\eta(t) + \xi^2(t)\eta(t+\Delta t)\eta(t)] \leqslant \\ \leqslant |M\xi^2(t+\Delta t)\eta(t+\Delta t)[\eta(t+\Delta t) - \eta(t)]| + |M\xi(t+\Delta t)\eta(t+ \\ +\Delta t)\eta(t)[\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]| + |M\eta(t+\Delta t)\eta(t)\xi(t)[\xi(t+\Delta t) - \\ - \xi(t)]| + |M\eta(t)\xi^2(t)[\eta(t+\Delta t) - \eta(t)]|. \quad (14)$$

Використовуючи нерівність Коші-Буняковського і беручи до уваги незалежність випадкових функцій $\xi(t)$ і $\eta(t)$, одержимо

$$|M\xi^2(t+\Delta t)\eta(t+\Delta t)[\eta(t+\Delta t) - \eta(t)]| = M\xi^2(t+\Delta t)|M\eta(t+ \\ +\Delta t)[\eta(t+\Delta t) - \eta(t)]| \leqslant M\xi^2(t+ \\ +\Delta t)\sqrt{M\eta^2(t+\Delta t)}\sqrt{M[\eta(t+\Delta t) - \eta(t)]^2}; \quad (15)$$

$$|M\xi(t+\Delta t)\eta(t+\Delta t)\eta(t)[\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]| = |M\eta(t+ \\ +\Delta t)\eta(t)M\xi(t+\Delta t)[\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]| \leqslant |M\eta(t+ \\ +\Delta t)\eta(t)\sqrt{M\xi^2(t+\Delta t)}\sqrt{M[\xi(t+\Delta t) - \xi(t)]^2}. \quad (16)$$

Аналогічно оцінюються інші доданки в правій частині нерівності (14).

4. Розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dY}{dt} = P(t)Y + \xi(t), \quad (17)$$

де Y — стовбець невідомих функцій; $\xi(t)$ — стовбець випадкових функцій; $P(t)$ — матриця коефіцієнтів, елементи якої — функції, неперервні на замкненому проміжку $0 \leqslant t \leqslant T$. Тоді, очевидно, що з неперервності в середньому квадратичному випадкової функції $\xi(t)$ випливає неперервність в тому ж розумінні частинного розв'язку системи (17).

Розглянемо нелінійну систему, аналогічну розглянутим в [6]

$$\frac{dY}{dt} = P(t)\,Y + \xi(t) + \mu\Phi(t;\, y_1, \ldots y_n;\, \mu\xi_n, \ldots \mu\xi_n) \tag{18}$$

Φ — стовбець функцій, неперервних по t і аналітичних відносно решти аргументів. Нехай розв'язок системи (18) може бути представлений у вигляді ряду по степенях параметра μ, який рівномірно збігається при $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ (див. [6]). Тоді для неперервності частинного розв'язку достатньо, крім неперервності функції $\Phi(t)$ відносно t, припустити неперервність заданих випадкових функцій і обмеженість моментів $M\xi_i^{2\kappa}(t)$ при довільному цілому κ.

ЛІТЕРАТУРА

1. Слуцкий Е. Е. Несколько предложений к теории случайных функций. Тр. Среднеазиатского госуниверситета, в. У-а, математика, Ташкент, 1939.
2. Karhunen K. Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ann. Acad. Sci. Fennicae, A, I, № 37, Helsinki 1947, стор. 79.
3. Karhunen K. Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse. Ann. Acad. Sci. Fennicae, № 34, Helsinki, 1946.
4. Колмогоров А. Н. Статистическая теория колебаний с непрерывным спектром. Юбилейный сборник АН СССР, т. I, 1947.
5. Пугачев В. С. Изв. АН СССР, серия математическая, т. 17, 1953, стор. 401—420.
6. Ворович И. Н. Изв. АН СССР, серия математическая, т. 20, 1956. стор. 17—32.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

Я. Б. ЛОПАТИНСЬКИЙ

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ З АНАЛІТИЧНИМ ЯДРОМ

В роботі [1] Е. Е. Леві вказав метод дослідження аналітичних властивостей розв'язків інтегральних рівнянь з аналітичними ядрами, які мають (в дійсному перетині) особливості полярного типу.

Метою цієї статті є визначення області аналітичності розв'язків інтегрального рівняння з аналітичним ядром.

Нехай D — обмежена відкрита множина n-мірного дійсного простору, ε — деяке додатнє число, менше від одиниці. Для точок $x=(x_1, \ldots, x_n)$ відповідного комплексного простору покладається

$$x'=(Rex_1, \ldots, Rex_n);\ x''=(Jmx_1, \ldots, Jmx_n);\ |x|=+\sqrt{|x_1|^2+\ldots+|x_n|^2};$$

для точки $x\epsilon D$ $d(x')$ означає віддаль x' від границі D. Нехай $\Omega_\varepsilon^{(1)}$ — множина комплексних точок $x=(x_1, \ldots, x_n)$ таких, що $x'\epsilon D$, $(x'')\epsilon\varepsilon d(x')$; взагалі, $\Omega_\varepsilon^{(m)}$ — множина поступів m точок $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}$ з $\Omega_\varepsilon^{(1)}$ таки , що для довільних j, $\kappa (j\neq\kappa)$

$$|x^{(j)''}-x^{(\kappa)''}|<\varepsilon\,|x^{(j)'}-x^{(\kappa)'}|.$$

Лема 1. Нехай (x, y) $\Omega_\varepsilon^{(2)}$. Тоді в $\Omega_\varepsilon^{(1)}$ можна побудувати довільно гладку n-мірну поверхню $\tilde{D}$, яка проходить через точки x, y і обмежує разом з D $(n+1)$-мірну многовидність, довільний поступ m різних точок якої належить $\Omega_\varepsilon^{(m)}$, для кожного m.

Тут буде вказано спосіб побудови кусково-гладкої поверхні такої, яку можна далі як завгодно згладити.

В D проводяться кулі S_x, S_y з центрами в точках x', y', радіуси яких дорівнюють $\frac{|x''|}{\varepsilon_1}$, $\frac{|y''|}{\varepsilon_1}$ відповідно; ε_1 вибирається меншим ε і настільки близьким до ε, щоб

$$|x''|<\varepsilon_1\,d(x');\ |y''|<\varepsilon_1\,d(y');\ |x''-y''|<\varepsilon_1|x'-y'|.$$

Тоді, як легко зауважити, S_x, $S_y\epsilon D$; при цьому при достатній близькості ε_1 до ε, S_x і S_y або мають пустий перетин, або їх границі перетинаються більше, ніж в одній точці. В першому випадку, за Е. Е. Леві, $\tilde{D}$ складається з $D/(S_x U S_y)$ і бокових поверхонь двох конусів з вершинами в точках x, y і з основами S_x, S_y відповідно. Побудова в другому випадку більш складна.

Нехай S $(n-2)$-мірна сфера, по якій перетинаються границі S_x, S_y; z' — центр цієї сфери; ω — найближча до z' точка границі $S_x U S_y$; $d(z')>|\omega-z'|$. Очевидно, $\varepsilon_1|\omega-x'|=x''$, $\varepsilon_1|\omega-y'|=|y''|$; $\varepsilon_1|x'-y'|>$

$>|x''-y''|$ сторони трикутника з вершинами o, x'', y'' не більші від помножених на ε_1 відповідних сторін трикутника з вершинами ω, x', y'. Таким чином кулі з центрами в точках o, x'', y'' і радіусами $\varepsilon_1|\omega-z'|$, $\varepsilon_1|x-z'|$, $\varepsilon_1|y'-z'|$ мають спільні внутрішні точки; нехай z'' одна з них. Тепер будується $(n-1)$-мірний конус T, описаний відрізком, який сполучує точку $z=z'+iz''$ з точкою S. Нехай $T_x(T_y)$ n-мірна поверхня, описана відрізком, який сполучує точку $x(y)$ зі змінною точкою, що пробігає T і частину границі $S_x(S_y)$, яка не належить $S_y(S_x)$. Поверхня $\tilde{D}$ складається з $D/(S_x \cup S_y)$, T_x і T_y.

Легко перевірити, що в обох випадках $\tilde{D}$ задовольняє умови леми. Функція $K(x, y)$, визначена при $(x, y)\in \Omega_\varepsilon^{(2)}$, $x \neq y$, буде називатись функцією класу κ, якщо обмежені при $(x, y)\in \Omega_\varepsilon^{(2)}$, $x\neq y$, $|x-y|^\kappa K(x, y)$ (при $\kappa>0$), або $\dfrac{1}{1+|\lg|x-y||} K(x, y)$ (при $\kappa=0$), або $K(x, y)$ (при $\kappa<0$).

Лема 2. Нехай $K(x, y)$, $L(x, y)$ — аналітичні функції своїх аргументів при $(x, y)\in \Omega_\varepsilon^{(2)} (x=(x_1, \ldots, x_n),\ y=(y_1, \ldots, y_n))$, що належать відповідно до класів κ і l; $l, \kappa<n$.

Тоді

$$M(x, y)=\int_D K(x, z) L(z, y)\, dz \quad (dz=dz_1, \ldots, dz_n)$$

визначене при x, $y\in D$, що аналітично продовжується на $(x, y)\in\Omega_\varepsilon^{(2)}$, причому $M(x, y)$ належить до класу $\kappa+l-n$ в $\Omega_\varepsilon^{(2)}$. Це уточнення одного твердження Е. Е. Лєві; метод доведення також належить Е. Е. Лєві.

Нехай $(x, y)\in \Omega_\varepsilon^{(2)}$, $\tilde{D}$ — поверхня, побудована при доведенні першої леми

$$M(x, y)=\int_{\tilde{D}} K(x, z) L(z, y)\, dz. \tag{1}$$

Поверхня $\tilde{D}$ тут вважається орієнтованою згідно з D, підінтегральний вираз розглядається як зовнішня диференціальна форма. Як відомо, величина інтегралу (1) не змінюється при заміні $\tilde{D}$ другою поверхнею, яка задовольняє обмеження першої леми.

Нехай $\tilde{D}_{\tau^0}$ — частина поверхні $\tilde{D}_0$, побудованої для точок x^0, y^0, одержана видаленням τ^0 — оточення точок x^0, y^0. Для пари (x, y), достатньо близької до пари (x^0, y^0) і достатньо малого τ^0 поверхню $\tilde{D}$ можна скласти з $\tilde{D}_{\tau^0}$ і конусів з вершинами в точках x, y, які опираються на утворену границю D_{τ^0}. Тоді методом Е. Е. Лєві можна довести аналітичність $M(x, y)$ в деякому оточенні точки (x^0, y^0).

Оцінка характеру особливості $M(x, y)$ при $x=y$ проводиться елементарно.

Лема доведена.

Подібним способом доводиться слідуюча

Лема 3. Нехай $K(x, z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}), y$, є обмежена аналітична функція при $(x, z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}, y) \in \Omega_\varepsilon^{(m+2)}$, що залишається неперервною при суміщенні точок $x, z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}, y$. Тоді

$$M(x, y) = \int_D dz^{(1)} \ldots \int_D K(x, z^{(1)}, \ldots, z^{(m)}, y)\, dz^m,$$

аналітично продовжувальна в $\Omega_\varepsilon^{(2)}$, обмежена і неперервна при $x=y$.

Простим наслідком цієї леми є слідуюче твердження.

Якщо $K(x, y)$ — обмежена аналітична функція при $(x, y) \in \Omega_\varepsilon^{(2)}$, що неперервно продовжується у випадку $x=y$, то функція Фредгольма $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)$ є обмеженою аналітичною функцією x, y, λ при $(x, y) \in \Omega_\varepsilon^{(2)}$ і довільній обмеженій області зміни λ, що неперервно продовжується на випадок $x=y$.

Цей результат відразу одержується на основі застосування леми 3 до окремих доданків відомого розкладу $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)$ по степенях λ.

Аналітичну природу функції Фредгольма $D\left(\begin{matrix} x^{(1)} \ldots x^{(m)} \\ y^{(1)} \ldots y^{(m)} \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ можна дослідити таким же чином при допомозі деякого узагальнення леми 3. Простіше, однак, використати легку для перевірки при регулярних λ тотожність

$$D\left(\begin{matrix} x^{(1)} \ldots x^{(m)} \\ y^{(1)} \ldots y^{(m)} \end{matrix}\middle|\lambda\right) = \frac{1}{\{D(\lambda)\}^{m-1}} \begin{vmatrix} D\left(\begin{matrix} x^{(1)} \\ y^{(1)} \end{matrix}\middle|\lambda\right) \ldots D\left(\begin{matrix} x^{(1)} \\ y^{(m)} \end{matrix}\middle|\lambda\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D\left(\begin{matrix} x^{(m)} \\ y^{(1)} \end{matrix}\middle|\lambda\right) \ldots D\left(\begin{matrix} x^{(m)} \\ y^{(m)} \end{matrix}\middle|\lambda\right) \end{vmatrix}^{1)} \qquad (2)$$

Для характеристичних значень λ в правій частині формули (2) слід розкрити виникаючу там неозначеність.

Інтегральне рівняння

$$u(x) = f(x) + \int_D K(x, z)\, u(z)\, dz \qquad (3)$$

у випадку, коли $K(x, y)$ є аналітичною функцією при $(x, y) \in \Omega_\varepsilon^{(2)}$ в припущенні, що $K(x, y)$ належить $\Omega_\varepsilon^{(2)}$ до класу $\kappa < n$, приводиться до вигляду

$$u(x) = F(x) + \int_D K^{(m+1)}(x, z)\, u(z)\, dz;$$

$$F(x) = f(x) + \int_D K(x, z) f(z)\, dz + \ldots + \int_D K^{(m)}(x, z) f(z)\, dz,$$

причому $K^{(m+1)}(x, y)$ при $m > \dfrac{\kappa}{n-\kappa}$ обмежене в $\Omega_\varepsilon^{(2)}$ і неперервно продовжувальне для $x=y$, а аналітична природа $F(x)$ легко визначається лемою 2.

З цього зауваження безпосередньо випливає слідуюча теорема.

Теорема. Якщо $f(x)$ аналітична обмежена функція при $x \in \Omega_{\varepsilon}^{(1)}$, $K(x, y)$ аналітична функція при $(x, y) \in \Omega_{\varepsilon}^{(2)}$, що належить до класу $\kappa < n$, то всякий обмежений в D розв'язок рівняння (3) являється обмеженою аналітичною функцією в $\Omega_{\varepsilon}^{(1)}$.

Зокрема це вірно для власних функцій ядра $K(x, y)$ і асоційованого ядра.

Внаслідок того, що за Фредгольмом система інтегральних рівнянь може бути приведена до одного інтегрального рівняння, теорема вірна також і для систем рівнянь.

ЛІТЕРАТУРА

1. Леви Э. Э. Усп. мат. наук, 8, 1941, стор. 249.
2. Platrier. J. de Math., 1913, стор. 233.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

Д. П. МЕЛЬНИК

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ З ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ НЕОБМЕЖЕНОГО ПРОСТОРУ

Нехай задана система рівнянь еліптичного типу

$$A\left(\lambda,\, x,\, \frac{\partial}{\partial x}\right)u \equiv A_0\left(\lambda,\, x,\, \frac{\partial}{\partial x}\right)u + A_1\left(\lambda,\, x,\, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0, \qquad (1)$$

де $A_0\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ означає диференціальний оператор порядку s, однорідний відносно $\lambda, \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}$, тобто оператор вигляду

$$A_0\left(\lambda,\, x,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{\kappa_1+\cdots+\kappa_{n+1}=s} A_{\kappa_1\ldots\kappa_{n+1}}(x)\,\lambda^{\kappa_{n+1}}\frac{\partial^{\kappa_1+\cdots+\kappa_n}}{\partial x_1^{\kappa_1}\cdots\partial x_n^{\kappa_n}};$$

$$A_1\left(\lambda,\, x,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{\kappa_1+\cdots\kappa_{n+1}<s} A_{\kappa_1\ldots\kappa_{n+1}}(x)\,\lambda^{\kappa_{\kappa+1}}\frac{\partial^{\kappa_1+\cdots+\kappa_n}}{\partial x_1^{\kappa_1}\cdots\partial x_n^{\kappa_n}}.$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мірного дійсного простору, λ — дійсне додатнє число, $A_{\kappa_1\ldots\kappa_{n+1}}(x)$ — квадратні матричні функції, визначені в усьому просторі, $u(x)$ — стовбець, складений із невідомих функцій.

Фундаментальним розв'язком 1) системи (1) з особливістю в точці y називається матриця $\omega_\lambda(x, y)$, що має слідуючі властивості:

1) s раз неперервно диференційовна в усьому просторі, за винятком точку y;

2) $$A\left(\lambda,\, x,\, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_\lambda(x, y) = 0 \quad (x \neq y);$$

3) для довільної $s-1$ разів неперервно диференційовної матриці $v(x)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\cdots(n-1)\cdots\int_{S_\varepsilon}\sum_{\kappa=1}^{n}\cos(\nu, x_\kappa)\,B_\kappa(\omega_\lambda(x, y), v(x))\,d_x s = v'(y),$$

де S_ε — сфера радіуса ε з центром в точці y; ν — орт зовнішньої нормалі до S_ε; $B_\kappa(u, v)$ — білінійні форми, які визначаються за формулою

$$v'(x)\,A\left(\lambda,\, x,\, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) - \left(A'\left(\lambda,\, x,\, \frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right)'u(x) = \sum_{\kappa=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_\kappa}B_\kappa(u, v)$$

$$\left(A'\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right) — \text{спряжений оператор}\right).$$

Як відомо, ці білінійні форми визначаються неоднозначно. Будемо вважати їх визначеними так, що в них входять лише похідні до $s-1$ порядку.

Теорема. Нехай існує така додатня в усьому просторі функція $A_0(x)$, що

$$\frac{\det A_0(\lambda,\ x,\ i\alpha)}{[A_0(x)]^p\,|\alpha'|^{sp}} \geqslant \mu > 0 \tag{2}$$

для кожної точки x простору і для кожної дійсної ненульової точки $\alpha' = (\lambda, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Якщо при цьому коефіцієнти оператора $A_0\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовні $s+1$ разів, коефіцієнти при похідних порядку $j (j=0,\ 1, \ldots, s-1)$ в операторі $A_1\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ неперервно диференційовні j разів в усьому просторі, причому коефіцієнти оператора $A_0\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ будуть порядку $O(A_0(x))$, а похідні до s порядку цих коефіцієнтів, так як і коефіцієнти оператора $A_1\left(\lambda,\ x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ ростуть не швидше, ніж $A_0(x)$ при $|x| \to \infty$, то при достатньо великому λ існує фундаментальний розв'язок системи (1) $\omega_\lambda(x,\ y)$ в усьому просторі і задовольняє слідуючим оцінкам, справедливим як при $|x-y| \to \infty$, так і при $|x-y| \to 0$:

$$\frac{\partial^{\kappa_1+\cdots+\kappa_n}\omega_\lambda(x, y)}{\partial x_1^{\kappa_1}\cdots\partial x_n^{\kappa_n}} =$$

$$= O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{A_0(x)}\varphi_{n-s+\kappa_1+\cdots+\kappa_n}(|x-y|)\right) \kappa_1+\cdots+\kappa_n = 0, 1, \cdots, s;\ \varepsilon > 0,$$

де

$$\varphi_\kappa(|x-y|) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x-y|^\kappa} & (\kappa > 0) \\ |\lg|x-y|| + 1 & (\kappa = 0) \\ 1 & (\kappa < 0). \end{cases}$$

Доведення. Позначимо через $\omega_0(\lambda,\ y,\ x-y)$ фундаментальний розв'язок з особливістю в точці y для системи рівнянь з постійними коефіцієнтами

$$A_0\left(\lambda,\ y,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)u = \sum_{\kappa_1+\cdots\kappa_{n+1}=s} A_{\kappa_1\cdots\kappa_{n+1}}(y)\,\lambda^{\kappa_{n+1}}\frac{\partial^{\kappa_1+\cdots+\kappa_n}u}{\partial x_1^{\kappa_1}\cdots\partial x_n^{\kappa_n}} = 0.$$

Користуючись методом Бохнера [2], неважко одержати

$$\omega_0(\lambda, y, x-y) = \frac{(-1)^{n-s+1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(i\,|x-y|^2)^{n-s+1}} \int\limits_{\infty} e^{i(\alpha, x-y)} \left(\sum_{\kappa=1}^{n} (x_\kappa - \right.$$

$$\left. - y_\kappa) \frac{\partial}{\partial \alpha_\kappa} \right)^{n-s+1} \left(\sum_{\kappa_1 + \ldots + \kappa_{n+1} = s} A_{\kappa_1 \ldots \kappa_{n+1}}(y)\, \lambda^{\kappa_{n+1}} (i\alpha_1)^{\kappa_1} \cdots (i\alpha_n)^{\kappa_n} \right)^{-1} d\alpha,$$

де $\int\limits_{\infty}$ означає n-мірний інтеграл по всьому простору.

Фундаментальний розв'язок з особливістю в точці y для системи (1) будемо шукати у вигляді

$$\omega_\lambda(x, y) = \omega_0(\lambda, x, x-y) + \int\limits_{\infty} \omega_0(\lambda, x, x-z)\, g(z, y)\, dz, \tag{3}$$

де $g(x, y)$ покищо невідома матрична функція, яку будемо підбирати так, щоб функція $\omega_\lambda(x, y)$ задовольняла другій умові фундаментальності.

Припустимо, що знайдена так функція $g(x, y)$ неперервно диференційовна по x_κ один раз при $x \neq y$. Неважко пересвідчитись, що в цьому припущенні відносно $g(x, y)$ матриця $\omega_\lambda(x, y)$, що визначається формулою (3), неперервно диференційовна s разів при $x \neq y$, тобто виконується перша умова фундаментальності.

На основі леми 3 [3]

$$A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_\lambda(x, y) = A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_0(\lambda, x, x-y) +$$

$$+ \int\limits_{\infty} A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_0(\lambda, x, x-z)\, g(z, y)\, dz + g(x, y).$$

Таким чином, питання про можливість добору такої матриці $g(x, y)$, щоб для $\omega\,(x, y)$ виконувалась друга умова фундаментальності, рівнозначне питанню про можливість розв'язку слідуючої системи інтегральних рівнянь:

$$g(x, y) + \int\limits_{\infty} A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_0(\lambda, x, x-z)\, g(z, y)\, dz +$$

$$+ A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_0(\lambda, x, x-y) = 0. \tag{4}$$

Покажемо тепер, що система (4) має розв'язок. Дослідимо ядро цієї системи. Перш за все, оцінимо $\omega_0(\lambda, x, x-y)$, а для цього перетворимо його вираз. Зробимо ортогональне перетворення

$$\alpha_\kappa = \sum_{l=1}^{n} c_{\kappa l} \tilde{\alpha}_l; \quad x_\kappa = \sum_{l=1}^{n} c_{\kappa l} \tilde{x}_l,$$

причому таке, щоб напрям n-осі співпав з напрямом вектора $x-y$, а після цього проведемо заміну

$$\tilde{\alpha} = \lambda \beta.$$

Тоді, очевидно,

$$\omega_0(\lambda, x, x-y) = \frac{(-1)^{n-s+1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(i|x-y|^2)^{n-s+1}} \int\limits_{\infty} e^{i(\alpha,\, x-y)} \left(\sum_{\kappa=1}^{n}(x_\kappa - y_\kappa)\frac{\partial}{\partial \alpha_\kappa}\right)^{n-s+1} \times$$

$$\times A_0^{-1}(\lambda, x, i\alpha_1, \ldots, i\alpha_n)\, d\alpha = \frac{(-1)^{n-s+1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(i|x-y|^2)^{n-s+1}} \times$$

$$\times \int\limits_{\infty} e^{i\tilde{\alpha}_n|x-y|}\left(\tilde{x}_n \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_n}\right)^{n-s+1} A_0^{-1}\left(\lambda, x, i\sum_{l=1}^{n} c_{1l}\tilde{\alpha}_l, \ldots, i\sum_{l=1}^{n} c_{nl}\tilde{\alpha}_l\right) d\tilde{\alpha} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-s+1}\tilde{x}^{n-s+1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(i|x-y|^2)^{n-s+1}\lambda} \int\limits_{\infty} e^{i\lambda\beta_n|x-y|} \frac{\partial^{n-s+1}}{\partial \beta_n^{n-s+1}} \times$$

$$\times A_0^{-1}\left(1, x, i\sum_{l=1}^{n} c_{1l}\beta_l, \ldots, i\sum_{l=1}^{n} c_{nl}\beta_l\right) d\beta. \qquad (5)$$

Можна показати, що в припущенні (2) величина останнього інтегралу не зміниться, якщо зсунути трохи шлях інтегрування, наприклад, по β_n в комплексну площину

$$\beta_n \to \beta_n + i\varepsilon_0 \quad (\varepsilon_0 > 0).$$

Тому на основі (5)

$$\omega_0(\lambda, x, x-y) = \frac{(-1)^{n-s+1}\tilde{x}_n^{n-s+1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(i|x-y|^2)^{n-s+1}\lambda} \times$$

$$\times \int\limits_{\infty} e^{i\lambda(\beta_n + i\varepsilon_0)|x-y|} \frac{\partial^{n-s+1}}{\partial \beta_n^{n-s+1}} A_0^{-1}\left(1, x, i\sum_{l=1}^{n} c_{1l}\beta_l - c_{1n}\varepsilon_0, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, i\sum_{l=1}^{n} c_{nl}\beta_l - c_{nn}\varepsilon_0\right) d\beta = \frac{(-1)^{n-s+1}\, e^{-\lambda\varepsilon_0 \cdot |x-y|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \times$$

$$\times \int\limits_{\infty} \frac{\tilde{x}_n^{n-s+1}}{(i|x-y|^2)^{n-s+1}} e^{i\tilde{\alpha}_n|x-y|} \frac{\partial^{n-s+1}}{\partial \tilde{\alpha}_n^{n-s+1}} A_0^{-1}\left(\lambda, x, i\sum_{l=1}^{n} c_{1l}\tilde{\alpha}_l - \lambda c_{1n}\varepsilon_0, \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, i\sum_{l=1}^{n} c_{nl}\tilde{\alpha}_l - \lambda c_{nn}\varepsilon_0\right) d\tilde{\alpha} = \frac{(-1)^{n-s+1}\, e^{-\lambda\varepsilon_0|x-y|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \times$$

$$\times \int\limits_{\infty} \frac{e^{i(\alpha,\, x-y)}}{(i|x-y|^2)^{n-s+1}} \left(\sum_{\kappa=1}^{n}(x_\kappa - y_\kappa)\frac{\partial}{\partial \alpha_\kappa}\right)^{n-s+1} A_0^{-1}(\lambda, x, i\alpha_1 -$$

$$- \lambda c_{1n}\varepsilon_0, \ldots, i\alpha_n - \lambda c_{nn}\varepsilon_0)\, d\alpha.$$

Застосовуючи до останнього інтегралу теорему 13 [2], враховуючи при цьому виконання умови (2) і припущення про те, що коефіцієнти оператора $A_0\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ мають оцінку $O(A_0(x))$, одержимо, що

$$\omega_0(\lambda, x, x-y) = O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon_0|x-y|}}{A_0(x)}\varphi_{n-s}(|x-y|)\right), \tag{6}$$

а оцінки для похідних $\omega_0(\lambda, x, x-y)$ одержуються диференціюванням функції $\frac{e^{-\lambda\varepsilon_0|x-y|}}{A_0(x)}\varphi_{n-s}(|x-y|)$, якщо для простоти вважати, що $A_0(x)$ веде себе так, як коефіцієнти оператора $A_0\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Легко бачити, що в нашому припущенні відносно коефіцієнтів всі члени виразу $A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0(\lambda, x, x-y)$ будуть мати, наприклад, для випадку $s<n$ оцінку типу $O\left(\frac{(\lambda\varepsilon_0)^\kappa e^{-\lambda\varepsilon_0|x-y|}}{|x-y|^l}\right)$, де $\kappa=0,1,\ldots,s-1$; $l=n-s,\ldots,n-1$, причому κ і l приймають свої значення так, що завжди $\kappa+l<n$. В цьому випадку члени $\int\limits_\infty A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0(\lambda, x, x-z)dz$ будуть мати оцінку типу

$$O\left(\int\limits_\infty (\lambda\varepsilon_0)^\kappa \frac{e^{-\lambda\varepsilon_0|x-z|}}{|x-z|^l}dz\right) = O\left((\lambda\varepsilon_0)^\kappa\int\limits_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon_0\rho}\,\rho^{n-1-l}\,d\rho\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{\lambda\varepsilon_0^{n-l-\kappa}}\int\limits_0^\infty l^{-u}\,u^{n-1-l}du\right) = O\left(\frac{1}{\lambda\varepsilon_0^{n-l-\kappa}}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda\varepsilon_0}\right).$$

Тоді, очевидно,

$$\int\limits_\infty\left|A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0(\lambda, x, x-z)\right|dz \leqslant \frac{C}{\lambda\varepsilon_0} < 1 \text{ при } \lambda > \frac{C}{\varepsilon_0}.$$

Аналогічний результат одержується і для випадку $s=n$ і для $s<n$. Отже, при достатньо великому λ

$$\int\limits_\infty\left|A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0(\lambda, x, x-z)\right|dz < 1,$$

а, значить, систему (4) можна розв'язати методом послідовних наближень.

На основі леми 1 [1] $g(x, y)$ неперервно диференційовна по x_κ при $x\neq y$, тобто припущення про $g(x, y)$ виправдане. Таким чином, матриця $\omega_\lambda(x, y)$, що визначається по формулі (3), задовольняє першій і другій умові фундаментальності. Як легко бачити, $\omega\ (x, y)$ задовольняє і третій умові фундаментальності, за рахунок першого доданку $\omega_0(\lambda, x, x-y)$. А тепер оцінимо $\omega_\lambda\ (x, y)$. Для стислості викладу обмежимось випадком $s<n$. Оцінка першого доданку в формулі (3) відома.

Для того, щоб оцінити другий доданок, перш за все потрібно оцінити $g(x, y)$.

Розв'язуючи систему (4) методом послідовних наближень, одержимо

$$g(x,y) = -A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0(\lambda, x, x-y) +$$

$$+\int_\infty A\left(\lambda, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega_0(\lambda, x, x-z)\, A\left(\lambda, z, \frac{\partial}{\partial z}\right)\omega_0(\lambda, z, z-y)\,dz + \ldots$$

Оскільки кожний член цього рівномірно збіжного ряду має оцінку $O\left(e^{-\lambda\varepsilon_i|x-y|}\right)$ при $|x-y|\to\infty\ (i=1, 2, \ldots; 0<\varepsilon'<\ldots<\varepsilon_2<\varepsilon_1<\varepsilon_0)$, то $g(x, y) = O\left(e^{-\lambda\varepsilon'|x-y|}\right)\ (|x-y|\to\infty)$. При $|x-y|\to 0$ $g(x,y) = O\left(\frac{1}{|x-y|^{n-1}}\right)$ (за рахунок першого члену ряду). Тому $g(x, y)$ має слідуючу оцінку, справедливу і при $|x-y|\to\infty$ і при $|x-y|\to 0$:

$$g(x, y) = O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon''|x-y|}}{|x-y|^{n-1}}\right).$$

Приймаючи до уваги цю оцінку і оцінку (6), маємо

$$\int_\infty \omega_0(\lambda, x, x-z)\, g(z, y)\,dz = O\left(\int_\infty \frac{e^{-\lambda\varepsilon_0|x-z|}e^{-\lambda\varepsilon''|z-y|}dz}{A_0(x)\,|x-z|^{n-s}\,|z-y|^{n-1}}\right) =$$

$$= O\left(\frac{1}{A_0(x)}\cdot\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{|x-y|^{n-s-1}}\right)\quad (0<\varepsilon<\varepsilon_0).$$

Порівнюючи оцінки першого і другого доданків в формулі (3), одержимо оцінку, що характеризує $\omega_\lambda(x, y)$ як при $|x-y|\to\infty$, так і при $|x-y|\to 0$, а саме

$$\omega_\lambda(x, y) = O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{A_0(x)|x-y|^{n-s}}\right).$$

Легко бачити, що

$$\frac{\partial^{\kappa_1+\ldots+\kappa_n}\omega_\lambda(x, y)}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}} = O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{A_0(x)\,|x-y|^{n-s+\kappa_1+\ldots+\kappa_n}}\right) =$$

$$= O\left(\frac{e^{-\lambda\varepsilon|x-y|}}{A_0(x)}\varphi_{n-s+\kappa_1+\ldots+\kappa_n}(|x-y|)\right)$$

$$(\kappa_1+\ldots+\kappa_n = 1, 2, \ldots, s).$$

Аналогічним шляхом такі ж оцінки для $\omega_\lambda(x, y)$ можна одержати і для випадку $s=n$ і для $s>n$. Таким чином, теорема доведена.

ЛІТЕРАТУРА

1. Лопатинський. Я. Б. Укр. мат. журн. т. III, № 1, 1951.
2. Bochner S. Annals of mathematics. Vol. 57, № 1, 1953.
3. Лопатинський. Я. Б. Укр. мат. журн. т. III, № 3, 1951.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

С. А. ГРАЧ

ТЕОРЕТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК І ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ПЕРЕВІРКА ДЕЯКИХ ЗАДАЧ ПРО ЗГИН ПЛИТ З ПІДКРІПЛЕНИМИ КРАЯМИ

В ряді робіт [2, 3, 4], присвячених розрахунку плит з ребрами жорсткості, нехтують дією зусиль, що виникають в серединній площині цих плит, а також звертаються до інших припущень і гіпотез.

Тому являє інтерес експериментальна перевірка застосування вищезгаданих теоретичних рішень.

В даній статті експериментально підтверджується практична при-

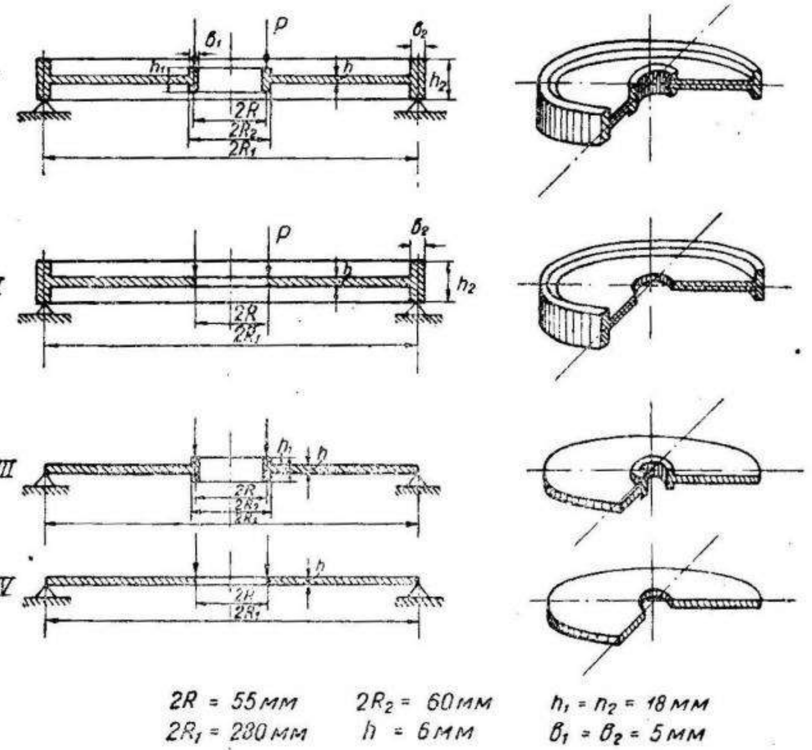

Рис. 1.

датність теорії розрахунку круглих плит, підкріплених концентричними ребрами жорсткості.

Розглянемо, як загальний приклад круглу пластинку, послаблену отвором, края якого зміцнені тонкими пружними кільцевими ребрами жорсткості постійного поперечного перерізу (див. рис. 1).

Пластинка вільно опирається по зовнішньому контуру 1, навантажена рівномірно по колу радіуса R поперечними зусиллями.

В прикладі, що розглядається, прогини W залежать тільки від радіуса і мають вигляд [1]

$$W = C_1 \ln\frac{r}{R} + C_2\frac{r^2}{R^2}\ln\frac{r}{R} + C_3 + C_4\frac{r^2}{R^2}, \tag{1}$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 — постійні коефіцієнти, які визначаються з слідуючих граничних умов [2]:

$$\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\mu - \delta_1}{R}\cdot\frac{dW}{dr} = 0 \qquad \text{при } r = R; \tag{2}$$

$$D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dW}{dr}\right) = P \qquad \text{при } r = R; \tag{3}$$

$$\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\mu + \delta_2}{R_1}\cdot\frac{dW}{dr} = 0 \qquad \text{при } r = R_1; \tag{4}$$

$$W = 0 \qquad \text{при } r = R_1; \tag{5}$$

де $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — циліндрична жорсткість пластинки при згині;

$\delta_1 = \dfrac{E_1 I_1}{RD}$ — відносна жорсткість на згин внутрішнього підкріплюючого кільця;

$\delta_2 = \dfrac{E_2 I_2}{R_1 D}$ — відносна жорсткість на згин зовнішнього підкріплюючого кільця;

E_1 і E_2 — модулі пружності матеріалів, з яких виготовлені відповідні ребра жорсткості;

I_1 і I_2 — моменти інерції площин поперечних перерізів відповідних кільцевих ребер жорсткості.

Підставляючи рівняння (1) в (2)—(5), одержуємо систему чотирьох рівнянь, звідки визначаємо

$$\left.\begin{aligned}
C_1 &= \frac{C_2}{(\mu-\delta_1-1)}\left[\frac{A}{B}(\mu-\delta_1+1)-(\mu-\delta_1+3)\right];\\
C_2 &= \frac{PR^2}{8\pi D};\\
C_3 &= \frac{C_2}{(\mu-\delta_1-1)}\left\{\left[(\mu-\delta_1+3)-\eta^2(\mu-\delta_1-1)-\frac{A}{B}(\mu-\delta_1+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+1)\right]\ln\eta+\frac{A}{2B}\eta^2(\mu-\delta_1-1)\right\};
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$C_4 = C_2\frac{A}{2B},$$

де

$$\left.\begin{aligned} A &= \eta^2(\mu-\delta_1-1)[2\ln\eta(\mu+\delta_2+1)+(\mu+\delta_2+3)]-(\mu-\delta_1+ \\ &\quad +3)(\mu+\delta_2-1); \\ B &= \eta_2(\mu-\delta_1-1)(1+\mu+\delta_2)-(\mu-\delta_1+1)(\mu+\delta_2-1), \\ \eta &= \frac{R_1}{R}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Підставляючи значення знайдених коефіцієнтів в (1), маємо

$$W=\frac{P}{8\pi D}\left\{\left[(\mu-\delta_1+3)-\frac{A}{B}(\mu-\delta_1+1)\right]\frac{R^2\ln\frac{R_1}{r}}{(\mu-\delta_1-1)}+\right.$$

$$\left.+(R_1^2-r^2)\left(\frac{A}{2B}+\ln R\right)+r^2\ln r-R_1^2\ln R_1\right\}.$$

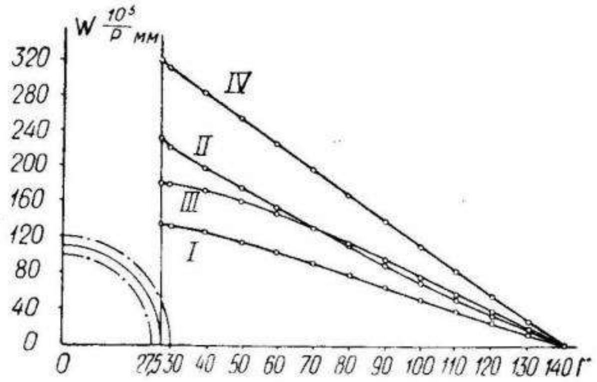

Рис. 2.

Деякі важливі для практики випадки можна одержати як часткові з даної загальної формули (8). Так, наприклад, при $\delta_2=0$ одержуємо рішення задачі про згин плити з підкріпленим внутрішнім краєм [4]. Якщо $\delta_1=0$, а $\delta_2\neq 0$, одержуємо рішення тієї ж задачі для випадку підкріплення лише зовнішнього краю плити. При $\delta_1=\delta_2=\infty$ маємо рішення для випадку жорсткості затиснутого краю плити [1], і нарешті, коли $\delta_1=\delta_2=0$, знаходимо рішення для круглої пластинки постійного перерізу, ослабленої круговим отвором і навантаженої перетинаючими силами P, рівномірно розподіленими по внутрішньому краю радіуса R [1].

У випадку, коли круглі плити не ослаблені отворами, поклавши в нашому основному рівнянні (8), що $\delta_1=\delta'_1$, де $\delta'_1=\delta_1+(1+\mu)$, одержимо також цілий ряд інших часткових випадків.

Для нашої задачі відповідні моменти, вигинаючі плиту в радіальному і тангенціальному напрямках, будуть виражатися

$$M_r=-\frac{D}{R^2}\left\{C_2\left[2(1+\mu)\ln\frac{r}{R}+\mu+3\right]+\frac{C_1R}{r^2}(\mu r-R)+2C_4(1+\mu)\right\}. \quad (9)$$

$$M_\theta=-\frac{D}{R^2}\left\{C_2\left[2(1+\mu)\ln\frac{r}{R}+3\mu+1\right]+\frac{C_1R}{r^2}(r-\mu R)+2C_4(1+\mu)\right\}. \quad (10)$$

На рис. 2 приведені криві теоретичних значень прогинів для всіх задач, вказаних на рис. 1, де наочно видно вплив кільцевих зусиль на прогин плит.

Максимальні деформації на поверхні внутрішнього кільцевого ребра жорсткості ε_{Θ}^{0} легко підрахувати по формулі [3]

$$\varepsilon_{\Theta}^{0} = \frac{-6\,h_1 (M_{\Theta} - \mu M_r)}{Eh^3}.$$

Для осесиметричних задач ця формула може бути приведена до більш простого вигляду [5]

$$\varepsilon_{\Theta}^{0} = \frac{6RM_r}{bh_1^2 E} = \frac{6R\delta_1 M_{\Theta}}{bh_1^2 E\,(1 + \mu\delta_1 - \mu^2)}.$$

Тут M_r і M_{Θ} — віднесені до одиниці довжини згинаючі моменти на поверхні плити при $r=R$, відповідно по коловому і по діаметральному перетину пластинки.

Об'єктом дослідження була мартенівська листова сталь марки 3 товщиною в 22 *мм* у відпаленому стані. Хімічний склад сталі (в %): C — 0,19; Si — 0,065; Mn — 0,36; S — 0,028; P — 0,033.

Механічні властивості сталі в відпаленому стані:

Тип зразка	Границя міцності $\sigma_B \left(\text{в } \frac{кг}{мм^2}\right)$	Границя текучості $\sigma_s \left(\text{в } \frac{кг}{мм^2}\right)$	Відносне видовження δ (в %)	Відносне поперечне звуження ψ (в %)	Твердість по Бринелю H_B
Гагарина	45,98	25,11	$\delta_5 = 33,06$	35,83	124
Нормальний	44,75	23,87	$\delta_{10} = 32,96$	37,50	—

Диски після відпалення і токарної обробки підлягали шліфуванню до потрібних розмірів, причому був встановлений слідуючий режим різання при зніманні останньої стружки: подача — 0,2 *мм* і глибина різання — 0,2 *мм*. Після шліфовки диски не мали дефектів на поверхні (подрапин, рисок та ін.). Припущені відхилення від розмірів $\pm 0,1$ *мм*.

Припущена різниця найбільшої та найменшої товщини по діаметру $\pm 0,01$ *мм*. Розміри дисків приведені на рис. 1.

Пружні константи, модуль пружності — E і коефіцієнт Пуассона μ для цієї ж сталі в відпаленому стані були визначені механічними тензометрами і дротяними тензодатчиками на дослідних машинах ИМ-4Р і з динамометрами на УИМ-50, середні значення яких виявились $\mu=0,285$ та $E=2,0 \cdot 10^6$ *кг/см²*.

Для проведення дослідної перевірки цих плит на згин був виготовлений спеціальний стенд, що складався з суцільно витягнутої товстостінної труби, торцеві площини якої гладко відшліфовані, причому торцева площина загострена по колу радіуса R, являючись нижньою кільцевою опорою для круглих дисків при їх дослідженні.

В трубі рівномірно по колу вмонтовані три прогиноміри під кутом 120° один до одного. Прогиномір такої конструкції належить до важильно-механічних вимірювальних приладів. Загальний вигляд згиноміра показано на рис. 3 [13]. Конструкція згиноміра спирається на принцип рівноплічного механічного важеля. Вимірний стрижень *11*, переміщаючись лінійно вздовж стакана *10* і спираючись на кулеподібну опору стрижня *7*, примушує його обертатися навколо осі *8*. Стрижень *7*, відхилившись на деякий кут відносно свого початкового положення, через призму *2* діє на вимірний стрижень *1* індикатора. В стрижні *11* на різьбі загвинчуються відповідні наконечники, які безпосередньо дотикаються до деталі, що прогинається.

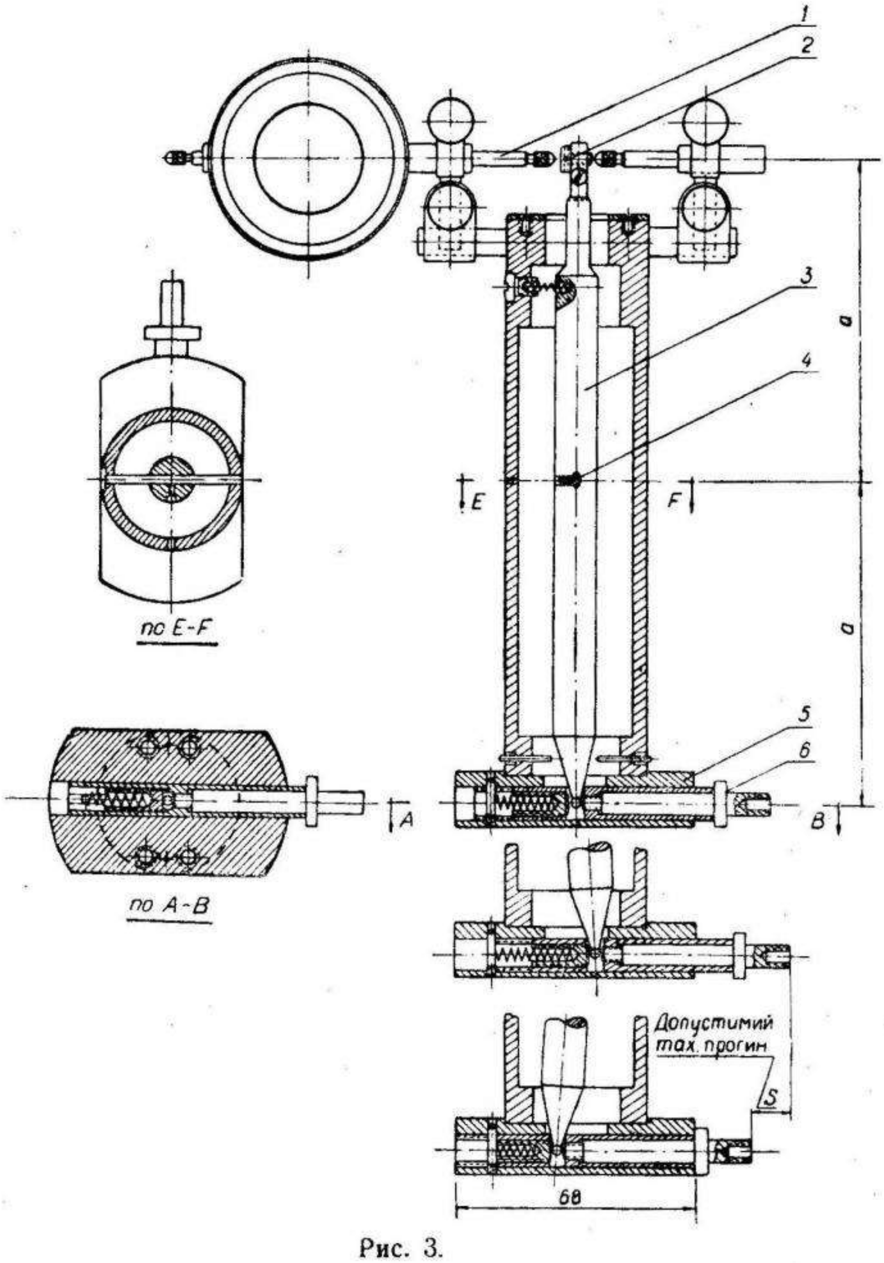

Рис. 3.

Даний згиномір застосовується в комбінації з одним або двома індикаторами. Згиноміри мають можливість переміщатися вздовж радіуса диска, спеціальними фіксаторами можуть бути закріплені на певній віддалі від центра в тій точці, де проводяться виміри.

Вздовж труби встановлено також шість *T*-подібних направляючих, по яких переміщаються шість штангенглибиномірів з шкалою ноніуса і з мікрометричною подачею. Штангенглибиноміри з відрахунком 0,05 *мм* і з граничною похибкою виміру $\pm$ 150 *мк* центрують відносно центра труби як положення самого диска, так і пуанссон, що передає зусилля на диск.

Дослідження плит проводились на універсальній дослідній машині типу УИМ-50 [7].

Для більш точного виміру навантажень, прикладених до диску, в процесі дослідження застосовувалися зразкові динамометри типу ДС і ДУ, що встановлювались між верхньою нерухомою опорною штангою машини і пунссоном.

Згини вимірювались згиноміром з двухмікронним індикатором з ціною поділки 0,002 *мм*. На рис. 4 представлені теоретичні криві залежності $W=f(P)$, на яких трикутниками нанесені експериментальні точки максимальних прогинів (при $r=R$).

Для підвищення точності результату виміру (середнього арифметичного) [8] було зроблено по шість вимірів для кожної міри навантаження. Швидкість абсолютної деформації була нами прийнята в інтервалі від 0 до 200 *кг*; $v \approx 0{,}001$ *мм/сек*, від 0 до 1000 *кг*; $v \approx 0{,}001$ *мм/сек*.

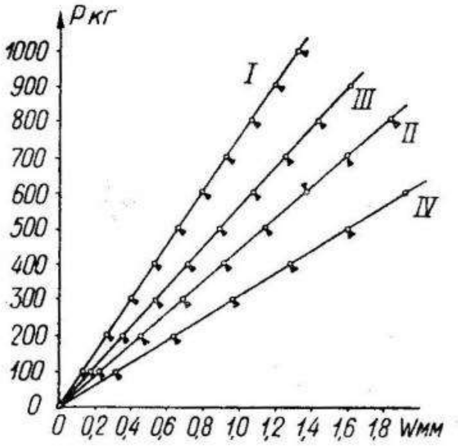

Рис. 4.

Відхилення експериментальних значень прогинів від теоретичних для всіх точок не перевищувало 5%.

Для визначення експериментальним шляхом деформацій нами застосовувались дротяні тензодатчики омічного опору [9].

В місцях з великою концентрацією напружень застосовувались кільцеві датчики різних діаметрів, що намотані на спеціально виготовленному приладі.

Кільцеві датчики, на відміну від петлевих, дозволяють з великою точністю досліджувати малодоступні зони моделі, особливо в тих місцях, де існує різка відмінність в товщині диска при переході від однієї концентричної області до другої.

Як відомо, база датчика [10] і наявність петель в петлеподібному датчику [1] впливають на точність показників датчика.

У кільцевих датчиків в нашому випадку ці дефекти відсутні. Кільцеві датчики були розміщені на середині поверхні кільцевого ребра жорсткості, а також навколо ослабленого отвору (для диска без кільцевого ребра жорсткості).

При експериментальних перевірках деформацій використовувався спеціально виставлений для статичних дослідів електроміст, що діє на постійному струмі [12]. Вимірним приладом служив дзеркальний гальванометр.

Тарировка лінійних і петлеподібних датчиків відбувалась одночасно на консольній балці рівного опору та на полосі, працюючій на чистий згин, виготовленій з ресорної сталі.

Для компенсації похибок, що виникали у вимірах внаслідок коливань температури навколишнього середовища, в одне з баластичних плечей моста вмикався термокомпенсаційний датчик, що наклеювався на таку ж стальну плиту і був термічно контактований з корпусом преса.

Внаслідок того, що при досліді до джерела струму — акумулятора пред'являються високі вимоги у відношенні постійного його напруги, нами застосовувався акумулятор великої ємкості (144 *а/год*) при витраті струму 0,1 *а*. Систематично проводився підзаряд акумулятора селеновим випростувачем і контроль його напруги [10]. При цьому ціна поділки шкали дзеркального гальванометра у відносних деформаціях дорівнювала $\varepsilon_{\theta}^{0}=0{,}00033613\,\frac{1}{R_Д}$, де $R_Д$ — омічний опір кільцевого датчика, наклеєного на моделі плити по довжині кола. На рис. 5 представлені для всіх задач, вказаних на рис. 1, теоретичні криві $\varepsilon_x=f_1(r)$ і $\varepsilon_y f_2(r)$, де ε_x і ε_y відносні деформації в радіальному і тангенціальному напрямках.

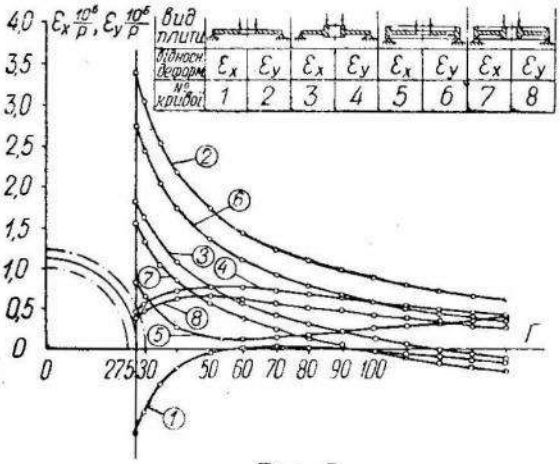

Рис. 5.

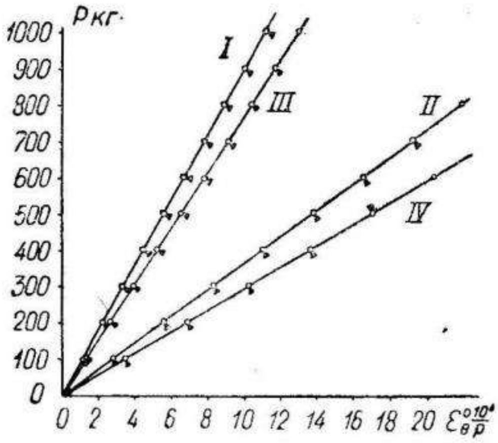

Рис. 6.

На рис. 5 наочно бачимо вплив ребер жорсткості на величину відносних деформацій.

На рис. 6 представлені теоретичні криві $\varepsilon_{\theta}^{0}=\Phi(P)$ при $r=R$, на які трикутниками нанесені експериментальні точки.

Розходження експериментальних значень відносних деформацій від теоретичних для всіх вказаних ступенів навантажень не перевищувало 3%.

ЛІТЕРАТУРА

1. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Гостехиздат, 1948.
2. Савин Г. Н. Инженерный сборник, т. VII, Изд. АН СССР, 1950.
3. Шереметьев М. П. Укр. мат. журн., т. V, № 1, 1953.
4. Флейшман Н. П. Наукові записки ЛДУ, т. XXII, серія фізико-математична, в. V, 1953.
5. Флейшман Н. П. Наукові записки ЛДУ, т. 44, вип. 8, 1957.
6. Вайнберг Д. В. Напряженное состояние составных дисков и пластин. Изд. АН УССР, 1952.
7. Грач С. А. Заводская лаборатория № 1, 1953.
8. Яковлев К. Н. Математическая обработка результатов измерений, Техиздат, 1953.
9. Грач С. А. Наукові записки ЛДУ, т. XXXVIII, серія механіко-математична, в. VII, 1956.
10. Грач С. А. Доповіді та повідомлення ЛДУ, в. VI, ч. II, 1955.
11. Митиченко Г. А. Заводская лаборатория, т. XIX, № 9, 1953.
12. Раевский М. Г. Методы экспериментального исследования механических параметров машин. Изд. АН СССР, 1952.
13. Грач С. А. Измерительная техника № 5, 1956.

НАУКОВА ХРОНІКА

Захист кандидатських дисертацій на об'єднаній Вченій раді фізичного і механіко-математичного факультетів Львівського державного університету ім. Івана Франка

Прізвище дисертанта	Тема дисертації	Керівник	Опоненти	Дата захисту
Дейнеко К. С.	Динамічний метод дослідження стійкості зжатих стержнів.	доктор фіз-мат. наук Парасюк О. С.	проф. Шереметєв М. П., канд. наук Підстригач Я. С.	1955 р. 21.XI
Гопак К. М.	Деякі питання динаміки колони бурильних труб.	—	доктор техн. наук Комаров М. С., доктор фіз.-мат. наук Парасюк О. С.	21.XI
Кулик О. М.	Двозв'язні пластинки з підкріпленим краєм.	проф. Шереметєв М. П.	проф. Тарабасов М. Д., канд. фіз.-мат. наук Гриліцький Д. В.	24.XII
Свидзінський А. В.	Про метод функціонального інтегрування в теорії функцій Гріна.	—	проф. Лопатинський Я. Б., канд. фіз.-мат. наук Ширков Д. В.	1956 р. 7.II
Лісевич Л. М.	Гіперболічні системи диференціальних рівнянь в частинних похідних з майже-періодичними коефіцієнтами.	проф. Ковалько О. С.	проф. Лопатинський Я. Б., доктор фіз.-мат. наук Парасюк О. С.	26.III
Палюх Б. М.	Резонансна перезарядка іонів та атомів Кріптона і Ксенова.	—	проф. Кучер В. А., доктор фіз.-мат. наук Федорченко Н. В.	23.IV
Чумак К. І.	Тиск на пружний півпростір штампу близького до круглого в плані.	—	проф. Шереметєв М. П., канд. фіз.-мат. наук Панасюк В. В.	18.IV
Шнейдер А. Д.	Дослідження особливостей фотопровідності півпровідників типу сірнистого кадмію.	—	доктор техн. наук Андрієвський О. І., проф. Карандєєв К. Б.	18.VI
Гіллєр Я. Л.	Про рентгено-структурні методи діагностики мінералів групи гранату.	—	доктор геол.-мін. наук Міхеєв В. І., доц. Глауберман А. Є.	21.VI
Цвєтков В. П.	До температурної залежності ближнього порядку в простих рідинах.	—	доктор техн. наук Андрієвський О. І., доц. Лашко О. С.	21.VI

В зв'язку з 100-річчям з дня смерті М. І. Лобачевського (24.II 1956 р.) 27.II 1956 р. відбулося урочисте засідання об'єднаної Вченої ради механіко-математичного і фізичного факультетів Львівського державного університету ім. Івана Франка, присвячене цій даті.

Були заслухані слідуючі доповіді:

1. Доц. В. Ф. Рогаченко «Життя і наукова діяльність М. І. Лобачевського».
2. Доц. Г. Л. Буймола «М. І. Лобачевський як педагог».
3. Проф. О. С. Кованько «Торжество геометричних ідей М. І. Лобачевського».
4. Доц. О. М. Костовський «Роль М. І. Лобачевського в розвитку методів числового розв'язування алгебраїчних рівнянь».
5. Доц. М. Т. Сенків «Значення ідей М. І. Лобачевського в розвитку фізики».

Лист до редакції

Основні результати моєї роботи: «Об одном методе приближения тригонометрическими полиномами» (Наукові записки ЛДУ, т. 38, серія мех.-мат., в. 7, 1956) містяться в роботі С. Б. Стечкіна «О суммах Валле-Пуссена» (ДАН СССР, т. LXXX, № 4, (1951)).

На жаль ця обставина мною своєчасно не була замічена і на неї звернув мою увагу С. Б. Стечкін вже після виходу з друку моєї роботи.

27.I.1957.

І. Г. СОКОЛОВ.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Івана Франка
Том 44, 1957 Серія механіко-математична Випуск 8

ЗМІСТ

Редактор Ю. Л. Котляров
Технічний редактор Т. М. Веселовський
Коректор Л. М. Джерепа

Ученые записки Львовского государственного университета имени Ивана Франка.
Том 44. Серия механико-математическая, выпуск 8. Вопросы механики и математики
(на украинском языке)

БГ 05460. Здано до набору 24.II. 1957 р. Підписано до друку 24.IV. 1957.
Формат паперу $70 \times 108^1/_{16}$ — 6,875 папер. арк.— 13,75 друк. арк.— 14,5 обл. видавн. арк.
Ціна 7 крб. 25 коп. Зам. 249. Тираж 500.

Друкарня Львівського політехнічного інституту, Львів, вул. Професорська, 1.