

ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА

ПИТАННЯ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ

ВИПУСК ДЕВ'ЯТИЙ



ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ

1962

МІНІСТЕРСТВО ВИЩОЇ І СЕРЕДНЬОЇ СПЕЦІАЛЬНОЇ ОСВІТИ УРСР
ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені Івана ФРАНКА

ПИТАННЯ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ

ВИПУСК ДЕВ'ЯТИЙ

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1962

* * *

У статтях, вміщених у збірнику, відображена наукова робота в області теорії функцій (найкращі наближення, майже періодичні функції), диференціальних рівнянь у частинних похідних, диференціальної геометрії і теорії пружності (плоска задача і теорія тонких оболонок).

Усі роботи носять оригінальний характер.

Редакційна колегія:

проф. О. С. Кованько (відповідальний редактор),
проф. Я. Б. Лопатинський, проф. М. П. Шереметьєв.

Друкується за постановою
Редакційно-видавничої ради
Львівського ордена Леніна державного
університету ім. Івана Франка

В. Г. КОСТЕНКО

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ $\Delta u = u_x^2 + u_y^2$

Нехай D — обмежена однозв'язна область, границя якої L має неперервну кривину.

З а д а ч а. Знайти функцію $u(x, y)$, яка в області D задовольняє рівнянню

$$\Delta u = u_x^2 + u_y^2, \quad (1)$$

а на її границі L — умові

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -(f(s) + c), \quad (2)$$

де $f(s)$ — неперервна функція довжини дуги s контура L , $\frac{\partial}{\partial n}$ — похідна по внутрішній нормалі, c — стала.

Для існування розв'язку задачі (1), (2) необхідно, щоб

$$\int_L (f(s) + c) ds \geq 0. \quad (3)$$

Справді, якщо задача (1), (2) має розв'язок, то з необхідністю одержимо

$$\iint_D \Delta u dx dy = \iint_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy = - \int_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_L (f(s) + c) ds \geq 0.$$

Звідси

$$c = \frac{1}{\int_L ds} \left[\iint_D (u_x^2 + u_y^2) dx dy - \int_L f(s) ds \right]. \quad (4)$$

Зведенням задачі (1), (2) до інтегральних рівнянь і застосуванням методу послідовних наближень Ніче [3] встановив, що при умові (4) існує єдиний з точністю до сталого доданку розв'язок задачі (1), (2).

В роботі [2] груповим методом встановлено, що всі розв'язки рівняння (1) можуть бути представлені у вигляді

$$u(x, y) = -\ln \Phi(x, y), \quad (5)$$

де $\Phi(x, y)$ — довільна гармонійна функція, і задача (1), (2) зведена до третьої (змішаної) задачі для рівняння Лапласа:

$$\Delta \Phi = 0 \quad (\text{в області } D), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} - (f(s) + c)\Phi = 0 \quad (\text{на } L). \quad (7)$$

Як відомо, задача (6), (7) при умові $f(s) + c \geq 0$ ($f(s) + c \neq 0$) має лише єдиний нульовий розв'язок, а тоді задача (1), (2) на підставі (5) розв'язку не має.

Якщо ж $f(s) + c \leq 0$ ($f(s) + c \neq 0$), то необхідна умова (3) існування розв'язку задачі (1), (2) не виконується, і остання, таким чином, не має розв'язку знову.

Нехай тепер $f(s) + c$ приймає на L і додатні, і від'ємні значення, але так, що

$$\int_L (f(s) + c) ds \geq 0. \quad (3)$$

Розв'язок задачі (6), (7) будемо шукати в формі потенціалу простого слою:

$$\Phi(x, y) = \int_L \rho(t) \ln \frac{1}{r} dt. \quad (8)$$

Задовольняючи умові (7) і користуючись неперервністю потенціалу простого слою та стрибком його нормальної похідної при переході через границю L області D , одержимо

$$-\pi \rho(s) + \int_L \rho(t) \frac{\cos(\bar{r}_{ts}, \bar{n}_s)}{r_{st}} dt - (f(s) + c) \int_L \rho(t) \ln \frac{1}{r_{st}} dt = 0,$$

тобто

$$\rho(s) - \int_L G(s, t) \rho(t) dt = 0,$$

або

$$\rho(s) - \lambda \int_0^l G(s, t) \rho(t) dt = 0, \quad (\lambda = 1), \quad (9)$$

де

$$G(s, t) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(\bar{r}_{ts}, \bar{n}_s)}{r_{st}} - (f(s) + c) \ln \frac{1}{r_{st}} \right], \quad (10)$$

l — довжина дуги замкненої кривої L .

Ядро $G(s, t)$ — квазірегулярне, причому вже перше ітероване ядро

$$G_2(s, t) = \int_0^l G(s, \sigma) G(\sigma, t) d\sigma$$

є регулярним. Таким чином, інтегральне рівняння (9) еквівалентне рівнянню

$$\rho(s) - \lambda^2 \int_0^l G_2(s, t) \rho(t) dt = 0. \quad (11)$$

Оскільки в останньому випадку, при виконанні умов (3) та (4), згідно Ніче [3], задача (1), (2) має єдиний з точністю до сталого доданку розв'язок, а також враховуючи (5), одержуємо: $\lambda = 1$ є фундаментальне число ранга I ядра $G(s, t)$ і ядра $G_2(s, t)$, що й дає можливість запи-

сати в явному вигляді як розв'язок задачі (6), (7), так і розв'язок задачі (1), (2).

Легко бачити, що розв'язки інтегральних рівнянь (9) і (11) можуть відрізнятися лише числовим множником і, таким чином, їх лінійно незалежні розв'язки можуть бути вибрані однаковими:

$$\rho_1(s) = \frac{D(s, t'_1; 1)}{D(s'_1, t'_1; 1)}, \quad (12)$$

де

$$D(s'_1, t'_1; 1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^1 (m) \int_0^1 K \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_m, s'_1 \\ \alpha_1, \dots, \alpha_m, t'_1 \end{matrix} \right) d\alpha_1 \dots d\alpha_m \neq 0$$

перший мінор Фредгольма від $D(\lambda)$ при $\lambda=1$ по ядру $G_2(s, t)$.

Всі розв'язки рівнянь (9) і (11) можуть бути представлені у вигляді

$$\rho(s) = A \rho_1(s),$$

де A — довільна стала.

Тоді

$$\Phi(x, y) = A \int_L \rho_1(t) \ln \frac{1}{r} dt \quad (13)$$

є розв'язки задачі (6), (7), а

$$u(x, y) = - \ln \int_L \rho_1(t) \ln \frac{1}{r} dt + c_1 \quad (14)$$

розв'язок задачі (1), (2), де c_1 — довільна стала.

ЛІТЕРАТУРА

1. И. И. Привалов. Интегральные уравнения, ОНТИ, НКТП, 1935.
2. В. Г. Костенко. Интегрирование деяких нелинейных дифференциальных уравнений в частных похідних групповым методом. Видавництво Львівського університету, 1959.
3. Nitsche Johannes, Nitsche Joachim. Bemerkungen zum zweiten Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta u = u_x^2 + u_y^2$. Mathematische Annalen, t. 126. 1953, стор. 69—74.

Стаття надійшла 10. XI 1960.

Л. Д. АДАМЕНКО, Є. С. ШОХ

ВАЖЛИВА ОСОБЛИВІСТЬ ВИКОНАННЯ АРИФМЕТИЧНИХ ОПЕРАЦІЙ У РЕЖИМІ ПЛАВАЮЧОЇ КОМИ НА МАШИНАХ ТИПУ «УРАЛ» (З ФІКСОВАНОЮ КОМОЮ)

Мащини з фіксованою комою типу «Урал» працюють з числами, абсолютні величини яких менші одиниці. Тому при підготовці задачі для розв'язування на машині всі початкові дані масштабуються так, щоб проміжні і кінцеві результати обчислень були по абсолютній величині меншими одиниці. Але в практиці зустрічаються такі задачі, для яких масштабування є надзвичайно важким завданням, а в деяких випадках і зовсім неможливим.

Для розв'язування таких задач числовий матеріал перетворюють у нормальну форму (нормалізують), тобто приводять до вигляду:

$$a = q_a \cdot 10^{P_a},$$

де $\frac{1}{2} \leq |q_a| < 1$ — мантиса,

P_a — порядок числа a .

Арифметичні операції над числами в нормальній формі виконуються за такими алгоритмами:

1. Множення:

$$c = a \cdot b = q_a \cdot 10^{P_a} \cdot q_b \cdot 10^{P_b} = q_a \cdot q_b \cdot 10^{P_a + P_b} = q_c \cdot 10^{P_c},$$

де $\frac{1}{2} \leq |q_c| < 1$; $P_c = P_a + P_b + \delta$;

δ — поправка до порядку від нормалізації $q_a \cdot q_b$.

2. Додавання (віднімання):

$$\begin{aligned} c = a + b &= q_a \cdot 10^{P_a} + q_b \cdot 10^{P_b} = (q_a \cdot 10^{P_a - P'} + q_b \cdot 10^{P_b - P'}) \cdot 10^{P'} = \\ &= q_c \cdot 10^{P' + \delta} = q_c \cdot 10^{P_c}, \end{aligned}$$

де $P' = \max \{P_a, P_b\}$,

δ — поправка до порядку від нормалізації $q_a \cdot 10^{P_a - P'} + q_b \cdot 10^{P_b - P'}$.

3. Ділення:

$$c = \frac{a}{b} = \frac{q_a \cdot 10^{P_a}}{q_b \cdot 10^{P_b}} = \frac{q_a}{q_b} \cdot 10^{P_a - P_b} = q_c \cdot 10^{P_c},$$

де $P_c = P_a - P_b + \delta$,

δ — поправка до порядку від нормалізації $\frac{q_a}{q_b}$.

Кожне число, приведенне до нормальної форми, записується в оперативній пам'яті (НМБ) в дві ячейки: одна ячейка (повна) — для мантиси числа, друга (неповна) — для порядку. Всі арифметичні операції над такими числами виконуються за вказаними вище алгоритмами окремо з порядками і окремо з мантисами.

Множення найпростіше реалізувати такою послідовністю команд:

$$k + 1 \ 02 < q_a >$$

$$k + 2 \ 06 < q_b >$$

$$k + 3 \ 15 < q_c >$$

$$k + 4 \ 01 < P_a >$$

$$k + 5 \ 01 < P_b >$$

$$k + 6 \ 16 < P_c >$$

але якщо q_a або q_b рівне нулю, то і $q_c = 0$, в той час як P_c може бути, взагалі кажучи, відмінним від нуля.

Через це в обчисленнях, де є багато множень і серед початкових даних є нулі, нулі в кінцевих результатах фактично будуть мати нульові мантиси і, як правило, відмінні від нуля порядки (можуть бути навіть досить великими по модулю).

Те ж буде, якщо при діленні чисельник — нуль.

Якщо ж до такого нуля з порядком додавати якесь інше число, у якого порядок менший, ніж порядок нуля, результат може бути зовсім невірним.

Дійсно, нехай

$$a = 0 \cdot 10^{P_a}, \quad b = q_b \cdot 10^{P_b}$$

і нехай

$$P_a \gg P_b.$$

$$\text{Тоді } a + b = 0 \cdot 10^{P_a} + q_b \cdot 10^{P_b} = (0 + q_b \cdot 10^{P_b - P_a}) \cdot 10^{P_a} = q_c \cdot 10^{P_c}.$$

Якщо $|\Delta P| = |P_a - P_b| < 35$ (35 — кількість розрядів суматора «УРАЛ»-а), то

$$P_c = P_a - \Delta P = P_b,$$

$$q_c = q'_b,$$

де q'_b мантиса, у якої $|\Delta P|$ молодших розрядів будуть нулями, а 35- $|\Delta P|$ старших розрядів співпадатимуть з відповідними розрядами q_b .

Якщо $|\Delta P| = |P_a - P_b| \geq 35$, то $P_c = P_a$, $q_c = 0$.

Коротше кажучи, коли проходить додавання якогось числа до нуля, відбувається непотрібний зсув мантиси з меншим порядком вправо на $|\Delta P|$ розрядів, додавання і потім нормалізація, внаслідок чого втрачається точність або одержується зовсім невірний результат.

Це стає очевидним, якщо прослідкувати роботу рекомендованих програм додавання в режимі плаваючої коми.

Програма наведена в книзі В. Н. Бондаренко і ін. «Программирование для цифровой вычислительной машины „Урал“»:

$$k + 1 \ 02 < P_a > \quad k + 3 \ 21 \ k + 15$$

$$k + 2 \ 03 < P_b > \quad k + 4 \ 10 < - >$$

$k + 5 \ 17 \ <0,5>$	$k + 16 \ 11 \ 0000$
$k + 6 \ 11 \ 0000$	$k + 17 \ 06 \ <q_a>$
$k + 7 \ 06 \ <q_b>$	$k + 20 \ 17 \ <0,5>$
$k + 10 \ 17 \ <0,5>$	$k + 21 \ 05 \ <q_b>$
$k + 11 \ 05 \ <q_a>$	$k + 22 \ 15 \ <q_c>$
$k + 12 \ 15 \ <q_c>$	$k + 23 \ 01 \ <P_b>$
$k + 13 \ 01 \ <P_a>$	$k + 24 \ 01 \ <1 \cdot 2^{-17}>$
$k + 14 \ 22 \ k + 24$	$k + 25 \ 16 \ <P_c>$
$k + 15 \ 17 \ <0,5>$	

Програма з арифметичним зсувом:

$k + 1 \ 02 \ <P_a>$	$k + 11 \ 01 \ <P_a>$
$k + 2 \ 03 \ <P_b>$	$k + 12 \ 22 \ k + 20$
$k + 3 \ 21 \ k + 13$	$k + 13 \ 17 \ <q_a>$
$k + 4 \ 10 \ <->$	$k + 14 \ 11 \ 4000$
$k + 5 \ 17 \ <q_b>$	$k + 15 \ 01 \ <q_b>$
$k + 6 \ 11 \ 4000$	$k + 16 \ 15 \ <q_c>$
$k + 7 \ 01 \ <q_a>$	$k + 17 \ 01 \ <P_b>$
$k + 10 \ 15 \ <q_c>$	$k + 20 \ 16 \ <P_c>$

З метою уникнути такого неприємного явища при додаванні з нулем, що, як правило, матиме якийсь порядок, необхідно обов'язково аналізувати мантиси на нуль, і, якщо один з доданків має нульову мантису, за результат приймати другий доданок з його порядком. Якщо обидва доданки нулі, то, очевидно, за результат можна приймати будь-який з них.

З таким аналізом програма додавання матиме такий вигляд:
без арифметичного зсуву

$k + 1 \ 02 \ <q_a>$	$k + 12 \ 10 \ <->$
$k + 2 \ 15 \ 0000$	$k + 13 \ 17 \ <0,5>$
$k + 3 \ 21 \ k + 26$	$k + 14 \ 11 \ 0000$
$k + 4 \ 02 \ <q_b>$	$k + 15 \ 06 \ <q_b>$
$k + 5 \ 15 \ 0000$	$k + 16 \ 17 \ <0,5>$
$k + 6 \ 21 \ k + 16$	$k + 17 \ 05 \ <q_a>$
$k + 7 \ 02 \ <P_a>$	$k + 20 \ 15 \ <q_c>$
$k + 10 \ 03 \ <P_b>$	$k + 21 \ 01 \ <P_a>$
$k + 11 \ 21 \ k + 23$	$k + 22 \ 22 \ k + 32$

$k + 23 \ 17 \langle 0,5 \rangle$	$k + 30 \ 15 \langle q_c \rangle$
$k + 24 \ 11 \ 0000$	$k + 31 \ 01 \langle P_b \rangle$
$k + 25 \ 06 \langle q_a \rangle$	$k + 32 \ 01 \langle 1 \cdot 2^{-17} \rangle$
$k + 26 \ 17 \langle 0,5 \rangle$	$k + 33 \ 16 \langle P_c \rangle$
$k + 27 \ 05 \langle q_b \rangle$	

з використанням арифметичного зсуву

$k + 1 \ 02 \langle q_a \rangle$	$k + 14 \ 11 \ 4 \ 000$
$k + 2 \ 15 \ 0000$	$k + 15 \ 01 \langle q_a \rangle$
$k + 3 \ 21 \ k + 23$	$k + 16 \ 15 \langle q_c \rangle$
$k + 4 \ 02 \langle q_b \rangle$	$k + 17 \ 01 \langle P_a \rangle$
$k + 5 \ 15 \ 0000$	$k + 20 \ 22 \ k + 26$
$k + 6 \ 21 \ k + 15$	$k + 21 \ 17 \langle q_a \rangle$
$k + 7 \ 02 \langle P_a \rangle$	$k + 22 \ 11 \ 4 \ 000$
$k + 10 \ 03 \langle P_b \rangle$	$k + 23 \ 01 \langle q_b \rangle$
$k + 11 \ 21 \ k + 21$	$k + 24 \ 15 \langle q_c \rangle$
$k + 12 \ 10 \langle - \rangle$	$k + 25 \ 01 \langle P_b \rangle$
$k + 13 \ 17 \langle q_b \rangle$	$k + 26 \ 16 \langle P_c \rangle$

Розглянемо один з випадків, де зустрічається описана особливість додавання чисел в режимі плаваючої коми.

При розв'язуванні багатьох задач фізики і механіки, при розв'язуванні диференціальних і інтегральних рівнянь виникає потреба в знаходженні розв'язків лінійних систем алгебраїчних рівнянь. Нехай

$$AX = B,$$

де A — відома квадратна матриця порядку n ,

B — відома прямокутна матриця розміром $n \times m$,

X — стовбцева матриця невідомих.

Одним з ефективних і точних методів розв'язування систем алгебраїчних рівнянь на ЦАМ є метод перехресного множення. Перетворення будуться за формулами:

$$a_{ik}^t = \frac{a_{11}^{t-1} \cdot a_{i+1, k+1}^{t-1} - a_{1, k+1}^{t-1} \cdot a_{i+1, 1}^{t-1}}{a_{11}^{t-1}}, \quad (1)$$

$$a_{nk}^t = \frac{a_{1, k+1}^{t-1}}{a_{11}^{t-1}}. \quad (2)$$

При $t = n$, $a_{i1}^t = x_i$;

$i = 1, 2, \dots, n-1$

$t = 1, k = 1, 2, \dots, n$;

$t = 2, k = 1, 2, \dots, n-1$;

$\dots$

$t = n, k = 1.$

Вищевказана особливість виконання арифметичних операцій з плаваючою комою з найбільшою силою проявляється саме при розв'язуванні систем алгебраїчних рівнянь цим методом. Прямим наслідком цієї особливості є точність результатів, тобто розв'язків системи.

Матриця A може мати довільний характер, зокрема серед елементів a_{ij} матриці може бути багато нулів. Тоді багато з доданків у чисельнику формули (1) при перетвореннях можуть бути рівними нулю з великим додатним порядком і в результаті додавання результат буде невірний. В деяких випадках програма даного методу дає результати, але з невеликою точністю, якщо ж багато коефіцієнтів системи є нулями, то програма взагалі дає корені з нульовими мантисами і великими додатними порядками.

При використанні програм додавання з попередньою перевіркою мантис на нуль відносна похибка розв'язків не перевищує 0,000 001% (7—9 вірних знаків).

ЛІТЕРАТУРА

1. А. И. Китов и Н. А. Крицкий. Электронные цифровые машины и программирование. М., 1959.
2. Е. Л. Ющенко. Адресное программирование и особенности решения задач на машине «УРАЛ». К., 1960.
3. В. Н. Бондаренко и др. Программирование для цифровой вычислительной машины «УРАЛ». М., 1958.

Стаття надійшла 20. IX 1960.

О. М. КОСТОВСЬКИЙ

ВИЗНАЧЕННЯ КОРЕНІВ АЛГЕБРАІЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ «КУБУВАННЯ КОРЕНІВ»

Нехай дано рівняння з комплексними коефіцієнтами

$$f(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n = 0, \quad A_0 \neq 0, \quad A_k = a_k + ib_k, \quad (1)$$

корені якого розміщені по зростанню модулів

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|. \quad (2)$$

Введемо позначення

$$f(z) = P_0 + zP_1 = 0, \quad (3)$$

де

$$P_0(z^2) = A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \dots, \quad (4)$$

$$P_1(z^2) = A_1 + A_3 z^2 + A_5 z^4 + \dots$$

Нехай z_l — один з коренів рівняння (1); підставляючи z_l в (3), при $P_1(z_l^2) \neq 0$, одержимо

$$z_l = -\frac{P_0(z_l^2)}{P_1(z_l^2)}. \quad (5)$$

Якщо $P_1(z_l^2) = 0$, то z_l є одноразово коренем рівнянь $f(z) = 0$ і $P_1(z^2) = 0$, а значить, і рівняння $P_0(z^2) = 0$.

Зробимо у перетворень даного рівняння (1) методом Лобачевського—Грефе, одержимо рівняння

$$f_v(z) = A_0^{(v)} + A_1^{(v)} z + \dots + A_n^{(v)} z^n = P_0^{(v)} + zP_1^{(v)}, \quad (6)$$

з коренями $z_1^m, z_2^m, \dots, z_n^m$, $m = 2^v$.

Тоді, якщо для простого дійсного чи комплексного кореня має місце нерівність $\leq |z_{l-1}| < |z_l| < |z_{l+1}| \leq$, то

$$z_l^m = \frac{A_{l-1}^{(v)}}{A_l^{(v)}} = \frac{a_{l-1}^{(v)} + ib_{l-1}^{(v)}}{a_l^{(v)} + ib_l^{(v)}}. \quad (7)$$

Якщо рівняння (1) має дійсні коефіцієнти, то

$$z_l^m = \frac{a_{l-1}^{(v)}}{a_l^{(v)}} \quad (7')$$

при $\leq |z_{l-1}| < |z_l| < |z_{l+1}| \leq (z_l - \text{дійсний корінь})$. Або

$$z_l^m = \frac{-a_l^{(v)}}{2a_{l+1}^{(v)}} \pm i \frac{\sqrt{4a_{l-1}^{(v)}a_{l+1}^{(v)} - (a_l^{(v)})^2}}{2a_{l+1}^{(v)}} \quad (8)$$

при $\leq |z_{l-1}| < |z_l| = |z_{l+1}| < |z_{l+2}| \leq, z_l = \bar{z}_{l+1} = \rho e^{i\varphi}$.

За допомогою формули (5) знаходимо

$$z_l^{2^v-1} = -\frac{P_0^{(v-1)}(z_l^{2^v})}{P_1^{(v-1)}(z_l^{2^v})}, \quad z_l^{2^v-2} = -\frac{P_0^{(v-2)}(z_l^{2^v-1})}{P_1^{(v-2)}(z_l^{2^v-1})} \text{ і т. д.}$$

Зробивши v кроків, ми визначимо корінь даного рівняння z_l , якщо $P_1^{(\eta)}(z_l^{2^{\eta+1}}) \neq 0$ для всіх $\eta = 0, 1, \dots, v-1$.

Цей метод був запропонований М. Карвало в його дисертації [1].

Метод Карвало можна узагальнити на визначення коренів алгебраїчних рівнянь методом «кубування коренів» [2].

Для цього введемо позначення

$$f(z) = P_0 + zP_1 + z^2P_2 = 0, \quad (9)$$

де

$$\begin{aligned} P_0(z^3) &= a_0 + a_3 z^3 + a_6 z^6 + \dots, \\ P_1(z^3) &= a_1 + a_4 z^3 + a_7 z^6 + \dots, \\ P_2(z^3) &= a_2 + a_5 z^3 + a_8 z^6 + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Припустимо, що нам відомий куб z_l^3 кореня z_l рівняння (1), тоді корінь z_l можна знайти серед коренів квадратного рівняння (9)

$$P_2(z_l^3) \cdot z^2 + P_1(z_l^3) \cdot z + P_0(z_l^3) = 0, \quad (11)$$

а саме — це буде той з коренів квадратного рівняння, куб якого рівний даному значенню z_l^3 .

Якщо $P_2(z_l^3) = 0$, то z_l знаходимо з рівняння

$$z_l = -\frac{P_0(z_l^3)}{P_1(z_l^3)}. \quad (11')$$

Якщо z_l є коренем даного рівняння (1) і рівнянь $P_2(z^3) = 0$, $P_1(z^3) = 0$, то, очевидно, z_l є також коренем і рівняння $P_0(z^3) = 0$. Визначення z_l в цьому випадку приведемо нижче.

Складання перетворених рівнянь (12) можна також проводити за формулами

$$\begin{aligned} f_\eta(z) &= A_0^{(\eta)} + A_1^{(\eta)} z + \dots + A_n^{(\eta)} z^n = P_0^{(\eta)} + zP_1^{(\eta)} + z^2P_2^{(\eta)} = [P_0^{(\eta-1)}(z)]^3 + \\ &+ z\{[P_1^{(\eta-1)}(z)]^3 - 3P_0^{(\eta-1)}(z)P_1^{(\eta-1)}(z)P_2^{(\eta-1)}(z)\} + z^2[P_2^{(\eta-1)}(z)]^3, \end{aligned}$$

де

$$P_i^{(\eta-1)}(z) = A_{i+3}^{(\eta-1)} + A_{i+6}^{(\eta-1)} z + A_{i+9}^{(\eta-1)} z^2 + \dots; \quad i = 0, 1, 2; \quad \eta = 1, 2, \dots, v.$$

Корені $f_{v-1}(z)$, $f_{v-2}(z)$, ..., $f_1(z)$, $f(z)$ визначаємо з рівняння (11).

Припустимо тепер, що в формулі (5) $P_1(z_l^2) = 0$, де z_l один з коренів рівняння (1). Згідно (2) маємо $z_l \neq 0$. Приймаючи до уваги, що $P_0(z^2)$

і $P_1(z^2)$ мають z в парних степенях, очевидно, що z_l і $-z_l$ є також коренями рівнянь $P_i(z^2)=0$ і $D(z^2)=0$, де $D(z^2)$ спільний найбільший дільник P_0 і P_1 .

Користуючись похідною j -го порядку

$$f^{(j)}(z) = P_0^{(j)} + zP_1^{(j)} + j \cdot P_1^{(j-1)},$$

функції (3) легко встановити таку теорему:

Теорема I. Якщо функція $f(z)$ має корені z_l і $-z_l$ ($z_l \neq 0$) відповідно кратностей k_1 і k_2 , то $D(z^2)$ спільний найбільший дільник $P_0(z^2)$ і $P_1(z^2)$ має ці числа коренями кратності $k = \min(k_1, k_2)$.

З формул (3) і формули $f(-z) = P_0 - zP_1$ одержуємо теорему.

Теорема II. Якщо $D(z^2)$ спільний найбільший дільник P_0 і P_1 , а $D_1(z^2)$ спільний найбільший дільник $f(z)$ і $f(-z)$, то

$$D(z^2) = D_1(z^2).$$

Таким чином, якщо $P_1(z_l^2) = 0$ в (5), то корінь z_l можна знайти серед коренів рівняння

$$D(z^2) = (P_0, P_1) = 0.$$

Складемо рівняння

$$f_v(z) = A_0^{(v)} + A_1^{(v)} z + \dots + A_n^{(v)} z^n = P_0^{(v)} + zP_1^{(v)} + z^2P_2^{(v)} = 0, \quad (12)$$

корені якого рівні z_l^m , $m=3^v$, $l=1, 2, \dots, n$. Зробивши для цього v перетворень, в кожному перетворенні складаємо рівняння, корені якого рівні кубам коренів перетвореного рівняння. Формули перетворення коефіцієнтів наведені в роботі [2].

$$A_\mu^{(\eta)} = \frac{(-1)^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}}}{\mu!} A_0^{3^\eta} \begin{vmatrix} S_{3\mu}^{(\eta-1)} & S_{3(\mu-1)}^{(\eta-1)} & \dots & S_6^{(\eta-1)} & S_3^{(\eta-1)} \\ S_{3(\mu-1)}^{(\eta-1)} & S_{3(\mu-2)}^{(\eta-1)} & \dots & S_3^{(\eta-1)} & \mu-1 \\ \vdots & \vdots & & \mu-2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ S_6^{(\eta-1)} & S_3^{(\eta-1)} & 2 & \vdots & \vdots \\ S_3^{(\eta-1)} & 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\mu} \sum_{l=1}^{\mu} S_{3l}^{(\eta-1)} A_{\mu-l}^{(\eta)} =$$

$$= A_0^{3^\eta} \sum_{v_1+2v_2+\dots+\mu v_\mu=\mu} \frac{(-1)^{v_1+v_2+\dots+v_\mu}}{v_1! v_2! \dots v_\mu!} \left(\frac{S_3^{(\eta-1)}}{1} \right)^{v_1} \left(\frac{S_6^{(\eta-1)}}{2} \right)^{v_2} \dots \left(\frac{S_{3\mu}^{(\eta-1)}}{\mu} \right)^{v_\mu},$$

$$\eta = 1, 2, \dots, v,$$

де сумування поширюється на всі цілі невід'ємні рішення діофантового рівняння $v_1 + 2v_2 + \dots + \mu v_\mu = \mu$.

$$S_\alpha^{(\eta-1)} = \frac{(-1)^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}}{(A_0^{(\eta-1)})^\alpha} \begin{vmatrix} \alpha A_\alpha^{(\eta-1)} & A_{\alpha-1}^{(\eta-1)} & \dots & A_2^{(\eta-1)} & A_1^{(\eta-1)} \\ (\alpha-1) A_{\alpha-1}^{(\eta-1)} & A_{\alpha-2}^{(\eta-1)} & \dots & A_1^{(\eta-1)} & A_0^{(\eta-1)} \\ \vdots & \vdots & & A_0^{(\eta-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 A_2^{(\eta-1)} & A_1^{(\eta-1)} & & \vdots & \vdots \\ A_1^{(\eta-1)} & A_0^{(\eta-1)} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{A_0} \left[\sum_{i=1}^{\alpha-1} S_{\alpha-i}^{(\eta-1)} A_i - \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\alpha A_\alpha] = \alpha \times \\
 & \times \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = \alpha} \frac{(-1)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n - 1)!}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \left(\frac{A_1^{(\eta-1)}}{A_0^{(\eta-1)}} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{A_2^{(\eta-1)}}{A_0^{(\eta-1)}} \right)^{\lambda_2} \dots \left(\frac{A_n^{(\eta-1)}}{A_0^{(\eta-1)}} \right)^{\lambda_n}, \\
 & \alpha = 3, 6, \dots, 3\mu,
 \end{aligned}$$

де сумування також поширюється на всі цілі невід'ємні розв'язки рівняння $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = \alpha$.

Припустимо тепер, що при визначенні кореня z_l методом «кубування коренів» у формулі (11) $P_2(z_l^3) = 0$ і $P_1(z_l^3) = 0$, тоді, очевидно, і $P_0(z_l^3) = 0$, тобто z_l є коренем спільного найбільшого дільника $P_0(z^3)$, $P_1(z^3)$ і $P_2(z^3)$.

Користуючись похідною j -го порядку

$$f^{(j)}(z) = P_0^{(j)} + P_1^{(j)}z + P_2^{(j)}z^2 + jP_1^{(j-1)} + 2jzP_2^{(j-1)} + (j-1)jP_2^{(j-2)},$$

функції (9), легко встановити теорему.

Теорема III. Якщо функція $f(z)$ має корені $z_l, \varepsilon z_l, \varepsilon^2 z_l$ (де $\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}$ корінь кубічний з одиниці) відповідно кратностей k_1, k_2, k_3 , то $D(z^3)$ спільний найбільший дільник $P_0(z^3), P_1(z^3), P_2(z^3)$ має ці числа коренями кратності $k = \min(k_1, k_2, k_3)$.

Приймаючи до уваги, що $P_i[(\varepsilon z_l)^3] = P_i[z_l^3]$, $P_i[(\varepsilon^2 z_l)^3] = P_i[z_l^3]$, $i = 0, 1, 2$, з формул

$$f(z) = P_0 + zP_1 + z^2P_2,$$

$$f(\varepsilon z) = P_0 + \varepsilon zP_1 + \varepsilon^2 z^2P_2,$$

$$f(\varepsilon^2 z) = P_0 + \varepsilon^2 zP_1 + \varepsilon z^2P_2$$

і формул

$$P_0 = \frac{1}{3} [f(z) + f(\varepsilon z) + f(\varepsilon^2 z)],$$

$$zP_1 = \frac{1}{3} [f(z) + \varepsilon^2 f(\varepsilon z) + \varepsilon f(\varepsilon^2 z)],$$

$$z^2P_2 = \frac{1}{3} [f(z) + \varepsilon f(\varepsilon z) + \varepsilon^2 f(\varepsilon^2 z)]$$

одержимо теорему.

Теорема IV. Якщо $D(z^3)$ спільний найбільший дільник $P_0(z^3), P_1(z^3)$ і $P_2(z^3)$, а $D_1(z^3)$ спільний найбільший дільник $f(z), f(\varepsilon z)$ і $f(\varepsilon^2 z)$, то

$$D(z^3) = D_1(z^3).$$

Таким чином, якщо в (11) має місце випадок $P_2(z_l^3) = 0$ і $P_1(z_l^3) = 0$, то z_l можна знайти серед коренів рівняння

$$D(z^3) = (P_0, P_1, P_2) = 0.$$

Розглянемо приклад

$$f(z) = 10 - 8z + 3z^2 + z^3 = 0.$$

В роботі [2] для визначення коренів цього рівняння $z_1 = z_2 = 1 + i$, $z_3 = -5$ було зроблено три перетворення даного рівняння ($v=3$) методом «кубування коренів».

$$f_1(z) = 10^3 + 508z + 129z^2 + z^3 = 0, \quad (13)$$

$$f_2(z) = 10^9 - 6,2499488 \cdot 10^7 z + 1,953093 \cdot 10^6 z^2 + z^3 = 0, \quad (14)$$

$$f_3(z) = 10^{27} + 1,220703 \cdot 10^{23} z + 7,45058 \cdot 10^{18} z^2 + z^3 = 0. \quad (15)$$

Визначимо корінь z_1 методом, запропонованим в даній статті. Знаходимо z_1^{27} з рівняння (15) по формулі (8)

$$\begin{aligned} z_1^{27} &= -\frac{1,220703 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 7,45058 \cdot 10^{18}} + i \frac{\sqrt{4 \cdot 7,45058 \cdot 10^{45} - (1,220703)^2 \cdot 10^{45}}}{2 \cdot 7,45058 \cdot 10^{18}} = \\ &= 8192,000 + i 8192,000. \end{aligned}$$

$$\text{Значить, } P_0^{(2)} = 10^9 + (z_1^9)^3 = 999991808 + i 8192,000, \quad P_1^{(2)} = 6,249488 \cdot 10^7, \\ P_2^{(2)} = 1,953093 \cdot 10^6.$$

Розв'язуючи квадратне рівняння з комплексними коефіцієнтами

$$P_2^{(2)} z^2 + P_1^{(2)} z + P_0 = 0,$$

одержимо два корені $z' = 16,00000 + i 16,00000$, $z'' = \frac{3,124949}{0,1953093} - i 16,00000$.

З них перший дає $(z')^3 = z_1^{27}$, таким чином,

$$z_1^9 = 16,00000 + i 16,00000.$$

Визначаємо тепер $P_0^{(1)} = 10^3 + (z_1^3)^3 = 984,0000 + i 16,00000$, $P_1^{(1)} = 508,000$, $P_2^{(1)} = 129,000$. З рівняння $P_2^{(1)} z^2 + P_1^{(1)} z + P_0^{(1)} = 0$ одержуємо корені $z' = -2,00000 + i 2,00000$ і $z'' = -\frac{150}{129} - 2,00000 i$. Маємо $(z')^3 = z_1^9$, отже $z_1^3 = -2,00000 + i 2,00000$.

Знаходимо $P_0 = 10 + z_1^3 = 8 + 2,00000 i$, $P_1 = -8$, $P_2 = 3$.

З рівняння $P_2 z^2 + P_1 z + P_0 = 0$ одержуємо корені $z' = 1 + i$ і $\frac{5}{3} - i = z''$, з яких $(z')^3 = z_1^3$.

Таким чином, корінь даного рівняння є $z_1 = 1 + i$.

В даному рівнянні, яке має одну пару спряжених комплексних коренів, можна знайти корені простіше, тому вказаним способом можна обчислювати корені рівнянь, що мають більше двох пар комплексних спряжених коренів, не рівних по модулю між собою (для рівнянь з дійсними коефіцієнтами), або рівнянь, що мають більше двох комплексних коренів, не рівних по модулю (для рівнянь з комплексними коефіцієнтами).

ЛІТЕРАТУРА

1. E. Cayvallo. Méthode pratique pour la résolution numérique complète des equations algébriques au transcendantes. Thèse de Paris, 1890, pp. 1—40.
2. А. Н. Костовский. Обобщенные формулы преобразования в методе Лобачевского—Греффе численного решения уравнений. Материалы научно-технической конференции «Новые разработки в области вычислительной математики и вычислительной техники». Киев, 1960.

М. Я. БАРТИШ

ДО МЕТОДУ ЛЕМЕРА ВИЗНАЧЕННЯ НУЛІВ ПОЛІНОМІВ, ЦІЛИХ І ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай дана функція

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad a_0 = 1 \quad (1)$$

голоморфна в середині круга збіжності радіуса r , нулі якої з круга збіжності розміщені по зростанню модулів

$$0 < |z_1| < |z_2| < |z_3| < \dots < r.$$

В роботі О. М. Костовського [1] доведена основна теорема методу Лемера числового визначення нулів.

Мета цієї замітки полягає в тому, щоб довести аналогічну теорему для модифікованого методу Лемера, даного О. М. Костовським в роботах [2] і [3]. Суть цієї модифікації полягає в тому, що для функції (1) в ролі допоміжної функції беремо її похідну

$$\pm f'(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots, \quad (2)$$

де $b_k = \pm (k+1) a_{k+1}$.

Формули перетворення коефіцієнтів рівнянь (1) і (2) беремо такі [2]:

$$a_l^{(v)} = (-1)^l \left[(a_l^{(v-1)})^2 + 2 \sum_{i=1}^l (-1)^i a_{l-i}^{(v-1)} a_{l+i}^{(v-1)} \right] \quad (3)$$

$$b_l^{(v)} = (-1)^l \left[a_l^{(v-1)} b_l^{(v-1)} + \sum_{i=1}^l (-1)^i (a_{l+i}^{(v-1)} b_{l-i}^{(v-1)} + a_{l-i}^{(v-1)} b_{l+i}^{(v-1)}) \right].$$

За цими формулами складемо відповідно функції

$$f_k(z) = a_0^{(k)} + a_1^{(k)} z + \dots + a_n^{(k)} z^n + \dots, \quad (4)$$

$$f'_k(z) = b_0^{(k)} + b_1^{(k)} z + \dots + b_n^{(k)} z^n + \dots$$

Нехай $|z_n| < R < |z_{n+1}|$ (2') (в частинному випадку $|z_n| < R < r$, якщо $f(z)$ має тільки n коренів у середині круга збіжності радіуса r), тоді для функції (1) голоморфної в колі $|z| < r$ має місце формула

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(z_1 z_2 \dots z_n)^k b_n^{(k)}}{a_0^{(k)}} = \pm (-1)^n \left(\frac{a_1}{a_0} + \sum_{i=1}^n z_i^{-1} \right), \quad (5)$$

що є основним результатом цієї замітки.

Доведемо цю рівність, поклавши для простоти $a_0=1$.
З логарифмічної похідної функції $f(z)$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{z-z_i} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m z^{m-1} \quad (6)$$

випливає, що $\psi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m z^{m-1}$ збігається в середині і на границі круга радіуса $R < r$, значить, $|c_m| < \frac{M}{R^m}$, де можна вважати

$$M \geq 1. \quad (7)$$

Інтегруючи на відрізку $[0, z]$ праву і ліву частини (6), одержимо:

$$f(z) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_j}\right) e^{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{m} z^m}. \quad (8)$$

У рівнянні (1) і (8) зробимо заміну змінних $z=t \pm h$.

Вважаючи h нескінченно малою і нехтуючи членами, які містять h^2 і більш високі степені h , одержимо:

$$\varphi(t) = f(t \pm h) = f(t) \pm h f'(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots, \quad (1')$$

де $A_k = a_k + h b_k$

$$\varphi(t) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{z_i \mp h}{z_i} - \frac{t}{z_i}\right) e^{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i t^i}{i} \pm \sum_{i=1}^{\infty} h c_i t^{i-1}}. \quad (8')$$

Складемо функцію, нулі якої рівні k -тим степеням нулів функції (1'):

$$\varphi_k(t) = \prod_{j=0}^{k-1} \varphi(\omega^j \sqrt[k]{t}) = A_0^{(k)} + A_1^{(k)} t + A_2^{(k)} t^2 + \dots \quad (1'')$$

$$\varphi_k(t) = \prod_{i=1}^n \left[\left(\frac{z_i \mp h}{z_i}\right)^k - \frac{t}{z_i^k} \right] e^{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\omega^{ji} t^{\frac{j}{k}} c_i}{i} \pm h \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} c_i t^{\frac{j-1}{k}} \omega^{(i-1)j}}, \quad (8'')$$

де $\omega = e^{\frac{2\pi i}{k}}$ є первісний корень рівняння $\omega^k - 1 = 0$ і $A_n^{(k)} = a_n^{(k)} + k h b_n^{(k)}$
Рівняння (8'') можна записати так:

$$\varphi_k(t) = \prod_{i=1}^n \left[\left(1 - \frac{t}{z_i^k}\right) \mp \frac{kh}{z_i} \right] e^{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j c_{jk}}{j} \pm \sum_{j=0}^{\infty} k h c_{jk+1} t^j},$$

або

$$\varphi_k(t) = \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{t}{z_i^k}\right) (1 + B_{1,k}t + \dots) \mp kh \left\{ \left[\frac{1}{z_1} \left(1 - \frac{t}{z_1^k}\right) \dots \left(1 - \frac{t}{z_n^k}\right) + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{t}{z_1^k}\right) \dots \left(1 - \frac{t}{z_{n-1}^k}\right) \frac{1}{z_n} \right] [1 + B_{1,k}t + \dots] - \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{t}{z_i^k}\right) [1 + \right. \\ \left. + B_{1,k}t + \dots] [c_1 + c_{k+1}t + \dots] \right\}, \quad (9)$$

де

$$B_{n,k} = \sum_{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n} \frac{1}{\lambda_1! \lambda_2! \dots \lambda_n!} \left(\frac{c_k}{1}\right)^{\lambda_1} \left(\frac{c_{2k}}{2}\right)^{\lambda_2} \dots \left(\frac{c_{nk}}{n}\right)^{\lambda_n}, \quad (10)$$

і сумування поширено на всі цілі невід'ємні розв'язки діофантового рівняння $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + n\lambda_n = n$.

У роботі Поля [4] показано, що

$$|B_{n,k}| \leq \frac{M^n}{R^{nk}}. \quad (11)$$

Прирівнявши коефіцієнти при t^n у рівності (9) і (1"), одержимо:

$$A_n^{(k)} = (-1)^n \frac{1}{z_1^k \dots z_n^k} + B_{1,k} (-1)^{n-1} S\left(\frac{1}{z_1^k \dots z_{n-1}^k}\right) + \dots + B_{n,k} \mp \\ \mp kh \left\{ B_{1,k} (-1)^{n-1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} \frac{1}{z_1^k \dots z_{i-1}^k z_{i+1}^k \dots z_n^k} \right) + \right. \\ \left. + (-1)^{n-2} B_{2,k} \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} S\left(\frac{1}{z_1^k \dots z_{i-1}^k z_{i+1}^k \dots z_{n-1}^k}\right) + \dots + \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} B_{n,k} \right\} - \\ - \left[(-1)^n \frac{1}{z_1^k \dots z_n^k} c_1 + (-1)^{n-1} S\left(\frac{1}{z_1^k \dots z_{n-1}^k}\right) (c_1 B_{1,k} + c_{k+1}) + \dots + \right. \\ \left. + c_1 B_{n,k} + c_{k+1} B_{(n-1),k} + \dots + c_{nk+1} \right], \quad (12)$$

де $S\left(\frac{1}{z_1^k \dots z_j^k}\right)$ елементарна симетрична функція обернених величин нулів $z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k$ функції $f_k(z)$.

З рівності (12) випливає

$$z_1^k z_2^k \dots z_n^k A_n^{(k)} = (-1)^n + B_{1,k} (-1)^{n-1} S(z_1^k) + \dots + B_{n,k} z_1^k \dots z_n^k \mp \\ \mp kh \left\{ B_{1,k} (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{z_i} + (-1)^{n-2} B_{2,k} \sum_{j \neq i}^n \frac{z_i^k}{z_i} \cdot S(z_j^k) + \dots + \right. \\ \left. + B_{n,k} \sum_{i=1}^n \frac{1}{z_i} (z_1^k \dots z_n^k) \right\} \pm kh \{ (-1)^n c_1 + (-1)^{n-1} (c_1 B_{1,k} + \\ + c_{k+1}) S(z_1^k) + \dots + (z_1^k \dots z_n^k) (c_1 B_{n,k} + \dots + c_{nk+1}) \}, \quad (13)$$

приймаючи до уваги нерівність (2'), (7) і (11), одержимо:

$$|B_{j,k} S(z_1^k \dots z_j^k)| \leq |B_{j,k}| C_n^j |z_n|^{jk} \leq C_n^j M^j \left| \frac{z_n}{R} \right|^{jk} \leq C_n^j M^n \left| \frac{z_n}{R} \right|^k,$$

звідси

$$\left| \sum_{j=1}^n B_{j,k} S(z_1^k z_2^k \dots z_j^k) \right| \leq M^n 2^{n-1} \left| \frac{z_n}{R} \right|^k = N_1 \left| \frac{z_n}{R} \right|^k. \quad (14)$$

Такі оцінки можна одержати і для інших сум, а саме:

$$\left| \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{z_i^k}{z_i} S(z_1^k \dots z_{i-1}^k z_{i+1}^k \dots z_j^k) B_{j,k} \right| \leq N_2 \left| \frac{z_n}{R} \right|^k. \quad (15)$$

$$\left| \sum_{j=1}^n S(z_1^k \dots z_j^k) (c_1 B_{j,k} + c_{k+1} B_{(j-1),k} + \dots + c_{(j-1)k+1} B_{1,k} + c_{jk+1}) \right| \leq N_3 \left| \frac{z_n}{R} \right|^k, \quad (16)$$

значить,

$$z_1^k z_2^k \dots z_n^k (a_n^{(k)} + k h b_n^{(k)}) = (-1)^n \pm k h (-1)^n c_1 + k h 0 \left(\left| \frac{z_n}{R} \right|^k \right). \quad (17)$$

Як показав Поля [4],

$$z_1^k z_2^k \dots z_n^k a_n^{(k)} = (-1)^n + k h 0 \left(\left| \frac{z_n}{R} \right|^k \right). \quad (18)$$

Рівняння (17) можна записати так:

$$z_1^k z_2^k \dots z_n^k k h b_n^{(k)} = \pm k h \left[(-1)^n c_1 + 0 \left(\left| \frac{z_n}{R} \right|^k \right) \right]. \quad (19)$$

З (19) одержимо:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_1^k z_2^k \dots z_n^k b_n^{(k)} = \pm (-1)^n c_1. \quad (20)$$

Для визначення c_1 використовуємо рівності (1) і (8)

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_j} \right) \left(1 + c_1 z + \frac{c_2 z^2}{2} + \dots + \frac{c_1^2 z^2}{2} + \dots \right).$$

Прирівнявши коефіцієнт при z , одержимо:

$$c_1 = a_1 + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n}.$$

Підставляючи значення c_1 у рівність (20), одержимо:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_1^k z_2^k \dots z_n^k b_n^{(k)} = \pm (-1)^n \left(a_1 + \sum_{i=1}^n z_i^{-1} \right), \quad (5)$$

що і треба було довести.

З рівності (18) і (5) одержуємо:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_n^{(k)}}{a_n^{(k)}} = \pm \left(a_1 + \sum_{i=1}^n z_i^{-1} \right). \quad (21)$$

Так само одержимо (при умові, що $\leq |z_{n-1}| < |z_n| < |z_{n+1}| \leq$)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_{n-1}^{(k)}}{a_{n-1}^{(k)}} = \pm \left(a_1 + \sum_{i=1}^{n-1} z_i^{-1} \right). \quad (22)$$

Звідси одержимо формулу для обчислення простих нулів

$$\pm z_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n^{(k)}}{a_n^{(k)}} - \frac{b_{n-1}^{(k)}}{a_{n-1}^{(k)}} \right)^{-1},$$

якщо $\leq |z_{n-1}| < |z_n| < |z_{n+1}| \leq$.

Формулу (5) можна узагальнити на кратні дійсні або комплексні корені

$$z_{l+1} = z_{l+2} = \dots = z_{l+g} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

де $\leq |z_l| < \rho < |z_{l+g+1}| \leq$.

В цьому випадку формула (5) буде мати такий вигляд:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{l+j} z_i^k b_{l+j}^{(k)} = \pm (-1)^{l+j} C_g^j \left(a_1 + \sum_{i=1}^{l+j} z_i^{-1} \right), \quad (23)$$

де $j=0, 1, 2, \dots, g$.

Формула (23) залишається справедливою, кратний корінь визначаємо стільки разів, яка його кратність.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Костовский. Основная теорема метода Лемера, численного определения нулей, целых и голоморфных функций. Успехи мат. наук, т. XVI № 4, 1961.
2. А. Н. Костовский. Формулы преобразования коэффициентов в методе Лемера численного решения алгебраических уравнений. ДАН СССР, т. 131, № 4, 1960.
3. А. Н. Костовский. К методу численного решения и алгебраического уравнения с комплексными коэффициентами. Материалы научно-техн. конферен. по вычисл. мат. и вычисл. техн., К., 1960 г.
4. G. P o l y a. Über das Graeffesche Verfahren Zs. Math. u. Phys. 63. 1914.

Б. В. КОВАЛЬЧУК

АСИМПТОТИЧНА ОЦІНКА ЗАЛИШКУ РЯДУ ФУР'Є ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Нехай $W^{(r,l)}H_{\omega_1, \omega_2}$ ($l \geq r \geq 0$) — клас функцій $f(x, y)$ періоду 2π відносно кожної змінної x і y , для яких виконуються співвідношення:

$$\begin{aligned} |\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)| &\leq \omega_1(|x_1 - x_2|) + \omega_2(|y_1 - y_2|), \\ |\psi(x_1, 0) - \psi(x_2, 0)| &\leq \omega_1(|x_1 - x_2|), \end{aligned} \quad (1)$$

де $\varphi(x, y) = \frac{\partial^l f}{\partial y^l}$, $\psi(x, y) = \frac{\partial^r f}{\partial x^r}$,

і ω_1, ω_2 — задані модулі неперервності.

Знайдемо асимптотичну оцінку величини

$$E_{n,m}(W^{(r,l)}H_{\omega_1, \omega_2}; x, y) = \sup_{f \in W^{(r,l)}H_{\omega_1, \omega_2}} |f(x, y) - S_{n,m}(f; x, y)|, \quad (2)$$

де через $S_{n,m}(f; x, y)$ позначена сума Фур'є порядку (n, m) функцій $f(x, y)$.

Теорема. Справедлива асимптотична рівність

$$\begin{aligned} E_{n,m}(W^{(r,l)}H_{\omega_1, \omega_2}; x, y) &= \Theta_n \frac{2}{\pi^2} \frac{\lg n}{n^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_1\left(\frac{2u}{n}\right) \sin u du + \\ &+ \Theta_{n,m} \frac{8}{\pi^4} \frac{\lg n \lg m}{m^l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\omega_1\left(\frac{2u}{n}\right), \omega_2\left(\frac{2v}{m}\right)\right\} \sin u \sin v du dv + \\ &+ O\left[\frac{\lg n + \lg m}{m^l} \left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right] + O\left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right), \end{aligned} \quad (3)$$

де $\Theta_n = 1$, $\Theta_{n,m} = 1$, якщо ω_1, ω_2 — випуклі функції, а в загальному випадку $\frac{1}{2} \leq \Theta_n \leq 1$, $\frac{1}{2} \leq \Theta_{n,m} \leq 1$. Причому метод доведення теореми такий, що константа C , яка входить в $O(1)$, є абсолютною константою.

Д о в е д е н н я. Не важко показати, що верхня грань (2) не зміниться, якщо покласти $x=y=0$ і поширити її на клас $\overline{W}^{(r,l)}H_{\omega_1, \omega_2}$ функцій $f(x, y)$, які належать до класу $W^{(r,l)}H_{\omega_1, \omega_2}$ і перетворюються в нуль при $x=y=0$. Крім цього, шукана верхня грань не зміниться, якщо

поширити її на більш вузький клас $\overline{W}^{(r,l)}_{\omega_1, \omega_2} H^{(0)}_{\omega_1, \omega_2}$ функцій $f(x, y)$, періоду 2π по x і y , для яких виконуються співвідношення (1) і які задовольняють умові $\varphi(o, o) = \psi(o, o) = 0$.

Для даного класу функцій можна знайти (див. [2]), що

$$f(o, o) - S_{n,m}(f; o, o) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^{(r)}(t) \psi(t, o) dt + \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) D_m^{(l)}(z) \varphi(t, z) dt dz, \quad (4)$$

де

$$D_n(t) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad D_n^{(r)}(t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\cos \left(it + \frac{r\pi}{2} \right)}{i^r}.$$

Але на основі результату [3] маємо

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^{(r)}(t) \psi(t, o) dt \right| \leq \frac{2}{\pi^2} \frac{\lg n}{n^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_1 \left(\frac{2u}{n} \right) \sin u du + O \left(\frac{\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right)}{n^r} \right). \quad (5)$$

Займемося тепер оцінкою інтеграла

$$I_{n,m}(\varphi) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) D_m^{(l)}(z) \varphi(t, z) dt dz.$$

Спираючись на результати [3] і [4], знаходимо оцінки:

$$\left| \frac{1}{\pi^2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) D_m^{(l)}(z) \varphi(t, z) dt dz \right| \leq O \left[\frac{\lg m}{m^l} \left(\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right], \quad (6)$$

$$\left| \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{-\frac{1}{m}} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} D_n(t) D_m^{(l)}(z) \varphi(t, z) dt dz \right| \leq O \left[\frac{\lg n}{m^l} \left(\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right], \quad (7)$$

$$\left| \frac{1}{\pi^2} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} D_n(t) D_m^{(l)}(z) \varphi(t, z) dt dz \right| \leq O \left[\frac{\lg n}{m^l} \left(\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right]. \quad (8)$$

Тоді інтеграл $I_{n,m}(\varphi)$ можна записати так:

$$I_{n,m}(\varphi) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{-\frac{1}{n}} \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} D_n(t) D_m^{(l)}(z) \varphi(t, z) dt dz + \\ + \frac{1}{\pi^2} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} D_n(t) D_m^{(l)}(z) \varphi(t, z) dt dz +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) D_m^{(l)}(z) \varphi(t, z) dt dz + \\
& + \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) D_m^{(l)}(z) \varphi(t, z) dt dz + O \left[\frac{\lg n + \lg m}{m^l} \left(\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right]. \quad (9)
\end{aligned}$$

Усі чотири інтеграли правої частини рівності (9) оцінюються аналогічно один одному. Оцінимо, наприклад, інтеграл

$$I_{n,m}^{(3)}(\varphi) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) D_m^{(l)}(z) \varphi(t, z) dt dz.$$

За допомогою інтегрального представлення О. М. Тверитіна (див. [5]) ядро $D_m^{(l)}(z)$ можна представити у вигляді

$$\begin{aligned}
D_m^{(l)}(z) = & \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^1 \rho^m \left(\lg \frac{1}{\rho} \right)^{l-1} \frac{(1-\rho) \cos \left(mz + \frac{l\pi}{2} \right)}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{z}{2}} d\rho - \\
& - \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^1 \rho^m \left(\lg \frac{1}{\rho} \right)^{l-1} \frac{(1-\cos z) \cos \left(mz + \frac{l\pi}{2} \right)}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{z}{2}} d\rho - \\
& - \frac{1}{\Gamma(l)} \int_0^1 \rho^m \left(\lg \frac{1}{\rho} \right)^{l-1} \frac{\sin z \sin \left(mz + \frac{l\pi}{2} \right)}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{z}{2}} d\rho.
\end{aligned}$$

Доводимо справедливості співвідношень:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\sqrt{\rho}}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} \frac{(1-\rho) \cos \left(mz + \frac{l\pi}{2} \right)}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{z}{2}} \varphi(t, z) dt dz \right| \leq \\
& \leq O \left[\lg n \left(\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right], \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\rho}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} \frac{(1-\cos z) \cos \left(mz + \frac{l\pi}{2} \right)}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{z}{2}} \varphi(t, z) dt dz \right| \leq \\
& \leq O \left[\lg n \left(\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right]. \quad (11)
\end{aligned}$$

Використовуючи ці співвідношення, одержимо, що

$$\left| I_{n,m}^{(3)}(\varphi) \right| = \left| \frac{1}{\pi^2 \Gamma(l)} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \int_{\frac{1}{m}}^{\pi} \int_0^1 \rho^{m-1} \left(\lg \frac{1}{\rho} \right)^{l-1} D_n(t) A_m^{(l)}(z) \varphi(t, z) dt dz d\rho \right| + \\ + O \left[\frac{\lg n}{m^l} \left(\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right], \quad (12)$$

де

$$A_m^{(l)}(z) = \frac{\rho \sin z \sin \left(mz + \frac{l\pi}{2} \right)}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{z}{2}}.$$

Покладемо тепер для $\nu = 1, 2, \dots, n$; $\mu = 1, 2, \dots, m-2$

$$t_\nu = \nu h_n^{(1)}, \quad h_n^{(1)} = \frac{2\pi}{2n+1},$$

$$z_\mu = \left(\mu + s - \frac{l}{2} \right) h_m^{(2)}, \quad h_m^{(2)} = \frac{\pi}{m},$$

$s \geq \frac{l}{2}$ (s — ціле, найменше із таких чисел),

$$\Delta_\nu^{(1)} = \int_{t_\nu - \frac{1}{2}}^{t_\nu + \frac{1}{2}} D_n(t) dt, \quad \Delta_\mu^{(2)} = \int_{z_\mu - \frac{1}{2}}^{z_\mu + \frac{1}{2}} A_m^{(l)}(z) dz,$$

$$\varphi_{\nu, \mu}(t, z) = \varphi(t, z) - \varphi(t_\nu, z_\mu).$$

Не важко переконатися в справедливості співвідношення

$$\frac{1}{\pi^2} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \int_{\frac{1}{m}}^{\pi} D_n(t) A_m^{(l)}(z) \varphi(t, z) dt dz = \\ = \frac{1}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^{m-2} \int_{t_\nu - \frac{1}{2}}^{t_\nu + \frac{1}{2}} \int_{z_\mu - \frac{1}{2}}^{z_\mu + \frac{1}{2}} D_n(t) A_m^{(l)}(z) \varphi_{\nu, \mu}(t, z) dt dz + \\ + \frac{1}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^{m-2} \varphi(t_\nu, z_\mu) \Delta_\nu^{(1)} \Delta_\mu^{(2)} + O \left[(\lg n + \lg m) \left(\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right]. \quad (13)$$

Для другого доданка правої частини рівності (13) знаходимо оцінку

$$\left| \frac{1}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^n \sum_{\mu=1}^{m-2} \varphi(t_\nu, z_\mu) \Delta_\nu^{(1)} \Delta_\mu^{(2)} \right| \leq O \left[\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right]. \quad (14)$$

Далі має місце рівність (див. [1]).

$$\begin{aligned} & \int_{t_v - \frac{1}{2}}^{t_v + \frac{1}{2}} \int_{z_\mu - \frac{1}{2}}^{z_\mu + \frac{1}{2}} D_n(t) A_m^{(l)}(z) \varphi_{v, \mu}(t, z) dt dz = \\ & = \frac{(-1)^{v+\mu+s}}{16} \int_0^{\frac{h_n^{(1)}}{2}} \int_0^{\frac{h_m^{(2)}}{2}} [(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4)(p_1 + \\ & + p_2)(q_1 + q_2)] \sin \frac{2n+1}{2} u \sin mv du dv + I_{n,m}^{(3,1)}(\varphi) + I_{n,m}^{(3,2)}(\varphi) + I_{n,m}^{(3,3)}(\varphi), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \varphi_{v, \mu}(t_v - u, z_\mu - v), \quad \alpha_2 = \varphi_{v, \mu}(t_v - u, z_\mu + v), \\ \alpha_3 &= \varphi_{v, \mu}(t_v + u, z_\mu - v), \quad \alpha_4 = \varphi_{v, \mu}(t_v + u, z_\mu + v), \\ p_1 &= \frac{1}{\sin \frac{t_v - u}{2}}, \quad p_2 = \frac{1}{\sin \frac{t_v + u}{2}}, \\ q_1 &= \frac{\rho \sin(z_\mu - v)}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{z_\mu - v}{2}}, \quad q_2 = \frac{\rho \sin(z_\mu + v)}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{z_\mu + v}{2}}, \end{aligned}$$

а три останні доданки правої частини рівності відповідно мають значення:

$$\begin{aligned} I_{n,m}^{(3,1)}(\varphi) &= \frac{(-1)^{v+\mu+s}}{16} \int_0^{\frac{h_n^{(1)}}{2}} \int_0^{\frac{h_m^{(2)}}{2}} [(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4)(p_1 - \\ & - p_2)(q_1 + q_2)] \sin \frac{2n+1}{2} u \sin mv du dv, \\ I_{n,m}^{(3,2)}(\varphi) &= \frac{(-1)^{v+\mu+s}}{16} \int_0^{\frac{h_n^{(1)}}{2}} \int_0^{\frac{h_m^{(2)}}{2}} [(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4)(p_1 + \\ & + p_2)(q_1 - q_2)] \sin \frac{2n+1}{2} u \sin mv du dv, \\ I_{n,m}^{(3,3)}(\varphi) &= \frac{(-1)^{v+\mu+s}}{16} \int_0^{\frac{h_n^{(1)}}{2}} \int_0^{\frac{h_m^{(2)}}{2}} [(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(p_1 - \\ & - p_2)(q_1 - q_2)] \sin \frac{2n+1}{2} u \sin mv du dv. \end{aligned}$$

Справедливі такі співвідношення:

$$\sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^{m-2} |I_{n,m}^{(3,1)}(\varphi)| \leq O \left[\lg n \left(\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right], \quad (15)$$

$$\sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^{m-2} |I_{n,m}^{(3,2)}(\varphi)| \leq O \left[\lg m \left(\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right], \quad (16)$$

$$\sum_{v=1}^n \sum_{\mu=1}^{m-2} |I_{n,m}^{(3,3)}(\varphi)| \leq O \left[\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right]. \quad (17)$$

Внаслідок цих співвідношень знаходимо

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi^2} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \int_{\frac{1}{m}}^{\pi} D_n(t) A_m^{(l)}(z) \varphi(t, z) dt dz \right| = \\ & = \left| \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{\frac{h_n^{(1)}}{2}} \int_0^{\frac{h_m^{(2)}}{2}} [(\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4)(p_1 + \right. \\ & \quad \left. + p_2)(q_1 + q_2)] \sin \frac{2n+1}{2} u \sin mv dudv \right| + \\ & \quad + O \left[(\lg n + \lg m) \left(\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Звідси, зауваживши, що

$$|\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4| \leq 2 \min \{ \omega_1(2u), \omega_2(2v) \},$$

після ряду оцінок одержимо нерівність

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi^2} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \int_{\frac{1}{m}}^{\pi} D_n(t) A_m^{(l)}(z) \varphi(t, z) dt dz \right| \leq \\ & \leq \frac{2 \lg n \lg m}{\pi^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \min \left\{ \omega_1 \left(\frac{2u}{n} \right), \omega_2 \left(\frac{2v}{n} \right) \right\} \sin u \sin v dudv + \\ & \quad + O \left[(\lg n + \lg m) \left(\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right]. \quad (18) \end{aligned}$$

Таким чином, нами доведено, що

$$\begin{aligned} |I_{n,m}^{(3)}(\varphi)| & \leq \frac{2}{\pi^4} \frac{\lg n \lg m}{m^l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \min \left\{ \omega_1 \left(\frac{2u}{n} \right), \omega_2 \left(\frac{2v}{m} \right) \right\} \sin u \sin v dudv + \\ & \quad + O \left[\frac{\lg n + \lg m}{m^l} \left(\omega_1 \left(\frac{1}{n} \right) + \omega_2 \left(\frac{1}{m} \right) \right) \right]. \quad (19) \end{aligned}$$

Такі самі оцінки одержимо для трьох інших інтегралів правої частини рівності (9).

На основі цих оцінок, а також оцінки (5) ми із (4) приходимо до асимптотичної нерівності

$$\begin{aligned}
 E_{n,m} \leq & \frac{2}{\pi^2} \frac{\lg n}{n^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_1\left(\frac{2u}{n}\right) \sin u du + \\
 & + \frac{8}{\pi^4} \frac{\lg n \lg m}{m^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \min \left\{ \omega_1\left(\frac{2u}{n}\right), \omega_2\left(\frac{2v}{m}\right) \right\} \sin u \sin v du dv + \\
 & + O \left[\frac{\lg n + \lg m}{m^l} \left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{m}\right) \right) \right] + O \left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r} \right). \quad (20)
 \end{aligned}$$

Залишилося зауважити, що в заданому класі існує функція, для якої нерівність (20) перетворюється в асимптотичну рівність (3).

Із доведеної теореми випливає

Наслідок. Для $l=r$ має місце асимптотична рівність

$$\begin{aligned}
 E_{n,m} = \Theta_{n,m} \frac{8}{\pi^4} \frac{\lg n \lg m}{m^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \min \left\{ \omega_1\left(\frac{2u}{n}\right), \omega_2\left(\frac{2v}{m}\right) \right\} \sin u \sin v du dv + \\
 + O \left[(\lg n + \lg m) \left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r} + \frac{\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)}{m^r} \right) \right]. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Слід зауважити, що при $l=r=0$ теорема доведена П. Т. Бугайцем [1]. У випадку $\omega_1(u)=u^\alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1$), $\omega_2(v)=v^\beta$ ($0 \leq \beta \leq 1$) оцінка величини (2) одержана М. М. Горбачом [2].

ЛІТЕРАТУРА

1. П. Т. Бугаец. ДАН СССР, 79, № 4, 1951.
2. М. М. Горбач. ДАН УРСР, № 8, 1960.
3. Б. В. Ковальчук. I межвузовская конференция по конструктивной теории функций. Тезисы докладов, Ленинград, 1959.
4. С. М. Никольский. ДАН СССР, 52, № 3, 1946.
5. А. Н. Тверитин. ДАН СССР, 61, № 6, 1948.

Б. В. КОВАЛЬЧУК

ПРО ЗАЛИШКОВИЙ ЧЛЕН РЯДУ ФУР'Є ДЛЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ НЕПЕРЕРВНУ ПОХІДНУ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ

Розглядається клас $W^{(r)}H_{[v, \omega]}$ 2π -періодичних функцій f , що мають неперервну похідну (по Вейлю) r -го порядку φ , варіація якої не перевищує заданого числа v , а модуль неперервності — заданого модуля неперервності ω .

Нехай $S_n(f, x)$ — сума перших n членів ряду Фур'є для функції f .

С. М. Нікольський показав (див. [4]), що для функції, яка має неперервну похідну обмеженої варіації порядку $r \geq 0$,

$$\max_x |f(x) - S_n(f, x)| = o\left(\frac{1}{n^r}\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Якщо, крім цього, додатково задано модуль неперервності r -ої похідної, то можна одержати асимптотично точну оцінку верхньої грані залишкового члена ряду Фур'є по даному класу функцій. У випадку $r=0$ оцінки такого роду одержані в роботах С. Б. Стечкина [5] і В. Г. Комінар [2].

Ставиться аналогічна задача при довільному $r \geq 0$.

Наступна теорема дає асимптотичну оцінку для величини

$$E_n(W^{(r)}H_{[v, \omega]}; x) = \sup_{f \in W^{(r)}H_{[v, \omega]}} |f(x) - S_n(f, x)|.$$

Теорема. Справедлива асимптотична рівність

$$E_n(W^{(r)}H_{[v, \omega]}; x) = \Theta_n \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{n^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{1}{n}\right) \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + O\left(\frac{v \omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right),$$

де $\Theta_n = 1$, якщо ω — випукла функція, а в загальному випадку $\frac{1}{2} \leq \Theta_n \leq 1$.

При цьому константа C , яка входить в $O(1)$, є абсолютною константою.

Не важко переконатися, що задача зводиться до оцінки величини

$$E_n(W^{(r)}H_{[v, \omega]}; 0) = \sup_{\varphi \in \bar{H}_{[v, \omega]}} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^{(r)}(t) \varphi(t) \, dt \right|,$$

де

$$D_n^{(r)}(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r},$$

а через $\bar{H}_{[v, \omega]}$ позначено клас функцій φ , які належать до класу $H_{[v, \omega]}$ і задовольняють умові $\varphi(0)=0$.

При дальшому доведенні міркуємо так само, як в роботі [1], спираючись при цьому на результат [2].

Примітка 1. Таку ж саму оцінку одержано нами для класу $\overline{W^{(r)}}H_{[v, \omega]}$ функцій, спряжених до функцій даного класу.

Примітка 2. Результат, одержаний в роботі [1] (див. [3]), збігається з даним тільки у випадку $\omega(t) = t$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. В. К о в а л ь ч у к. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Сб. статей, М., 1961.
2. В. Г. К о м н а р. I межвузовская конференция по конструктивной теории функций. Тезисы докладов, Ленинград, 1959.
3. С. М. Н и к о л ь с к и й. ДАН СССР, 52, № 3, 1946.
4. С. М. Н и к о л ь с к и й. Изв. АН СССР, серия матем., 13, № 6, 1949.
5. С. Б. С т е ч к и н. Успехи матем. наук., VII, вып. 4 (50), 1952.

Стаття надійшла 18. II 1961.

Г. Л. БУЙМОЛА

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ГРАФІЧНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ПОЛІНОМА

У журналі «Математическое просвещение», вип. I, за 1957 р. у проміжках між статтями, стор. 210, була вказана графічна схема обчислення значень полінома

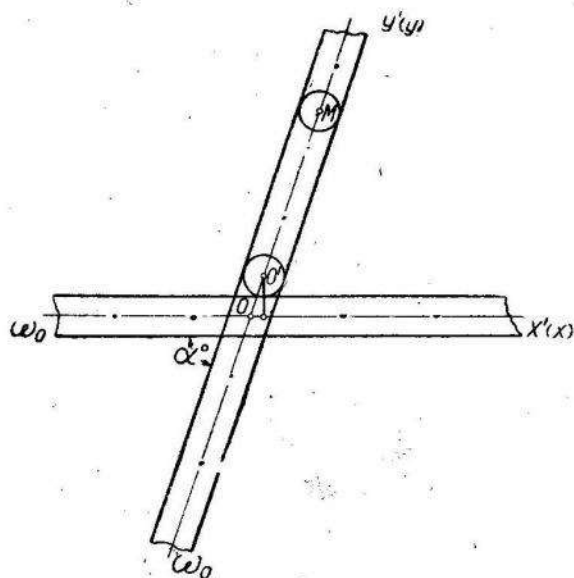


Рис. 1.

гострий кут α (рис. 1). Треба від точки O на прямій y відкласти одиничний відрізок OM .

Розглянемо спочатку можливе максимальне відхилення T_0 вздовж прямої Oy , яке виникає в точці O при прикладуванні до неї масштабної лінійки так, щоб початковий поділ її, від якого ведеться рахунок, співпадав з точкою O . У цьому випадкові

$$|T_0| = \|OO'\| = \left| \frac{\omega_0}{\sin \alpha} \right|, \quad (2)$$

де $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$, $2\omega_1$ — товщина проведених прямих, а ω_2 — радіус кружечка, що вважається за графічну точку. Відрахунок по шкалі і відмітка точки M на прямій y' проводиться з точністю (ω_0) , бо сумісне положення штриха на масштабній лінійці і графічної точки, якою відмічають поділ на прямій, утворює смугу інцидентності точки та прямої, ширина якої $\leq |\omega_0|$ [2].

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n. \quad (1)$$

При використанні будь-яких графічних способів обчислення практиків цікавить питання точності їх. Для оцінки точності графічного обчислення, проведеного за вказаною схемою, знайдемо те максимальне відхилення (похибку), що може виникнути при виконанні простіших геометричних побудов, з яких ця схема складається, і обчислимо коефіцієнт точності вказаної побудови в цілому [1].

1. Нехай точка O задана перетином двох графічних прямих $X'(x)$, $Y'(y)$, що утворюють

Отже, максимальне відхилення, що з'являється при відкладуванні відрізка OM , буде:

$$|T_1| = \left| \frac{\omega_0}{\sin \alpha} + \omega_0 \right| = \left| \omega_0 \frac{1 + \sin \alpha}{\sin \alpha} \right|. \quad (3)$$

І коефіцієнт точності цієї операції —

$$K_1 = \frac{\sin \alpha}{1 + \sin \alpha}. \quad (4)$$

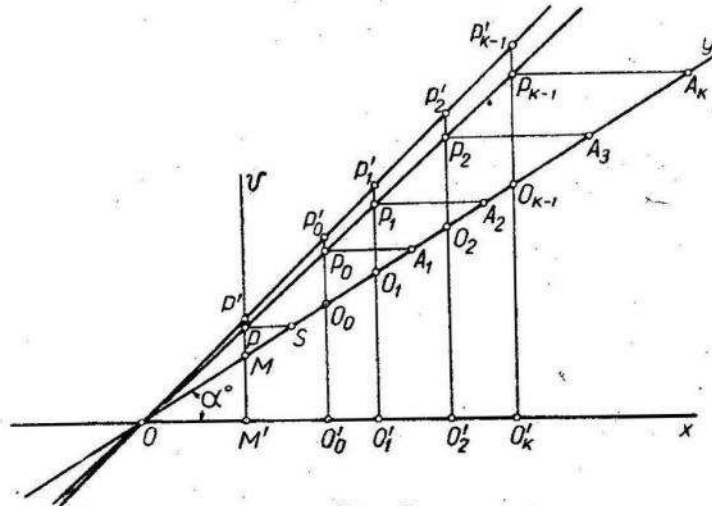


Рис. 2.

2. Далі нам треба за допомогою лінійки і косинця провести пряму v , яка проходила б через точку M і була перпендикулярною до прямої Ox (рис. 2).

Прикладування лінійки (або одного з катетів косинця) до прямої Ox вносить у побудову відхилення при точці M' в напрямі MM' , рівне $\pm \omega_0$. Проекція цього відхилення на напрямок Oy буде $\omega'_0 = |\omega_0 \sin \alpha|$.

Відхилення, що вноситься в побудову при прикладуванні другого катета косинця до точки M , дорівнює $|\omega_0|$ (інцидентність точки і прямої). Отже, при проведенні перпендикуляра $M'M$ похибка T_2 (або відхилення вздовж Oy) при точці M буде складатися з двох відхилень ω_0 і ω'_0 .

$$T_2 = \omega_0 (1 + \sin \alpha). \quad (6)$$

Коефіцієнт точності цієї побудови K_2 буде:

$$K_2 = \frac{1}{1 + \sin \alpha}. \quad (7)$$

Відхилення, що з'являється в побудові при відкладуванні відрізка $OS = x$ вздовж Oy , яке ми позначимо через T_3 , може бути обчислене, як зазначалося раніше, за формулою (3) і коефіцієнт точності K_3 — за формулою (4).

3. Для побудови прямої (SP) , паралельної прямій Ox (або перпендикулярної до прямої MV), косинець розміщують в площині рисунку так, щоб один катет його пішов по прямій MV , а другий проходив би через точку S (рис. 2). Тут, як і у випадку прикладування катета косинця до сторони Ox , відхилення від прямої MV вздовж прямої PS буде

дорівнювати $\pm \omega_0$. Проекція цього відхилення на напрям Oy буде $\omega_1 = \omega_0 \cos \alpha$.

Прикладування другого катета косинця до точки S також вносить відхилення $\pm \omega_0$ вздовж осі Oy .

Отже, сумарне відхилення при точці S вздовж Oy буде дорівнювати

$$T_4 = |\omega_0 (1 + \cos \alpha)|. \quad (8)$$

При позначенні точки P на прямій MV також вноситься в побудову помилка $\pm \omega_0$. Проекцію відхилення $|T_3 + T_4|$ в точці S на напрям MV можна обчислити так:

$$|\delta| = |\omega_0 (1 + \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha)|. \quad (9)$$

Отже, сумарне (максимально можливе) відхилення точки P від дійсного її положення вверх або вниз по прямій MV буде

$$|\beta| = |\omega_0 + \delta| = |\omega_0 (2 + 2 \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)| \quad (10)$$

її коефіцієнт точності побудови точки —

$$K_4 = \frac{1}{2 + 2 \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha}.$$

4. Для того щоб обчислити відхилення в точках $A_1, A_2, \dots, A_k$, нам необхідно знати величину відхилень в точках $P, P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$. Ці відхилення ми обчислимо як довжини відрізків $PP', P_0P_0', P_1P_1', \dots, P_{k-1}P_{k-1}'$, що характеризують відхилення прямої OP' від її безпомилкового положення в цих точках O і P . Для цього обчислимо спочатку довжини відрізків OP, OP_1, OP_{k-1} . Оскільки $OM=1$, то $M'M = \sin \alpha$, $MP = (x-1) \sin \alpha$, де $x = OS$, $M'P = x \sin \alpha$. Звідки

$$OP = \sqrt{OM'^2 + M'P^2} = \sqrt{\cos^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha}.$$

Позначивши цей корінь через Θ , дістанемо

$$OP = \Theta, \quad O_0O_0' = a_0 \sin \alpha,$$

де $OO_0 = a_0$, $O_0P_0 = O_0A_1 \sin \alpha$ або

$$O_0P_0 = (p_0x - a_0) \sin \alpha,$$

де $p_0x = OA_1$.

Враховуючи, що $a_0 = p_0$, знаходимо $O_0P_0 = p_0(x-1) \sin \alpha$ і, отже,

$$O_0'P_0 = O_0'O_0 + O_0P_0 = p_0x \sin \alpha.$$

Звідси

$$OP_0 = p_0 \sqrt{\cos^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha} = p_0 \Theta.$$

Аналогічно знайдемо

$$O_1'O_1 = p_1 \sin \alpha;$$

$$O_1P_1 = p_1(x-1) \sin \alpha;$$

$$O_1'P_1 = p_1x \sin \alpha;$$

$$OP_1 = p_1 \sqrt{\cos^2 \alpha + x^2 \sin^2 \alpha} = p_1 \Theta, \dots, OP_k = p_k \Theta.$$

Отже, $OP = \Theta$; $OP_0 = p_0 \Theta$; $OP_1 = p_1 \Theta$, ..., $OP_k = p_k \Theta$.

Знаючи відхилення PP' в точці P , рівне

$$|\beta| = \omega_0 (2 + 2\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha),$$

обчислимо відхилення $PP'_0, PP'_1, \dots, P_{k-1}P'_{k-1}$ в точках $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$.

Позначивши ці відхилення відповідно через $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{k-1}$, з подібності трикутників $OPP', OP_0P'_0, \dots, OP_{k-1}P'_{k-1}$, знаходимо $\frac{OP}{OP_0} = \frac{\beta}{\beta_0}$, звідки $|\beta_0| = \frac{OP_0 \beta}{OP}$, або $|\beta_0| = |p_0 \beta| = |p_0 \omega_0 (2 + 2\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)|$ аналогічно,

$$|\beta_1| = |p_1 \omega_0 (2 + 2\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)| \quad (11)$$

$$|\beta_k| = |p_k \omega_0 (2 + 2\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)|.$$

Позначаючи похибку (відхилення) в точці A_1 через ξ_0 , дістанемо

$$|\beta_0| = |\xi_0| \sin \alpha.$$

Звідки

$$|\xi_0| = \frac{|\beta_0|}{|\sin \alpha|} = \frac{|p_0 \omega_0 (2 + 2\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)|}{|\sin \alpha|}. \quad (12)$$

Аналогічно відхилення (ξ_1) в точці A_2 буде рівне:

$$|\xi_1| = \frac{|p_1 \omega_0 (2 + 2\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)|}{|\sin \alpha|}, \dots, |\xi_{k-1}| = \frac{|p_{k-1} \omega_0 (2 + 2\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)|}{|\sin \alpha|}. \quad (12)$$

У дальшому операції косинцем і лінійкою повторюються.

а) Відкладання відрізка OO_1 вносить у побудову відхилення, рівне $T_5 = T_1 = \omega_0 (\cos \alpha + 1)$ і $K_5 = \frac{1}{\cos \alpha + 1}$;

б) Побудова перпендикуляра O'_0O_0 вносить відхилення

$$T_6 = T_2 = \omega_0 (1 + \sin \alpha) \text{ і } K_6 = \frac{1}{1 + \sin \alpha};$$

в) Відхилення в довільній точці A_k обчислюється за формулою (12)

$$K_7 = \frac{|\sin \alpha|}{|p_{k-1} (2 + 2\sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha)|}.$$

4) Відкладання на осі Oy відрізків $A_1O_1 = a_1, A_2O_2 = a_2, \dots, A_kO_k = a_k, \dots$ вносить у побудову відхилення відповідно рівні $R_0 = \xi_0 + \omega_0, R_1 = \xi_1 + \omega_0, \dots, R_k = \xi_k + \omega_0, \dots$

Коефіцієнт точності цієї побудови буде $K_k = \frac{\omega_0}{R_k}$.

Усі розглянуті нами похибки (відхилення), які вносяться в побудову, є випадковими векторіальними похибками і підлягають законові Гауса. Тому при оцінці точності графічної побудови відрізка $OO_n = p_n = f(x)$ обчислимо η — корінь квадратний із суми квадратів проєкцій всіх відхилень вздовж осі Oy

$$|\eta| = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + \dots + T_k^2 + R_0^2 + R_1^2 + \dots + R_k^2 + \dots}$$

$$\text{і } K = \frac{\omega_0}{|\eta|}.$$

Цей коефіцієнт точності і буде характеризувати точність розглядуваного графічного обчислення.

Зауважимо, що побудови тут проведено тільки за допомогою косинця і масштабної лінійки. Аналогічно всі графічні обчислення можна провести, використовуючи інші креслярські приладдя. Порівняння коефіцієнтів точності таких побудов дало б можливість зробити висновок про конструктивну потужність того чи іншого креслярського приладдя.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Л. Б у й м о л а. Коефіцієнт точності геометричних побудов. Учені записки Львівського державного університету ім. Ів. Франка, т. V, 1947.
2. Г. Л. Б у й м о л а. Дослідження первинних помилок геометричних побудов. Учені записки Львівського державного університету ім. Ів. Франка, т. XXIX, вип. 1/6, 1954.

Стаття надійшла 20. V 1960.

С. В. ДЕНИСКО

ПРО ЕКВІАРЕАЛЬНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ СПЕЦІАЛЬНИХ ПРЯМОЛІНІЙНИХ КОНГРУЕНЦІЙ

1. Нехай порожнини еволюти поверхні Φ еквіареально відображаються одна на другу за допомогою нормалей цієї поверхні. Прийнемо на поверхні Φ за координатні лінії u і v лінії кривини. Нехай R — радіус головної кривини в напрямку лінії u , а R^* — радіус головної кривини в напрямку лінії v .

Тоді диференціальне рівняння асимптотичних ліній поверхні Φ матиме вигляд

$$RR_u^2 du^2 + c^2 R^* R_v^2 dv^2 = 0, \quad (1)$$

де c — стала.

Дійсно, нехай рівняння поверхні Φ

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(u, v)$$

і $m(u, v)$ — одиничний нормальний вектор до цієї поверхні в точці (u, v) . Тоді рівняння порожнини еволюти запишуться таким чином:

$$\bar{r} = \bar{\rho} + R\bar{m},$$

$$\bar{r}^* = \bar{\rho} + R^*\bar{m}.$$

Звідси, диференціюючи і приймаючи до уваги формулу Родріга, дістанемо

$$\bar{r}_u = R_u \bar{m},$$

$$\bar{r}_v = \bar{\rho}_v + R_v \bar{m} - \frac{R}{R^*} \bar{\rho}_v,$$

$$\bar{r}_u^* = \bar{\rho}_u + R_u^* \bar{m} - \frac{R^*}{R} \bar{\rho}_u,$$

$$\bar{r}_v^* = R_v^* \bar{m}.$$

Останні рівності дають

$$[\bar{r}_u \bar{r}_v] = \frac{R_u}{R^*} (\bar{R}^* - R) [\bar{m} \bar{\rho}_v],$$

$$[\bar{r}_u^* \bar{r}_v^*] = \frac{R_v^*}{R} (\bar{R}^* - R) [\bar{m} \bar{\rho}_u],$$

або

$$\begin{aligned} [r_u r_v]^2 &= G \left[\frac{R_u}{R} (R^* - R) \right]^2, \\ \left[\frac{r_u^*}{r_v^*} \right]^2 &= E \left[\frac{R_v^*}{R} (R^* - R) \right]^2, \end{aligned}$$

де E, G — коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні Φ . Звідки, враховуючи, що порожнини еволюти еквіареально відображаються одна на другу за допомогою нормалей поверхні Φ , дістанемо

$$c^2 \frac{E^2}{G} = \frac{R^2 R_u^2}{R^{*2} R_v^{*2}}, \quad (2)$$

де c — стала.

На поверхні Φ координатна сітка співпадає з сіткою ліній кривини, а тому для коефіцієнтів другої квадратичної форми цієї поверхні маємо такі вирази:

$$L = \frac{E}{R}, \quad M = 0,$$

$$N = \frac{G}{R^*},$$

або згідно (2)

$$L = \frac{G R R_u^2}{c^2 R^{*2} R_v^{*2}},$$

$$N = \frac{G}{R^*}.$$

Підставляючи ці вирази для L і N в рівняння асимптотичних ліній

$$L du^2 + N dv^2 = 0,$$

дістанемо рівняння (1).

Очевидно, і навпаки, якщо рівняння асимптотичних ліній має вигляд (1), то порожнини еволюти еквіареально відображаються одна на другу за допомогою нормалей поверхні Φ .

З (1) видно, що в тому випадку, коли $c=1$ (тоді ми маємо еквівалентне відображення) і поверхня Φ мінімальна, радіуси головних кривин поверхні Φ зберігають сталі значення вздовж асимптотичних ліній одного сімейства.

Прикладом мінімальної поверхні, порожнини еволюти якої еквівалентно відображаються одна на другу за допомогою нормалей цієї поверхні, є прямий гелікоїд.

Покажемо, що рівняння асимптотичних ліній гелікоїда можна записати у вигляді (1).

Нехай λ — віддаль з відповідним знаком від точки гелікоїда до його осі і кут Θ — кут повороту твірної, який відраховується від її початкового положення. Тоді для прямого гелікоїда маємо [1]:

1) рівняння ліній кривини

$$\operatorname{Arsh} \frac{\lambda}{a} = \Theta - \Theta_1, \quad (3)$$

$$\operatorname{Arsh} \frac{\lambda}{a} = -\Theta + \Theta_2, \quad (4)$$

де a — хід гелікоїда і Θ_1, Θ_2 — довільні сталі;

2) рівняння асимптотичних ліній

$$d\lambda d\Theta = 0; \quad (5)$$

3) якщо R — радіус кривини нормального перерізу в напрямку лінії кривини сімейства (3) і $\overset{*}{R}$ — радіус кривини нормального перерізу в напрямку лінії кривини сімейства (4), то

$$R = -\overset{*}{R} = -\frac{\lambda^2 + a^2}{a}. \quad (6)$$

Зробивши заміну

$$\lambda = a \operatorname{sh} \frac{u+v}{2},$$

$$\Theta = \frac{u-v}{2},$$

дістанемо нову систему координат, координатна сітка якої згідно з (3) і (4) є сітка ліній кривини. В нових координатах (5) і (6) набувають вигляду

$$du^2 - dv^2 = 0, \quad (5')$$

$$R = -\overset{*}{R} = -a \operatorname{ch} \frac{u+v}{2}. \quad (6')$$

В силу (6')

$$R_u = R_v = -\overset{*}{R}_u = -\overset{*}{R}_v = -\frac{a}{2} \operatorname{sh} \frac{u+v}{2},$$

а тому рівняння (5') можна записати у вигляді (1).

2. Візьмемо пару конгруенцій

$$\bar{r} = \bar{\rho}(u, v) + \lambda \bar{m}(u, v),$$

$$\overset{*}{r} = \bar{\rho}(u, v) + \lambda \overset{*}{m}(u, v),$$

де $\bar{m}$ і $\overset{*}{m}$ — одиничні вектори. Якщо λ є функція криволінійних координат, то попередні рівняння можна розглядати як рівняння двох поверхонь. Нехай першому рівнянню відповідає поверхня Φ , а другому — поверхня $\overset{*}{\Phi}$.

З'ясуємо, якими повинні бути опорна поверхня $\bar{\rho}(u, v)$ і дана пара конгруенцій в тому випадку, коли поверхні Φ і $\overset{*}{\Phi}$, якою б не була функція $\lambda(u, v)$, еквівалентно відображаються одна на другу так, що відповідні точки мають однакові координати u, v .

Прирівнявши дискримінанти перших квадратичних форм поверхонь Φ і $\overset{*}{\Phi}$, дістанемо¹

$$\begin{aligned} & \lambda_u^2 [(\bar{\rho}_v \bar{m})^2 - (\bar{\rho}_v \overset{*}{m})^2] + \lambda_v^2 [(\bar{\rho}_u \bar{m})^2 - (\bar{\rho}_u \overset{*}{m})^2] + \\ & + 2\lambda_u \lambda_v [(\bar{\rho}_u \bar{m})(\bar{\rho}_v \bar{m}) - (\bar{\rho}_u \overset{*}{m})(\bar{\rho}_v \overset{*}{m})] + \\ & + 2\lambda_u [(\bar{\rho}_u \bar{m} - \bar{\rho}_u \overset{*}{m})G - (\bar{\rho}_v \bar{m} - \bar{\rho}_v \overset{*}{m})F] + \end{aligned}$$

¹ Випишуємо всі члени, які містять в собі похідні функції $\lambda(u, v)$ і не містять самої функції, а також ті члени, в які входять функція $\lambda(u, v)$ в першій степені і квадрати або добутки її похідних; всі останні члени позначаємо крапками.

$$\begin{aligned}
& + 2\lambda_v \left[-(\bar{\rho}_u \bar{m} - \bar{\rho}_u^* \bar{m}^*)F + (\bar{\rho}_v \bar{m} - \bar{\rho}_v^* \bar{m}^*)E \right] + \\
& + \lambda \lambda_u^2 (\bar{\rho}_v \bar{m}_v - \bar{\rho}_v^* \bar{m}_v^*) + \lambda \lambda_v^2 (\bar{\rho}_u \bar{m}_u - \bar{\rho}_u^* \bar{m}_u^*) - \\
& - 2\lambda \lambda_u \lambda_v (\bar{\rho}_u \bar{m}_v - \bar{\rho}_u^* \bar{m}_v^* + \bar{\rho}_v \bar{m}_u - \bar{\rho}_v^* \bar{m}_u^*) + \dots = 0,
\end{aligned}$$

де E, F, G — коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні $\bar{\rho}(u, v)$. Звідки, враховуючи, що $\lambda(u, v)$ — довільна функція, знайдемо

$$\begin{aligned}
(\bar{\rho}_u \bar{m})^2 &= (\bar{\rho}_u^* \bar{m}^*)^2, \quad (\bar{\rho}_v \bar{m})^2 = (\bar{\rho}_v^* \bar{m}^*)^2, \quad (\bar{\rho}_u \bar{m})(\bar{\rho}_v \bar{m}) = (\bar{\rho}_u^* \bar{m}^*)(\bar{\rho}_v^* \bar{m}^*), \\
& \left. \begin{aligned} (\bar{\rho}_u \bar{m} - \bar{\rho}_u^* \bar{m}^*)G - (\bar{\rho}_v \bar{m} - \bar{\rho}_v^* \bar{m}^*)F &= 0, \\ -(\bar{\rho}_u \bar{m} - \bar{\rho}_u^* \bar{m}^*)F + (\bar{\rho}_v \bar{m} - \bar{\rho}_v^* \bar{m}^*)E &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)
\end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_u \bar{m}_u - \bar{\rho}_u^* \bar{m}_u^* &= 0, \\ \bar{\rho}_v \bar{m}_v - \bar{\rho}_v^* \bar{m}_v^* &= 0, \\ \bar{\rho}_u \bar{m}_v - \bar{\rho}_u^* \bar{m}_v^* + \bar{\rho}_v \bar{m}_u - \bar{\rho}_v^* \bar{m}_u^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

З перших трьох рівностей видно, що можливі тільки такі два випадки:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_u \bar{m} &= \bar{\rho}_u^* \bar{m}^*, \\ \bar{\rho}_v \bar{m} &= \bar{\rho}_v^* \bar{m}^* \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

або

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_u \bar{m} &= -\bar{\rho}_u^* \bar{m}^*, \\ \bar{\rho}_v \bar{m} &= -\bar{\rho}_v^* \bar{m}^*. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Згідно (9), вектор $\bar{m} - \bar{m}^*$ є нормальним до поверхні $\bar{\rho}(u, v)$, а тому в силу (8) коефіцієнти її другої квадратичної форми дорівнюють нулю.

Отже, в першому випадку поверхня $\bar{\rho}(u, v)$ є площина. Крім цього, кожна пряма однієї конгруенції симетрична відносно площини $\bar{\rho}(u, v)$ деякій прямій другої конгруенції.

Якщо ж мають місце рівності (10), то враховуючи, що $EG - F^2 \neq 0$, з (7) дістанемо

$$\bar{\rho}_u \bar{m} = \bar{\rho}_v \bar{m} = \bar{\rho}_u^* \bar{m}^* = \bar{\rho}_v^* \bar{m}^* = 0.$$

Таким чином, вектори $\bar{m}$ і $\bar{m}^*$ нормальні до поверхні, і оскільки поверхні Φ і Φ^* не співпадають, то $\bar{m} = -\bar{m}^*$. Тому з (8) видно, що коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні $\bar{\rho}(u, v)$ дорівнюють нулю.

Отже, в другому випадку поверхня $\bar{\rho}(u, v)$ є площина і прямі обох конгруенцій перпендикулярні до неї.

Очевидно, як в першому, так і в другому випадку поверхні Φ і Φ^* , якою б не була функція $\lambda(u, v)$, еквівалентно відображаються одна на другу так, що відповідні точки мають однакові координати u, v .

3. Доведемо, що тільки площина, сфера і коловий циліндр допускають еквіареальне відображення за допомогою нормалей на паралельні до них поверхні.

Якщо Φ, Φ^* — паралельні поверхні і h — віддаль між ними, то [2]

$$\gamma^* = (1 - 2Hh + Kh^2)^2 \gamma,$$

де γ^*, γ — дискримінанти перших квадратичних форм поверхонь Φ^* і Φ , а K і H — повна і середня кривина поверхні Φ .

Нехай поверхня Φ за допомогою нормалей еквіареально відображається на поверхню Φ^* . Тоді, згідно з попередньою рівністю,

$$1 - 2Hh + Kh^2 = c, \quad (11)$$

де c — стала.

Припустимо, що поверхня Φ розгортувальна. Тоді $K=0$, а тому в силу (11) $H=\text{const}$. Але [3] якщо навіть повна і середня кривина зберігають сталі значення лише на лініях кривини одного сімейства, то поверхня є або поверхнею обертання, або циліндром. Таким чином, розгортувальна поверхня Φ є циліндр, причому або коловий циліндр, або площина, бо $H=\text{const}$.

Покажемо тепер, що коли $K \neq 0$, то поверхня Φ є сфера.

Вирази для повної кривини K^* і середньої кривини H^* поверхні Φ^* можна записати таким чином [2]:

$$K^* = \frac{K}{1 - 2Hh + Kh^2},$$

$$H^* = \frac{H - Kh}{1 - 2Hh + Kh^2}.$$

Припустимо, що $c=1$. Тоді попередні формули згідно (11) дають

$$K^* = K,$$

$$H^* = -H.$$

Звідси випливає, що коли змінимо напрямки одиничних нормальних векторів однієї з поверхонь на супротивні, то головні кривини в кожній точці поверхні Φ будуть такі ж самі, як і головні кривини у відповідній точці поверхні Φ^* . Тому внаслідок теореми Погорелова [4] поверхня Φ за допомогою нормалей ізометрично відображається на поверхню Φ^* . Враховуючи це, згідно з рівностями [2],

$$\gamma_{ij}^* = \gamma_{ij} - 2\pi_{ij}h + \nu_{ij}h^2,$$

де γ_{ij}^* — коефіцієнт першої квадратичної форми поверхні Φ^* , а $\gamma_{ij}, \pi_{ij}, \nu_{ij}$ — коефіцієнти першої, другої і третьої квадратичних форм поверхні Φ , маємо

$$\nu_{ij}h = 2\pi_{ij}.$$

Якщо на поверхні Φ координатна сітка складається з ліній кривини, то, беручи до уваги формулу Родріга, з останніх рівностей знайдемо головні кривини k_1 і k_2 поверхні Φ , а саме:

$$k_1 = k_2 = \frac{2}{h}.$$

Таким чином, поверхня Φ — сфера.
З рівності (11) дістанемо

$$K = \text{const}, H = \text{const}.$$

Звідси випливає, що поверхня Φ — поверхня обертання, відмінна від колового циліндра і від площини, бо $K \neq 0$. Оскільки єдиною мінімальною поверхнею обертання, крім площини, є катеноїд, повна кривина якого не є сталою, то $H \neq 0$. А тому поверхня Φ може бути тільки сферою. Отже, наше твердження доведено повністю.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. Я. В ы г о д с к и й. Дифференциальная геометрия, М.—Л., 1949.
2. В. Ф. К а г а н. Основы теории поверхностей, т. I, М.—Л., 1947.
3. В. Ф. К а г а н. Основы теории поверхностей, т. II, М.—Л., 1948.

Стаття надійшла 20. V 1960.

О. С. КОВАНЬКО

ПРО ОДИН КРИТЕРІЙ КОМПАКТНОСТІ СИСТЕМИ $\tilde{B}$ ТА B_p МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

В одній нашій статті [1] ми довели умови компактності систем узагальнених майже періодичних функцій А. С. Безіковича (так звані $\tilde{B}$ та B_p майже періодичні функції).

Завдяки новому визначенню $\tilde{B}$ майже періодичних функцій, даним датським математиком Фольнером [2], що були названі ним KB майже періодичними, вдалося дати простішу умову компактності цих функцій і притому в більш вузькому значенні збіжності, ніж раніше.

§ 1. Нагадаємо основні визначення, позначення та теореми, якими ми будемо користуватися в даній статті.

Нехай E — деяка вимірна множина на $(-\infty < x < +\infty)$. Розглянемо величину середньої щільності за Безіковичем:

$$\delta_B E = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{|E(-T, +T)|}{2T}.$$

Далі, нехай $f(x), \varphi(x) \in L_p(-\infty < x < +\infty)$. Запровадимо таку метрику:

$$D_{B_p}^E(f, \varphi) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{E(-T, +T)} |f(x) - \varphi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

$$\{D_{B_p}^E(f, \varphi) = D_{B_p}(f, \varphi),$$

якщо

$$E = (-\infty, +\infty) \quad (p \geq 1)\}.$$

Визначення 1 [2]. Вимірна функція $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ називається $K.B.$ -майже періодичною ($K.B.$ м. п.), якщо для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$ ($\eta < 1$) існує множина E та відносно щільна множина майже періодів $\tau = \tau(\varepsilon, \eta)$, що $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$,

коли $x \in E, x + \tau \in E, \sigma_B E > 1 - \eta$.

Крім того, $f(x)$ скінчена, за винятком, можливо, множини Z , такої, що $\delta_B Z = 0$.

Відзначимо такі властивості $K.B.$ м. п. функцій:

1. Для будь-яких $\varepsilon > 0$ та $\eta > 0$ ($\eta < 1$):

а) Існує таке $M = M(\eta) > 0$, що $|f(x)| < M$ для $x \in E_1$, де E_1 — множина, для якої $\delta_B E_1 > 1 - \eta$.

б) Існує таке $\rho = \rho(\varepsilon, \eta) > 0$ та множина E_2 [$\delta_B E_2 > 1 - \eta$], що $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ при умові, що $x' \in E_2$, $x'' \in E_2$ та $|x' - x''| < \rho$.

с) Будь-яка скінченна система $K.B.$ м. п. функцій $\{f_k(x)\}$ ($k = 1, 2, 3, \dots, n$) має спільну відносно щільну множину майже періодів $\{\tau\}$. Тобто, для будь-яких $\varepsilon > 0$ та $\eta > 0$ ($\eta < 1$) існує така множина E_3 ($\delta_B E_3 > 1 - \eta$), що $|f_k(x + \tau) - f_k(x)| < \varepsilon$ ($k = 1, 2, \dots, n$) та $x \in E_3$, $x + \tau \in E_3$.

2. Для будь-яких $\varepsilon > 0$ та $\eta > 0$ ($\eta < 1$) існує множина E така, що $\delta_B E > 1 - \eta$ та тригонометричний поліном $s_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k x}$ такий, що $|f(x) - s_n(x)| < \varepsilon$ для $x \in E$.

В цьому значенні $f(x)$ називається « $\tilde{B}$ майже періодичною» (« $\tilde{B}$ м. п.») [3].

Має місце також і обернене, а саме: якщо $f(x) \in \tilde{B}$ м. п., то й $\tilde{f}(x) \in K.B.$ м. п.».

Визначення II. [3]. $f(x) \in B_p$ м. п., якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти тригонометричний поліном $s_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\lambda_k x}$ такий, що $D_{B_p}\{f(x), s_n(x)\} < \varepsilon$.

Визначення III. Послідовність $\{f_n(x)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) називається « $\tilde{B}$ — асимптотично рівномірно» збіжною, якщо для довільного $\eta > 0$ ($\eta < 1$) існує така множина E [$\delta_B E > 1 - \eta$], на якій послідовність збігається рівномірно.

Ми, звичайно, використовуємо і поняття ε -сітки (теорему Хаусдорфа), і теорему Арцеля про компактність системи неперервних функцій (в значенні рівномірної збіжності), узагальнивши її на область досконалий обмеженої множини.

§ 2. Розв'яжемо тепер питання про компактність систем $K.B.$ м. п. функцій в значенні « $\tilde{B}$ — асимптотично рівномірної збіжності».

Теорема А. Необхідна і достатня умова компактності системи $\{f(x)\} \rightarrow K.B.$ м. п. функцій в значенні « $\tilde{B}$ — асимптотично рівномірної збіжності» полягає в тому, що для будь-яких $\varepsilon > 0$ та $\eta > 0$ ($\eta < 1$).

1) Існує таке $M = M(\eta) > 0$ і множина E_1 ($\delta_B E_1 > 1 - \eta$), що $|f(x)| < M$, для всіх функцій $f(x)$ нашої системи $\{f(x)\}$ для $x \in E_1$.

2) Існує таке $\rho = \rho(\varepsilon, \eta) > 0$ і множина E_2 [$\delta_B E_2 > 1 - \eta$], що для всіх функцій $f(x)$ нашої системи $\{f(x)\}$ виконується умова: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, якщо $x' \in E_2$, $x'' \in E_2$, і $|x' - x''| < \rho$.

3) Існує загальна (для всіх функцій системи $\{f(x)\}$) відносно щільна множина майже періодів $\tau = \tau(\varepsilon, \eta)$ та множина E_3 ($\delta_B E_3 > 1 - \eta$), що $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$, коли $x \in E_3$ та $x + \tau \in E_3$.

Доведення. Умови 1, 2, 3 необхідні.

Нехай система $\{f(x)\}$ компактна у вище вказаному значенні, тоді за теоремою Хаусдорфа для будь-яких $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$ ($\eta < 1$) існує скінченна $\frac{\varepsilon}{3}$ -сітка, що складається з $K.B.$ м. п. функцій: $f_1(x), \dots, f_n(x)$,

та множина E_0 ($\delta_B E_0 > 1 - \frac{\eta}{2}$), що для всякої функції $f(x)$ системи

$\{f(x)\}$ знайдеться така функція $f_k(x)$ сітки, що $|f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ на множині E_0 .

1) За властивістю $a)$ — $K.B.$ м. п. функцій можна підібрати таке $M = M(\eta) > 0$, що $|f_k(x)| < M - \frac{\varepsilon}{3}$, на деякій множині E_{1k} таких, що $\delta_B E_{1k} > 1 - \frac{\eta}{2n}$.

Тоді ми одержимо, що на множині $E_1' = \bigcap_1^n E_{1k}$ будуть виконуватись n нерівностей: $f_k(x) < M - \frac{\varepsilon}{3}$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$) при чому: $\delta_B E_1' > 1 - \frac{\eta}{2}$.

Значить, $|f(x)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \left(M - \frac{\varepsilon}{3}\right) = M$ на множині $E_1 = E_0 \cap E_1'$, у якій $\delta_B E_1 > 1 - \eta$.

Таким чином, виконано умову 1) нашої теореми.

2) За властивістю $b)$ — $K.B.$ м. п. функцій знайдеться $\rho = \rho(\varepsilon, \eta) > 0$ та множина E_{2k} ($k=1, 2, 3, \dots, n$) такі, що $|f_k(x') - f_k(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$ для $|x' - x''| < \rho$, якщо $x' \in E_{2k}$ та $x'' \in E_{2k}$, причому $\delta_B E_{2k} > 1 - \frac{\eta}{2n}$.

Отже, мають місце нерівності: $|f_k(x') - f_k(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$ ($k=1, 2, 3, \dots, n$)

на множині $E_2' = \bigcap_1^n E_{2k} \left\{ \delta_B E_2' > 1 - \frac{\eta}{2} \right\}$.

З цього: $|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f_k(x')| + |f_k(x') - f_k(x'')| + |f_k(x'') - f(x'')| < \varepsilon$ на множині $E_2 = E_0 \cap E_2' [\delta_B E_2 > 1 - \eta]$, тобто для $x' \in E_2$, $x'' \in E_2$ і $|x' - x''| < \rho$.

Але тому що $f(x)$ довільна функція нашої системи, то ми прийшли до умови 2) даної теореми.

3) За властивістю $c)$ — $K.B.$ м. п. функцій для $f_1(x), \dots, f_n(x)$ знайдеться загальна відносно щільна множина майже періодів $\tau = \tau(\varepsilon, \eta)$ та відносні множини E_{3k} , такі, що $|f_k(x + \tau) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ ($k=1, 2, \dots, n$) для $x \in E_{3k}$ та $x + \tau \in E_{3k}$, причому $\delta_B E_{3k} > 1 - \frac{\eta}{2n}$.

Розглянемо множину $E_3 = E_0 \cap \left\{ \bigcap_1^n E_{3k} \right\}$. Легко перевірити, що $\delta_B E_3 > 1 - \eta$.

Тепер ми маємо, що для будь-якої функції $f(x)$ нашої системи виконується нерівність:

$$|f(x + \tau) - f(x)| \leq |f(x + \tau) - f_k(x + \tau)| + |f_k(x + \tau) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

якщо $x \in E_3$, $x + \tau \in E_3$.

Таким чином, виконується умова 3) нашої теореми.

Умови 1, 2, 3 — достатні.

Нехай вказані умови виконані і нехай (згідно з умовою 3) $l = l(\varepsilon, \eta)^*$ означає довжину інтервалу відносної щільності множини

* В кожному інтервалі довжини l існує майже період.

майже періодів всіх функцій системи $\{f(x)\}$, що належать до чисел ε та η .

Користуючись позначеннями, які ми використали при розгляді необхідності умов теореми, розглянемо множину:

$$\hat{E} = E_0 \cap E_1 \cap E_2 \cap E_3.$$

Очевидно, що $\delta_B \hat{E} > 1 - 4\eta$, причому ми можемо вважати, що $\hat{E}$ доскональна.

Кожній функції $f(x)$ нашої системи віднесемо деяку функцію $\tilde{f}(x)$, визначивши її таким чином:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \dots x \in (-l \leq x \leq +l) \\ f(x - \tau_n) & \dots x \in (nl \leq x(n+1)l), (n = \pm 1, \pm 2, \dots), \end{cases}$$

де під τ_n треба розуміти майже період, що лежить в інтервалі $(nl < x < (n+1)l)$.

Очевидно, що система всіх функцій $\tilde{f}(x)$ задовольняє вимогам теореми Арцеля про компактність системи неперервних функцій в розумінні рівномірної збіжності на множині $\hat{E}(-l, +l)$, яку ми завжди можемо вважати не пустою, а також, що $\frac{|\hat{E}(-l, +l)|}{2l} > 1 - 4\eta$. Відповідним зсувом інтервалу $(-l < x < +l)$ ми завжди можемо цього досягти.

Оскільки $x - \tau_n \in (-l, +l)$, то з визначення функцій $\tilde{f}(x)$ виходить, що рівномірна збіжність послідовності цих функцій на $\hat{E}(-l, +l)$ приводить до рівномірної збіжності на всій множині $\hat{E}$. Значить, система всіх функцій $\{\tilde{f}(x)\}$ компактна в значенні „ $\tilde{B}$ — асимптотично рівномірної збіжності“. А тому що $|f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon$ для $x \in \hat{E}$, то з відомої властивості компактних систем випливає, що й система функцій $\{f(x)\}$ також компактна в значенні „ $\tilde{B}$ — асимптотично рівномірної збіжності, оскільки ε довільно мале, що і потрібно було довести.

§ 3. Припустимо тепер, що до умов теореми А ми додамо умову сумовності функцій системи. А саме, висловимо таку теорему:

Теорема В. Достатньою умовою компактності системи B_p м. п. функцій в значенні метрики D_{B_p} є компактність її в значенні „ $\tilde{B}$ — асимптотично рівномірної збіжності“ та така умова:

Для довільно малого $\varepsilon > 0$ існує таке $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ ($\rho < 1$); що $D_{B_p}^E\{f(x), 0\} < \varepsilon$, якщо $\delta_B E < \rho$ для всіх функцій нашої системи.*

Доведення. Нехай $\{f_n(x)\} (n = 1, 2, 3 \dots)$ є послідовність, що складається з функцій нашої системи, яка збігається „ $\tilde{B}$ — асимптотично рівномірно“ до $f(x)$.

Нехай E_0 є та множина, на якій послідовність $\{f_n(x)\}$ збігається рівномірно. Маємо $\delta_B E_0 > 1 - \eta$, де $\eta > 0$, наперед задане число. Задано $\varepsilon > 0$ та підберемо $N = N(\varepsilon) > 0$ так, щоб $|f(a) - f_n(x)| < \varepsilon$ для $x \in E_0$ і для $n > N$.

Маємо:**

$$D_{B_p}(f, f_n) \leq D_{B_p}^{E_0}(f, f_n) + D_{B_p}^{cE_0}(f, f_n) \leq D_{B_p}^{E_0}(f, f_n) +$$

* Клас B_p м. п. функцій включається в клас B м. п. функцій.

** $f(x) \in L_p$, що легко перевірити.

$$+ D_{B_p}^{cE_0}(f, 0) + D_{B_p}^{cE_0}(f_n, 0) \leq \varepsilon (\delta_{B_p} E_3)^{\frac{1}{p}} + D_{B_p}^{cE_0}(f, 0) + \\ + D_{B_p}^{cE_0}(f_n, 0) \leq \varepsilon + D_{B_p}^{cE_0}(f, 0) + D_{B_p}^{cE_0}(f_n, 0).$$

Підберемо $\eta > 0$ настільки малим, щоб згідно з даною додатковою умовою виконувалась нерівність:

$$D_{B_p}^{cE_0}(f, 0) < \varepsilon$$

та

$$D_{B_p}^{cE_0}(f_n, 0) < \varepsilon \quad (\delta_{B_p} cE_0 < \eta).$$

Тоді, очевидно, ми будемо мати:

$$D_{B_p}(f, f_n) < 3\varepsilon.$$

Звідси виходить, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_{B_p}(f, f_n) = 0,$$

що й потрібно було довести.

Примітка. Наступний приклад показує, що виведені умови є лише достатні але не необхідні.

Нехай $\chi_E(x)$ є характеристична функція множини E . Розглянемо послідовність $\psi_n(x) = \chi_{[0, n]}(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Вона, очевидно, збігається до $\psi(x) \equiv 0$ в значенні метрики D_{B_p} , тому що $D_{B_p}(\psi, \psi_n) = 0$, але не збігається в значенні „ $\tilde{B}$ асимптотично рівномірної“ збіжності. Крім того, $\psi_n(x) \in B_p$ м. п.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. С. Кованько. О компактности систем обобщенных почти периодических функций А. С. Безиковича. Мат. сб., т. 16 (58), № 3, 1945, стр. 365—382.
2. E. F o l n e r. On the structure of generalised almost-periodic functions. D. K. Danske Videnskab. Sel. Bind, 21, N 11, 1945, p. 1—30.
3. A. S. K o v a n k o. Sur les classes de fonctions presque périodiques généralisées. Annali di Math VIII, 1930—1931, p. 1—24.

Стаття надійшла 15. IX 1960.

О. С. КОВАНЬКО

ОДИН ПРИКЛАД НЕРІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ ПОСЛІДОВНОСТІ ФУНКЦІЙ

Нехай $\{f_n(x)\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) послідовність комплексно-значних вимірних функцій на відрізку $[a \leq x \leq b]$, яка збігається на цьому відрізку до $f(x)$.

Визначення I. (Osgood). Точка $x = c$ відрізка $[a \leq x \leq c]$ називається χ точкою, якщо для довільно малого інтервала $(c - \delta < x < c + \delta)$ має місце:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in (c-\delta, c+\delta)} |f(x) - f_n(x)| \right\} = +\infty.$$

Наведемо без доказу таке твердження: Якщо X є множина всіх точок категорії χ і якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ інтегрована скільки завгодно разів по членно і X_m є множина χ -точок для послідовності:

$$\left\{ \int_a^x \int_a^{t_1} \dots \int_a^{t_{m-1}} f_n(t) dt dt_1 \dots dt_{m-1} \right\} (n = 1, 2, 3, \dots),$$

тоді $X \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots$

Визначення II. Якщо $c \in X_m$ і $c \in \overline{X_{m+1}}$, то c є точка категорії χ_m , а якщо $c \in \lim_{m \rightarrow \infty} X_m \neq 0$, то ми маємо точку категорії χ_ω .

Розглянемо приклад таких точок. Нехай

$$f_n(x) = \begin{cases} A_n e^{2\pi n^2 x i} & \text{якщо } x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \right], \\ 0 & \text{якщо } x \in \left[0, \frac{1}{n} \right) \cup \left(\frac{2}{n}, 1 \right], \end{cases}$$

де $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty$ (A_n — дійсне), ми бачимо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0$ для $x \in [0, 1]$.

Візьмемо залишковий член: $R_n(x) = f(x) - f_n(x) = -A_n e^{2\pi n^2 x i}$; проінтегрувавши $R_n(x)$ послідовно m разів, одержимо функцію:

$$\{R_n^{(m)}(x)\} = \int_0^x \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{m-1}} R_n(t) dt dt_1 \dots dt_{m-1}.$$

Отже, маємо:

$$R_n^{[1]}(x) = - \int_0^x A_n e^{2\pi n^2 t} dt = - \frac{A_n}{2\pi n^2 i} [e^{2\pi n^2 x i} - 1] = - \frac{A_n}{\lambda_n} [e^{\lambda_n x} - 1],$$

якщо $\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}$, де для скорочення ми поклали $2\pi n^2 i = \lambda_n$ і $R_n^{[1]}(x) = 0$,

якщо $x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$. Взагалі, ми маємо:

$$R_n^{[m]}(x) = - \frac{A_n}{\lambda_n^m} \left[e^{\lambda_n \left(x - \frac{1}{n}\right)} - \left(1 + \frac{\lambda_n \left(x - \frac{1}{n}\right)}{1!} + \frac{\lambda_n^2 \left(x - \frac{1}{n}\right)^2}{2!} + \right. \right. \\ \left. \left. + \dots + \frac{\lambda_n^{m-1} \left(x - \frac{1}{n}\right)^{m-1}}{(m-1)!} \right) \right],$$

якщо $x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ і $R_n^{[m]}(x) = 0$, якщо $x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$.

Очевидно, що $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n^{[m]}(x) = 0 \rightarrow x \in [0, 1]$ для довільного m .

Припустимо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_n}{\lambda_n^k} \right| = \begin{cases} +\infty & (k = m) \\ a < +\infty & (k > m) \end{cases}$$

тоді c є точка χ_m (наприклад, $A_n = n^{2m+2}$).

Але якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{A_n}{\lambda_n^m} \right| = +\infty$ для довільного m , тоді ми маємо точку χ_ω (наприклад $A_n = e^n$). Покажемо, що 0 є дійсно точка категорії χ_ω . Ми бачимо, що для $x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$,

$$R_n^{[m]} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = - \frac{e^n}{\lambda_n^m} \left[e^{2\pi i} - \left(1 + \frac{2\pi i}{1!} + \frac{(2\pi i)^2}{2!} + \dots + \frac{(2\pi i)^{m-1}}{(m-1)!} \right) \right].$$

Вираз у дужках відрізняється від 0 , а тоді впливає, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| R_n^{[m]} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right| = +\infty \text{ (для довільного } m),$$

що й треба було довести.

М. П. ШЕРЕМЕТЬЄВ, Т. Л. МАРТИНОВИЧ

ЗГИН ПЛАСТИНКИ З ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ, ОБЛАСТЬ ЯКОЇ ОБМЕЖЕНА ДВОМА КОЛАМИ АБО КОЛОМ І ПРЯМОЮ

Розглянемо пружну ізотропну пластинку, обмежену двома колами або колом і прямою, краї яких підкріплені тонким пружним кільцем сталого перерізу. Підкріплююче кільце розглядається як тонкий пружний стержень, наділений жорсткостями на згин і кручення.

Припускається, що лінія спаю пластинки з кільцем співпадає з віссю кільця.

Нехай пластинка зазнає дії згинних моментів $m_\alpha(s)$, перерізуючих сил $p_\alpha(s)$, прикладених вздовж підкріплених країв, і розподіленого нормального навантаження інтенсивності $q(x, y)$.

Позначимо через L_1 і L_2 кола, що обмежують область пластинки; радіуси останніх нехай будуть R_1 і R_2 .

Дробово-лінійна функція

$$z = \omega(\zeta) = \frac{\zeta}{1 - a\zeta}, \quad (1)$$

як відомо, дає конформне відображення кругового кільця, яке розміщене між концентричними колами γ_1 і γ_2 з радіусами ρ_1 і ρ_2 в площині ζ , на область, розміщену між ексцентричними колами L_1 і L_2 , якщо $\rho_1 < \rho_2 < \frac{1}{a}$,

або на безмежну область, що складається з точок, розміщених ззовні двох даних кіл L_1 і L_2 , якщо $\rho_1 < \frac{1}{a}$ і $\rho_2 > \frac{1}{a}$ або на область, що містить-

ся між колом L_1 і заданою прямою L_2 ($R_2 = \infty$), якщо $\rho_1 < \rho_2 = \frac{1}{a}$, в площині z .

Для визначення радіусів ρ_1 і ρ_2 кіл γ_1 і γ_2 на площині ζ та дійсної сталої «а» необхідно задати елементи, що визначають першу область.

Функції $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$, що визначають напружений стан пластинки, візьмемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{iP_z}{4D} \frac{\zeta}{1-a\zeta} + \frac{M_x^* + iM_y^*}{4D} \right] \ln \zeta + \varphi_0(\zeta), \\ \psi(\zeta) &= -\frac{1}{2\pi i} \frac{M_x^* - iM_y^*}{4D} \ln \zeta + \psi_0(\zeta), \end{aligned} \quad (2)$$

де $\varphi_0(\zeta)$ і $\psi_0(\zeta)$ — голоморфні функції в області пластинки, які подамо в такому вигляді:

$$\varphi_0(\zeta) = P_1(\zeta) + P_2(\zeta), \quad \psi_0(\zeta) = Q_1(\zeta) + Q_2(\zeta). \quad (3)$$

Тут позначено:

$$P_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \quad P_2(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^{-n},$$

$$Q_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \zeta^n, \quad Q_2(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \zeta^{-n},$$

p_z — головний вектор, M_x^* і M_y^* — компоненти головного моменту зовнішнього навантаження.

Як показано в працях [1] і [2], задача, яка розглядається, зводиться, з урахуванням рівностей (1) і (2), до знаходження голоморфних функцій $\varphi_0(\zeta)$ і $\psi_0(\zeta)$ та функції $U_\alpha(\sigma_\alpha)$ з таких граничних умов:

$$U'_\alpha(\sigma_\alpha) - \frac{K_\alpha \rho_\alpha}{(1-a\sigma_\alpha)(\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2)} U_\alpha(\sigma_\alpha) - K'_\alpha \rho_\alpha^3 \frac{1-a\sigma_\alpha}{(\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2)^3} \overline{U_\alpha(\sigma_\alpha)} =$$

$$= (1-\kappa) \frac{\rho_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2} \overline{\varphi_0(\sigma_\alpha)} + f'_\alpha(\sigma_\alpha) + i C_\alpha \frac{\rho_\alpha^2}{(\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2)^2} \text{ на } \gamma_\alpha (\alpha=1, 2), \quad (4)$$

$$\kappa \overline{\varphi_0(\sigma_\alpha)} + \frac{\rho_\alpha^2(1-a\sigma_\alpha)^2}{\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2} \varphi'_0(\sigma_\alpha) + \psi_0(\sigma_\alpha) = U_\alpha(\sigma_\alpha) - f_\alpha^*(\sigma_\alpha) +$$

$$+ i C_\alpha \frac{\rho_\alpha^2}{\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2} + C'_\alpha \text{ на } \gamma_\alpha (\alpha=1, 2). \quad (5)$$

Тут позначено:

$$f_\alpha(\sigma_\alpha) = \frac{1}{D(1-\nu)} [I_\alpha(\sigma_\alpha) - I_\alpha^*(\sigma_\alpha)] - 2 \frac{\partial W_2}{\partial t} - \frac{\kappa-1}{2\pi i} \left[\frac{i P_z}{4D} \frac{\rho_\alpha^2}{\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{M_x^* - i M_y^*}{4D} \right] (\ln \sigma_\alpha - 2 \ln \rho_\alpha). \quad (6)$$

$$f_\alpha^*(\sigma_\alpha) = f_\alpha(\sigma_\alpha) + 2 \frac{\partial W_2}{\partial t} + \frac{P_z}{8\pi D} \frac{\rho_\alpha^2(1-a\sigma_\alpha)}{\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2} + \frac{1}{2\pi i} \frac{M_x^* + i M_y^*}{4D} \frac{\rho_\alpha^2(1-a\sigma_\alpha)^2}{\sigma_\alpha(\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \left[\frac{i P_z}{4D} \frac{\rho_\alpha^2}{\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2} - \frac{M_x^* - i M_y^*}{4D} \right] \ln \rho_\alpha \quad (7)$$

$\kappa = -\frac{3+\nu}{1-\nu}$, ν — коефіцієнт Пуассона.

$$K_\alpha = \frac{(n+1)(1-\nu)D}{2G_\alpha}, \quad K'_\alpha = \frac{(n-1)(1-\nu)D}{2G_\alpha}, \quad G_\alpha = nA_\alpha,$$

A_α — жорсткість на згин, G_α — жорсткість на кручення підкріплюючого кільця.

$$I_\alpha(\sigma_\alpha) = \int_{\rho_\alpha}^{\sigma_\alpha} \left\{ -m_\alpha + i \rho_\alpha \int_0^\theta \rho_\alpha |\omega'(\sigma_\alpha)| d\vartheta_1 \right\} \overline{\omega'(\sigma_\alpha)} d\bar{\sigma}_\alpha,$$

$$I_{\alpha}^*(\sigma_{\alpha}) = \int_{\rho_{\alpha}}^{\sigma_{\alpha}} \left\{ -M_n(W_2) + i\rho_{\alpha} \int_0^{\vartheta} \left(N_n(W_2) + \frac{dH_{n\tau}(W_2)}{ds} \right) |\omega^1(\sigma_{\alpha})| d\vartheta_1 \right\} \overline{\omega^1(\sigma_{\alpha})} d\bar{z}_{\alpha} \quad (8)$$

W_2 — частинний розв'язок рівняння $D\Delta\Delta W = q$, $\sigma_{\alpha} = \rho_{\alpha} e^{i\vartheta}$ — афікс точки границі області; C_{α} — дійсна, C'_{α} — взагалі комплексна сталі.

Сталі C_{α} і C'_{α} на одному з контурів γ_{α} можемо покласти рівними нулеві, а на іншому визначаються в процесі розв'язування задачі. Далі будемо вважати, що $C_2 = C'_2 = 0$. Припустимо, що функції $f_{\alpha}(\sigma_{\alpha})$ і $f_{\alpha}^*(\sigma_{\alpha})$ розкладаються в ряди Фур'є за степенями σ_{α} , тоді з рівності (5) випливає можливість розкладу в ряд за степенями σ_{α} функції $U_{\alpha}(\sigma_{\alpha})$.

Функції $U_{\alpha}(\sigma_{\alpha})$, $f_{\alpha}(\sigma_{\alpha})$ і $f_{\alpha}^*(\sigma_{\alpha})$ подамо у вигляді рядів:

$$U_{\alpha}(\sigma_{\alpha}) = U_{\alpha}^{(1)}(\sigma_{\alpha}) + U_{\alpha}^{(2)}(\sigma_{\alpha}),$$

$$U_{\alpha}^{(1)}(\sigma_{\alpha}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(\alpha)} \sigma_{\alpha}^n, \quad U_{\alpha}^{(2)}(\sigma_{\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^{(\alpha)} \sigma_{\alpha}^{-n}, \quad (9)$$

$$f_{\alpha}(\sigma_{\alpha}) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(\alpha)} \sigma_{\alpha}^n + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^{(\alpha)} \sigma_{\alpha}^{-n}, \quad (10)$$

$$f_{\alpha}^*(\sigma_{\alpha}) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{*(\alpha)} \sigma_{\alpha}^n + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^{*(\alpha)} \sigma_{\alpha}^{-n}. \quad (11)$$

Тепер застосуємо оператор Коші $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\alpha}} \frac{(\dots) d\sigma_{\alpha}}{\sigma_{\alpha} - \zeta}$ до контурних рівностей

(4) і (5) при $|\zeta| < \rho_{\alpha}$ і $|\zeta| > \rho_{\alpha}$, враховуючи при цьому (3), (9), (10) і (11); в результаті прийдемо до таких рівностей:

$$\begin{aligned} U_{\alpha}^{(1)'}(\zeta) - \frac{K_{\alpha} \rho_{\alpha} U_{\alpha}^{(1)}(\zeta)}{(1-a\zeta)(\zeta-a\rho_{\alpha}^2)} - \frac{K'_{\alpha} \rho_{\alpha}^3 (1-a\zeta) \overline{U_{\alpha}^{(2)}}\left(\frac{\rho_{\alpha}^2}{\zeta}\right)}{(\zeta-a\rho_{\alpha}^2)^3} = \\ = (1-\chi) \frac{\rho_{\alpha}^2}{\zeta^2} \overline{P_2}'\left(\frac{\rho_{\alpha}^2}{\zeta}\right) - \frac{S_{\alpha}^0}{\zeta-a\rho_{\alpha}^2} - \frac{K_{\alpha} [a\rho_{\alpha}^2(a^2\rho_{\alpha}^2-2)+\zeta] \overline{S_{\alpha}}'}{a^3\rho_{\alpha}(\zeta-a\rho_{\alpha}^2)^2} - \\ - \frac{K_{\alpha} \rho_{\alpha} S_{\alpha}}{(1-a^2\rho_{\alpha}^2)} \frac{1}{\zeta-\frac{1}{a}} + \frac{K'_{\alpha} \rho_{\alpha}^3 (a\zeta-1) \overline{S_{\alpha}}'}{(\zeta-a\rho_{\alpha}^2)^3} + \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) r_{n+1}^{(\alpha)} \zeta^n \quad (|\zeta| < \rho_{\alpha}). \quad (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{\alpha}^{(2)'}(\zeta) - \frac{K_{\alpha} \rho_{\alpha} U_{\alpha}^{(2)}(\zeta)}{(1-a\zeta)(\zeta-a\rho_{\alpha}^2)} - \frac{K'_{\alpha} \rho_{\alpha}^3 (1-a\zeta) \overline{U_{\alpha}^{(1)}}\left(\frac{\rho_{\alpha}^2}{\zeta}\right)}{(\zeta-a\rho_{\alpha}^2)^3} = \\ = (1-\chi) \frac{\rho_{\alpha}^2}{\zeta^2} \overline{P_1}'\left(\frac{\rho_{\alpha}^2}{\zeta}\right) + \frac{S_{\alpha}^0}{\zeta-a\rho_{\alpha}^2} + \frac{K_{\alpha} [a\rho_{\alpha}^2(a^2\rho_{\alpha}^2-2)+\zeta] \overline{S_{\alpha}}'}{a^3\rho_{\alpha}(\zeta-a\rho_{\alpha}^2)^2} + \\ + \frac{K_{\alpha} \rho_{\alpha} S_{\alpha}}{(1-a^2\rho_{\alpha}^2)} \frac{1}{\zeta-\frac{1}{a}} - \frac{K'_{\alpha} \rho_{\alpha}^3 (a\zeta-1) \overline{S_{\alpha}}'}{(\zeta-a\rho_{\alpha}^2)^3} - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \tau_{n-1}^{(\alpha)} \zeta^{-n} + \frac{ic_{\alpha} \rho_{\alpha}^2}{(\zeta-a\rho_{\alpha}^2)^2} \quad (|\zeta| > \rho_{\alpha}) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \kappa \bar{P}_2\left(\frac{\rho_a^2}{\zeta}\right) + \kappa \bar{a}_0 + \frac{\rho_a^2(1-a\zeta)^2}{\zeta - a\rho_a^2} P_1'(\zeta) + Q_1(\zeta) = U_a^{(1)}(\zeta) + \\ + \frac{S_a^*}{\zeta - a\rho_a^2} - \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{*(a)} \zeta^n + C_a', \quad (|\zeta| < \rho_a), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \kappa P_1\left(\frac{\rho_a^2}{\zeta}\right) - \kappa \bar{a}_0 + \frac{\rho_a^2(1-a\zeta)^2}{\zeta - a\rho_a^2} P_2'(\zeta) + Q_2(\zeta) = U_a^{(2)}(\zeta) - \\ - \frac{S_a^*}{\zeta - a\rho_a^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n^{*(a)} \zeta^{-n} + iC_a \frac{\rho_a^2}{\zeta - a\rho_a^2}, \quad (|\zeta| > \rho_a), \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$\begin{aligned} S_a^0 = \frac{K_a \rho_a}{1 - a^2 \rho_a^2} U_a^{(1)}(a\rho_a^2) + \frac{K_a'(1 - a^2 \rho_a^2)}{2a^4 \rho_a} \bar{U}_a\left(\frac{1}{a}\right), \\ S_a = U_a^{(2)}\left(\frac{1}{a}\right), \quad S_a' = U_a^{(2)'}\left(\frac{1}{a}\right), \\ S_a^* = \rho_a^2(1 - a^2 \rho_a^2)^2 P_1'(a\rho_a^2), \quad a = 1, 2. \end{aligned} \quad (16)$$

При знаходженні співвідношень (12), (13), (14) і (15) ми прийняли $\rho_1 < \rho_2 < \frac{1}{a}$, що відповідає згину пластинки у вигляді ексцентричного кільця. Аналогічні співвідношення можна одержати і для випадку $\rho_1 < \frac{1}{a}$ і $\rho_2 > \frac{1}{a}$.

В рівності (14) і (15) входить чотири функції: $P_1(\zeta)$, $P_2(\zeta)$, $Q_1(\zeta)$ і $Q_2(\zeta)$, що підлягають визначенню. Виключаючи із (14) і (15) $Q_1(\zeta)$ і $Q_2(\zeta)$, одержимо такі два рівняння, що містять тільки функції $P_1(\zeta)$ і $P_2(\zeta)$:

$$\begin{aligned} \kappa \left[\bar{P}_2\left(\frac{\rho_2^2}{\zeta}\right) - \bar{P}_2\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right) \right] + \frac{(\rho_2^2 - \rho_1^2)\zeta(1-a\zeta)^2}{(\zeta - a\rho_2^2)(\zeta - a\rho_1^2)} P_1'(\zeta) = U_2^{(1)}(\zeta) - U_1^{(1)}(\zeta) - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} (r_n^{*(2)} - r_n^{*(1)}) \zeta^n + \frac{S_2^*}{\zeta - a\rho_2^2} - \frac{S_1^*}{\zeta - a\rho_1^2} - C_1', \quad (|\zeta| < \rho_1), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \kappa \left[\bar{P}_1\left(\frac{\rho_2^2}{\zeta}\right) - \bar{P}_1\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right) \right] + \frac{(\rho_2^2 - \rho_1^2)\zeta(1-a\zeta)^2}{(\zeta - a\rho_2^2)(\zeta - a\rho_1^2)} P_2'(\zeta) = U_2^{(2)}(\zeta) - U_1^{(2)}(\zeta) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} (\tau_n^{*(2)} - \tau_n^{*(1)}) \zeta^{-n} - \frac{S_2^*}{\zeta - a\rho_2^2} + \frac{S_1^*}{\zeta - a\rho_1^2} - iC_1 \frac{\rho_1^2}{\zeta - a\rho_1^2}, \quad (|\zeta| > \rho_2). \end{aligned} \quad (18)$$

З властивостей інтегралів типу Коші випливає, що рівності (12) і (17) являють собою функцію змінної ζ , регулярну всередині γ_1 , а рівності (13) і (18) — регулярну зовні γ_2 , включаючи і безмежно віддалену точку.

Розкладаючи вирази, що входять в рівності (12) і (17), в ряди за додатними степенями ζ , а вирази, що входять в рівності (13) і (18), — в

ряди за від'ємними степенями ζ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях ζ , в результаті прийдемо до таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу функцій $\varphi(\zeta)$ і $U_a(\zeta)$:

$$\begin{aligned} (n+1)\alpha_{n+1}^{(\alpha)} + K_\alpha \sum_{k=0}^n \varepsilon_k^{(\alpha)} \alpha_{n-k}^{(\alpha)} + \frac{K'_\alpha}{a^3 \rho_\alpha^{2n+3}} \bar{\beta}_n^{(\alpha)} - K'_\alpha \rho_\alpha^{-(2n+3)} \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{(\alpha)} \bar{\beta}_{n-k}^{(\alpha)} = \\ = (\alpha-1)(n+1)\rho_\alpha^{-2(n+1)} \bar{b}_{n+1} - K_\alpha S_\alpha \varepsilon_n^{(\alpha)} - K'_\alpha \rho_\alpha^{-(2n+3)} \bar{S}_\alpha \gamma_n^{(\alpha)} + \\ + \frac{K'_\alpha \bar{S}'_\alpha}{a^3 \rho_\alpha} (n+1)(1-a^2 \rho_\alpha^2)(a \rho_\alpha^2)^{-n+1} + (n+1)r_{n+1}^{(\alpha)}, \quad (n=0,1,2,\dots), \quad \alpha=1,2. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (n-1)\beta_{n-1}^{(\alpha)} - K_\alpha \sum_{k=2}^{n-1} \Theta_k^{(\alpha)} \beta_{n-k}^{(\alpha)} - K'_\alpha a \rho_\alpha^{2n-1} \bar{\alpha}_{n-2}^{(\alpha)} + K'_\alpha \rho_\alpha^{2n-3} \sum_{k=3}^n \delta_k^{(\alpha)} \bar{\alpha}_{n-k}^{(\alpha)} = \\ = (\alpha-1)(n-1)\rho_\alpha^{2(n-1)} \bar{a}_{n-1} - K_\alpha S_\alpha \Theta_n^{(\alpha)} - K'_\alpha \rho_\alpha^{2n-3} \bar{S}_\alpha \delta_n^{(\alpha)} + \\ + \frac{K'_\alpha \bar{S}'_\alpha}{a^3 \rho_\alpha} (n-1)(1-a^2 \rho_\alpha^2)(a \rho_\alpha^2)^{n-1} + (n-1)\tau_{n-1}^{(\alpha)} - \\ - iC_\alpha \rho_\alpha^2 (n-1)(a \rho_\alpha^2)^{n-2}, \quad (n=2,3,\dots), \quad \alpha=1,2. \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \alpha(\rho_2^{-2n} - \rho_1^{-2n}) \bar{b}_n + \sum_{k=2}^n (n-k+1) \varepsilon_k^* a_{n-k+1} + \mu n a_n = (\alpha_n^{(2)} - \alpha_n^{(1)}) - \\ - (r_n^{*(2)} - r_n^{*(1)}) + S_1^*(a \rho_1^2)^{-(n+1)} - S_2^*(a \rho_2^2)^{-(n+1)} - C_1', \quad (n=0,1,2,\dots), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \alpha(\rho_2^{2n} - \rho_1^{2n}) \bar{a}_n + a^2(\rho_1^2 - \rho_2^2) n b_n + \mu^*(n-1) b_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} (n-k-1) \Theta_k^* b_{n-k-1} = \\ = (\beta_n^{(2)} - \beta_n^{(1)}) - (\tau_n^{*(2)} - \tau_n^{*(1)}) + S_1^*(a \rho_1^2)^{n-1} - S_2^*(a \rho_2^2)^{n-1} - \\ - iC_1 \rho_1^2 (a \rho_1^2)^{n-1}, \quad (n=1,2,3,\dots). \end{aligned} \quad (22)$$

Тут введені позначення:

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^{(\alpha)} &= \frac{\rho_\alpha}{1-a^2 \rho_\alpha^2} \left[(a \rho_\alpha^2)^{-(k+1)} - \left(\frac{1}{a} \right)^{-(k+1)} \right], \\ \Theta_k^{(\alpha)} &= \frac{\rho_\alpha}{1-a^2 \rho_\alpha^2} \left[\left(\frac{1}{a} \right)^{k-1} - (a \rho_\alpha^2)^{k-1} \right], \\ \gamma_k^{(\alpha)} &= \frac{k+1}{2} [k(a^2 \rho_\alpha^2 - 1) - 2] a^{-(k+3)}, \\ \delta_k^{(\alpha)} &= \frac{k-1}{2} [k(1 - a^2 \rho_\alpha^2) - 2] a^{k-3}, \\ \varepsilon_k^* &= [\rho_1^2 (1 - a^2 \rho_1^2)^2 (a \rho_1^2)^{-(k+1)} - \rho_2^2 (1 - a^2 \rho_2^2)^2 (a \rho_2^2)^{-(k+1)}], \\ \Theta_k^* &= [\rho_1^2 (1 - a^2 \rho_1^2)^2 (a \rho_1^2)^{k-1} - \rho_2^2 (1 - a^2 \rho_2^2)^2 (a \rho_2^2)^{k-1}], \end{aligned} \quad (23)$$

$$\mu = \left[\frac{2a^2\rho_2^2 - 1}{a^2\rho_2^2} - \frac{2a^2\rho_1^2 - 1}{2a^2\rho_1^2} \right],$$

$$\mu^* = [a\rho_1^2(a^2\rho_1^2 - 2) - a\rho_2^2(a^2\rho_2^2 - 2)].$$

При складанні систем (19) і (20) врахована рівність

$$S_\alpha^0 + \frac{K_\alpha \rho_\alpha S_\alpha}{1 - a^2 \rho_\alpha^2} + \frac{K'_\alpha \bar{S}_\alpha}{a^3 \rho_\alpha} = 0,$$

що одержується при $n=1$. Параметри S_α , S'_α , S_α^* , що входять в системи рівнянь (19)–(22), на підставі рівностей (3) і (9) легко виражаються через коефіцієнти a_n і $\beta_n^{(\alpha)}$:

$$S_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \beta_n^{(\alpha)}, \quad S'_\alpha = - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) a^n \beta_{n-1}^{(\alpha)}, \quad (24)$$

$$S_\alpha^* = \rho_\alpha^2 (1 - a^2 \rho_\alpha^2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (a \rho_\alpha^2)^n.$$

Розв'язуючи сумісно системи рівнянь (19)–(22), знайдемо коефіцієнти a_n , b_n , $\alpha_n^{(\alpha)}$, $\beta_n^{(\alpha)}$ розкладу функції U_α і φ_0 . Функцію ψ_0 знаходимо із рівності (14) і (15). Параметри S_α , S'_α і S_α^* , які ввійдуть у вирази шуканих коефіцієнтів, знаходяться з умов (24). Дійсна стала C_1 визначається з умови однозначності прогину пластинки.

Якщо один з контурів пластинки жорстко закріплений, наприклад, $L_2(\gamma_2)$, то в цьому випадку в одержаних системах рівнянь потрібно покласти $K_2 = K'_2 = 0$. Прямуючи $K_\alpha \rightarrow \infty$ і $K'_\alpha \rightarrow \infty$, одержимо, як окремий випадок, розв'язок задачі для пластинки без підкріплення, $U_\alpha \equiv 0$.

У випадку рівних жорсткостей підкріплюючого кільця на згин і кручення розв'язок задачі значно спрощується; тоді $K'_\alpha = 0$, і система рівнянь (19) і (20) набуває вигляду:

$$(n+1)\alpha_{n+1}^{(\alpha)} + K_\alpha \sum_{k=0}^n \varepsilon_k^{(\alpha)} \alpha_{n-k}^{(\alpha)} = (\kappa-1)(n+1)\rho_\alpha^{-2(n+1)} \bar{b}_{n+1} - K_\alpha S_\alpha \varepsilon_n^{(\alpha)} + (n+1)r_{n+1}^{(\alpha)} \quad (n=0,1,2...), \quad (25)$$

$$(n-1)\beta_{n-1}^{(\alpha)} - K_\alpha \sum_{k=2}^{n-1} \Theta_k^{(\alpha)} \beta_{n-k}^{(\alpha)} = (\kappa-1)(n-1)\rho_\alpha^{2(n-1)} \bar{a}_{n-1} - K_\alpha S_\alpha \Theta_n^{(\alpha)} + (n-1)\tau_{n-1}^{(\alpha)} - i C_\alpha \rho_\alpha^2 (n-1)(a \rho_\alpha^2)^{n-2}, \quad (n=2,3,...), \alpha=1,2. \quad (26)$$

Переходячи до границі в рівностях (19)–(22) при $a \rightarrow 0$, одержимо розв'язок задачі для пластинки у вигляді кругового концентричного кільця з підкріпленням краєм, а при $\rho_2 \rightarrow \frac{1}{a}$ — розв'язок для півплощини з круговим отвором, краї якої підкріплені.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Изгиб тонких плит с подкрепленным краем. Укр. матем. журнал № 1, 1953.
 2. М. П. Шереметьев, Т. Л. Мартинович. Згин нескінченої пластинки з еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем. Прикладна механіка, т. III, вип. 2, 1957.
-

Стаття надійшла 15. XI 1960.

І. О. ПРУСОВ

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНОГО СТАНУ У ВАГОМІЙ ПІВПЛОЩИНІ НАВКОЛО КРУГОВИХ ОТВОРІВ

Методом послідовних наближень розв'язується задача про напружений стан у вагомій півплощині в оточенні двох і трьох кругових отворів, центри яких розміщені на лінії, перпендикулярній напрямку сили ваги. Для спрощення перетворень у випадку трьох отворів вважається, що два з них рівні між собою і симетрично розміщені відносно третього.

1. ЗАГАЛЬНІ ФОРМУЛИ

Нехай L — коло радіуса R , яке обмежує круг S^+ , S^- — зовнішність L . Припустимо, що пружне середовище займає область S^- .

Компоненти напружень $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ в полярних координатах r, θ визначаються через аналітичні функції $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ так [1, 2]:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}], \quad (1.1)$$

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} - z\overline{\Phi'(z)} - \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi(z)}. \quad (1.2)$$

При $|z|$ достатньо великих, функції $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ мають вигляд

$$\Phi(z) = \Gamma - \frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (1.3)$$

$$\Psi(z) = \Gamma' + \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (1.4)$$

де $\Gamma = \frac{1}{4}(N_1 + N_2)$, $\Gamma' = \frac{1}{2}(N_2 - N_1)e^{-2i\alpha}$, N_1 і N_2 — головні напруження на безмежності, α — кут, який утворює з віссю OX напрям, що відповідає N_1 , X і Y — компоненти головного вектора зовнішніх зусиль на L , κ — відома константа пружного середовища.

Функції $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ визначені в S^- . Покладемо, що функція $\Phi(z)$ в S^+ визначається так:

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \frac{R^2}{z}\overline{\Phi'\left(\frac{R^2}{z}\right)} + \frac{R^2}{z^2}\overline{\Psi\left(\frac{R^2}{z}\right)} \quad (|z| < R), \quad (1.5)$$

звідки

$$\Psi(z) = \frac{R^2}{z^2}\Phi(z) + \frac{R^2}{z^2}\overline{\Phi\left(\frac{R^2}{z}\right)} - \frac{R^2}{z}\overline{\Phi'(z)} \quad (|z| > R). \quad (1.6)$$

При $z \rightarrow 0$ функція $\Phi(z)$ має вигляд

$$\Phi(z) = \frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{z^2} + \frac{z(X+iY)}{2\pi(1+\nu)z} + O(1). \quad (1.7)$$

На основі (1.6) формула (1.2) набирає вигляду:

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = \Phi(z) - \Phi\left(\frac{R^2}{z}\right) + \bar{z} \left(\frac{\bar{z}}{R^2} - \frac{1}{z} \right) \overline{\Psi(z)}. \quad (1.8)$$

Якщо початок координат перенести в точку $z_0 = x_0 + iy_0$ і покласти $z_1 = z - z_0$, то функції напружень $\Phi_1(z_1)$ і $\Psi_1(z_1)$ в новій системі координат визначаються через $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ так:

$$\Phi_1(z_1) = \Phi(z_1 + z_0), \quad \Psi_1(z_1) = \Psi(z_1 + z_0) + \bar{z}_0 \Phi'(z_1 + z_0). \quad (1.9)$$

2. НАПРУЖЕНИЙ СТАН У ВАГОМІЙ ПІВПЛОЩИНІ З ДВОМА ОТВОРАМИ

Нехай вагова пружна півплощина з прямолінійною границею L_0 має кругові отвори, обмежені колами L і L_1 , центри яких знаходяться на глибині h від L_0 і розміщені на віддалі d (рис. 1). Зовнішнє навантаження на L , L_1 , L_0 вважаємо відсутнім.

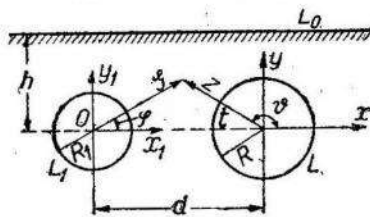


Рис. 1.

Позначимо радіуси отворів, обмежених L і L_1 , через R і R_1 ($R_1 < R$) і введемо в розгляд дві площини комплексних змінних $z = x + iy = re^{i\theta}$, $\xi = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\varphi}$. Компоненти напружень в суцільних півплощинах визначаються формулами

$$X_x = -\lambda\gamma(h-y), \quad Y_y = -\gamma(h-y);$$

$$X_x^{(1)} = -\lambda\gamma(h-y_1), \quad Y_y^{(1)} = -\gamma(h-y_1), \quad X_y = X_y^{(1)} = 0, \quad (2.1)$$

де γ — питома вага матеріалу півплощини, $\lambda = \frac{\nu}{1-\nu}$ — коефіцієнт розпору, ν — коефіцієнт Пуассона.

Користуючись (2.1) та відомою формулою

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = \frac{P+Q}{2} + \frac{P-Q}{2} e^{-2i\theta},$$

яка визначає компоненти напружень на похилих площинах через головні компоненти напружень P і Q , знайдемо, що в суцільній півплощині

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = -\frac{\gamma h(1+\lambda)}{2} - \frac{i\gamma(1+\lambda)t}{4} + \frac{i\gamma R^2}{2t} + \frac{\gamma h(1-\lambda)R^2}{2t^2} - \frac{i\gamma(1-\lambda)R^4}{4t^3} \quad \text{на } L, \quad (2.2)$$

$$\sigma_\rho + i\tau_{\rho\varphi} = -\frac{\gamma h(1+\lambda)}{2} - \frac{i\gamma(1+\lambda)\sigma}{4} + \frac{i\gamma R_1^2}{2\sigma} + \frac{\gamma h(1-\lambda)R_1^2}{2\sigma^2} - \frac{i\gamma(1-\lambda)R_1^4}{4\sigma^3} \quad \text{на } L_1, \quad (2.3)$$

де $t = Re^{i\theta}$ і $\sigma = R_1 e^{i\varphi}$ — точки на L і L_1 .

Нехай напружений стан (2.1) в суцільній півплощині визначається функціями $\Phi_0(z)$ і $\Psi_0(z)$ в комплексній площині z або функціями $\Phi_{00}(\xi)$ і $\Psi_{00}(\xi)$ в площині ξ . Позначимо через $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$ функції, які зни-

щують напруження (2.2) на L . Тоді функції $\Phi_0(z) + \Phi_1(z)$ і $\Psi_0(z) + \Psi_1(z)$ задовольняють граничним умовам на L , причому функція $\Phi_1(z)$ на основі (1.8) задовольняє умові

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \sigma_r + i\tau_{r\vartheta} \quad \text{на } L, \quad (2.4)$$

де $\sigma_r + i\tau_{r\vartheta}$ — права частина (2.2).

Рівняння (2.4), враховуючи (1.3) і (1.7), має розв'язок [1]

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\sigma_r + i\tau_{r\vartheta}) dt}{t-z} + \Gamma + \frac{z(X+iY)}{2\pi(1+\kappa)z} + \frac{R^2 \bar{\Gamma}'}{z^2}. \quad (2.5)$$

В даному випадку $\Gamma = \Gamma' = 0$, $X + iY = i\gamma\pi R^2$. Тому з (2.5) маємо

$$\Phi_1(z) = -\frac{\gamma h(1+\lambda)}{2} - \frac{i\gamma(1+\lambda)z}{4} + \frac{i\gamma z R^2}{2(1+\kappa)z} \quad (|z| < R), \quad (2.6)$$

$$\Phi_1(z) = -\frac{i\gamma R^2}{2(1+\kappa)z} - \frac{\gamma h(1-\lambda)R^2}{2z^2} + \frac{i\gamma(1-\lambda)R^4}{4z^3} \quad (|z| > R). \quad (2.7)$$

За формулами (1.6), (2.6) і (2.7) знайдемо, що

$$\Psi_1(z) = -\frac{i\gamma z R^2}{2(1+\kappa)z} - \frac{\gamma h(1+\lambda)R^2}{2z^2} + \frac{i\gamma R^4}{4z^3} \left(1 + \lambda - \frac{4}{1+\kappa}\right) - \frac{3\gamma h(1-\lambda)R^4}{2z^4} + \frac{i\gamma(1-\lambda)R^6}{z^5}. \quad (2.8)$$

Слід зауважити, що функції $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$, за допомогою яких знищуються зовнішні напруження на L , вводять додаткове зовнішнє навантаження на L_0 . Як показують підрахунки, впливом цього додаткового навантаження можна знехтувати, якщо $h \geq 5R$. Приймавши це, функції $\Phi_0(z) + \Phi_1(z)$ і $\Psi_0(z) + \Psi_1(z)$ дають практично точний розв'язок задачі про напружений стан у вагомій півплощині з одним круговим отвором. Компонента напруження σ_ϑ в даному випадку на L набуває значення

$$\frac{\sigma_\vartheta}{\gamma h} = -(1+\lambda) - 2(1-\lambda) \cos 2\vartheta + \frac{R}{h} \left[(1+\lambda) \sin \vartheta + (1-\lambda) \sin 3\vartheta - \frac{2 \sin \vartheta}{1+\kappa} \right], \quad (2.9)$$

Займемося тепер задовільненням граничної умови на контурі L_1 . Для цієї мети введемо заміну $z = \xi - d$ (d — віддаль між центрами L і L_1). Тоді на основі (1.9), (2.7) і (2.8) маємо

$$\Phi_{11}(\xi) = \Phi_1(\xi - d) = -\frac{i\gamma R^2}{2(1+\kappa)(\xi - d)} - \frac{\gamma h(1-\lambda)R^2}{2(\xi - d)^2} + \frac{i\gamma(1-\lambda)R^4}{4(\xi - d)^3}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(\xi) = \Psi_1(\xi - d) - d\Phi_1'(\xi - d) = & -\frac{i\gamma z R^2}{2(1+\kappa)(\xi - d)} - \left[h(1+\lambda) + \frac{id}{1+\kappa} \right] \frac{\gamma R^2}{2(\xi - d)^2} + \\ & + \left[ik^2 \left(\frac{1+\lambda}{4} - \frac{1}{1+\kappa} \right) - hd(1-\lambda) \right] \frac{\gamma R^2}{(\xi - d)^3} - (1-\lambda)(2h - id) \frac{3\gamma R^4}{4(\xi - d)^4} + \\ & + \frac{i\gamma(1-\lambda)R^6}{(\xi - d)^5}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Повне зовнішнє напруження $\sigma_\varphi + i\tau_{\varphi\vartheta}$ на L_1 знайдемо накладанням (2.3) з напруженнями, які одержимо за формулою (1.2) з урахуванням (2.10) і (2.11). Аналогічно попередньому випадку знайдемо, що функції $\Phi_{22}(\xi)$ і $\Psi_{22}(\xi)$, які знищують зовнішні напруження на L_1 , мають вигляд

$$\begin{aligned}
\Phi_{22}(\xi) = & -\frac{i\gamma R_1^2}{2(1+\kappa)\xi} - \frac{\gamma h(1-\lambda)R_1^2}{2\xi^2} + \frac{i\gamma(1-\lambda)R_1^4}{4\xi^3} - \frac{i\gamma R^2}{2(1+\kappa)A} - \frac{i\gamma R^2}{2(1+\kappa)d} - \\
& - \frac{\gamma h(1-\lambda)R^2}{2d^2} + \frac{i\gamma(1-\lambda)R^4}{4d^3} + \frac{\gamma h(1-\lambda)R^2}{2A^2} + \frac{i\gamma(1-\lambda)R^4}{4A^3} - \frac{i\gamma R^2 R_1^2}{2(1+\kappa)\xi A^2} + \\
& + \frac{\gamma h(1-\lambda)R^4 R_1^2}{\xi A^3} + \frac{3i\gamma(1-\lambda)R^4 R_1^2}{4\xi A^4} + \frac{i\gamma R^2 R^2 R_1^2}{2(1+\kappa)\xi^2 A} - \frac{\gamma R^2 R_1^2}{2\xi^2 A^2} \left[(1+\lambda)h - \frac{id}{1+\kappa} \right] - \\
& - \frac{\gamma R^2 R_1^2}{\xi^2 A^3} \left[(1-\lambda)hd + iR^2 \left(\frac{1+\lambda}{4} - \frac{1}{1+\kappa} \right) \right] - \frac{3\gamma(1-\lambda)(2h+id)R^4 R_1^2}{4\xi^2 A^4} - \\
& - \frac{i\gamma(1-\lambda)R^6 R_1^2}{\xi^2 A^5} \quad (|\xi| > R_1), \quad (2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{22}(\xi) = & -\frac{i\gamma R_1^2}{2(1+\kappa)\xi} - \frac{\gamma h R_1^2}{\xi^2} \left[\frac{1+\lambda}{2} + \frac{(1-\lambda)R^2}{d^2} \right] + \frac{i\gamma R_1^4}{4\xi^3} \left(1+\lambda - \frac{4}{1+\kappa} \right) - \\
& - \frac{3\gamma h(1-\lambda)R^4}{2\xi^4} + \frac{i\gamma(1-\lambda)R^6}{\xi^5} - \frac{i\gamma R^2 R_1^4}{2(1+\kappa)\xi^3 A^2} + \frac{\gamma h(1-\lambda)R^2 R_1^4}{\xi^3 A^3} + \frac{3i\gamma(1-\lambda)R^4 R_1^4}{4\xi^3 A^4} + \\
& + \frac{3i\gamma R^2 R^2 R_1^4}{2(1+\kappa)\xi^4 A} - \frac{3\gamma R^2 R_1^4}{2\xi^4 A^2} \left[(1+\lambda)h - \frac{id}{1+\kappa} \right] - \frac{\gamma R^2 R_1^4}{\xi^4 A^3} \left\{ 3 \left[(1-\lambda)hd + iR^2 \left(\frac{1+\lambda}{4} - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{1}{1+\kappa} \right) \right] - \frac{iR_1^2}{1+\kappa} \right\} - \frac{3\gamma(1-\lambda)}{4\xi^4 A^4} [3(2h+id)R^4 R_1^4 + 4hR^2 R_1^6] - \\
& - \frac{3i\gamma(1-\lambda)(R^6 R_1^4 + R^4 R_1^6)}{\xi^4 A^5} - \frac{i\gamma R^2 R^2 R_1^6}{2(1+\kappa)\xi^5 A^2} + \frac{\gamma R^2 R_1^6}{\xi^5 A^3} \left[(1+\lambda)h - \frac{id}{1+\kappa} \right] + \\
& + \frac{3\gamma R^2 R_1^6}{\xi^5 A^4} \left[(1-\lambda)hd + iR^2 \left(\frac{1+\lambda}{4} - \frac{1}{1+\kappa} \right) \right] + \frac{3\gamma(1-\lambda)(2h+id)R^4 R_1^6}{\xi^5 A^5} + \\
& + \frac{5i\gamma(1-\lambda)R^6 R_1^6}{\xi^5 A^6} \quad (|\xi| > R_1); \quad A = \frac{R_1^2}{\xi} - d. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

При

$$d - R - R_1 \geq 0,1R, \quad d - R - R_1 \geq 4R_1, \quad h \geq 5R \quad (R_1 < R) \quad (2.14)$$

функції $\Phi_{22}(\xi)$ і $\Psi_{22}(\xi)$ практично не змінюють граничних умов на L_0 і L . Далі припустимо, що умови (2.14) виконуються. Тоді пружний стан у загомій півплощині з двома круговими отворами визначається функціями $\Phi_{00}(\xi) + \Phi_{11}(\xi) + \Phi_{22}(\xi)$ і $\Psi_{00}(\xi) + \Psi_{11}(\xi) + \Psi_{22}(\xi)$ або в площині комплексного змінного z функціями $\Phi_0(z) + \Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ і $\Psi_0(z) + \Psi_1(z) + \Psi_2(z)$, які точно задовольняють граничним умовам на L_1 і практично точно на L_0 і L , де на основі (1.9) $\Phi_2(z) = \Phi_{22}(z+d)$, $\Psi_2(z) = \Psi_{22}(z+d) + d\Phi'_{22}(z+d)$, $\Phi_1(z)$ — права частина (2.7).

Компоненти напружень σ_φ і σ_θ на L_1 і L визначаються за формулами

$$\sigma_\varphi = 4Re[\Phi_{11}(\sigma) + \Phi_{22}(\sigma)] - \gamma(1+\lambda)(h - R_1 \sin \varphi) \quad \text{на } L_1, \quad (2.15)$$

$$\sigma_\theta = 4Re[\Phi_1(t) + \Phi_2(t)] - \gamma(1+\lambda)(h - R \sin \theta) \quad \text{на } L, \quad (2.16)$$

на основі яких, нехтуючи величинами порядку $1/h$, маємо

$$\frac{\sigma_\varphi}{\gamma h} = -(1+\lambda) - 2(1-\lambda) \cos 2\varphi - \frac{2(1-\lambda)R^2}{d^2} + \frac{4(1-\lambda)R^2 R_1}{E^3} [R_1^3 \cos 2\varphi -$$

$$\begin{aligned}
& - (d^2 + 3R_1^2) d \cos \varphi + 3R_1 d^2] - \frac{2(1+\lambda)R^2}{E^2} (R_1^2 - 2d R_1 \cos \varphi + d^2 \cos 2\varphi) - \\
& - \frac{4(1-\lambda)R^2 d}{E^3} [(R_1^3 + 3R_1 d^2) \cos \varphi - d^3 \cos 2\varphi - 3R_1^2 d] - \frac{6(1-\lambda)R^4}{E^4} [(R_1^4 + \\
& + d^4) \cos 2\varphi - 4R_1 d (d^2 + R_1^2) \cos \varphi + 6R_1^2 d^2], \quad (2.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{\vartheta}}{\gamma h} = & - (1 + \lambda) - 2(1 - \lambda) \cos 2\vartheta - \frac{2(1 - \lambda)R^2}{d^2} - \\
& - \frac{2(1 - \lambda)(d^2 + 2dR \cos \vartheta + R^2 \cos 2\vartheta)R_1^2}{(d^2 + 2dR \cos \vartheta + R^2)^2} + 4Re \left[\frac{(1 - \lambda)R^2}{2B^2} - \frac{(1 - \lambda)R^2 R_1^2}{(d + t)B^3} - \frac{(1 + \lambda)R^2 R_1^2}{2(d + t)^2 B^2} + \right. \\
& \left. + \frac{(1 - \lambda)dR^2 R_1^2}{(d + t)^2 B^3} - \frac{3(1 - \lambda)R^4 R_1^2}{2(d + t)^2 B^4} \right], \quad (2.17)
\end{aligned}$$

$$E = d^2 - 2R_1 d \cos \varphi + R_1^2, \quad B = d - \frac{R_1^2}{d + t}.$$

В окремому випадку, коли $R_1 : R \rightarrow 0$, $d - R \neq 0$, із (2.16) (2.17) маємо

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{\varphi}}{\gamma h} = & - (1 + \lambda) - 2(1 - \lambda) \cos 2\varphi - \frac{2(1 - \lambda)R^2}{d^2} + \frac{2(1 - 3\lambda)R^2 \cos 2\varphi}{d^2} - \\
& - \frac{6(1 - \lambda)R^4 \cos 2\varphi}{d^4}, \quad (2.18)
\end{aligned}$$

$$\frac{\sigma_{\vartheta}}{\gamma h} = - (1 + \lambda) - 2(1 - \lambda) \cos 2\vartheta. \quad (2.19)$$

Як видно з (2.18), (2.19), коефіцієнт концентрації напружень $\sigma : \gamma h$ при умовах (2.14) і $R : d \rightarrow 1$ досягає найбільшого значення на контурі меншого отвору L_1 і дорівнює 9 при $\lambda = 0$ і 6 при $\lambda = 1$. Це втричі перевищує коефіцієнт концентрації при наявності тільки одного отвору.

3. ПРУЖНИЙ СТАН У ПІВПЛОЩИНІ З ТРЬОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ

Припустимо тепер, що півплощина має три кругові отвори, обмежені колами L , L_1 і L_2 , центри яких розміщені на віддалі h від прямолінійної границі L_0 півплощини (рис. 2). Радіус кола L дорівнює R , два інші кола рівні між собою і симетрично розміщені відносно третього, причому $R_1 = R_2 < R$.

Надалі покладемо, що параметри R , R_1 , d і h задовольняють умовам (2.14). Тоді накладанням вище одержаного розв'язку для півплощини з двома отворами, обмеженими L і L_1 , з функціями, які знищують зовнішні напруження на L_2 , одержимо практично точний розв'язок для півплощини з трьома круговими отворами. Функції напружень в комплексній площині ξ в цьому випадку мають вигляд

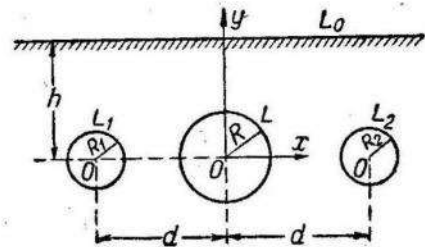


Рис. 2.

$$\Phi(\xi) = \Phi_{00}(\xi) + \Phi_{11}(\xi) + \Phi_{22}(\xi) + \Phi_{33}(\xi), \quad (3.1)$$

$$\Psi(\xi) = \Psi_{00}(\xi) + \Psi_{11}(\xi) + \Psi_{22}(\xi) + \Psi_{33}(\xi), \quad (3.2)$$

де $\Phi_{33}(\xi)$ і $\Psi_{33}(\xi)$ — функції, які одержуються з правих частин (2.12) і (2.13) заміною d на $-d$, а потім ξ на $\xi - 2d$.

Компоненти напружень σ_φ і σ_ϑ на L_1 і L визначаються за формулами

$$\sigma_\varphi = 4Re[\Phi_{11}(\sigma) + \Phi_{22}(\sigma) + \Phi_{33}(\sigma)] - \gamma(1 + \lambda)(h - R_1 \sin \varphi), \quad (3.3)$$

$$\sigma_\vartheta = 4Re[\Phi_1(t) + \Phi_2(t) + \Phi_{33}(t - d)] - \gamma(1 + \lambda)(h - R \sin \vartheta). \quad (3.4)$$

При умовах (2.14), як показують підрахунки, значенням функції $\Phi_{33}(\sigma)$ у формулі (3.3) можна знехтувати. Тому формула (3.3) практично співпадає з (2.15). Це вказує на те, що отвір, обмежений L_2 , не впливає на розподіл напружень на L_1 , і навпаки, отвір, обмежений L_1 , не впливає на розподіл напружень на L_2 .

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, Москва, 1954, изд. 4.
2. И. Н. Карцивадзе. Эффективное решение основных задач теории упругости для некоторых областей. Сообщ. АН Груз.ССР, т. 7, № 8, 1946.
3. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. М—Л., 1951.
4. А. С. Космодамианский. Приближенный метод определения напряженного состояния изотропной пластинки с конечным числом круговых отверстий. Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, № 2, 1960.

Стаття надійшла 12. XII 1960.

І. О. ПРУСОВ

СТИСНЕННЯ ПРУЖНИХ ПІВПЛОЩИН

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ЗАГАЛЬНІ ФОРМУЛИ

Нехай нижню півплощину $y < 0$ (S^-) заповнює пружний ізотропний матеріал з сталими μ і κ , а верхню $y > 0$ (S^+) — матеріал зі сталими μ_1 і κ_1 . Припустимо, що ці півплощини, які стикаються без тертя по прямій L , що співпадає з віссю OX , стискаються зосередженими або розподіленими силами, розташованими в даних півплощинах.

Як відомо [1], напружено-деформований стан в S^- визначається за допомогою функції $\Phi(z)$, визначеної як в S^- , так і в S^+ за формулами

$$X_x + Y_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad (1.1)$$

$$Y_y - iX_x = \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (1.2)$$

$$2\mu(u' + iv') = \kappa\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (1.3)$$

де $u' + iv' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ — похідна по x від зміщень $u + iv$.

Аналогічними формулами, які відрізняються від (1.1) — (1.3) тільки індексами, визначається за допомогою функції $\Phi_1(z)$ напружено-деформований стан S^+ .

Якщо в точці z_0 півплощини S^- прикладена зосереджена сила (X, Y) , то функцію $\Phi(z)$ можна представити у вигляді

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)(z-z_0)} + \text{голоморфна функція в } S^-, \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)} \frac{z_0-\bar{z}_0}{(z-\bar{z}_0)^2} - \frac{\kappa(X+iY)}{2\pi(1+\kappa)(z-\bar{z}_0)} + \\ & + \text{голоморфна функція в } S^+. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Функція $\Phi_1(z)$ голоморфна як в S^+ , так і в S^- .

У випадку, коли зосереджена сила (X_1, Y_1) прикладена в точці z_1 півплощини S^+ , функція $\Phi_1(z)$ має вигляд

$$\Phi_1(z) = -\frac{X_1+iY_1}{2\pi(1+\kappa_1)(z-z_1)} + \text{голоморфна функція в } S^+, \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = & \frac{X_1-iY_1}{2\pi(1+\kappa_1)} \frac{z_1-\bar{z}_1}{(z-\bar{z}_1)^2} - \frac{\kappa_1(X_1+iY_1)}{2\pi(1+\kappa_1)(z-\bar{z}_1)} + \\ & + \text{голоморфна функція в } S^-. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Функція $\Phi(z)$ голоморфна як в S^- , так і в S^+ .

Граничні умови на L полягають у рівності нулю дотичних напружень, а також у рівності нормального тиску і нормальних складових переміщень з боку верхньої і нижньої півплощин. Аналітично ці умови зводяться до рівнянь на L

$$[\Phi_1(t) + \Phi(t)]^+ - [\Phi_1(t) + \Phi(t)]^- = 0, \quad (1.8)$$

$$\operatorname{Im}[\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t)] = 0, \quad \operatorname{Im}[\Phi_1^-(t) - r\Phi^-(t)] = 0, \quad r = \frac{\mu_1(1+\kappa)}{\mu(1+\kappa_1)}. \quad (1.9)$$

2. ЗОСЕРЕДЖЕНА СИЛА, ПРИКЛАДЕНА В НИЖНІЙ ПІВПЛОЩИНІ

Нехай зосереджена сила (X, Y) прикладена в точці z_0 півплощини S^- . В цьому випадку $\Phi(z)$ має в точках z_0 і $\bar{z}_0$ особливості, які визначаються рівняннями (1.4), (1.5). Функція $\Phi_1(z)$ голоморфна як в S^+ , так і в S^- . Спробуємо задовольнити цим умовам та рівнянням (1.8), (1.9), поклавши, що

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= A(z, z_0) + nB(z, z_0) + m\bar{A}(z, \bar{z}_0) \text{ в } S^-, \\ \Phi(z) &= B(z, z_0) + n_1\bar{B}(z, \bar{z}_0) + m_1A(z, z_0) \text{ в } S^+, \\ \Phi_1(z) &= k\bar{A}(z, \bar{z}_0) + sB(z, z_0) \text{ в } S^-, \\ \Phi_1(z) &= k_1A(z, z_0) + s_1\bar{B}(z, \bar{z}_0) \text{ в } S^+, \end{aligned} \quad (2.1)$$

де $A(z, z_0)$ — головна частина $\Phi(z)$ в S^- , $B(z, z_0)$ — головна частина $\Phi(z)$ в S^+ , які визначаються правими частинами (1.4), (1.5), $n, n_1, m, m_1, k, k_1, s$ і s_1 — довільні постійні.

На підставі (2.1) рівняння (1.8), (1.9) запишуться в скороченому вигляді так:

$$k_1A + s_1\bar{B} + B + n_1\bar{B} + m_1A - (k\bar{A} + sB + A + nB + m\bar{A}) = 0, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{Im}(k_1A + s_1\bar{B} - k\bar{A} - sB) = 0, \quad \operatorname{Im}[k\bar{A} + sB - r(A + nB + m\bar{A})] = 0.$$

Враховуючи, що $A(z, z_0)$ і $\bar{A}(z, \bar{z}_0)$, $B(z, z_0)$ і $\bar{B}(z, \bar{z}_0)$ — комплексно спряжені на L , рівнянням (2.2) тотожно задовольнимо, якщо покладемо

$$\begin{aligned} k_1 &= -k, \quad s_1 = -s, \quad k - rm = -r, \quad s - rn = 0, \\ k_1 + m_1 &= 1, \quad s + n = 1, \quad k + m = 0, \quad s_1 + n_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Із рівнянь (2.3) одержимо

$$nr = m = -k = s = n_1 = rm_1 = k_1 = -s_1 = \frac{r}{1+r}. \quad (2.4)$$

Легко переконатися, що функції $\Phi(z)$ і $\Phi_1(z)$, які визначаються формулами (2.1), (2.4), мають відомі особливості і задовольняють усім граничним умовам на L . Задача, таким чином, розв'язана.

3. ЗОСЕРЕДЖЕНА СИЛА, ПРИКЛАДЕНА У ВЕРХНІЙ ПІВПЛОЩИНІ

Покладемо, що зосереджена сила (X_1, Y_1) прикладена в точці z_1 півплощини S^+ . В цьому випадку функція $\Phi(z)$ голоморфна як в S^- , так і в S^+ . Функція $\Phi_1(z)$ в точках z_1 і $\bar{z}_1$ має особливості виду (1.6), (1.7).

Враховуючи це, аналогічно, як і в попередньому випадку, розв'язок задачі одержимо у вигляді

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= A_1(z, z_1) + n' B_1(z, z_1) + m' \bar{A}_1(z, \bar{z}_1) \text{ в } S^+, \\ \Phi_1(z) &= B_1(z, z_1) + n'_1 \bar{B}_1(z, \bar{z}_1) + m'_1 A_1(z, z_1) \text{ в } S^-, \\ \Phi(z) &= k' \bar{A}_1(z, \bar{z}_1) + s' B_1(z, z_1) \text{ в } S^+, \\ \Phi(z) &= k'_1 A_1(z, z_1) + s'_1 \bar{B}_1(z, \bar{z}_1) \text{ в } S^-, \end{aligned} \quad (3.1)$$

де

$$\begin{aligned}A_1(z, z_1) &= -\frac{X_1 + iY_1}{2\pi(1+\kappa_1)(z-z_1)}, \quad B_1(z, z_1) = \\ &= \frac{X_1 - iY_1}{2\pi(1+\kappa_1)} \frac{z_1 - \bar{z}_1}{(z - \bar{z}_1)^2} - \frac{\kappa_1(X_1 + iY_1)}{2\pi(1+\kappa_1)(z - \bar{z}_1)}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$n' = rm' = -rk' = rs' = r\kappa'_1 = m'_1 = rk'_1 = -rs'_1 = \frac{r}{1+r}.$$

Накладанням розв'язків (2.1) і (3.1) можна одержати розв'язок деяких інших задач. Наведемо прості приклади.

а) Стиснення півплощин двома зосередженими силами

Нехай в точці $z_0(0, -h)$ півплощини S^- прикладена сила $P(0, p)$, а в точці $z_1(0, +h)$ півплощини S^+ — сила $P_1(0, -p)$, рівна і протилежна силі P . Тоді, враховуючи, що $X = X_1 = 0$, $Y = -Y_1 = p$, $z_0 = \bar{z}_1 = -ih$, накладанням розв'язків (2.1) і (3.1) одержимо

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= -\frac{ip_0}{z+ih} + \frac{2h(p_1-p_0)}{(1+r)(z-ih)^2} + i\frac{(1+\kappa_1)p_1+(r-\kappa)p_0}{(1+r)(z-ih)} \text{ в } S^-, \\ \Phi(z) &= -\frac{2hp_0}{(z-ih)^2} - \frac{i\kappa p_0}{z-ih} - \frac{2h(rp_0+p_1)}{(1+r)(z+ih)^2} + i\frac{(r\kappa-1)p_0+(1+\kappa_1)p_1}{(1+r)(z+ih)} \text{ в } S^+, \\ \Phi_1(z) &= -\frac{2hp_1}{(z+ih)^2} + \frac{i\kappa_1 p_1}{z+ih} - \frac{2h(rp_0+p_1)}{(1+r)(z-ih)^2} + i\frac{(r-\kappa_1)p_1-r(1+\kappa)p_0}{(1+r)(z-ih)} \text{ в } S^-, \\ \Phi_1(z) &= \frac{ip_1}{z-ih} + \frac{2rh(p_0-p_1)}{(1+r)(z+ih)^2} + i\frac{(r\kappa_1-1)p_1-r(1+\kappa)p_0}{(1+r)(z+ih)} \text{ в } S^+, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де

$$p_0 = \frac{p}{2\pi(1+\kappa)}, \quad p_1 = \frac{p}{2\pi(1+\kappa_1)}.$$

Компоненти напружень в кожній з півплощин знайдемо за формулами (1.1), (1.2) і (3.3). В окремому випадку на L одержимо формулу

$$Y_y^+ = Y_y^- = \frac{rp_0+p_1}{1+r} \frac{4h(x^2-h^2)}{(x^2+h^2)^2} - \frac{hp}{\pi(x^2+h^2)}. \quad (3.4)$$

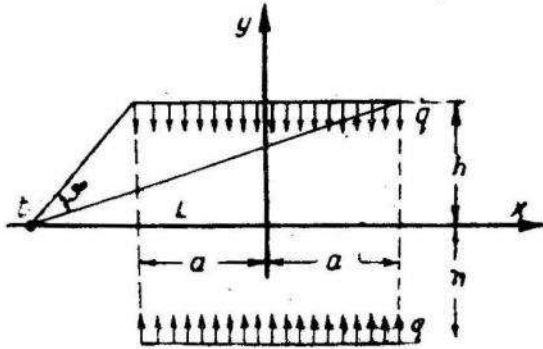
Якщо покласти в формулах (3.3) $p_1=0$ або $p_0=0$, одержимо розв'язок у випадку стиснення півплощин одною силою, перпендикулярною до L .

б) Стиснення півплощини рівномірно розподіленими силами

Розглянемо стиснення півплощини силами сталої інтенсивності q на відрізках прямої, симетричних відносно координатних осей (рис.).

Вираз функцій $\Phi(z)$ і $\Phi_1(z)$ одержимо з (2.1) і (3.1), якщо покласти

$$X = X_1 = 0, z_0 = -ih + \xi, z_1 = ih + \xi, Y = -Y_1 = q d\xi$$



і проінтегрувати по ξ з границях від $-a$ до $+a$. Однак в даному випадку краще скористатися формулами (3.3), на підставі яких після введення параметра та інтегрування по ньому одержимо

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & -iq_0 \ln \frac{z+ih+a}{z+ih-a} + \\ & + \frac{4ah(q_1-q_0)}{(1+r)[(z-ih)^2-a^2]} + \\ & + i \frac{(1+z_1)q_1+(r-z)q_0}{1+r} \ln \frac{z-ih+a}{z-ih-a} \text{ в } S^-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & -\frac{4ahq_0}{(z-ih)^2-a^2} - i x q_0 \ln \frac{z-ih+a}{z-ih-a} - \frac{4ah(rq_0+q_1)}{(1+r)[(z+ih)^2-a^2]} + \\ & + i \frac{(rx-1)q_0+(1+z_1)q_1}{1+r} \ln \frac{z+ih+a}{z+ih-a} \text{ в } S^+, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = & -\frac{4ahq_1}{(z+ih)^2-a^2} + i z_1 q_1 \ln \frac{z+ih+a}{z+ih-a} - \frac{4ah(rq_0+q_1)}{(1+r)[(z-ih)^2-a^2]} + \\ & + i \frac{(r-z_1)q_1-r(1+z)q_0}{1+r} \ln \frac{z-ih+a}{z-ih-a} \text{ в } S^-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = & \frac{4arh(q_0-q_1)}{(1+r)[(z+ih)^2-a^2]} + i q_1 \ln \frac{z-ih+a}{z-ih-a} + \\ & + i \frac{(rx_1-1)q_1-r(1+z)q_0}{1+r} \ln \frac{z+ih+a}{z+ih-a} \text{ в } S^+. \end{aligned}$$

Для тиску на L одержимо таку формулу

$$Y_y^+ = Y_y^- = \frac{rq_0+q_1}{1+r} \frac{8ah(x^2-h^2-a^2)}{(x^2+h^2-a^2)^2+4a^2h^2} - \frac{q\varphi}{\pi},$$

де φ — кут, під яким видно із точок t осі OX відрізки, навантажені зусиллям q (рис.), $2\pi q_1(1+z_1) = 2\pi q_0(1+x) = q$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, Москва, 1954, изд. 4.

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Л. Т. БЕРЕЖНИЦЬКИЙ

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ КРУГЛИХ ТА КІЛЬЦЕВИХ ПЛИТ З КОНЦЕНТРИЧНИМИ РЕБРАМИ ЖОРСТКОСТІ

З метою збільшення міцності та жорсткості круглих та кільцевих плит часто практикують підсилення їх концентричними тонкими ребрами.

В даній роботі виведені рівняння частот для несиметричних вільних коливань круглих та кільцевих плит, підсилених пружними ребрами, а також детально досліджено вплив ребра на частоту коливань круглої плити з жорстко закріпленим краєм. При цьому вважається, що маса ребер мала порівняно з масою плити, а тому нею можна знехтувати.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо вільні коливання круглої плити радіуса R_1 , підсиленої одним тонким пружним ребром по контуру $r=R_1$ і другим концентричним ребром радіуса $R_2 < R_1$. Ці ребра мають постійний поперечний переріз, одна із головних осей інерції якого лежить в серединній площині плити. Осьова лінія внутрішнього ребра T розбиває область плити на дві частини $S_1 (r \leq R_2)$ і $S_2 (R_2 < r \leq R_1)$ з відповідними циліндричними жорсткостями на згин $D_i = E_i h_i^3 / 12(1 - \nu_i^2)$, ($i=1,2$).

Прогини плити в областях S_i матимуть відповідно вигляд (див. [1]):

$$W_i(r, \theta, t) = w_i(r, \theta) \cos \omega t, \quad (i=1,2), \quad (1.1)$$

де

$$w_1(r, \theta) = [A_{1n} J_n(k_1 r) + C_{1n} I_n(k_1 r)] \cos n\theta, \quad (1.2)$$

$$w_2(r, \theta) = [A_{2n} J_n(k_2 r) + B_{2n} N_n(k_2 r) + C_{2n} I_n(k_2 r) + D_{2n} K_n(k_2 r)] \cos n\theta.$$

Тут $I_n(k_i r)$, $K_n(k_i r)$ і $J_n(k_i r)$, $N_n(k_i r)$ — функції Бесселя відповідно до уявного та дійсного аргументів; $k_i^2 = \omega^2 m_i h_i / D_i$; ω — кругова частота коливань; m_i і h_i — маса, віднесена до одиниці площі та товщина плити в області S_i ($i=1,2$); r, θ — полярні координати.

Якщо знехтувати масою ребер, то граничні умови спаю плити з тонким ребром матимуть вигляд (див. [2]):

При $r=R$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} (\delta_1 + \delta_2 + \nu_1 - \lambda \nu_2) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} + (\delta_1 + \nu_1 - \lambda \nu_2) \frac{\partial w_1}{\partial r} - \delta_2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial r \partial \theta^2} + R \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} - \lambda R \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} = 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\delta_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} - (\delta_2 + \nu_1 - 3 - \lambda \nu_2 + 3\lambda) w_1 \right] + \lambda R^2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial r^3} - R^2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial r^3} + \\ + \lambda R \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} - R \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[(\delta_1 + \delta_2 + \nu_1 - 2 - \lambda \nu_2 + 2\lambda) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} + (1 - \lambda) w_1 \right] = 0, \quad (1.3) \end{aligned}$$

$$w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r},$$

де

$$\delta_1 = \frac{A}{RD_1}, \quad \delta_2 = \frac{C}{RD_1}, \quad \lambda = \frac{D_2}{D_1},$$

ν_i —коефіцієнт Пуассона в області S_i ; A і C —сталі жорсткості на згин та кручення внутрішнього ребра¹.

Щоб записати граничні умови на зовнішньому контурі плити $r=R_1$, розглянемо окремо два випадки:

а) Підсилений край плити вільний. В цьому випадку одержимо такі граничні умови:

При $r=R_1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} (\delta_1' + \delta_2' + \nu_2) \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[(\delta_1' + \nu_2) w_2 - \delta_2' \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \right] + R_1 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} = 0, \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\delta_1' \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} - (\delta_2' + \nu_2 - 3) w_2 \right] - R_1 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} - R_1^2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial r^3} + \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left[(\delta_1' + \delta_2' + \nu_2 - 2) \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} + w_2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

де $\delta_1' = A'/R_1 D_2$, $\delta_2' = C'/R_1 D_2$; A' і C' —постійні за величиною жорсткості на згин та кручення зовнішнього ребра.

б) Плита оперта вздовж зовнішнього краю. В цьому випадку граничні умови (1.4) заміняться такими:

При $r=R_1$

$$\begin{aligned} w_2 = 0, \\ R_1 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + (\delta_1' + \nu_2) \frac{\partial w_2}{\partial r} - \delta_2' \frac{\partial^3 w_2}{\partial r \partial \theta^2} = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. РІВНЯННЯ ЧАСТОТ ДЛЯ ВІЛЬНОЇ ПЛИТИ

Підставляючи (1.2) в (1.3)—(1.4) і прирівнюючи до нуля визначник системи рівнянь для коефіцієнтів A_{in} , B_{2n} , C_{in} , D_{2n} , одержимо після деяких перетворень таке рівняння частот:

$$\begin{vmatrix} S_{11}(x) & S_{12}(x) & \lambda S_{13}(x_2) & \lambda S_{14}(x_2) & \lambda S_{15}(x_2) & \lambda S_{16}(x_2) \\ S_{21}(x) & S_{22}(x) & \lambda S_{23}(x_2) & \lambda S_{24}(x_2) & \lambda S_{25}(x_2) & \lambda S_{26}(x_2) \\ -J_n(x) & -I_n(x) & J_n(x_2) & N_n(x_2) & I_n(x_2) & K_n(x_2) \\ S_{41}(x) & S_{42}(x) & S_{43}(x_2) & S_{44}(x_2) & S_{45}(x_2) & S_{46}(x_2) \\ 0 & 0 & S_{53}(x_2 \eta) & S_{54}(x_2 \eta) & S_{55}(x_2 \eta) & S_{56}(x_2 \eta) \\ 0 & 0 & S_{63}(x_2 \eta) & S_{64}(x_2 \eta) & S_{65}(x_2 \eta) & S_{66}(x_2 \eta) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.1)$$

де

$$S_{11}(x) = -(x^2 + a)J_n(x) - bxJ_{n+1}(x),$$

$$S_{12}(x) = (x^2 - a)I_n(x) + bxI_{n+1}(x),$$

¹ Для тонких ребер з того ж матеріалу, що і плита, врахування їх маси дає поправку на величину частоти першої форми коливань, яка перевищує 2% [3].

$$\begin{aligned}
S_{13}(x_2) &= [x_2^2 - n(n-1)]J_n(x_2) - x_2 J_{n+1}(x_2), \\
S_{14}(x_2) &= [x_2^2 - n(n-1)]N_n(x_2) - x_2 N_{n+1}(x_2), \\
S_{15}(x_2) &= -[x_2^2 + n(n-1)]I_n(x_2) + x_2 I_{n+1}(x_2), \\
S_{16}(x_2) &= -[x_2^2 + n(n-1)]K_n(x_2) - x_2 K_{n+1}(x_2), \\
S_{21}(x) &= (c + nx^2)J_n(x) + (xd - x^3)J_{n+1}(x), \\
S_{22}(x) &= (c - nx^2)I_n(x) - (xd + x^3)I_{n+1}(x), \\
S_{23}(x_2) &= [(n-1)^2 - x_2^2]nJ_n(x_2) + [x_2^2 - (n^2 + 1)]x_2 J_{n+1}(x_2), \\
S_{24}(x_2) &= [(n-1)^2 - x_2^2]nN_n(x_2) + [x_2^2 - (n^2 + 1)]x_2 N_{n+1}(x_2), \\
S_{25}(x_2) &= [(n-1)^2 + x_2^2]nI_n(x_2) + (x_2^2 + n^2 + 1)x_2 I_{n+1}(x_2), \\
S_{26}(x_2) &= [(n-1)^2 + x_2^2]nK_n(x_2) - (x_2^2 + n^2 + 1)x_2 K_{n+1}(x_2), \\
S_{41}(x) &= -xJ_{n+1}(x), \quad S_{42}(x) = -xI_{n+1}(x), \\
S_{43}(x_2) &= x_2 J_{n+1}(x_2), \quad S_{44}(x_2) = x_2 N_{n+1}(x_2), \\
S_{45}(x_2) &= -x_2 I_{n+1}(x_2), \quad S_{46}(x_2) = x_2 K_{n+1}(x_2), \\
S_{53}(x_2\eta) &= -(x_2^2\eta^2 + a')J_n(x_2\eta) - b'x_2\eta J_{n+1}(x_2\eta), \\
S_{54}(x_2\eta) &= -(x_2^2\eta^2 + a')N_n(x_2\eta) - b'x_2\eta N_{n+1}(x_2\eta), \\
S_{55}(x_2\eta) &= (x_2^2\eta^2 - a')I_n(x_2\eta) + b'x_2\eta I_{n+1}(x_2\eta), \\
S_{56}(x_2\eta) &= (x_2^2\eta^2 - a')K_n(x_2\eta) - b'x_2\eta K_{n+1}(x_2\eta), \\
S_{63}(x_2\eta) &= (x_2^2\eta^2 n + c')J_n(x_2\eta) + (d' - x_2^2\eta^2)x_2\eta J_{n+1}(x_2\eta), \\
S_{64}(x_2\eta) &= (c' + nx_2^2\eta^2)N_n(x_2\eta) + (d' - x_2^2\eta^2)x_2\eta N_{n+1}(x_2\eta), \\
S_{65}(x_2\eta) &= (c' - nx_2^2\eta^2)I_n(x_2\eta) - (d' + x_2^2\eta^2)x_2\eta I_{n+1}(x_2\eta), \\
S_{66}(x_2\eta) &= (c' - nx_2^2\eta^2)K_n(x_2\eta) + (d' + x_2^2\eta^2)x_2\eta K_{n+1}(x_2\eta), \\
a &= n^2(\delta_1 + \delta_2 + \nu_1 - 1 - \lambda\nu_2) - n(\delta_1 + \nu_1 - \lambda\nu_2 + \delta_2 n^2 - 1), \\
b &= \delta_1 + \nu_1 - \lambda\nu_2 + \delta_2 n^2 - 1, \\
c &= n^4\delta_1 + n^2(\delta_2 + \nu_1 - 1 - \lambda\nu_2 + 3\lambda) - n^3(\delta_1 + \delta_2 + \nu_1 - 1 - \lambda\nu_2 + 2\lambda) - \lambda n \\
d &= n^2(\delta_1 + \delta_2 + \nu_1 - 1 - \lambda\nu_2 + 2\lambda) + \lambda, \\
a' &= n^2(\delta'_1 + \delta'_2 + \nu_2 - 1) - n(\delta'_1 + \nu_2 + \delta'_2 n^2 - 1), \\
b' &= \delta'_1 + \nu_2 + \delta'_2 n^2 - 1, \\
c' &= n^4\delta'_1 + n^2(\delta'_2 + \nu_2 - 1) - n^3(\delta'_1 + \delta'_2 + \nu_2 - 1), \\
d' &= n^2(\delta'_1 + \delta'_2 + \nu_2 - 1), \\
x &= k_1 R, \quad x_2 = k_2 R, \quad \eta = R_1/R.
\end{aligned}$$

Частота коливань p визначається за формулою:

$$p = \frac{x^2 \eta^2}{2\pi R_1^2} \sqrt{\frac{D_1}{m_1 h_1}} = \frac{x^2 \eta^2}{2\pi R_1^2} \sqrt{\frac{D_2}{m_2 h_2}}. \quad (2.2)$$

При часткових значеннях параметрів задачі з (2.1) легко одержуються рівняння частот для ряду важливих для практики випадків. Так, наприклад:

а) При $\delta'_1 = \delta'_2 = 0$, $\lambda = 1$ і $k_1 = k_2$, $n=0$ одержуємо рівняння частоти для симетричних коливань однорідної круглої плити постійної товщини, підсиленої одним концентричним ребром жорсткості по контуру $r=R$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x\eta} J_1(x) I_1(x) + [N_0^*(x\eta) + BK_1(x\eta) J_1(x\eta)] I_1^2(x) + \\ & + [M_0^*(x\eta) - BJ_1(x\eta) I_1(x\eta)] \cdot \left[\frac{2}{\delta_1} + K_1(x) I_1(x) - \frac{\pi}{2} J_1(x) N_1(x) \right] + \\ & + \frac{\pi}{2} [K_0^*(x\eta) - BN_1(x\eta) I_1(x\eta)] J_1^2(x) = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де

$$\begin{aligned} B &= 2(1 - \nu_1)/x\eta, \\ N_0^*(x\eta) &= K_0(x\eta) J_1(x\eta) - J_0(x\eta) K_1(x\eta), \\ M_0^*(x\eta) &= J_0(x\eta) I_1(x\eta) + J_1(x\eta) I_0(x\eta), \\ K_0^*(x\eta) &= N_0(x\eta) I_1(x\eta) + N_1(x\eta) I_0(x\eta). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Якщо покласти в (2.3) $\eta=1$, одержимо частотне рівняння для випадку, коли ребро підсилює вільний край плити

$$M_0^*(x) + \frac{2(\delta_1 + \nu_1 - 1)}{x} J_1(x) I_1(x) = 0. \quad (2.5)$$

б) При $\lambda = \infty$ одержимо рівняння частот для вільної кільцевої плити, краї якої підсилені тонкими пружними ребрами:

$$\begin{vmatrix} S_{11}^*(x_2) & S_{12}^*(x_2) & S_{13}^*(x_2) & S_{14}^*(x_2) \\ S_{21}^*(x_2) & S_{22}^*(x_2) & S_{23}^*(x_2) & S_{24}^*(x_2) \\ S_{53}^*(x_2\eta) & S_{54}^*(x_2\eta) & S_{55}^*(x_2\eta) & S_{56}^*(x_2\eta) \\ S_{63}^*(x_2\eta) & S_{64}^*(x_2\eta) & S_{65}^*(x_2\eta) & S_{66}^*(x_2\eta) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.6)$$

де

$$\begin{aligned} S_{11}^*(x_2) &= (x_2^2 - a^*) J_n(x_2) - b^* x_2 J_{n+1}(x_2), \\ S_{12}^*(x_2) &= (x_2^2 - a^*) N_n(x_2) - b^* x_2 N_{n+1}(x_2), \\ S_{13}^*(x_2) &= -(x_2^2 + a^*) I_n(x_2) + b^* x_2 I_{n+1}(x_2), \\ S_{14}^*(x_2) &= -(x_2^2 + a^*) K_n(x_2) - b^* x_2 K_{n+1}(x_2), \\ S_{21}^*(x_2) &= (c^* - n x_2^2) J_n(x_2) + (d^* + x_2^2) x_2 J_{n+1}(x_2), \end{aligned}$$

$$S_{22}^*(x_2) = (c^* - nx_2^2)N_n(x_2) + (d^* + x_2^2)x_2 N_{n+1}(x_2),$$

$$S_{23}^*(x_2) = (c^* + nx_2^2)I_n(x_2) - (d^* - x_2^2)x_2 I_{n+1}(x_2),$$

$$S_{24}^*(x_2) = (c^* + nx_2^2)K_n(x_2) + (d^* - x_2^2)x_2 K_{n+1}(x_2),$$

$$a^* = n^2(\delta_1^* + \delta_2^* - \nu_2 + 1) - n(\delta_1^* - \nu_2 + \delta_2^* n^2 + 1),$$

$$b^* = \delta_1^* - \nu_2 + n^2 \delta_2^* + 1,$$

$$c^* = n^4 \delta_1^* + n^2(\delta_2^* + 1 - \nu_2) - n^3(\delta_1^* + \delta_2^* + 1 - \nu_2),$$

$$d^* = n^2(\delta_1^* + \delta_2^* + 1 - \nu_2),$$

$$\delta_1^* = \frac{A}{RD_2}, \quad \delta_2^* = \frac{C}{RD_2}.$$

3. РІВНЯННЯ ЧАСТОТ ДЛЯ ОПЕРТОЇ ПЛИТИ

Для опертої по контуру $r=R_1$ плити можна одержати рівняння частот, замінюючи в (2.1) останні два рядки такими:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & J_n(x_2\eta) & N_n(x_2\eta) & I_n(x_2\eta) & K_n(x_2\eta) \\ 0 & 0 & S_{63}^*(x_2\eta) & S_{64}^*(x_2\eta) & S_{65}^*(x_2\eta) & S_{66}^*(x_2\eta) \end{vmatrix},$$

$$S_{63}^*(x_2\eta) = -J_{n+1}(x_2\eta), \quad S_{64}^*(x_2\eta) = -N_{n+1}(x_2\eta),$$

$$S_{65}^*(x_2\eta) = I_{n+1}(x_2\eta) + \frac{2x_2\eta}{b'} I_n(x_2\eta),$$

$$S_{66}^*(x_2\eta) = -K_{n+1}(x_2\eta) + \frac{2x_2\eta}{b'} K_n(x_2\eta).$$

Якщо в одержаному таким чином рівнянні частот давати параметрам задачі деякі часткові значення, без затруднень можна отримати рішення для цілого ряду практичних задач. Так, наприклад:

а) При $\delta_1' = \delta_2' = 0$, $\lambda = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $k_1 = k_2$ і $n=0$ одержимо частотне рівняння для симетричних коливань однорідної круглої плити постійної товщини, підсиленої одним концентричним ребром жорсткості по контуру $r=R$:

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{x\eta} J_0(x)I_1(x) + [N_0^*(x\eta) - A_0 J_0(x\eta)K_0(x\eta)]I_1^2(x) + \\ & + \frac{\pi}{2} [K_0^*(x\eta) - A_0 N_0(x\eta)I_0(x\eta)]J_1^2(x) + \\ & + \left[\frac{2}{\delta_1} + K_1(x)I_1(x) - \frac{\pi}{2} J_1(x)N_1(x) \right] \cdot [M_0^*(x\eta) - A_0 J_0(x\eta)J_0(x\eta)] = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

де $A_0 = 2x\eta/(1-\nu)$.

б) При $\delta_1' = \delta_2' = 0$ і $\eta=1$ отримаємо рівняння частот для випадку, коли однорідна кругла плита, підсилена одним тонким ребром по краю $r=R_1$

$$2xJ_n(x)I_n(x) + (\delta_1 + n^2\delta_2 + \nu_1 - 1)M_n^*(x) = 0, \quad (3.2)$$

де

$$M_n^*(x) = J_n(x)I_{n+1}(x) + J_{n+1}(x)I_n(x).$$

в) При $\lambda = \infty$, $\delta'_1 = \delta'_2 = 0$ одержимо рівняння частот для шарнірно-опертої круглої плити з центральним отвором, край якого підсилений тонким кільцем. Це рівняння можна одержати також, якщо останні два рядки в (2.6) замінити такими:

$$\begin{vmatrix} J_n(x_2\eta) & N_n(x_2\eta) & I_n(x_2\eta) & K_n(x_2\eta) \\ S_{63}^*(x_2\eta) & S_{64}^*(x_2\eta) & S_{65}^0(x_2\eta) & S_{66}^0(x_2\eta) \end{vmatrix},$$

$$S_{65}^0(x_2\eta) = I_{n+1}(x_2\eta) - \frac{2x_2\eta}{1-\nu_2} I_n(x_2\eta),$$

$$S_{66}^0(x_2\eta) = -K_{n+1}(x_2\eta) - \frac{2x_2\eta}{1-\nu_2} K_n(x_2\eta).$$

г) Для жорстко закріпленої по краю $r=R_1$ плити ($\delta'_1 = \delta'_2 = \infty$) з одним тонким ребром радіуса $R < R_1$ одержимо рівняння частот з (2.1), замінюючи там останні рядки такими:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & J_n(x_2\eta) & N_n(x_2\eta) & I_n(x_2\eta) & K_n(x_2\eta) \\ 0 & 0 & J_{n+1}(x_2\eta) & N_{n+1}(x_2\eta) & -I_{n+1}(x_2\eta) & K_{n+1}(x_2\eta) \end{vmatrix}.$$

д) Для симетричних коливань ($n=0$) однорідної ($\lambda=1$, $k_1=k_2$) круглої плити з жорстко закріпленим краєм ($\delta'_1 = \delta'_2 = \infty$) та з підкріплюючим ребром по контуру $R < R_1$ одержимо рівняння частот у вигляді

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{x\eta} J_1(x) I_1(x) + I_1^2(x) N_0^*(x\eta) + \frac{\pi}{2} J_1^2(x) K_0^*(x\eta) + \\ & + M_0^*(x\eta) \left\{ \frac{2}{\delta_1} + K_1(x) I_1(x) - \frac{\pi}{2} J_1(x) N_1(x) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

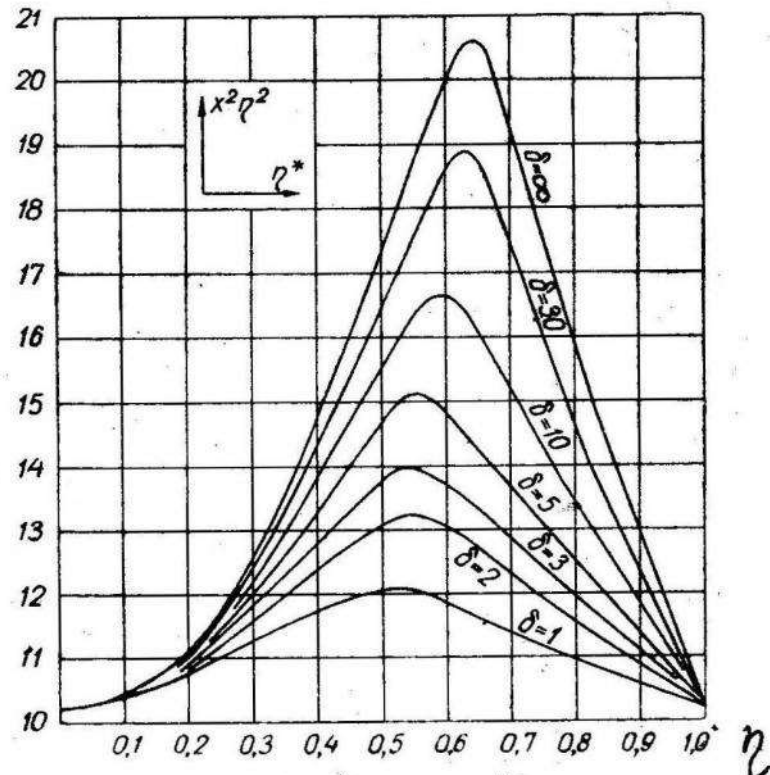
4. ВПЛИВ КОНЦЕНТРИЧНОГО РЕБРА НА ЧАСТОТУ КОЛИВАНЬ ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЇ КРУГЛОЇ ПЛИТИ

Для дослідження впливу підкріплюючого ребра ($R < R_1$) на частоту вільних симетричних ($n=0$) коливань круглої плити з жорстко закріпленим краєм було підраховано перші корені $x\eta$ рівняння (3.3) для різних значень жорсткості підкріплюючого ребра та для різних його положень.

На рисунку наведені графіки величин $x^2\eta^2$, через які визначається частота коливань плити за формулою (2.2) у залежності від відношення $\eta^* = \frac{R}{R_1}$ та для різних значень параметра $\delta = \delta_1\eta^* = \frac{A}{R_1 D_1}$, характеризуючого жорсткість на згин підкріплюючого ребра.

Графіки на рис. показують, що із зростанням відносної жорсткості ребра δ частота нижчої форми коливань плити збільшується, причому найбільшу частоту можна досягти, якщо радіус ребра R дорівнює $0,5 \div 0,65 R_1$. Так, наприклад, якщо підкріплююче ребро має прямокутний поперечний перетин зі сторонами b і h при $\frac{b}{R} = 0,143$, $\frac{R}{R_1} = 0,55$, $\frac{h}{h_1} = 3,5$ та $\nu = 0,3$, то $\delta = \frac{b}{R} \cdot \frac{R}{R_1} (1 - \nu^2) \left(\frac{h^3}{h_1^3} - 1 \right) = 3$, і з графіка знаходимо, що $x^2\eta^2 = 14$. В цьому випадку частота плити, підкріпленої ребром, на

37,1% більше, ніж частота непідкріпленої плити, для якої $x^2\eta^2 = 10,21$. Оскільки ми тут не врахували маси ребра, то графіки на рис. визначають верхні границі відповідних частот.



На закінчення відмітимо, що за допомогою граничних умов (1.3) та (1.4) або (1.5) можна цілком аналогічно вивести рівняння частот для випадку, коли кругла або кільцева плита підкріплена більш ніж двома ребрами жорсткості.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. П. Филиппов. Колебания упругих систем, Изд-во АН УССР, 1956.
2. Н. П. Флейшман. Граничні умови для оболонки з отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем. Прикладна механіка, т. VII, вип. 1, 1961.
3. Н. П. Флейшман, О. М. Шаблій. Вплив концентричних ребер на частоту вільних коливань круглих та кільцевих плит. Прикладна механіка, т. VII, вип. 3, 1961.

Т. Л. МАРТИНОВИЧ

ДО ПИТАННЯ ПРО ЗГИН АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИНОК З ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

Задача згину анізотропної пластинки, границя якої підкріплена тонким ізотропним кільцем сталого перерізу, зводиться, як відомо [1], до визначення двох аналітичних функцій $\varphi(z_1)$ і $\psi(z_2)$ з таких граничних умов:

$$2\operatorname{Re} \left\{ \frac{P_1}{\mu_1} \varphi(z_1) + \frac{P_2}{\mu_2} \psi(z_2) \right\} = -I_1^0(s) - C'x + C'_1, \quad (1)$$

$$2\operatorname{Re} \{ q_1 \varphi(z_1) + q_2 \psi(z_2) \} = I_2^0(s) + C'y - C'_2;$$

$$2\operatorname{Re} \{ \varphi(z_1) + \psi(z_2) \} = -Q_{0y} - \int_0^s \left[\left(\frac{1}{A} \dot{x}^2 + \frac{1}{C} \dot{y}^2 \right) L_y + \dot{x} \dot{y} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) L_x \right] ds, \quad (2)$$

$$2\operatorname{Re} \{ \mu_1 \varphi(z_1) + \mu_2 \psi(z_2) \} = Q_{0x} + \int_0^s \left[\left(\frac{1}{A} \dot{y}^2 + \frac{1}{C} \dot{x}^2 \right) L_x + \dot{x} \dot{y} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) L_y \right] ds.$$

Тут позначено:

A і C — відповідно жорсткості кільця на згин і кручення;

$$z_1 = x + \mu_1 y, \quad z_2 = x + \mu_2 y, \quad \dot{x} = \frac{dx}{ds}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{ds};$$

p_1, p_2, q_1, q_2 — відомі сталі величини, залежать від пружних характеристик пластинки;

$$L_x = L_{0x} + V_{0z} y_0 - V_{0z} y + I_2^0(s) - I_2(s),$$

$$L_y = L_{0y} - V_{0z} x_0 + V_{0z} x - I_1^0(s) + I_1(s);$$

$I_1^0(s)$ і $I_2^0(s)$ — невідомі функції;

$$I_1(s) = \int_0^s (m(s) dy + f dx), \quad I_2(s) = \int_0^s (-m(s) dx + f dy),$$

де $f = \int_0^s p(s) ds$ — відомі функції зовнішніх зусиль, прикладених вздовж підкріплюючого кільця; $Q_{0x}, Q_{0y}, L_{0x}, L_{0y}, V_{0z}, C', C'_1, C'_2$ — дійсні сталі величини.

Виявляється, що для ефективного розв'язання конкретних задач граничні умови (1) і (2) необхідно піддати дальшим суттєвим перетворенням.

Нехай $A = \alpha C$, і з рівностей (1) і (2) виключимо невідомі функції $I_1^0(s)$ і $I_2^0(s)$, в результаті одержимо:

$$\begin{aligned} & 2\operatorname{Re}\left\{\frac{d}{ds}[\varphi(z_1) + \psi(z_2)]\right\} + \frac{1}{A}(\dot{x}^2 + \alpha\dot{y}^2)\left\{2\operatorname{Re}\left[\frac{p_1}{\mu_1}\varphi(z_1) + \frac{p_2}{\mu_2}\psi(z_2)\right] + \right. \\ & \left. + I_1(s) + Cx - C_1\right\} + \frac{(\alpha-1)}{A}\dot{x}\dot{y}\left\{2\operatorname{Re}[q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2)] - I_2(s) - Cy - C_2\right\} = 0, \\ & 2\operatorname{Re}\left\{\frac{d}{ds}[\mu_1\varphi(z_1) + \mu_2\psi(z_2)]\right\} - \frac{1}{A}(\dot{y}^2 + \alpha\dot{x}^2)\left\{2\operatorname{Re}[q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2)] - \right. \\ & \left. - I_2(s) - Cy - C_2\right\} - \frac{(\alpha-1)}{A}\dot{x}\dot{y}\left\{2\operatorname{Re}\left[\frac{p_1}{\mu_1}\varphi(z_1) + \frac{p_2}{\mu_2}\psi(z_2)\right] + I_1(s) + Cx - C_1\right\} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де позначено:

$$C'_1 - L_{oy} + V_{oz}x_o = C_1, \quad C'_2 - L_{ox} - V_{oz}y_o = C_2, \quad V_{oz} + C' = C.$$

Якщо область, зайнята пластинкою, однозв'язна, сталі C_1 , C_2 і C можна, очевидно, покласти рівними нулю, а у випадку багатозв'язної області на одному з контурів можна покласти їх рівними нулю, на інших же визначити з умов задачі.

Введемо далі дві нові функції P_1 і Q_1 рівностями

$$\begin{aligned} P_1(z_1, z_2) &= 2\operatorname{Re}\left\{\frac{p_1}{\mu_1}\varphi(z_1) + \frac{p_2}{\mu_2}\psi(z_2)\right\} + I_1(s) + Cx - C_1, \\ Q_1(z_1, z_2) &= 2\operatorname{Re}[q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2)] - I_2(s) - Cy - C_2. \end{aligned} \quad (4)$$

Враховуючи рівності (4), контурні умови (3) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} & 2\operatorname{Re}\left\{\frac{d}{ds}[\varphi(z_1) + \psi(z_2)]\right\} + \frac{1}{A}(\dot{x}^2 + \alpha\dot{y}^2)P_1(z_1, z_2) + \frac{\alpha-1}{A}\dot{x}\dot{y}Q_1(z_1, z_2) = 0, \\ & 2\operatorname{Re}\left\{\frac{d}{ds}[\mu_1\varphi(z_1) + \mu_2\psi(z_2)]\right\} - \frac{1}{A}(\dot{y}^2 + \alpha\dot{x}^2)Q_1(z_1, z_2) - \frac{\alpha-1}{A}\dot{x}\dot{y}P_1(z_1, z_2) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Нехай функція

$$z = \omega(\zeta), \quad \zeta = \rho e^{i\theta}, \quad (6)$$

конформно перетворює область зміни z , зайняту пластинкою, на кругову радіуса ρ ; тоді, очевидно, функції

$$z_1 = \omega_1(\zeta) \text{ і } z_2 = \omega_2(\zeta), \quad (7)$$

які одержуються із функції (6) шляхом афінного перетворення за відомими формулами, будуть також конформно переводити відповідні області зміни z_1 і z_2 на дану кругову область.

Якщо ввести позначення:

$$\begin{aligned} \varphi[\omega_1(\zeta)] &= \Phi(\zeta), \quad \psi[\omega_2(\zeta)] = \Psi(\zeta), \\ P_1[\omega_1(\zeta), \omega_2(\zeta)] &= P(\zeta), \quad Q_1[\omega_1(\zeta), \omega_2(\zeta)] = Q(\zeta), \\ I_1(s) &= I_1^*(\theta), \quad I_2(s) = I_2^*(\theta), \end{aligned}$$

то контурні умови (5) і (4) в перетвореній області зведуться до такого вигляду:

$$2\operatorname{Re}\{i\sigma\Phi'(\sigma) + i\sigma\Psi'(\sigma)\} + \frac{1}{A}(\dot{x}^2 + \alpha\dot{y}^2)\rho|\omega'(\sigma)|P(\sigma) + \\ + \frac{\alpha-1}{A}\dot{x}\dot{y}\rho|\omega'(\sigma)|Q(\sigma) = 0, \quad (8)$$

$$2\operatorname{Re}\{i\mu_1\sigma\Phi'(\sigma) + i\mu_2\sigma\Psi'(\sigma)\} - \frac{1}{A}(\dot{y}^2 + \alpha\dot{x}^2)\rho|\omega'(\sigma)|Q(\sigma) - \\ - \frac{\alpha-1}{A}\dot{x}\dot{y}\rho|\omega'(\sigma)|P(\sigma) = 0,$$

$$2\operatorname{Re}\left\{\frac{p_1}{\mu_1}\Phi(\sigma) + \frac{p_2}{\mu_2}\Psi(\sigma)\right\} = P(s) - I_1^*(\vartheta) - \frac{1}{2}C(\omega(\sigma) + \overline{\omega(\sigma)}) + C_1, \quad (9)$$

$$2\operatorname{Re}\{q_1\Phi(\sigma) + q_2\Psi(\sigma)\} = Q(\sigma) + I_2^*(\vartheta) - \frac{i}{2}C(\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}) + C_2,$$

де

$$\dot{x}^2 + \alpha\dot{y}^2 = \frac{1}{2}(\alpha + 1) + \frac{\alpha-1}{4\rho^2}\left[\frac{\sigma^2\omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} + \frac{\overline{\sigma^2\omega'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\right],$$

$$\dot{y}^2 + \alpha\dot{x}^2 = \frac{1}{2}(\alpha + 1) - \frac{\alpha-1}{4\rho^2}\left[\frac{\sigma^2\omega^1(\sigma)}{\omega^1(\sigma)} + \frac{\overline{\sigma^2\omega^1(\sigma)}}{\overline{\omega^1(\sigma)}}\right],$$

$$\dot{x}\dot{y} = \frac{i}{4\rho^2}\left[\frac{\sigma^2\omega^1(\sigma)}{\omega^1(\sigma)} - \frac{\overline{\sigma^2\omega^1(\sigma)}}{\overline{\omega^1(\sigma)}}\right].$$

$\sigma = \rho e^{i\vartheta}$ — значення ζ на границі області.

Отже, задача зводиться до визначення двох функцій $P(\sigma)$ і $Q(\sigma)$ з контурних умов (8). Знаючи функції $P(\sigma)$ і $Q(\sigma)$, з умови (9), яка аналогічна граничній умові пластинки без підкріплення, знаходимо функції напруження $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$.

Контурна умова (8) значно спрощується у випадку рівних жорсткостей кільця на згин і кручення; тоді $\alpha=1$ і рівність (8) прийме вигляд:

$$2\operatorname{Re}\{i\sigma\Phi'(\sigma) + i\sigma\Psi'(\sigma)\} + \frac{1}{A}\rho|\omega'(\sigma)|P(\sigma) = 0, \\ 2\operatorname{Re}\{i\mu_1\sigma\Phi'(\sigma) + i\mu_2\sigma\Psi'(\sigma)\} - \frac{1}{A}\rho|\omega'(\sigma)|Q(\sigma) = 0. \quad (10)$$

1. АНІЗОТРОПНА ПЛАСТИНКА З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ, ПІДКРІПЛЕНИМ ТОНКИМ ПРУЖНИМ КІЛЬЦЕМ

Для прикладу розглянемо безмежну анізотропну пластинку з еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким ізотропним кільцем сталого перерізу. Для простоти викладок, не обмежуючи загальності методу розв'язування, будемо вважати, що пластинка і кільце вільні від дії зовнішнього навантаження, а зусилля на безмежності обмежені.

Крім того, прийемо, що жорсткість кільця на згин рівна жорсткості кільця на кручення.

Функції

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad (0 < m < 1),$$

$$z_1 = \frac{1}{2} R \left\{ [(1+m) - i(1-m)\mu_1]\zeta + [(1+m) + i(1-m)\mu_1] \frac{1}{\zeta} \right\}, \quad (11)$$

$$z_2 = \frac{1}{2} R \left\{ [(1+m) - i(1-m)\mu_2]\zeta + [(1+m) + i(1-m)\mu_2] \frac{1}{\zeta} \right\}$$

переводять, очевидно, області зміни z , z_1 і z_2 на зовнішність одиничного кола.

Функції $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\xi)$ представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= K_1 \zeta + \Phi_0(\zeta), \\ \Psi(\zeta) &= K_2 \zeta + \Psi_0(\zeta), \end{aligned} \quad (12)$$

де

$$\Phi_0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{-n}, \quad \Psi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^{-n}.$$

Тут позначено:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2} R B_1^* [(1+m) - i\mu_1(1-m)], \\ K_2 &= \frac{1}{2} R (B_2^* + iC_2^*) [(1+m) - i\mu_2(1-m)]. \end{aligned}$$

Сталі B_1^* , B_2^* і C_2^* визначаються з системи рівнянь

$$\begin{aligned} M_x^\infty &= -2Re\{p_1 B_1^* + p_2(B_2^* + iC_2^*)\}, \\ M_y^\infty &= -2Re\{q_1 B_1^* + q_2(B_2^* + iC_2^*)\}, \\ H_{xy}^\infty &= -2Re\{r_1 B_1^* + r_2(B_2^* + iC_2^*)\}. \end{aligned}$$

Враховуючи рівності (11) і (12), граничні умови (9) і (10) наберуть вигляду

$$\begin{aligned} 2Re\{i\sigma\Phi'_0(\sigma) + i\sigma\Psi'_0(\sigma)\} + \frac{1}{A} R_0 P(\sigma) &= \frac{1}{A} (R_0 - |\omega'(\sigma)|) P(\sigma) + \\ &+ i(\bar{K}_1 + \bar{K}_2) \frac{1}{\sigma} - i(K_1 + K_2)\sigma; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} 2Re\{i\mu_1\sigma\Phi'_0(\sigma) + i\mu_2\sigma\Psi'_0(\sigma)\} - \frac{1}{A} R_0 Q(\sigma) &= -\frac{1}{A} (R_0 - |\omega'(\sigma)|) Q(\sigma) + \\ &+ i(\bar{\mu}_1 \bar{K}_1 + \bar{\mu}_2 \bar{K}_2) \frac{1}{\sigma} - i(\mu_1 K_1 + \mu_2 K_2)\sigma; \\ 2Re\left\{\frac{p_1}{\mu_1} \Phi_0(\sigma) + \frac{p_2}{\mu_2} \Psi_0(\sigma)\right\} &= P(\sigma) - \left(\frac{p_1}{\mu_1} K_1 + \frac{p_2}{\mu_2} K_2\right)\sigma - \\ &- \left(\frac{\bar{p}_1}{\mu_1} \bar{K}_1 + \frac{\bar{p}_2}{\mu_2} \bar{K}_2\right) \frac{1}{\sigma}; \end{aligned} \quad (14)$$

$$2Re\{q_1 \Phi_0(\sigma) + q_2 \Psi_0(\sigma)\} = Q(\sigma) - (q_1 K_1 + q_2 K_2)\sigma - (\bar{q}_1 \bar{K}_1 + \bar{q}_2 \bar{K}_2) \frac{1}{\sigma}.$$

Внаслідок того, що модуль похідної відображаючої функції $|\omega'(\sigma)|$, що входить в контурні умови (13), є ірраціональна функція, задачу доводиться розв'язувати методом послідовних наближень. При знаходженні функцій $P(\sigma)$ і $Q(\sigma)$ в нульовому наближенні прийемо, що $R_0 = |\omega'(\sigma)|$.

Дійсні функції $P(\sigma)$ і $Q(\sigma)$ розкладемо в ряди Фур'є, записавши їх в такому вигляді:

$$P(\sigma) = P_1(\sigma) + P_2(\sigma), \quad Q(\sigma) = Q_1(\sigma) + Q_2(\sigma), \quad (15)$$

де

$$P_1(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sigma^n, \quad Q_1(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sigma^n,$$

$$P_2(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \sigma^{-n}, \quad Q_2(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n \sigma^{-n}.$$

Далі застосуємо оператор Коші $\frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ до граничних умов (13) і (14) при $|\zeta| > 1$, поклавши в них $R_0 = |\omega'(\sigma)|$, одержимо:

$$\zeta \Phi'_0(\zeta) + \zeta \Psi'_0(\zeta) - \frac{i}{A} R_0 P_2(\zeta) = (\bar{K}_1 + \bar{K}_2) \frac{1}{\zeta},$$

$$\mu_1 \zeta \Phi'_0(\zeta) + \mu_2 \zeta \Psi'_0(\zeta) + \frac{i}{A} R_0 Q_2(\zeta) = (\bar{\mu}_1 \bar{K}_1 + \bar{\mu}_2 \bar{K}_2) \frac{1}{\zeta}, \quad (16)$$

$$\frac{p_1}{\mu_1} \Phi_0(\zeta) + \frac{p_2}{\mu_2} \Psi_0(\zeta) - \frac{p_1}{\mu_1} a_0 = P_2(\zeta) - \left(\frac{\bar{p}_1}{\mu_1} \bar{K}_1 + \frac{\bar{p}_2}{\mu_2} \bar{K}_2 \right) \frac{1}{\zeta},$$

$$q_1 \Phi_0(\zeta) + q_2 \Psi_0(\zeta) - q_1 a_0 = Q_2(\zeta) - (\bar{q}_1 \bar{K}_1 + \bar{q}_2 \bar{K}_2) \frac{1}{\zeta}. \quad (17)$$

З рівностей (17) знаходимо:

$$\Phi_0(\zeta) = \frac{q_2 \mu_1 \mu_2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} P_2(\zeta) - \frac{p_2 \mu_1}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} Q_2(\zeta) + S_1 \frac{1}{\zeta} + a_0;$$

$$\Psi_0(\zeta) = \frac{p_1 \mu_2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} Q_2(\zeta) - \frac{q_1 \mu_1 \mu_2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} P_2(\zeta) + S_2 \frac{1}{\zeta}, \quad (18)$$

де

$$S_1 = \frac{p_2 \mu_1 (\bar{q}_1 \bar{K}_1 + \bar{q}_2 \bar{K}_2)}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} - \frac{q_2 \mu_1 \mu_2 (\bar{p}_1 \bar{\mu}_2 \bar{K}_1 + \bar{p}_2 \bar{\mu}_1 \bar{K}_2)}{\mu_1 \mu_2 (p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1)};$$

$$S_2 = \frac{q_1 \mu_1 \mu_2 (\bar{\mu}_2 \bar{p}_1 \bar{K}_1 + \bar{\mu}_1 \bar{p}_2 \bar{K}_2)}{\mu_1 \mu_2 (p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1)} - \frac{p_1 \mu_2 (\bar{q}_1 \bar{K}_1 + \bar{q}_2 \bar{K}_2)}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1}.$$

Підставляючи в (16) замість функцій $\Phi_0(\zeta)$ і $\Psi_0(\zeta)$ їх вирази з (18) і прирівнюючи далі коефіцієнти при однакових степенях ζ , прийнявши до уваги (15), знайдемо коефіцієнти функцій $P(\zeta)$ і $Q(\zeta)$ в нульовому наближенні:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_1^{(0)} &= \frac{D_2 B_1 - D_1 B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}; \\ \bar{\beta}_1^{(0)} &= \frac{D_1 A_2 - D_2 A_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}; \\ \bar{\alpha}_n^{(0)} &= \bar{\beta}_n^{(0)} = 0 \quad (n \geq 2).\end{aligned}\quad (19)$$

Тут позначено:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{q_2 \mu_1 \mu_2 - q_1 \mu_1 \mu_2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} + \frac{i}{A} R_0; \quad B_1 = \frac{p_1 \mu_2 - p_2 \mu_1}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1}; \\ A_2 &= \frac{q_2 \mu_2 \mu_1^2 - q_1 \mu_1 \mu_2^2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1}; \quad B_2 = \frac{p_1 \mu_1 \mu_2 - p_2 \mu_1^2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} - \frac{i}{A} R_0; \\ D_1 &= \bar{K}_1 + \bar{K}_2 + S_1 + S_2; \\ D_2 &= \bar{\mu}_1 \bar{K}_1 + \bar{\mu}_2 K_2 + \mu_1 S_1 + \mu_2 S_2.\end{aligned}$$

Отже, функції напруження $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ в нульовому наближенні мають вигляд:

$$\begin{aligned}\Phi^{(0)}(\zeta) &= K_1 \zeta + \left(\frac{q_2 \mu_1 \mu_2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} \bar{\alpha}_1^{(0)} - \frac{p_2 \mu_1}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} \bar{\beta}_1^{(0)} + S_1 \right) \frac{1}{\zeta}; \\ \Psi^{(0)}(\zeta) &= K_2 \zeta + \left(\frac{p_1 \mu_2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} \bar{\beta}_1^{(0)} - \frac{q_1 \mu_1 \mu_2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} \bar{\alpha}_1^{(0)} + S_2 \right) \frac{1}{\zeta}.\end{aligned}\quad (20)$$

Коефіцієнти a_0 , α_0 і β_0 рівні нулеві, що впливає з контурних умов (13) і (14) після застосування до них оператора Коші при $|\zeta| < 1$.

При знаходженні першого і наступних наближень функцій напруження $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ для простоти викладу візьмемо

$$|\omega'(\sigma)| = R \sqrt{1 + m^2 - m \left(\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right)} \approx R_0 - \lambda \left(\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right), \quad (21)$$

де

$$R_0 = \frac{R(1+m+m^2)}{1+m}, \quad \lambda = \frac{Rm}{2(1+m)}.$$

Підставляючи вираз (21) і знайдені в нульовому наближенні функції $P(\zeta)$ і $Q(\zeta)$ в праву частину контурних умов (13) і застосовуючи засіб, як і при знаходженні нульового наближення, одержимо в результаті функції $P(\zeta)$ і $Q(\zeta)$ в першому наближенні:

$$\begin{aligned}P_2^{(1)}(\zeta) &= \bar{\alpha}_1^{(1)} \frac{1}{\zeta} + \bar{\alpha}_3^{(1)} \frac{1}{\zeta^3}; \\ Q_2^{(1)}(\zeta) &= \bar{\beta}_1^{(1)} \frac{1}{\zeta} + \bar{\beta}_3^{(1)} \frac{1}{\zeta^3}.\end{aligned}\quad (22)$$

Тут позначено:

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_1^{(1)} &= \bar{\alpha}_1^{(0)} + \frac{i\lambda}{A} \frac{\beta_1^{(0)} B_1 + \alpha_1^{(0)} B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1}; \\ \bar{\beta}_1^{(1)} &= \bar{\beta}_1^{(0)} - \frac{i\lambda}{A} \frac{\beta_1^{(0)} A_1 + \alpha_1^{(0)} A_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1};\end{aligned}$$

$$\bar{\alpha}_3^{(1)} = \frac{\frac{i\lambda}{A} \left[\left(3B_2 + \frac{2i}{A} R_0 \right) \bar{\alpha}_1^{(0)} + 3\bar{\beta}_1^{(0)} B_1 \right]}{\left(3A_1 - \frac{2i}{A} R_0 \right) \left(3B_2 + \frac{2i}{A} R_0 \right) - 9A_2 B_1};$$

$$\bar{\beta}_3^{(1)} = - \frac{\frac{i\lambda}{A} \left[\left(3A_1 - \frac{2i}{A} R_0 \right) \bar{\beta}_1^{(0)} + 3\bar{\alpha}_1^{(0)} A_2 \right]}{\left(3A_1 - \frac{2i}{A} R_0 \right) \left(3B_2 + \frac{2i}{A} R_0 \right) - 9A_2 B_1}.$$

Підставляючи (22) в (18), з врахуванням (12), одержимо вирази функцій напруження $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ в першому наближенні.

Аналогічно знаходяться наступні наближення.

Повертаючись до змінних z_1 і z_2 підстановкою в функцію $\Phi(\zeta)$ замість ζ її значення

$$\zeta = \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2 - \mu_1^2 b^2}}{a - i\mu_1 b},$$

а в функцію $\Psi(\zeta)$ замість ζ її значення

$$\zeta = \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2 - \mu_2^2 b^2}}{a - i\mu_2 b},$$

знайдемо остаточний вигляд функцій $\varphi(z_1)$ і $\psi(z_2)$. Поклавши у виразах функцій $\Phi^{(0)}$ і $\Psi^{(0)}$ (20) жорсткість підкріплюючого кільця $A=0$, одержимо відомі функції напруження безмежної пластинки з еліптичним отвором. В цьому випадку $\bar{\alpha}_1^{(0)} = 0$, $\bar{\beta}_1^{(0)} = 0$.

При $m=0$ одержимо функції напруження безмежної пластинки з круговим отвором, підкріпленням тонким пружним кільцем, дані в праці М. П. Шереметьєва [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьєв. Изгиб анизотропных и изотропных плит, ослабленных отверстием, край которого подкреплен упругим, тонким кольцом, ДАН УССР, № 6, 1950.
2. М. П. Шереметьєв, Т. Л. Мартинович. Згин нескінченної пластинки з еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем. Прикладна механіка, т. III, вип. 2, 1957.
3. С. Г. Лежницкий. Анизотропные пластинки, Гостехиздат, 1957.
4. Г. Н. Славин. Концентрация напряжений около отверстий, Гостехиздат, 1951.

Д. В. ГРИЛІЦЬКИЙ

ОСНОВНІ ГРАНИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ БЕЗМЕЖНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ З ВПАЯНОЮ КРУГЛОЮ ІЗОТРОПНОЮ ШАЙБОЮ З РОЗРІЗАМИ НА ЛІНІЇ СПАЮ

В монографії М. І. Мусхелішвілі [1] розв'язані основні задачі теорії пружності для безмежної однорідної ізотропної пластинки, яка розрізана вздовж дуг одного і того самого кола.

В даній статті ми розглядаємо першу і другу основні граничні задачі плоскої теорії пружності для безмежної ізотропної пластинки з впаєюною круглою ізотропною шайбою із другого матеріалу. Таку неоднорідну пластинку вважаємо розрізаною вздовж дуг $L_1=a_1b_1$, $L_2=a_2b_2, \dots$, $L_n=a_nb_n$ на лінії спаю. Сукупність цих дуг позначимо через L , так що

$$L=L_1+L_2+\dots+L_n.$$

Далі, вважатимемо, що на обох сторонах L задані зовнішні напруження або зміщення, а на безмежності пластинки — Γ і Γ' .

Сукупність дуг, по яких шайба спаяна з пластинкою, позначимо через $L'=L'_1+L'_2+\dots+L'_n$, причому

$$L'_1=b_1a_2, L'_2=b_2a_3, \dots, L'_n=b_na_1 (a_{n+1}=a_1).$$

Радіус шайби приймемо рівним одиниці, а початок координат помістимо в центрі.

Вказані задачі розв'язуються способом, значення якого таке: розглядаємо окремо пружні рівноваги шайби і пластинки, замінивши дію пластинки на шайбу (і навпаки) невідомими зусиллями $N(t)$ і $T(t)$ (де $N(t)$ і $T(t)$ направлені відповідно по нормалі і дотичній до контура спаю). Із умови неперервності вектора зміщення на лінії спаю отримуємо сингулярне інтегральне рівняння на невідомі контактні напруження $N(t)$ і $T(t)$, розв'язавши яке, знаходимо шукані функції.

В даній статті прийняті позначення монографії [1]. Пружні сталі і функції напружень, які відносяться до шайби і до пластинки, будемо позначати відповідно індексом «1» і «2».

Випишемо із [1] декілька відомих формул:

$$\Psi(z) = \frac{1}{z^2} \Phi(z) + \frac{1}{z^2} \overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) - \frac{1}{z} \Phi'(z), \quad (0.1)$$

$$r\bar{r} + i r\bar{\vartheta} = \Phi(z) - \Phi\left(\frac{1}{z}\right) + \bar{z}\left(\bar{z} - \frac{1}{z}\right) \overline{\Psi(z)}, \quad (0.2)$$

$$2\mu(u' + iv') = iz \left[\kappa \Phi(z) + \Phi\left(\frac{1}{z}\right) - \bar{z} \left(\bar{z} - \frac{1}{z} \right) \overline{\Psi(z)} \right], \quad (0.3)$$

де

$$u' = \frac{\partial u}{\partial \vartheta}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial \vartheta}. \quad (0.4)$$

§ 1. ПЕРША ОСНОВНА ЗАДАЧА

Припустимо, що до шайби на контурі L прикладені напруження $N_1(t)$, $T_1(t)$, а до пластинки на тому ж контурі — напруження $N_2(t)$ і $T_2(t)$. Крім того, ми будемо вважати заданими напруження на безмежності. В задачі потрібно визначити напружений стан шайби і пластинки, який характеризується відповідно функціями $\Phi_1(z)$ і $\Phi_2(z)$.

а) Перша основна задача для круга

Граничні умови мають вигляд:

$$\widehat{rr^+} + i\widehat{r\vartheta^+} = \begin{cases} N_1(t) + iT_1(t) & \text{на } L \\ N(t) + iT(t) & \text{на } L', \end{cases} \quad (1.1)$$

де функції $N_1(t)$, $T_1(t)$, $N(t)$, $T(t)$ ми вважаємо такими, які задовольняють умові H .

Умова (1.1) на основі (0.2) набирає вигляду:

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \begin{cases} N_1(t) + iT_1(t) & \text{на } L \\ N(t) + iT(t) & \text{на } L'. \end{cases} \quad (1.2)$$

Із (1.2) маємо:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{N_1(t) + iT_1(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{N(t) + iT(t)}{t-z} dt + B_0, \quad (1.3)$$

де B_0 — стала.

б) Перша основна задача для площини з круговим отвором

Граничні умови:

$$\widehat{rr^-} + i\widehat{r\vartheta^-} = \begin{cases} N_2(t) + iT_2(t) & \text{на } L \\ N(t) + iT(t) & \text{на } L', \end{cases} \quad (1.4)$$

або

$$\Phi_2^+(t) - \Phi_2^-(t) = \begin{cases} -N_2(t) - iT_2(t) & \text{на } L \\ -N(t) - iT(t) & \text{на } L'. \end{cases} \quad (1.5)$$

Беручи до уваги, що функція $\Phi_2(z)$ на безмежності повинна мати значення Γ , а в точці $z=0$ плюс з головною частиною

$$\frac{\bar{\Gamma}}{z^2} + \frac{\kappa_2(X+iY)}{2\pi(1+\kappa_2)} \cdot \frac{1}{z},$$

де

$$X + iY = i \int_L (N_2 + iT_2) dt + i \int_{L'} (N + iT) dt, \quad (1.6)$$

із (1.5) знаходимо:

$$\begin{aligned}\Phi_2(z) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{N_2 + iT_2}{t-z} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{N+iT}{t-z} dt + \\ & + 1 + \frac{\kappa_2(X+iY)}{2\pi(1+\kappa_2)} \cdot \frac{1}{z} + \frac{\bar{\Gamma}'}{z^2}.\end{aligned}\quad (1.7)$$

в) Визначення контактних напружень

Умові неперервності вектора зміщень на контурі спаю можна надати вигляд:

$$\kappa_1 \Phi_1^+(t_0) + \Phi_1^-(t_0) = \frac{\mu_1}{\mu_2} [\kappa_2 \Phi_2^-(t_0) + \Phi_2^+(t_0)],$$

або, враховуючи формули (1.3) і (1.7),

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\pi i} \int_{L'} \frac{N+iT}{t-t_0} dt + \frac{b}{a} (N+iT) + \frac{2(1+\kappa_1)}{a} B_0 - \frac{2\mu_1(1+\kappa_2)}{\mu_2 a} \Gamma - \\ & - \frac{2\mu_1(1+\kappa_2)}{\mu_2 a} \frac{\bar{\Gamma}'}{t_0^2} - \frac{\mu_1 \kappa_2 (X+iY)}{\pi a \mu_2} \frac{1}{t_0} = \frac{1}{a} g(t_0), \quad t_0 \in L',\end{aligned}\quad (1.8)$$

де

$$g(t_0) = -\frac{1+\kappa_1}{\pi i} \int_L \frac{N_1+iT_1}{t-t_0} dt - \frac{\mu_1(1+\kappa_2)}{\mu_2 \pi i} \int_L \frac{N_2+iT_2}{t-t_0} dt, \quad t_0 \in L', \quad (1.9)$$

$$a = (\kappa_1 + 1) + \frac{\mu_1}{\mu_2} (\kappa_2 + 1), \quad (1.10)$$

$$b = (\kappa_1 - 1) - \frac{\mu_1}{\mu_2} (\kappa_2 - 1).$$

Отже, задача звелася до розв'язку сингулярного інтегрального рівняння (1.8).

Якщо ввести функцію

$$\begin{aligned}W(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} \frac{N+iT}{t-z} dt + \frac{1+\kappa_1}{a} B_0 - \frac{\mu_1(1+\kappa_2)}{\mu_2 a} \Gamma - \\ & - \frac{\mu_1 \kappa_2 (X+iY)}{2\pi a \mu_2} \frac{1}{z} - \frac{\mu_1(1+\kappa_2)}{\mu_2 a} \frac{\bar{\Gamma}'}{z^2},\end{aligned}\quad (1.11)$$

то (1.8) запишеться у вигляді:

$$W^+(t_0) - g W^-(t_0) = \frac{g(t_0)}{a+b} \quad \text{на } L', \quad (1.12)$$

де

$$g = -\frac{\mu_2 + \mu_1 \kappa_2}{\mu_1 + \mu_2 \kappa_1}. \quad (1.13)$$

Розв'язком граничної задачі (1.12) буде:

$$W(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i(a+b)} \int_{L'} \frac{g(t)dt}{X_0^+(t)(t-z)} + X_0(z) \left[P_n(z) + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} \right], \quad (1.14)$$

де D_1, D_2 — сталі,

$$P_n(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \dots + C_{n-1} z + C_n, \quad (1.15)$$

$$X_0(z) = \prod_{j=1}^n (z - b_j)^{-\frac{1}{2} + i\beta} (z - a_{j+1})^{-\frac{1}{2} - i\beta}, \quad (1.16)$$

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\mu_2 + \mu_1 x_2}{\mu_1 + \mu_2 x_1}. \quad (1.17)$$

Функції $\Phi_1(z)$ і $\Phi_2(z)$ з врахуванням (1.11) і (1.14) запишуться так:

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) = & \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{N_1 + iT_1}{t-z} dt + \frac{X_0(z)}{2\pi i(a+b)} \int_{L'} \frac{g(t)dt}{X_0^+(t)(t-z)} + \\ & + X_0(z) \left[P_n(z) + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} \right] + \frac{\mu_1(1+x_2)}{\mu_2 a} (B_0 + \Gamma) + \\ & + \frac{\mu_1 x_2 (X+iY)}{2\pi a \mu_2} \frac{1}{z} + \frac{\mu_1(1+x_2)}{\mu_2 a} \frac{\bar{\Gamma}'}{z^2}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) = & -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{N_2 + iT_2}{t-z} dt - \frac{X_0(z)}{2\pi i(a+b)} \int_{L'} \frac{g(t)dt}{X_0^+(t)(t-z)} - \\ & - X_0(z) \left[P_n(z) + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} \right] + \frac{1+x_1}{a} (B_0 + \Gamma) + \\ & + \frac{x_2(1+x_1)}{2\pi a(1+x_2)} \frac{(X+iY)}{z} + \frac{1+x_1}{a} \frac{\bar{\Gamma}'}{z^2}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Контактні напруження на лінії спаю знаходяться за формулою:

$$\begin{aligned} N(t_0) + iT(t_0) = & f_1 g(t_0) + f_2 \frac{X_0^+(t_0)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{g(t)dt}{X_0^+(t)(t-t_0)} + \\ & + f_3 X_0^+(t_0) \left[P_n(t_0) + \frac{D_1}{t_0} + \frac{D_2}{t_0^2} \right], \end{aligned} \quad (1.20)$$

тут

$$\begin{aligned} f_1 = & \frac{\mu_1 \mu_2 (x_2 - 1) - \mu_2^2 (x_1 - 1)}{4(\mu_1 + \mu_2 x_1)(\mu_2 + \mu_1 x_2)}, \quad f_2 = \frac{\mu_2}{2} \left(\frac{1}{\mu_1 + \mu_2 x_1} + \frac{1}{\mu_2 + \mu_1 x_2} \right), \\ f_3 = & 1 + \frac{\mu_1 + \mu_2 x_1}{\mu_2 + \mu_1 x_2}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Випишемо формули, із яких визначаються сталі:

$$Re B_0 = -Re \left\{ \frac{1}{4\pi i} \int_L \frac{N_1 + iT_1}{t} dt + \frac{1}{4\pi i} \int_{L'} \frac{N + iT}{t} dt \right\}. \quad (1.22)$$

Уявну частину коефіцієнта B_0 можна покласти рівною нулеві:

$$C_0 = \frac{1+x_1}{a} B_0 - \frac{\mu_1(1+x_2)}{\mu_2 a} \Gamma,$$

$$D_1 = \frac{2\pi \mu_1 a_1 (1+x_2) \bar{\Gamma}' - \mu_1 x_2 (X+iY)}{2\pi X_0(0) [\mu_1(1+x_2) + \mu_2(1+x_1)]}, \quad D_2 = -\frac{\mu_1(1+x_2) \bar{\Gamma}'}{X_0(0) [\mu_1(1+x_2) + \mu_2(1+x_1)]}, \quad (1.23)$$

де a_1 — коефіцієнт у розкладі функції $X_0(z)$ в околі точки $z=0$:

$$X_0(z) = X_0(0) (1 + a_1 z + \dots). \quad (1.24)$$

Останні коефіцієнти числом n визначаються із умов однозначності зміщень:

$$\begin{aligned} a \int_{L_k} X_0(t) \left[P_n(t) + \frac{D_1}{t} + \frac{D_2}{t^2} \right] dt + \int_{L_k} [x_1 \Phi_{10}^+(t) + \Phi_{10}^-(t)] dt - \\ - \frac{\mu_1}{\mu_2} \int_{L_k} [\Phi_{20}^+(t) + x_2 \Phi_{20}^-(t)] dt = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (1.25)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_{10}(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{N_1 + iT_1}{t-z} dt + \frac{X_0(z)}{2\pi i(a+b)} \int_{L'} \frac{f g(t) dt}{X_0^+(t)(t-z)}, \\ \Phi_{20}(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{N_2 + iT_2}{t-z} dt - \frac{X_0(z)}{2\pi i(a+b)} \int_{L'} \frac{g(t) dt}{X_0^+(t)(t-z)}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

§ 2. ДРУГА ОСНОВНА ЗАДАЧА

Тепер припустимо, що на контурі L шайби задано зміщення $g_1(t)$, а на контурі L пластинки — зміщення $g_2(t)$. Тут ми будемо вважати відомим головний вектор зовнішніх зусиль, прикладених до пластинки на контурі L . Крім того, вважаємо, що мають місце рівності

$$g_1(b_k) = g_2(b_k), \quad g_1(a_{k+1}) = g_2(a_{k+1}), \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.1)$$

Розв'язуючи цю задачу вказаним способом, ми її зведемо до розгляду змішаних граничних задач для круга і для площини з круговим отвором.

а) Змішана задача для круга

Користуючись формулами (0.2) і (0.3), запишемо граничні умови задачі:

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(t) + \frac{1}{x_1} \Phi_1^-(t) &= \frac{2\mu_1}{x_1} g_1'(t) \quad \text{на } L, \\ \Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) &= N(t) + iT(t) \quad \text{на } L'. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Розв'язок задачі (2.2) дається за формулою

$$\Phi_1(z) = \frac{X_{10}(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f_1(t) dt}{X_{10}^+(t)(t-z)} + \frac{X_{10}(z)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{N(t) + iT(t)}{X_{10}(t)(t-z)} dt + X_{10}(z) P_{1n}(z), \quad (2.3)$$

де

$$f_1(t) = \frac{2\mu_1}{x_1} g_1'(t), \quad (2.4)$$

$$X_{10}(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{-\frac{1}{2} - i\beta_1} (z - b_j)^{-\frac{1}{2} + i\beta_1}, \quad (2.5)$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2\pi} \ln x_1, \quad (2.6)$$

$$P_{1n}(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n. \quad (2.7)$$

б) Змішана задача для площини з круговим отвором

Граничні умови:

$$\begin{aligned}\Phi_2^+(t) + \kappa_2 \Phi_2^-(t) &= 2\mu_2 g_2'(t) \text{ на } L, \\ \Phi_2^+(t) - \Phi_2^-(t) &= -N(t) - iT(t) \text{ на } L'.\end{aligned}\quad (2.8)$$

Записуємо розв'язок задачі (2.8):

$$\begin{aligned}\Phi_2(z) &= \frac{X_{20}(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f_2(t) dt}{X_{20}^+(t)(t-z)} - \frac{X_{20}(z)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{N(t)+iT(t)}{X_{20}(t)(t-z)} dt + \\ &+ X_{20}(z) \left[P_{2n}(z) + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} \right],\end{aligned}\quad (2.9)$$

де

$$f_2(t) = 2\mu_2 g_2'(t), \quad (2.10)$$

$$X_{20}(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{-\frac{1}{2} + i\beta_2} (z - b_j)^{-\frac{1}{2} - i\beta_2}, \quad (2.11)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2\pi} \ln \kappa_2, \quad (2.12)$$

$$P_{2n} = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n. \quad (2.13)$$

в) Визначення контактних напружень

Умова неперервності вектора зміщень на контурі спаю приводить до такого сингулярного інтегрального рівняння:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi i} \int_{L'} K(t, t_0) \frac{N+iT}{t-t_0} dt + b[N(t_0) + iT(t_0)] + 2(1 + \kappa_1) X_{10}(t_0) P_{1n}(t_0) - \\ - 2 \frac{\mu_1}{\mu_2} (1 + \kappa_2) X_{20}(t_0) \left[P_{2n}(t_0) + \frac{D_1}{t_0} + \frac{D_2}{t_0^2} \right] = g(t_0), \quad t_0 \in L',\end{aligned}\quad (2.14)$$

де

$$K(t, t_0) = (1 + \kappa_1) \frac{X_{10}(t_0)}{X_{10}(t)} + \frac{\mu_1}{\mu_2} (1 + \kappa_2) \frac{X_{20}(t_0)}{X_{20}(t)}, \quad (2.15)$$

$$g(t_0) = \frac{\mu_1(1+\kappa_2)}{\mu_2} \frac{X_{20}(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{f_2(t) dt}{X_{20}^+(t)(t-t_0)} - (1 + \kappa_1) \frac{X_{10}(t_0)}{\pi i} \int_{L'} \frac{f_1(t) dt}{X_{10}^+(t)(t-t_0)}, \quad (2.16)$$

$t_0 \in L'.$

Якщо ввести функцію

$$\begin{aligned}W(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L'} K(t, z) \frac{N+iT}{t-z} dt + (1 + \kappa_1) X_{10}(z) P_{1n}(z) - \\ &- \frac{\mu_1}{\mu_2} (1 + \kappa_2) X_{20}(z) \left[P_{2n}(z) + \frac{D_1}{z} + \frac{D_2}{z^2} \right],\end{aligned}\quad (2.17)$$

го рівняння (2.14) зведеться до такої граничної задачі:

$$W^+(t_0) - g W^-(t_0) = \frac{a}{a+b} g(t_0) \text{ на } L'. \quad (2.18)$$

Розв'язок задачі (2.18) дається за формулою:

$$W(z) = \frac{a}{a+b} \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{g(t)dt}{X_0^+(t)(t-z)} + aX_0(z) \left[P_n(z) + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} \right]. \quad (2.19)$$

Контактні напруження на лінії спаю визначаються за формулою:

$$\begin{aligned} N(t_0) + iT(t_0) = & f_1 g(t_0) + f_2 \frac{X_0^+(t_0)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{g(t)dt}{X_0^+(t)(t-t_0)} + \\ & + f_3 X_0^+(t_0) \left[P_n(t_0) + \frac{A_1}{t_0} + \frac{A_2}{t_0^2} \right], \quad t_0 \in L'. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Отже, функції $\Phi_1(z)$ і $\Phi_2(z)$ виражаються відповідно за формулами (2.3) і (2.9), в яких під $N(t) + iT(t)$ розуміється вираз (2.20).

Константи A_1 і A_2 визначаються через постійні D_1 і D_2 :

$$\begin{aligned} X_0(0)(A_1 + \alpha_1 A_2) = & -\frac{\mu_1(1+\alpha_2)}{\mu_1 a} X_{20}(0)(D_1 + \gamma_1 D_2), \\ X_0(0) A_2 = & -\frac{\mu_1(1+\alpha_2)}{\mu_2 a} X_{20}(0) D_2, \end{aligned} \quad (2.21)$$

де γ_1 — коефіцієнт у розкладі функції $X_{20}(z)$ в околі точки $z=0$:

$$X_{20}(z) = X_{20}(0) (1 + \gamma_1 z + \dots). \quad (2.22)$$

Для визначення D_1 і D_2 маємо дві умови:

$$\begin{aligned} X_{20}(0)(D_1 + \gamma_1 D_2) = & \frac{\alpha_2(X+iY)}{2\pi(1+\alpha_2)}, \\ X_{20}(0) D_2 = & \Gamma', \end{aligned} \quad (2.23)$$

де

$$X + iY = i \int_{L'} (N + iT) dt + (X + iY)_L, \quad (2.24)$$

$(X+iY)_L$ — відомий головний вектор зовнішніх зусиль, прикладених до пластинки на L .

Для визначення останніх $3n+3$ констант маємо стільки ж умов:

$$b_0 = \Gamma, \quad (2.25)$$

$$\frac{X_{10}(0)}{2\pi i} \int_L \frac{f_1(t)dt}{X_{10}^+(t)t} + \frac{X_{10}(0)}{2\pi i} \int_{L'} \frac{N+iT}{X_{10}(t)t} dt + X_{10}(0)a_n + \bar{a}_0 = 0, \quad (2.26)$$

$$a_1 + \delta_1 a_0 = 0, \quad (2.27)$$

де δ_1 — коефіцієнт у розкладі функції $X_{10}(z)$ при великих $|z|$:

$$X_{10}(z) = \frac{1}{z^n} + \frac{\delta_1}{z^{n+1}} + \dots \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \int_{L_k} \left\{ \alpha_1 \Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t) - \frac{\mu_1}{\mu_2} [\Phi_2^+(t) + \alpha_2 \Phi_2^-(t)] \right\} dt = 0, \\ (k=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}} [\alpha_1 \Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t)] dt = 2\mu_1 [g_1(a_{k+1}) - g_1(b_k)],$$

$$(k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.30)$$

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}} [\Phi_2^+(t) + \alpha_2 \Phi_2^-(t)] dt = 2\mu_2 [g_2(a_{k+1}) - g_2(b_k)],$$

$$(k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.31)$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.

Стаття надійшла 10. XI 1960.

В. І. ЯКОВЛЕВА

КРУЧЕННЯ СТЕРЖНЯ ДВОТАВРОВОГО ПЕРЕРІЗУ

Розглянемо призматичний стержень, що закручується, поперечний переріз якого має форму двотавра № 12. Користуючись різницеvim методом [2, 3], визначимо дотичні напруги у характерних точках перерізу, побудуємо «горб» та траєкторії дотичних напруг.

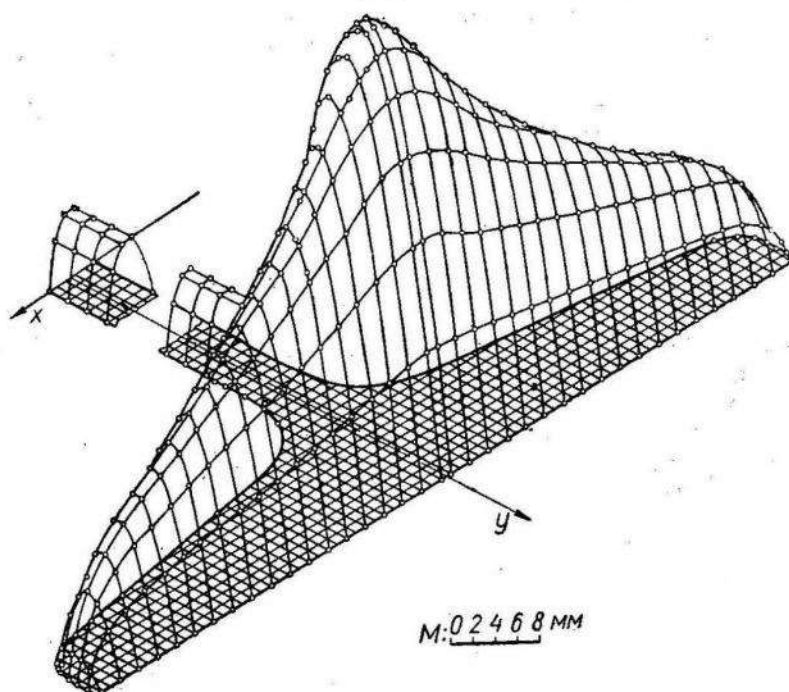


Рис. 1. «Горб» напружень (I № 12).

Для рішення рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2 \quad (1)$$

застосований метод ітерації Лібмана для вихідної квадратної сітки з кроком $h=1$ мм. Виправлення граничних умов в місцях, де сіточний контур не збігається з вихідним, виконано за Коллатцем.

У вузлах сітки одержані значення функції напружень $\Phi(h=1 \text{ мм})$ у сотих частках мм^2 (рис. 1).

Значення функції Φ зображені графічно у вигляді «горба» напружень.

При зображенні «горба» контур перерізу побудований в косокутній аксонометричній проекції з збереженням співвідношення сторін. Вісь z , в напрямку якої відкладались значення функції Φ , вибрана по діагоналі

квадратної сітки, завдяки чому групи аплікату зображувались однією прямою.

Геометричний фактор жорсткості визначався за формулою

$$I_T = \iint_F \Phi(xy) dx dy; \quad (2)$$

являє собою подвоєний об'єм «горба» напружень.

Для побудови траєкторій дотичних напружень «горб» напружень

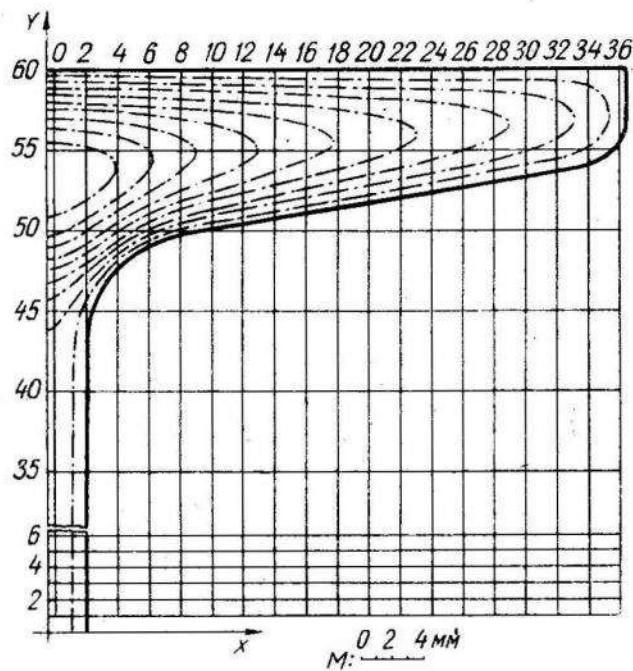


Рис. 2. Траєкторії дотичних напружень (I № 12).

перерізаний рядом площин, паралельних розглядуваній області, віддалених одна від одної на 3,79 мм², що становить 0,1 найбільшої аплікати функції напружень $\Phi_{\max} = 37,93 \text{ мм}^2$ (рис. 2).

Напруження визначали за формулою:

$$\tau = \frac{M}{I_T} \frac{\partial \Phi}{\partial n}, \quad (2a)$$

де $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ — похідна по нормалі.

Для двотавра № 12, що розглядається, підрахований геометричний фактор жорсткості при кінці сітки $h=0,5 \text{ мм}$ становить

$$I_T = 4,323 \text{ см}^4. \quad (3)$$

Те саме за наближеною формулою:

$$I_T = \frac{1}{3} \eta \sum \delta^3 l$$

а) без урахування поправочного коефіцієнта

$$I_T = 3,354 \text{ см}^4; \quad (4)$$

б) з урахуванням поправочного коефіцієнта $\eta = 1,2$ [1]

$$I_T = 3,689 \text{ см}^4. \quad (5)$$

Відповідно до наших підрахунків поправочний коефіцієнт

$$\eta = \frac{4,323}{3,354} \cong 1,29.$$

При визначенні найбільших напружень біля зовнішньої кромки полиці (у точці, що лежить на осі симетрії) та біля вхідного кута зроблено згущення сітки до $h=0,063 \text{ мм}$. Найбільше напруження біля вхідного кута ($x=7,5 \text{ мм}$; $y=49,75 \text{ мм}$) вважалося рівним напруженню в точці А (див. шаблон 1), з аплікатою, що дорівнює $0,74 \text{ мм}^2$, та віддаленою від контура на $0,05 \text{ мм}$.

Шаблон 1

$y \backslash x$	7	7,25	7,5	7,75	8
50,25	8,03	7,21	6,46	5,79	5,20
50,0	5,35	4,49	3,70	3,00	2,41
			точка A		
49,75	2,48	1,59	0,74	0,01	
49,5	-0,58	-0,47	-2,47		

Найбільший кут нахилу «горба» напружень поблизу цієї точки становить

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{0,74}{0,05} \frac{M}{I_T} \quad (6)$$

Розраховуючи в кілограмах та сантиметрах, маємо:

$$\tau_{\max}^{(A)} = 1,48 \frac{M}{I_T} \text{ (кг/см}^2\text{)}. \quad (7)$$

Шаблон 2

$y \backslash x$	0,25		0		0,25
60	0	0	0	0	0
			точка B		
		1,48	1,48	1,48	
	2,92		2,92		2,92
59,5			5,71		

Відповідно до шаблону 2 напруження біля зовнішнього ребра полицки (точка B на осі симетрії) дорівнює

$$\tau_n^{(B)} = \frac{1,48}{0,125} \frac{M}{I_T}, \quad (8)$$

або

$$\tau_n^{(B)} = 1,18 \frac{M}{I_T} \text{ (кг/см}^2\text{)}. \quad (9)$$

Умовний коефіцієнт концентрації, одержаної нами, складає

$$\alpha_k = \frac{1,48}{1,18} \cong 1,25. \quad (10)$$

Визначаючи напруження в полиці та біля вхідного кута за відомими наближеними формулами, одержимо:

1. Напруження у полиці

$$\tau_n = \frac{M}{I_T} \delta_{\max},$$

де $\delta_{\max}$ — середня товщина полиці

$$\tau_n^{(B)} = 0,84 \frac{M}{I_T} \quad (11)$$

2. Найбільше напруження біля вхідного кута

$$\tau_{\max} = \alpha_k \tau_n,$$

де τ_n — визначається за (11), а α_k за формулою Треффца

$$\alpha_k = 1,74 \sqrt[3]{\frac{c}{r}},$$

де c — товщина полиці, r — радіус заокругленого вхідного кута.

Для двотавра № 12 будемо мати

$$\alpha_k = 1,74 \sqrt[3]{\frac{8,4}{7,0}} \cong 1,85. \quad (12)$$

Якщо ж віднести напруження (7) до напружень (11), зберігаючи той самий геометричний фактор жорсткості, знайдемо

$$\alpha_k = \frac{1,48}{0,84} \cong 1,76. \quad (13)$$

ВИСНОВКИ

1. Відношення жорсткості, підрахованої нами та за наближеною формулою, становить:

$$\frac{1,29}{1,2} = 1,075.$$

2. Найбільші дотичні напруження біля зовнішнього ребра полиці та біля вхідного кута мають місце у точках, що знаходяться відповідно на осі симетрії y та на відстані 7,5 мм від осі y , що приблизно становить 1,6 d (d товщини стінки).

3. Умовні коефіцієнти концентрації, знайдені при одному і тому ж геометричному факторі жорсткості, дорівнюють: за Треффцем — 1,85, за нашими дослідженнями — 1,76.

Одержані результати підрахунків зведені у таблицю.

Форма сечення	Результати підрахунків, одержаних	$см^4$	Напруження $кг/см^2$			
			В полиці		У викружці	
			$\tau_n \cdot \frac{M}{I_T}$	$\tau_n \cdot M$	$\tau_{\max} \cdot \frac{M}{I_T}$	$\tau_{\max} \cdot M$
Двотавр № 12	а) за наближеними формулами	4,025	0,84	0,228	1,550	0,420
	б) за автором	4,323	1,18	0,273	1,480	0,343

ЛІТЕРАТУРА

1. Д. В. Бычков и А. К. Мрошинский. Кручение металлических балок. Стройиздат Наркомстроя, 1944.
2. П. М. Варвак. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок. Некоторые задачи прикладной теории упругости в конечных разностях. Изд. АН УССР, ч. I, 1949, ч. II., 1952.
3. Д. Ю. Панов. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. ГИТТЛ, 1951.
4. В. И. Яковлева. Кручение некоторых стержней швеллерного сечения. ДАН Азерб. ССР, т. XIV, № 10, 1958.

Стаття надійшла 15. XI 1960.

Ю. І. КОЙФМАН

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОЇ ПЛОСКОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ¹

В зв'язку з використанням в техніці нових конструктивних матеріалів (спеціальні види пластмас та ін.) зараз виникла необхідність рішення задач теорії пружності в нелінійній постановці [1], [2].

§ 1.

Для однорідного та ізотропного в недеформованому стані матеріалу найбільш загальний зв'язок між компонентами тензора напружень і тензора деформацій записується таким чином [2], [3]:

$$\tau^{ij} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_1} g^{ij} + \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_2} B^{ij} + 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3} G^{ij}, \quad (i, j=1, 2, 3), \quad (1.1)$$

де W — пружний потенціал; I_r — інваріанти деформації; τ^{ij} — контрваріантні компоненти тензора напружень, віднесені до довільної криволінійної системи координат у деформованому тілі; G^{ij} , g^{ij} — компоненти метричного тензора деформованого та недеформованого тіла відповідно; $B^{ij} = g^{ij} I_1 - g^{ir} g^{js} G_{rs}$.

Якщо ввести у випадку плоскої задачі комплексні координати $(z, \bar{z})$ і $(\eta, \bar{\eta})$ для деформованого та недеформованого тіла відповідно, то функція зміщень $D = u + iv$ дається формулою:

$$D = z - \eta. \quad (1.2)$$

Рівняння рівноваги плоскої задачі при відсутності об'ємних сил мають вигляд [3]:

$$\tau^{\alpha\beta} \parallel_{\alpha} = 0; \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \quad (1.3)$$

Після використання функції напружень U , яка задовольняє рівнянням (1.3), та співвідношень (1.1), (1.2) у роботі [3] була одержана вирішальна система рівнянь нелінійної плоскої теорії. Ця система інтегрувалась методом розвинення рішення в ряд по характеристичному параметру ε :

$$\begin{aligned} U &= {}^0H\varepsilon (U^{(1)} + \varepsilon U^{(2)} + \varepsilon^2 U^{(3)} + \dots); \\ D &= \varepsilon D^{(1)} + \varepsilon^2 D^{(2)} + \varepsilon^3 D^{(3)} + \dots, \end{aligned} \quad (1.4)$$

де 0H — постійна, яка дорівнює μ або 2μ для плоскої деформації та узагальненого плоско-напруженого стану відповідно (μ — модуль зсуву у лінійній теорії).

¹ Доповідь на семінарі з теорії пружності при кафедрі механіки Львівського ун-ту в травні 1959 року.

При інтегруванні перше наближення дає відомі формули Колосова—Мусхелішвілі [5]; члени другого порядку даються такими співвідношеннями [4]:

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial \bar{z}} = \varphi^{(2)}(z) + z\bar{\varphi}'^{(2)}(\bar{z}) + \bar{\psi}^{(2)}(\bar{z}) - F(z, \bar{z}, \gamma, \delta); \quad (1.5)$$

$$D^{(2)} = k\varphi^{(2)}(z) - z\bar{\varphi}'^{(2)}(\bar{z}) - \bar{\psi}^{(2)}(\bar{z}) - F_1(z, \bar{z}, \gamma, \delta), \quad (1.6)$$

де

$$F(z, \bar{z}, \gamma, \delta) = \gamma \{ [(z\bar{\Phi}'^{(1)}(\bar{z}) + \bar{\Psi}^{(1)}(\bar{z})) \bar{D}^{(1)} + [\delta\bar{\Phi}^{(1)}(\bar{z}) + \Phi^{(1)}(z)] D^{(1)}] - \\ - k_3 z [\bar{\Phi}^{(1)}(\bar{z})]^2 - k_1 \int \bar{\Phi}^{(1)}(\bar{z}) \bar{\Psi}^{(1)}(\bar{z}) d\bar{z} - k_2 \int [\Phi^{(1)}(z)]^2 dz; \quad (1.7)$$

$$F_1(z, \bar{z}, \gamma, \delta) = -\gamma \{ [(z\bar{\Phi}'^{(1)}(\bar{z}) + \bar{\Psi}^{(1)}(\bar{z})) \bar{D}^{(1)} + [\delta\bar{\Phi}^{(1)}(\bar{z}) - k\Phi^{(1)}(z)] D^{(1)}] - \\ - k'_3 [\bar{\Phi}^{(1)}(\bar{z})]^2 - k'_1 \int \bar{\Phi}^{(1)}(\bar{z}) \bar{\Psi}^{(1)}(\bar{z}) d\bar{z} - k'_2 \int [\Phi^{(1)}(z)]^2 dz; \quad (1.8)$$

$\Phi^{(1)}(z)$, $\Psi^{(1)}(z)$ — потенціальні функції першого порядку.

Значення постійних γ , δ , k , k_i , k'_i ($i=1, 2, 3$) наведені у роботі [4]; вони визначаються через пружні постійні матеріалу, які знаходяться експериментальним шляхом:

$$\mu = -2 \left[\frac{\partial W}{\partial J_2} \right]_0; \quad c_1 = -\frac{2}{\mu} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial J_1^2} \right]_0; \quad c_2 = -\frac{2}{\mu} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial J_1 \partial J_2} \right]_0; \\ c_3 = -\frac{2}{\mu} \left[\frac{\partial W}{\partial J_3} \right]_0; \quad c_4 = -\frac{2}{\mu} \left[\frac{\partial^3 W}{\partial J_1^3} \right]_0.$$

Для переходу в правих частинах формул (1.5), (1.6) до координат $(\eta, \bar{\eta})$ досить замінити $(z, \bar{z})$ на $(\eta, \bar{\eta})$ і постійні γ , δ на $\gamma' = \gamma - 1$; $\delta' = \frac{\gamma\delta-1}{\gamma'}$ [4].

Компоненти тензора напружень зв'язані з функцією U таким чином:

$$\tau^{12} = \sigma_x + \sigma_y = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}; \quad \tau^{22} = \sigma_x - \sigma_y - 2i\sigma_{xy} = -4 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \quad (1.9)$$

Якщо вибрати ε так, щоб $2^\circ H \varepsilon$ дорівнювало 1 кг/см^2 у випадку плоскої деформації та 1 кг/см для плоско-напруженого стану, і обмежитись другим наближенням, то формули (1.9) можна записати у такому вигляді:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 \left[\frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{2^\circ H} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial z \partial \bar{z}} \right]; \quad (1.10)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} = 2 \left[\frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial z^2} + \frac{1}{2^\circ H} \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial z^2} \right].$$

Використовуючи метод, розроблений акад М. І. Мусхелішвілі, розглянемо деякі задачі.

§ 2. РІШЕННЯ ПЕРШОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ КРУГОВОГО КІЛЬЦЯ

Припустимо, що область, яка розглядається, являє собою кругове кільце (трубу), обмежене двома концентричними колами L_1 і L_2 (зовнішній радіус — R_1 , внутрішній — R_2) з центром у початку координат.

Нехай до контурів L_1 і L_2 прикладена деяка система зовнішніх зусиль. Загальне рішення лінійної задачі наведене у монографії [5], тому потенціали першого порядку та функцію $F(z, \bar{z}, \gamma, \delta)$ будемо вважати відомими.

Граничні умови для потенціалів другого порядку мають такий вигляд:

$$\varphi^{(2)}(t) + t\bar{\varphi}^{(2)}(\bar{t}) + \bar{\psi}^{(2)}(\bar{t}) = f^{(2)}(t) + F(t, \bar{t}, \gamma, \delta) \text{ на } L_i; (i=1, 2). \quad (2.1)$$

Праві частини формул (2.1) можна представити таким чином:

$$f^{(2)}(t) + F(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(j)} e^{in\vartheta} + Ni\vartheta; (j=1, 2). \quad (2.2)$$

Підставляючи¹

$$\varphi^{(2)}(z) = B^{(2)} \ln z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(2)} z^n; \quad \psi^{(2)}(z) = B'^{(2)} \ln z + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n^{(2)} z^n \quad (2.3)$$

до формул (2.1) та виконуючи необхідні перетворення, знайдемо:

$$\begin{aligned} N &= B^{(2)} - \bar{B}'^{(2)}; \\ a_1^{(2)} &= \frac{R_1 A_1^{(1)} - R_2 A_1^{(2)}}{2(R_1^2 - R_2^2)}; \quad b_{-1}^{(2)} = \frac{(R_1 A_1^{(2)} - R_2 A_1^{(1)}) R_1 R_2}{R_1^2 - R_2^2}; \\ a_2^{(2)} &= \frac{R_1^2 A_2^{(1)} - R_2^2 A_2^{(2)}}{R_1^4 - R_2^4} - \frac{B^{(2)}}{R_1^2 + R_2^2}; \quad b_{-2}^{(2)} = \frac{(R_1^2 A_2^{(2)} - R_2^2 A_2^{(1)}) R_1^2 R_2^2}{R_1^4 - R_2^4} - \frac{B^{(2)} R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}; \\ a_n^{(2)} &= \frac{(R_1^{2(2-n)} - R_2^{2(2-n)}) B_n^{(1)} - (2-n)(R_1^2 - R_2^2) B_n^{(2)}}{(R_1^{2n} - R_2^{2n})(R_1^{2(2-n)} - R_2^{2(2-n)}) - n(2-n)(R_1^2 - R_2^2)^2}; \\ b_n^{(2)} &= \bar{A}_n^{(1)} R_1^{-n} - \bar{a}_{-n}^{(2)} R_1^{-2n} - a_{n+2}^{(2)} (2-n) R_1^2; \\ B_n^{(1)} &= A_n^{(1)} R_1^n - A_n^{(2)} R_2^n; \quad B_n^{(2)} = \bar{A}_{2-n}^{(1)} R_1^{2-n} - \bar{A}_{2-n}^{(2)} R_2^{2-n}; \\ (n &= -1, -2, \pm 3, \pm 4, \dots). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким чином, всі коефіцієнти розкладу функцій $\varphi^{(2)}(z)$ і $\psi^{(2)}(z)$ знайдені.

Нелінійна задача Ламе. Розглянемо випадок, коли кільце (труба) піддається рівномірному внутрішньому та зовнішньому тиску інтенсивністю P_2 та P_1 .

Граничні умови цієї задачі мають такий вигляд:

$$2 \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{L_i} = -P_i t; \quad (2.5)$$

або

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial z} \Big|_{L_i} = -P_i t, \quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial z} \Big|_{L_i} = 0.$$

¹ Коефіцієнти $B^{(2)}$ та $B'^{(2)}$ визначаються з умов однозначності зміщень та виразу для головного вектора [7].

Потенціали першого порядку дорівнюють:

$$\varphi^{(1)}(z) = a^{(1)}z; \quad \psi^{(1)}(z) = \frac{b^{(1)}}{z}; \quad (2.6)$$

де

$$a^{(1)} = \frac{P_1 R_1^2 - P_2 R_2^2}{2(R_2^2 - R_1^2)}; \quad b^{(1)} = \frac{(P_2 - P_1) R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

На відміну від задач лінійної теорії при визначенні потенціалів другого порядку можливі два варіанти у постановці граничних задач: границя області задана в деформованому або недеформованому тілі.

І. Рішення задачі у випадку, коли границя задана у деформованому тілі.

У цьому випадку

$$f^{(2)}(t) = 0; \quad F(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = A_1^{(j)} e^{i\theta} \quad (j = 1, 2) \quad (2.7)$$

з формул (2,4), (2,7) одержимо:

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(z) &= \left\{ [\gamma(1 + \delta)(k - 1) - k_3] a^{(1)^2} - \frac{\gamma}{R_1^2 R_2^2} b^{(1)^2} \right\} \frac{z}{2}; \\ \psi^{(2)}(z) &= \gamma \left[\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 R_2^2} b^{(1)^2} - (k + \delta) a^{(1)} b^{(1)} \right] \frac{1}{z}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

За формулами для напружень і зміщень знайдемо:

$$\begin{aligned} \sigma_r^I &= \frac{P_1 R_1^2 - P_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(P_2 - P_1) R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) R^2} \left(1 - \frac{\gamma(P_2 - P_1)(R_1^2 - R^2)(R_2^2 - R^2)}{2(\circ H)(R_2^2 - R_1^2) R^2} \right); \\ \sigma_\theta^I &= \frac{P_1 R_1^2 - P_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} - \\ &- \frac{(P_2 - P_1) R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) R^2} \left(1 - \frac{\gamma(P_2 - P_1)[2(R_1^2 R_2^2 - R^4) + (R_1^2 - R^2)(R_2^2 - R^2)]}{2(\circ H)(R_2^2 - R_1^2) R^2} \right); \quad (2.9) \\ u_r^I &= \frac{R}{2\circ H} \left\{ (k - 1) a^{(1)} - \frac{b^{(1)}}{R^2} + \frac{1}{2(\circ H)} \left\{ [2(k'_3 + k'_2) - k_3(k - 1) + \right. \right. \\ &+ \gamma(\delta - 1)(k^2 - 1)] \frac{a^{(1)^2}}{2} + \gamma \left[(R_1^2 - R^2)(R_2^2 - R^2) - \frac{k+1}{2} R^4 \right] \frac{b^{(1)^2}}{R_1^2 R_2^2 R^4} + \\ &\left. \left. + \frac{(k+1)(2\gamma-1)}{R^2} a^{(1)} b^{(1)} \right\} \right\}; \quad u_\theta^I = 0. \end{aligned} \quad (2.9')$$

У випадку плоскої деформації нестисливого матеріалу¹ ($k = \delta = 1$; $\gamma = k'_3 = -k'_2 = \frac{1}{2}$), зміщення точок контуру дорівнюють:

$$u_r^{(j)} = - \frac{(P_2 - P_1) R_1^2 R_2^2}{2(\circ H)(R_2^2 - R_1^2) R_j} \left[1 - \frac{(P_1 - P_2) R_j^2}{4(\circ H)(R_2^2 - R_1^2)} \right]; \quad (j = 1, 2). \quad (2.10)$$

¹ Для нестисливого матеріалу пружний потенціал вибирається у формі, яка запропонована Муні: $W = C_1'(I_1 - 3) + C_2'(I_2 - 3)$.

II. Рішення задачі у випадку, коли границя задана у недеформованому тілі.

В даному разі, вживаючи розклад Тейлора до функції $f(t) = 2 \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{L_i}$

$$(f(t) = f(t^*) + D \cdot f'(t^*) + \dots = f^{(1)}(t^*) + \varepsilon [f^{(2)}(t^*) + \\ + D^{(1)} f'^{(1)}(t^*)] + \dots),$$

не важко переконатись у тому, що граничні умови запишуться таким чином:

$$\varphi^{(2)}(t) + t \bar{\varphi}'^{(2)}(\bar{t}) + \bar{\varphi}^{(2)}(\bar{t}) = f^{(2)}(t) + F^*(t, \bar{t}, \gamma, \delta) \text{ на } L_i^*; \quad (2.11)$$

де

$$F^*(t, \bar{t}, \gamma', \delta') = F(t, \bar{t}, \gamma, \delta) + D^{(1)} f'^{(1)}(t); \quad (2.11')$$

t — афікс точки контуру недеформованого тіла.

Оскільки

$$f^{(2)}(t) = 0; \quad F^*(t, \bar{t}, \gamma', \delta') = A_1^{*(j)} e^{i\theta};$$

то, як і раніше, знайдемо:

$$\varphi^{(2)}(\eta) = \left\{ [\gamma(1 + \delta)(k - 1) - k_3] a^{(1)^2} - \frac{\gamma - 2}{R_1^2 R_2^2} b^{(1)^2} \right\} \frac{\eta}{2}; \quad (2.12)$$

$$\psi^{(2)}(\eta) = \left\{ (\gamma - 2) \frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 R_2^2} b^{(1)^2} - [\gamma(k + \delta) - 2(k - 1)] a^{(1)} b^{(1)} \right\} \frac{1}{\eta}.$$

Формули для напружень та зміщень мають такий вигляд:

$$\sigma_r^{\text{II}} = \frac{P_1 R_1^2 - P_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(P_2 - P_1) R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) R^2} \left(1 - \frac{(\gamma - 2)(P_2 - P_1)(R_1^2 - R^2)(R_2^2 - R^2)}{2(^{\circ}H)(R_2^2 - R_1^2) R^2} \right); \quad (2.13)$$

$$\sigma_{\theta}^{\text{II}} = \frac{P_1 R_1^2 - P_2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} -$$

$$- \frac{(P_2 - P_1) R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2) R^2} \left(1 - \frac{(P_2 - P_1)[(\gamma - 2)(R_1^2 - R^2)(R_2^2 - R^2) + 2\gamma(R_1^2 R_2^2 - R^4) + 4R^4]}{2(^{\circ}H)(R_2^2 - R_1^2) R^2} \right);$$

$$u_r^{\text{II}} = \frac{R}{2^{\circ}H} \left\{ (k - 1) a^{(1)} - \frac{b^{(1)}}{R^2} + \frac{1}{2(^{\circ}H)} \left\{ [2(k'_3 - k'_2) - k_3(k - 1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma(1 - \delta)(k^2 - 1) + 2(k - 1)^2] \frac{a^{(1)^2}}{2} + \left[1 + \frac{\gamma - 2}{R_1^2 R_2^2 R^4} (R_1^2 - R^2)(R_2^2 - R^2) - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{k + 1}{2} R^4 \right] b^{(1)^2} + (k + 1) \left[2\gamma - 1 - \frac{2(k - 1)}{k + 1} \right] \frac{a^{(1)} b^{(1)}}{R^2} \right\} \right\}; \quad u_{\theta}^{\text{II}} = 0. \quad (2.13')$$

Аналогічно співвідношенню (2.10), одержимо:

$$u_r^{(j)} = - \frac{(P_2 - P_1) R_1^2 R_2^2}{2(^{\circ}H)(R_2^2 - R_1^2) R} \left[1 - \frac{(P_2 - P_1)(2R_1^2 R_2^2 + 3R_j^4)}{4(^{\circ}H)(R_2^2 - R_1^2) R_j^2} \right]. \quad (j = 1, 2). \quad (2.14)$$

Таблиця

P/μ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
σ_{θ}^I/μ	0,269	0,556	0,861	1,184	1,502
σ_{θ}^{II}/μ	0,275	0,578	0,911	1,274	1,663
лін. σ_{θ}/μ	0,260	0,520	0,780	1,040	1,300

У таблиці наведені значення σ_{θ}^I , σ_{θ}^{II} , $\sigma_{\theta}^{лін.}$ на контурі L_2 у випадку плоскої деформації при $P_1=0$; $\frac{R_1}{R_2}=1,5$; $\gamma=\frac{1}{2}$. Як випливає з таблиці, в даному разі напруження σ_{θ}^I та σ_{θ}^{II} значно більші, ніж $\sigma_{\theta}^{лін.}$.

Якщо покласти у співвідношеннях (2.9) — (2.9') і (2.13) — (2.13') $R_1 \rightarrow \infty$; $P_1=0$, то одержимо формули напружень та зміщень для безмежної площини з круговим отвором, край якого піддається рівномірному тиску інтенсивністю P :

$$\begin{aligned}\sigma_r^I &= -P \frac{R_2^2}{R^2} \left[1 - \frac{\gamma P}{2(\sigma^H)} \left(1 - \frac{R_2^2}{R^2} \right) \right]; \quad \sigma_{\theta}^I = P \frac{R_2^2}{R^2} \left[1 - \frac{\gamma P}{2(\sigma^H)} \left(1 - 3 \frac{R_2^2}{R^2} \right) \right]; \\ \sigma_r^{II} &= -P \frac{R_2^2}{R^2} \left[1 - \frac{(\gamma-2)P}{2(\sigma^H)} \left(1 - \frac{R_2^2}{R^2} \right) \right]; \\ \sigma_{\theta}^{II} &= P \frac{R_2^2}{R^2} \left[1 - \frac{(\gamma-2)P}{2(\sigma^H)} \left(1 - \frac{R_2^2}{R^2} - \frac{2\gamma}{\gamma-2} \frac{R_2^2}{R^2} \right) \right].\end{aligned}\quad (2.15)$$

§ 3. ПЛАСТИНА З КРУГОВИМ ОТВОРОМ, В ЯКИЙ ВПРЕСОВАНА ШАЙБА З ІНШОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо обмежену пластину з деяким числом отворів, у які впресовані шайби з іншого матеріалу. Одержане таким чином тіло позначимо через S , його границю через L_0 , причому L_0 — простий замкнутий контур; позначимо також через L_m контури дотикання пластини з шайбами.

Будемо вважати, що задані зовнішні зусилля, які діють на L_0 , та стрибки зміщень $g_m(t)$ при переході через L_m .

На L_0 та контурах L_m повинні виконуватись такі умови:

$$2 \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{L_0} = f(t); \quad D_0(t) = D_m(t) + g_m(t); \quad \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0 = \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_m \quad \text{на } L_m. \quad (3.1)$$

або

$$\text{I} \quad \frac{\partial U^{(1)}}{\partial z} \Big|_{L_0} = f^{(1)}(t); \quad \varepsilon_0 D_0^{(1)} = \varepsilon_m D_m^{(1)} + g_m(t); \quad \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial z} \right)_0 = \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial z} \right)_m \text{ на } L_m; \quad (3.2)$$

$$\text{II} \quad \frac{\partial U^{(2)}}{\partial z} \Big|_{L_0} = f^{(2)}(t); \quad \varepsilon_0^2 D_0^2 = \varepsilon_m^2 D_m^2; \quad \varepsilon_0 \left(\frac{\partial U^{(2)}}{\partial z} \right)_0 = \varepsilon_m \left(\frac{\partial U^{(2)}}{\partial z} \right)_m \text{ на } L_m, \quad (3.3)$$

де $D_0, \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_0$; $D_m, \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)_m$ — зміщення та похідна функції Ері відповідно для пластини та шайби.

Підставляючи формули (1.5), (1.6) до співвідношення (3.3), одержимо граничні умови для потенціалів другого порядку:

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(2)}(t) + t \bar{\varphi}_0^{(2)}(\bar{t}) + \bar{\psi}_0^{(2)}(\bar{t}) - F^{(0)}(t, \bar{t}, \gamma, \delta) &= f^{(2)}(t) \text{ на } L_0; \\ \varphi_0^{(2)}(t) + t \bar{\varphi}_0^{(2)}(\bar{t}) + \bar{\psi}_0^{(2)}(\bar{t}) - F^{(0)}(t, \bar{t}, \gamma, \delta) &= n_m [\varphi_m^{(2)}(t) + \\ &+ t \bar{\varphi}_m^{(2)}(\bar{t}) + \bar{\psi}_m^{(2)}(\bar{t}) - F^{(m)}(t, \bar{t}, \gamma, \delta)]; \\ k_0 \varphi_0^{(2)}(t) - t \bar{\varphi}_0^{(2)}(\bar{t}) - \bar{\psi}_0^{(2)}(\bar{t}) - F_1^{(0)}(t, \bar{t}, \gamma, \delta) &= n_m^2 [k_m \varphi_m^{(2)}(t) - \\ &- t \bar{\varphi}_m^{(2)}(\bar{t}) - \bar{\psi}_m^{(2)}(\bar{t}) - F_1^{(m)}(t, \bar{t}, \gamma, \delta)] \text{ на } L_m; \\ n_m &= \frac{{}^\circ H_0}{{}^\circ H_m}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Як приклад розглянемо випадок, коли в кругове кільце (зовнішній радіус — R_1 , внутрішній — R_2) впресована шайба з другого матеріалу, радіус якої до деформації був рівний $R_2 + \beta$; крім того, на контур діє нормальний тиск інтенсивністю q .

В даному разі граничні умови задачі мають такий вигляд:

$$g_1(t) = \beta e^{i\vartheta}; \quad 2 \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{L_0} = -qt;$$

І. Рішення задачі у випадку завдання граничних умов у деформованому тілі.

Маємо

$$f^{(1)}(t) = -qt; \quad g_1(t) = \beta e^{i\vartheta}; \quad f^{(2)}(t) = 0.$$

Звичайним шляхом з граничних умов для потенціалів першого та другого порядку знайдемо:

$$\varphi_0^{(i)} = a^{(i)} z; \quad \psi_0^{(i)} = \frac{b^{(i)}}{z}; \quad \varphi_1^{(i)} = a_1^{(i)} z; \quad \psi_1^{(i)} = 0. \quad (i = 1, 2), \quad (3.6)$$

де

$$b^{(i)} = \frac{{}^\circ H_0 C^{(i)} + [(k_0 - 1) - n_1(k_1 - 1)] A^{(i)}}{[n_1(k_1 - 1) - (k_0 - 1)] R_2^2 - [2 + n_1(k_1 - 1)] R_1^2} R_1^2 R_2^2;$$

$$a^{(i)} = -\frac{1}{2} \left(A^{(i)} + \frac{b^{(i)}}{R_1^2} \right); \quad a_1^{(i)} = \frac{1}{2} \left[B^{(i)} - \alpha^{(i)} b^{(i)} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) \right]; \quad (3.7)$$

$$A^{(1)} = -B^{(1)} = q; \quad C^{(1)} = \frac{4\beta}{R_2}; \quad \alpha^{(1)} = 1; \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} A^{(2)} = & -[\gamma_0(1 + \delta_0)(k_0 - 1) - k_{3,0}]a^{(1)^2} - \frac{\gamma_0}{R_1^4} b^{(1)^2} + \frac{\gamma_0(k_0 + \delta_0)}{R_1^2} a^{(1)} b^{(1)}; \\ B^{(2)} = & [\gamma_1(1 + \delta_1)(k_1 - 1) - k_{3,1}]a_1^{(1)^2} + \\ & + \frac{\gamma_0}{n_1} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) \left[\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 R_2^2} b^{(1)} - (k_0 + \delta_0)a^{(1)} \right] b^{(1)}; \end{aligned} \quad (3.8')$$

$$\begin{aligned} C^{(2)} = & \frac{2}{\sigma_{H_0}} \left\{ [2(k'_{3,1} + k'_{2,1}) - k_{3,1}(k_1 - 1) - \gamma_1(1 - \delta_1)(k_1^2 - 1)] \frac{n_1^2}{2} a_1^{(1)^2} + \right. \\ & + \left\{ \gamma_0(k_0 - 1) \left[k_0 - \delta_0 - \frac{n_1(k_1 - 1)(1 + \delta_0)}{2} \right] + \frac{n_1(k_1 - 1)k_{3,0}}{2} - \right. \\ & - (k'_{3,0} + k'_{2,0}) \} a^{(1)^2} - \frac{\gamma_0}{2R_2^4} [2 + n_1(k_1 - 1)] b^{(1)^2} + \left[\gamma_0(\delta_0 - 1) - k'_{1,0} + \right. \\ & \left. \left. + \gamma_0(k_0 + \delta_0) \frac{n_1(k_1 - 1)}{2} \right] \frac{a^{(1)} b^{(1)}}{R_2^2} \right\}; \quad \alpha^{(2)} = \frac{1}{n_1}. \end{aligned}$$

Формули для напружень та зміщень мають такий вигляд:
для кільця

$$\begin{aligned} \sigma_r^I = & 2a^{(1)} + \frac{b^{(1)}}{R^2} + \frac{1}{2(\sigma_{H_0})} \left\{ 2a^{(2)} + \frac{b^{(2)}}{R^2} - \gamma_0 \left[\frac{b^{(1)^2}}{R^4} - \right. \right. \\ & \left. \left. - (1 - k_0 \delta_0 - 2k_0)a^{(1)^2} - (k_0 + \delta_0) \frac{a^{(1)} b^{(1)}}{R^2} \right] \right\}; \\ \sigma_\theta^I = & 2a^{(1)} - \frac{b^{(1)}}{R^2} + \frac{1}{2(\sigma_{H_0})} \left\{ 2a^{(2)} - \frac{b^{(2)}}{R^2} + \gamma_0 \left[\frac{3b^{(1)^2}}{R^4} + \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 - k_0 \delta_0 - 2k_0)a^{(1)^2} - (k_0 + \delta_0) \frac{a^{(1)} b^{(1)}}{R^2} \right] \right\}; \quad (3.9) \\ u_r^I = & \frac{R}{2(\sigma_{H_0})} \left\{ (k_0 - 1)a^{(1)} - \frac{b^{(1)}}{R^2} + \frac{1}{2(\sigma_{H_0})} \left\{ (k_0 - 1)a^{(2)} + \frac{b^{(2)}}{R^2} - \right. \right. \\ & - [\gamma_0(k_0 - \delta_0)(k_0 - 1) - (k'_{3,0} + k'_{2,0})]a^{(1)^2} + \gamma_0 \frac{b^{(1)^2}}{R^4} - \\ & \left. \left. - [\gamma_0(\delta_0 - 1) - k'_{1,0}] \frac{a^{(1)} b^{(1)}}{R^2} \right\} \right\}; \\ u_\theta^I = & 0; \end{aligned}$$

для шайби:

$$\begin{aligned}\sigma_r^I &= \sigma_\theta^I = 2a_1^{(1)} + \frac{1}{2(^{\circ}H)_1} [2a_1^{(2)} + \gamma_1(1 - k_1 \delta_1 - 2k_1)a_1^{(1)^2}]; \\ u_r^I &= \frac{R}{2(^{\circ}H)_1} \left\{ (k_1 - 1)a_1^{(1)} + \frac{1}{2(^{\circ}H)_1} \left\{ (k_1 - 1)a_1^{(2)} - [\gamma_1(k_1 - \delta_1)(k_1 - 1) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (k_{3,1}' + k_{2,1}') \right] a_1^{(1)^2} \right\} \right\}; \\ u_\theta^I &= 0.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Якщо покласти в формулу (3.9) — (3.10) $R_1 \rightarrow \infty$, $q=0$, то знайдемо рішення задачі для безмежної пластини з круговим отвором, в який впресована шайба з другого матеріалу.

Тоді, вводячи позначення

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 - \frac{n_1^2 [2(k_{3,1}' + k_{2,1}') - k_{3,1}(k_1 - 1) - \gamma_1(1 - \delta_1)(k_1^2 - 1)]}{4\gamma_0 [2 + n_1(k_1 - 1)]}; \\ P &= \frac{4(^{\circ}H_0)\beta}{[2 + n_1(k_1 - 1)]R_2}; \quad R_2 = a;\end{aligned}$$

одержимо:

для пластини:

$$\begin{aligned}\sigma_r^I &= -P \frac{a^2}{R^2} \left[1 - \frac{\gamma_0 P}{2(^{\circ}H_0)} \left(\alpha - \frac{a^2}{R^2} \right) \right]; \\ \sigma_\theta^I &= P \frac{a^2}{R^2} \left[1 - \frac{\gamma_0 P}{2(^{\circ}H_0)} \left(\alpha - 3 \frac{a^2}{R^2} \right) \right]; \\ u_r^I &= \frac{Pa^2}{2R(^{\circ}H_0)} \left[1 - \frac{\gamma_0 P}{2(^{\circ}H_0)} \left(\alpha - \frac{a^2}{R^2} \right) \right];\end{aligned}\quad (3.11)$$

для шайби:

$$\begin{aligned}\sigma_r^I &= \sigma_\theta^I = -P \left[1 - \frac{\gamma_0 P}{2(^{\circ}H_0)} (\alpha - 1) \right]; \\ u_r^I &= -\frac{PR(k_1 - 1)}{2(^{\circ}H_1)} \left[1 + \frac{\gamma_0 P(\alpha - 1)}{n_1^2(^{\circ}H_1)(k_1 - 1)} \right].\end{aligned}\quad (3.12)$$

II. Рішення задачі у випадку, коли границя задана у недеформованому тілі.

З врахуванням співвідношення (2.11') одержимо:

$$\begin{aligned}A^{(2)} &= -[\gamma_0(1 + \delta_0)(k_0 - 1) - k_{3,0}]a^{(1)^2} - \frac{\gamma_0 - 2}{R_1^4} b^{(1)^2} + \\ &\quad + [\gamma_0(k_0 + \delta_0) - 2(k_0 - 1)] \frac{a^{(1)}b^{(1)}}{R_1^2}; \\ B^{(2)} &= \{[\gamma_1(1 + \delta_1) - 2](k_1 - 1) - k_{3,1}\}a^{(1)^2} - \\ &\quad - \frac{\gamma_0 - 1}{n_1} b^{(1)} \left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right) \left[\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2 R_2^2} b^{(1)} - (k_0 + \delta_0')a^{(1)} \right] + \\ &\quad + \frac{1}{n_1} \left[2(k_0 - 1)a^{(1)^2} - \frac{b^{(1)^2}}{R_1^4} + \frac{1}{R_1^2} (k_0 - 3)a^{(1)}b^{(1)} \right];\end{aligned}\quad (3.13)$$

$$\begin{aligned}
C^{(2)} = \frac{2}{H_0} \{ & [2(k'_{3,1} + k'_{2,1}) - k_{3,1}(k_1 - 1) - \\
& - \gamma_1(1 - \delta_1)(k_1^2 - 1)] \frac{n_1^2}{2} a_1^{(1)^2} + \{ (k_0 - 1) [\gamma'_0(k_0 - \delta'_0) - \\
& - \frac{n_1(k_1 - 1)}{2} \gamma'_0(1 + \delta'_0)] - \frac{n_1(k_1 - 1)k_{3,0}}{2} - (k'_{3,0} + k'_{2,0}) \} a_1^{(1)^2 - \\
& - \frac{(\gamma_0 - 1)}{2R_2^4} [2 + n_1(k_1 - 1)] b^{(1)^2} + [\gamma_0(\delta_0 - 1) - k'_{1,0} + \\
& + \frac{n(k_1 - 1)}{2} \gamma'_0(k_0 + \delta'_0)] \frac{a^{(1)} b^{(1)}}{R_2^2} \}.
\end{aligned}$$

Якщо, як і раніше, покласти $R_1 \rightarrow \infty$, $q=0$, то одержимо (при $\alpha_1 := \frac{\gamma_0 \alpha - 1}{\gamma_0 - 2}$):
для пластини:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{\text{II}} &= -P \frac{a^2}{R^2} \left[1 - \frac{(\gamma_0 - 2)P}{2(H_0)} \left(\alpha_1 - \frac{a^2}{R^2} \right) \right]; \\
\sigma_r^{\text{II}} &= P \frac{a^2}{R^2} \left[1 - \frac{(\gamma_0 - 2)P}{2(H_0)} \left(\alpha_1 - \frac{a^2}{R^2} - \frac{2\gamma_0}{\gamma_0 - 2} \frac{a^2}{R^2} \right) \right];
\end{aligned} \quad (3.14)$$

для шайби:

$$\sigma_r^{\text{II}} = \sigma_\theta^{\text{II}} = -P \left[1 - \frac{P(\gamma_0 - 2)}{2(H_0)} \left(\alpha_1 - 1 - \frac{2 + n_1(k_1 - 1)}{2(\gamma_0 - 2)} \right) \right]. \quad (3.15)$$

Використовуючи співвідношення (3,7), (3,9), (3,10), можна одержати рішення і в інших частинних випадках.

Якщо матеріал пластини та впресованих шайб однаковий, то рішення задачі можна отримати, використовуючи метод Д. Й. Шермана [6].

§ 4. РІШЕННЯ ПЕРШОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ БЕЗМЕЖНОЇ ПЛОЩИНИ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ

Розглянемо безмежну площину з криволінійним отвором, до контуру якого прикладена деяка система зовнішніх зусиль; напружений стан на безмежності будемо вважати однорідним.

Якщо ввести функцію $Z = \omega(\zeta)$ (або $\eta = \omega(\zeta)$), яка відображає область на безмежну площину з круговим отвором, то потенціальні функції другого порядку записуються таким чином:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(2)}(\zeta) &= B^{(2)} \ln \zeta + R \Gamma^{(2)} \zeta + \varphi_0^{(2)}(\zeta); \\
\psi^{(2)}(\zeta) &= B'^{(2)} \ln \zeta + R \Gamma'^{(2)} \zeta + \psi_0^{(2)}(\zeta),
\end{aligned} \quad (4.1)$$

де коефіцієнти $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma'^{(2)}$ характеризують напружений стан на безмежності.

Функції $\varphi_0^{(2)}(\zeta)$ і $\psi_0^{(2)}(\zeta)$ визначаються з граничних умов за відомими формулами М. І. Мусхелішвілі [5]:

$$\varphi_0^{(2)}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0^{(2)}\left(\frac{1}{\sigma}\right)} - K_0(\sigma) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}; \quad (4.2)$$

$$\psi_0^{(2)}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0^{(2)}(\sigma) - \overline{K_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta},$$

де

$$K_0(\sigma) = f^{(2)}(\sigma) + F(\sigma, \gamma, \delta) - \Gamma^{(2)} R \sigma \left[1 + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)\sigma} \right] - \overline{\Gamma'}^{(2)} \frac{R}{\sigma} - \\ - (B^{(2)} - \overline{B'}^{(2)}) \ln \sigma - \sigma \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{B}^{(2)};$$

$$\Gamma^{(2)} = \frac{1}{2} \{ [\gamma(1 + \delta)(k - 1) - k_2 - k_3] \Gamma^{(1)^2} - \gamma \Gamma'^{(1)} \overline{\Gamma}^{(1)} \};$$

$$\Gamma'^{(2)} = [\gamma(k - 2 - \delta) - k_1] \Gamma^{(1)} \Gamma'^{(1)};$$

$$\Gamma^{(1)} = \frac{1}{4} (N_1 + N_2); \quad \Gamma'^{(1)} = -\frac{1}{2} (N_1 + N_2) e^{-2i\alpha};$$

N_1, N_2 — головні напруження на безмежності.

Якщо контур отвору заданий в недеформованому тілі, то $K_0(\sigma)$ замінюється на $K_0^*(\sigma)$.

Як приклад наведемо, обмежуючись другим наближенням, формулу напруження σ_{ϑ} на контурі для площини з еліптичним отвором, яка піддається дії всебічного розтягу на безмежності ($N_1 = N_2$):

$$\sigma_{\vartheta}^I = \frac{2N}{D} \left\{ (1 - m^2) + \frac{N}{2(\sigma H)} \left[R_1 + R_2 \cos 2\vartheta + \frac{1}{D} (R_3 + R_4 \cos 2\vartheta + \right. \right. \\ \left. \left. + R_5 \cos 4\vartheta) \right] \right\}; \quad (4.3)$$

$$\sigma_{\vartheta}^{II} = \frac{2N}{D} \left\{ (1 - m^2) + \frac{N}{2(\sigma H)} \left[R_1^* + R_2^* \cos 2\vartheta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{D} (R_3^* + R_4^* \cos 2\vartheta + R_5^* \cos 4\vartheta) \right] \right\},$$

де

$$R_1 = 2(1 - m^2)\Gamma^{(2)} - 2mC + \frac{\gamma}{4}(1 - k\delta)(1 + m^2); \quad R_2 = \frac{\gamma}{2}m(1 - k\delta) + 2C;$$

$$R_3 = \gamma \left[(1 - m^2)^2 \left(1 - \frac{k}{2} \right) - km^2 - 4m^2(k + 1) \right];$$

$$R_4 = 2\gamma m(1 + m^2)(k + 1); \quad R_5 = -\gamma km^2;$$

$$D = 1 - 2m \cos 2\vartheta + m^2; \quad C = -\frac{m}{4} [\gamma(k + 1)(1 - \delta) - k_3];$$

$$R_1 = R_2^*; \quad R_2 = R_2^*; \quad R_5 = R_5^*;$$

$$R_3^* = \gamma \left[(1 - m^2)^2 \left(1 - \frac{k}{2} \right) - km^2 \right] - 4m^2(k + 1)(\gamma - 1);$$

$$R_4^* = 2m(1 + m^2)(k + 1)(\gamma - 1).$$

Використовуючи методи Мусхелішвілі, можна одержати рішення і інших задач нелінійної плоскої теорії пружності.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. В. Новожилов. Теория упругости. Судпромгиз. 1958.
2. A. E. Green, W. Zerna. Theoretical elasticity, Oxford, 1954.
3. J. E. Adkins, A. E. Green, G. G. Nicholas. Two-dimensional theory of elasticity for finite deformations. Phil. Trans. ser. A., 247, 1954.
4. J. E. Adkins, A. E. Green. Plane problems in second-order elasticity theory. Proc. Roy. Soc. ser. A., N 1219, vol 239, 1957.
5. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
6. Д. И. Шерман. Об одной задаче теории упругости. ДАН СССР, т. XXVII, № 4, 1940.
7. Г. М. Савін, Ю. І. Койфман. Деякі задачі плоскої нелінійної теорії пружності. Прикладна механіка, т. VII, № 6, 1961.

Д. Г. ХЛІБНИКОВ

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ В ПІВНЕСКІНЧЕННІЙ АНІЗОТРОП- НІЙ ПЛАСТИНЦІ З ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

В роботі М. П. Шереметьєва і автора [5] розв'язано задачу про пружну рівновагу ізотропної півплощини з підкріпленням краєм і вказано, що розв'язок може бути поширений і на випадок анізотропної півплощини. Нижче подається цей розв'язок. Іншим методом без дослідження одержаних результатів задача розв'язана Галасі [8].

Нехай півнескінченна пружна анізотропна пластинка ($y \leq 0$), край якої спаяний з нескінченно довгим тонким пружним прямолінійним стержнем сталої жорсткості, знаходиться в умовах узагальненого плоского напруженого стану. Стержень завдяки незначній його висоті будемо вважати пружною лінією, що працює на згин та розтяг. Інтенсивність прикладеного до стержня поперечного та поздовжнього навантаження позначимо через $q(x)$ і $n(x)^*$, а шукані нормальну та дотичну складові контактних напружень на контурі спаю пластинки і стержня — через $p(x)$ і $t(x)$.

На лінії спаю $y=0$, крім рівності напружень, повинна виконуватись також умова рівності переміщень стержня u_0 , v_0 та півплощини u , v :

$$u = u_0, \quad v = v_0. \quad (1)$$

Переміщення стержня зв'язані з діючим на нього навантаженням формулами опору матеріалів [2] (див. також [5])

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = \frac{1}{G_1} [t(x) - n(x)], \quad (2)$$

$$\frac{d^4 v_0}{dx^4} = \frac{1}{G_2} [q(x) - p(x)],$$

де G_1 і G_2 — жорсткості стержня на розтяг та згин, віднесені до товщини пластинки.

Використовуючи для величин, що характеризують напружено-деформований стан пластинки, звичайні позначення [1], помічаємо, що з закону Гука

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \quad (3)$$

* Величини $q(x)$ і $n(x)$ віднесено до товщини пластинки, тобто вони мають розмірність напружень.

з врахуванням рівнянь рівноваги

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\quad (4)$$

випливає

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 2a_{16}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - a_{11}\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} + a_{26}\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + (a_{12} + a_{66})\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}.\end{aligned}\quad (5)$$

Тому умови (1) можна записати в формі:

$$\left. \begin{aligned}\left[a_{11}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + a_{16}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right]_{y=0} &= \frac{1}{G_1} [t(x) - n(x)], \\ \left[2a_{16}\frac{\partial^3 \sigma_x}{\partial x^3} - a_{11}\frac{\partial^3 \sigma_x}{\partial x^2 \partial y} + a_{26}\frac{\partial^3 \sigma_y}{\partial x^3} + (a_{12} + a_{66})\frac{\partial^3 \tau_{xy}}{\partial x^3} \right]_{y=0} &= \frac{1}{G_2} [q(x) - p(x)].\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Система (6) є вихідною для визначення $p(x)$ і $t(x)$. При цьому вирази напружень в лівих частинах через функції $p(x)$ і $t(x)$ одержуються з відомого (див., напр., [1] стор. 114) розв'язку плоскої задачі для непідкріпленої анізотропної півплощини при заданих на її краю напруженнях $p(x)$ і $t(x)$.

Умовимось надалі позначати трансформанту Фур'є деякої функції $f(x)$ через $\tilde{f}(\lambda)$, тобто

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx \quad (7)$$

і

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \quad (8)$$

Тоді трансформанти Фур'є компонентів напруження в півплощині, одержані методом інтегральних перетворень Фур'є, будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_y &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[(\mu_1 e^{-i\lambda \mu_2 y} - \mu_2 e^{-i\lambda \mu_1 y}) \tilde{p} + (e^{-i\lambda \mu_2 y} - e^{-i\lambda \mu_1 y}) \tilde{t} \right], \\ \tilde{\tau}_{xy} &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[\mu_1 \mu_2 (e^{-i\lambda \mu_1 y} - e^{-i\lambda \mu_2 y}) \tilde{p} + (\mu_1 e^{-i\lambda \mu_1 y} - \mu_2 e^{-i\lambda \mu_2 y}) \tilde{t} \right], \\ \tilde{\sigma}_x &= \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[\mu_1 \mu_2 (\mu_2 e^{-i\lambda \mu_2 y} - \mu_1 e^{-i\lambda \mu_1 y}) \tilde{p} + (\mu_2^2 e^{-i\lambda \mu_2 y} - \mu_1^2 e^{-i\lambda \mu_1 y}) \tilde{t} \right]\end{aligned}\quad (9)$$

при $\lambda \geq 0$. Якщо $\lambda < 0$, то вирази трансформант в (9) і далі одержуються заміною μ_1 і μ_2 на $\bar{\mu}_1$ і $\bar{\mu}_2$ відповідно.

Тут

$$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k, \quad \bar{\mu}_k = \alpha_k - i\beta_k \quad (\beta_k > 0), \quad k = 1, 2 \quad (10)$$

корені характеристичного рівняння [1]:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0, \quad (11)$$

які припускаємо різними. У випадку попарно рівних коренів ($\mu_1 = \mu_2$) відповідні формули одержуються з (9) граничним переходом $\mu_2 \rightarrow \mu_1$. Корені рівняння (11) зв'язані з його коефіцієнтами відомими формулами Вієта:

$$\begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 + \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 &= \frac{2a_{16}}{a_{11}}, \\ \mu_1\mu_2 + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 + (\mu_1 + \mu_2)(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2) &= \frac{1}{a_{11}}(2a_{12} + a_{66}), \\ \mu_1\mu_2(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2) + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2(\mu_1 + \mu_2) &= \frac{2a_{26}}{a_{11}}, \\ \mu_1\mu_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 &= \frac{a_{22}}{a_{11}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Зокрема, при $y=0$ з (9) випливає

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_y &= \tilde{p}, \quad \tilde{\tau}_{xy} = \tilde{t}, \quad \tilde{\sigma}_x = -\mu_1\mu_2\tilde{p} - (\mu_1 + \mu_2)\tilde{t}, \\ \frac{d\tilde{\sigma}_x}{dy} &= i\lambda[\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2)\tilde{p} + (\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)\tilde{t}]. \end{aligned} \quad (13)$$

Застосовуючи тепер перетворення Фур'є до рівнянь (6) та враховуючи (13), а також співвідношення (12), приходимо до системи двох алгебраїчних рівнянь відносно $\tilde{p}$ і $\tilde{q}$, розв'язок якої записується ($\lambda \geq 0$):

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\lambda) &= \frac{1}{D(\lambda)}[(G_1 a_3 \lambda + 1)\tilde{q} + iG_2 \bar{a}_2 \lambda^3 \tilde{n}], \\ \tilde{t}(\lambda) &= \frac{1}{D(\lambda)}[-iG_1 a_2 \lambda \tilde{q} + (G_2 a_1 \lambda^3 + 1)\tilde{n}], \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$D(\lambda) = G_1 G_2 a_0 \lambda^4 + G_2 a_1 \lambda^3 + G_1 a_3 \lambda + 1,$$

а для сталих, що залежать від пружних властивостей півплощини, введено позначення:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_1 a_3 - a_2 \bar{a}_2, \\ a_1 &= i[a_{26} - a_{11}\mu_1\mu_2(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)] = a_{22}\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \frac{\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}\right), \\ a_2 &= b_1 + b_2 i = a_{12} - \mu_1\mu_2 a_{11}, \\ a_3 &= i[a_{16} - a_{11}(\mu_1 + \mu_2)] = a_{11}(\beta_1 + \beta_2). \end{aligned} \quad (16)$$

Зауважимо, що $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, і якщо припустити $\beta_1\beta_2 > \alpha_1^2$, $\beta_1\beta_2 > \alpha_2^2$, то і $a_0 > 0$.

У випадку ортотропної півплощини з головними напрямками, що паралельні та перпендикулярні до прямолінійного краю, $b_2 = 0$ і всі зазначені сталі є додатними та виражаються через технічні пружні константи E_1 , E_2 , G , ν_1 , ν_2 формулами

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1E_2} + \frac{1}{GV\sqrt{E_1E_2}}, \\
a_1 &= \sqrt{\frac{1}{E_2} \left(\frac{1}{G} + \frac{2(1-\sqrt{\nu_1\nu_2})}{\sqrt{E_1E_2}} \right)}, \\
a_2 &= \frac{1-\sqrt{\nu_1\nu_2}}{\sqrt{E_1E_2}}, \\
a_3 &= \sqrt{\frac{1}{E_1} \left(\frac{1}{G} + \frac{2(1-\sqrt{\nu_1\nu_2})}{\sqrt{E_1E_2}} \right)}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Остаточні вирази для $p(x)$ і $t(x)$ одержуються з (14) за допомогою формул (7) і (8)

$$\begin{aligned}
p(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{G_1 a_3 \lambda + 1}{D(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^\infty q(t) \cos \lambda(t-x) dt - \\
&- \frac{G_2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^3 d\lambda}{D(\lambda)} \int_{-\infty}^\infty n(t) [b_1 \sin \lambda(t-x) - b_2 \cos \lambda(t-x)] dt, \\
t(x) &= \frac{G_1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{D(\lambda)} \int_{-\infty}^\infty q(t) [b_1 \sin \lambda(t-x) + b_2 \cos \lambda(t-x)] dt + \\
&+ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{G_2 a_1 \lambda^3 + 1}{D(\lambda)} d\lambda \int_{-\infty}^\infty n(t) \cos \lambda(t-x) dt
\end{aligned} \tag{18}$$

і мають той же вигляд, що і для ізотропної півплощини [5], для якої

$$a_0 = \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{E^2}, \quad a_1 = a_3 = \frac{2}{E}, \quad a_2 = b_1 = \frac{1-\nu}{E}, \quad b_2 = 0. \tag{19}$$

Якщо припустити, що функції $q(x)$ і $n(x)$ є абсолютно інтегрованими в інтервалі $(-\infty, \infty)$, то інтеграли в (18) збігатимуться, тому що многочлен $D(\lambda)$ не має коренів в проміжку інтегрування. Неважко переконатись, що $D(\lambda)$ завжди має два дійсних від'ємних і два комплексних корені. Насправді [3], його коефіцієнти є додатними, а дискримінант

$$\Delta = -\frac{1}{64} G_1^3 G_2^3 a_2 \bar{a}_2 (9a_1 a_3 - 8a_2 \bar{a}_2)^2 - \frac{27}{256} G_2^2 (G_1^3 a_0 a_3 - G_2 a_1^2)^2$$

від'ємним.

Формули для напружень у довільній точці півплощини одержуються після підстановки (14) в (9) і використання формули обернення (8).

Нехай зовнішнє навантаження являє собою зосереджену поперечну силу P , що прикладена в початку координат. Тоді у випадку пластинки одиничної товщини

$$p(x) = -\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{G_1 a_3 \lambda + 1}{D(\lambda)} \cos \lambda x d\lambda, \tag{20}$$

$$t(x) = \frac{PG_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b_1 \sin \lambda x - b_2 \cos \lambda x}{D(\lambda)} \lambda d\lambda, \quad (20)$$

а для згинаючого момента в стержні будемо мати

$$M(x) = \frac{PG_2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G_1 a_0 \lambda + a_1}{D(\lambda)} \lambda \cos \lambda x d\lambda. \quad (21)$$

Інтеграли в правих частинах (20) і (21) після розкладу їх раціональних ядер на найпростіші дробі нескладними перетвореннями можуть бути виражені через функції $\text{Si}(z)$ і $\text{Ci}(z)$, причому в силу раніш сказаного про корені многочлена $D(\lambda)$ при підрахунках доведеться знаходити значення цих функцій і для комплексних значень аргумента*. Тому практично, мабуть, зручніше обчислювати інтеграли чисельним інтегруванням, користуючись при цьому завдяки наявності осцилюючого множника спеціальними квадратурними формулами [4, стор. 92—94].

При великих значеннях x інтеграли обчислюються на основі асимптотичних розвинень [4]:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(\lambda) \cos \lambda x d\lambda &= -\frac{f'(0)}{x^2} + \frac{f'''(0)}{x^4} - \frac{f^{(V)}(0)}{x^6} + \dots, \\ \int_0^{\infty} f(\lambda) \sin \lambda x d\lambda &= \frac{f(0)}{x} - \frac{f''(0)}{x^3} + \frac{f^{(IV)}(0)}{x^5} - \dots, \end{aligned}$$

при цьому похідні раціонального ядра $f(\lambda)$ в нулі зручно знаходити з розкладу його в ряд Маклорена.

Таким шляхом при великих x одержимо:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{PG_2}{\pi} \left[\frac{3!a_1}{x^4} - 5! G_1^2 a_3 \frac{a_2 \bar{a}_2}{x^6} + 7! G_1 (2G_2 a_1 + G_1^3 a_3^3) \frac{a_2 \bar{a}_2}{x^8} - \dots \right], \\ t(x) &= \frac{PG_1}{\pi} \left[\frac{b_2}{x^2} + 2G_1 a_3 \frac{b_1}{x^3} - 3! G_1^2 a_3^2 \frac{b_2}{x^4} - 4! (G_2 a_1 + G_1^3 a_3^3) \frac{b_1}{x^5} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Найбільшу величину $p(x)$ і $M(x)$ мають під силою при $x=0$. Не важко оцінити вплив жорсткості розтягу G_1 на ці величини. При $G_1=0$ після інтегрування з (20) і (21) одержуємо

$$p_{\max}^0 = -\frac{2P}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{G_2 a_1}}, \quad M_{\max}^0 = \frac{2P}{3\sqrt{3}} \sqrt[3]{G_2 a_1}, \quad (23)$$

а при $G_1=\infty$

$$p_{\max}^{\infty} = -\frac{2P}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{G_2 a_1(1-k)}}, \quad M_{\max}^{\infty} = \frac{2P}{3\sqrt{3}} \sqrt[3]{G_2 a_1(1-k)}, \quad (24)$$

де

$$k = \frac{a_2 \bar{a}_2}{a_1 a_3}. \quad (25)$$

Легко перевірити, що $p_{\max}$ і $M_{\max}$ є монотонними функціями від G_1 . Отже, при $0 < G_1 < \infty$ їх значення містяться між граничними, що да-

* Таблиці інтегрального синуса і косинуса комплексного аргумента відсутні, хоч на необхідність їх складання є вказівки в літературі (див. напр., [6]).

ються формулами (23) і (24). Однак ці граничні значення, як впливає з наведеної нижче таблиці, мало відрізняються один від одного (в усякому разі для багатьох поширених анізотропних матеріалів).

Таблиця

Порівняння $p_{\max}$ і $M_{\max}$ при $G_1 = 0$ і $G_1 = \infty$

Матеріал	$E_1, 10^5 \text{ кг/см}^2$	$E_2, 10^5 \text{ кг/см}^2$	$G, 10^5 \text{ кг/см}^2$	ν_2	$k = \frac{a_2 \bar{a}_2}{a_1 a_3}$	$\frac{p_{\max}^{\circ}}{p_{\max}}$	$\frac{M_{\max}^{\circ}}{M_{\max}}$
Сосна	1,0	0,042	0,075	0,01	0,195	0,930	1,075
Дельта-деревина	3,05	0,467	0,22	0,02	0,123	0,957	1,045
Авіафанера березова	1,2	0,6	0,07	0,036	0,064	0,978	1,022
СВАМ	3,46	3,46	0,81	0,13	0,125	0,956	1,046
КАСТ-В	1,97	1,36	0,33	0,12	0,110	0,962	1,040
Ізотропний матеріал	—	—	—	0,3	0,123	0,957	1,045

Примітка. Чисельні значення пружних констант для склопластиків СВАМ і КАСТ-В взяті із збірника [7], а для деревини наведені в монографії [1, стор. 52—55].

Таким чином, врахування розтягливості підкріплюючого стержня при дії сили, перпендикулярної до його осі, майже не впливає на максимуми згинаючого моменту $M(x)$ та контактного тиску $p(x)$. Однак величина поздовжньої сили в стержні

$$N(x) = -\frac{PG_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b_1 \cos \lambda x + b_2 \sin \lambda x}{D(\lambda)} d\lambda \quad (26)$$

істотно залежить від G_1 , нескінченно зростаючи при $G_1 \rightarrow \infty$.

Відзначимо також, що для ортотропної півплощини ($b_2=0$) стискуєча поздовжня сила $N(x)$ має найбільше значення при $x=0$, а у випадку неортотропної пластинки відбувається зміщення її максимуму.

Якщо зосереджена в точці $(0,0)$ сила Q направлена вздовж осі стержня, то

$$p(x) = \frac{QG_2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b_1 \sin \lambda x + b_2 \cos \lambda x}{D(\lambda)} \lambda^3 d\lambda, \quad (27)$$

$$t(x) = \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G_2 a_1 \lambda^3 + 1}{D(\lambda)} \cos \lambda x d\lambda,$$

а при дії зосередженого моменту M , прикладеного в початку координат,

$$p(x) = \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G_1 a_3 \lambda + 1}{D(\lambda)} \lambda \sin \lambda x d\lambda, \quad (28)$$

$$t(x) = \frac{MG_1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{b_1 \cos \lambda x + b_2 \sin \lambda x}{D(\lambda)} \lambda^2 d\lambda.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. С. Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки, ГИТТЛ, 1957.
2. М. М. Филоненко-Бородич и др. Курс сопротивления материалов, т. I, ГИТТЛ, М., 1955.
3. А. К. Сушкевич. Основы высшей алгебры, ГТТИ, 1932.
4. К. Дж. Трантер. Интегральные преобразования в математической физике, ГИТТЛ, 1956.
5. М. П. Шереметьев и Д. Г. Хлебников. Упругое равновесие полуплоскости с подкрепленным краем, Доповіді та повідомлення ЛДУ, вип. 7, ч. III, 1957.
6. E. K r e y s i n g. Über den allgemeinen Integralsinus $Si(z, a)$, Acta Mathematica (Uppsala), 85, 1951, s. 117—187.
7. Стеклотекстолиты и другие конструкционные пластики. Сборник статей. Оборонгиз, М., 1960.
8. А. А. Галаси. Об упругом равновесии полубесконечной анизотропной пластинки с подкрепленным краем. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение № 3, 1960.

Стаття надійшла 10. XII 1960.

М. П. ШЕРЕМЕТЬЄВ

ДО ПИТАННЯ ПРО ФУНКЦІЇ НАПРУЖЕНЬ В ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК

Функції напружень в теорії оболонок були введені А. І. Лур'є (1) і А. Л. Гольденвейзером (2) шляхом підбору двох векторів, які задовольняють однорідні умови рівноваги

$$\begin{aligned} \frac{\partial(BR_\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AR_\beta)}{\partial\beta} + AB\vec{R} &= 0, \\ \frac{\partial(BQ_\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AQ_\beta)}{\partial\beta} + AB[\tau_\alpha \times R_\alpha + \tau_\beta \times R_\beta] + AB\vec{L} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

і отримуються з (1), якщо прийняти $\vec{R}=0$, $\vec{L}=0$.

Перед тим як приступити до побудови нових функцій напружень, доведемо теорему, яка, на наш погляд, має безпосередній інтерес.

Теорема. Необхідною і достатньою умовою для виконання статичних рівнянь рівноваги, складених для довільної кінцевої частини оболонки, є умови рівноваги (1) і умови

$$R_\beta \cos \lambda + R_\alpha \sin \lambda = \vec{R}_t, \quad (2)$$

$$Q_\alpha \sin \lambda + Q_\beta \cos \lambda = \vec{Q}_t,$$

де λ — кут, утворений вектором $\vec{t}$ з вектором $\vec{\tau}_{(\beta)}$.

Для доведення візьмемо на оболонці яку-небудь точку O . Візьмемо цю точку в довільний контур γ . Позначимо через ω частину оболонки, обмеженої цим контуром. Рівняння статички для цієї частини оболонки будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{R}_t ds_\gamma + \iint_\omega \vec{R} d\omega &= 0, \\ \int_\gamma \vec{Q}_t ds_\gamma + \iint_\omega \vec{L} d\omega + \int_\gamma \vec{r} \times \vec{R}_t ds_\gamma + \iint_\omega \vec{r} \times \vec{R} d\omega &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Позначимо через $\vec{n}$, $\vec{\tau}_\alpha$, $\vec{\tau}_\beta$ одиничні вектори основного триєдра в точці O . Проведемо в точці O дотичну площину π (точка O може бути взята і на кривій γ).

Примітка. У позначеннях R_α , R_β , Q_α , Q_β , τ_α , τ_β , R_t , Q_t індекси не означають диференціювання.

Побудуємо поверхню, подібну поверхні ω . Для цього відкладемо радіус-вектор

$$\vec{\rho} = k\vec{r} \quad (4)$$

на радіусі-векторі $\vec{r}$, де $k \neq 1$.

Коли вектор $\vec{r}$ описує поверхню ω , кінець вектора $\vec{\rho}$ описує поверхню ω_1 , подібну ω .

Точці O буде відповідати точка O_1 поверхні ω_1 . Напрямок і інтенсивність навантаження, прикладеного до подібної оболонки, візьмемо

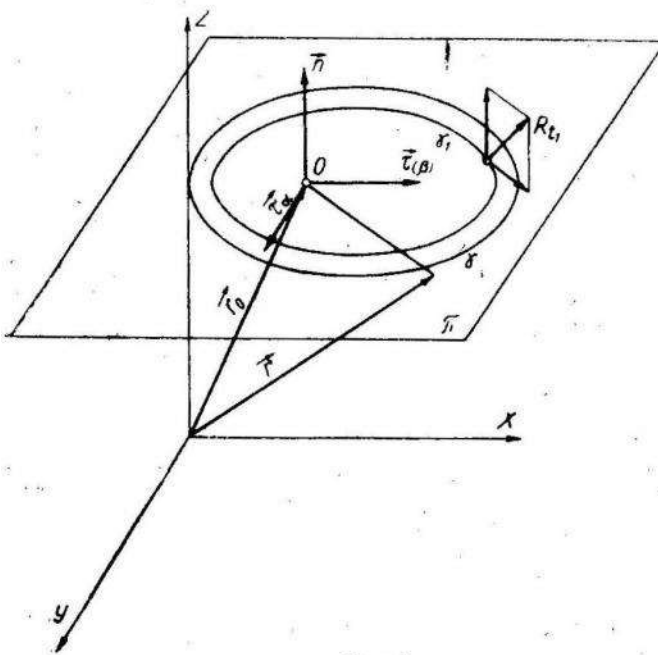


Рис.1.

таким же, як і в заданому. При такому її навантаженні зусилля і моменти у відповідних точках у довільному перетині в подібній і в заданій поверхнях будуть рівні. Якщо задана поверхня ω під дією прикладеного до неї навантаження знаходиться у рівновазі, то в рівновазі під дією прикладеного до неї навантаження буде знаходитись і подібна до неї оболонка. Рівняння рівноваги для подібної оболонки мають вигляд

$$\int_{\gamma_1} \vec{R}_t ds_{\gamma_1} + \iint_{\omega_1} \vec{R} d\omega_1 = 0, \quad (5)$$

$$\int_{\gamma_2} Q_t ds_{\gamma_2} + \int_{\gamma_1} \vec{\rho} \times \vec{R}_t ds_{\gamma_1} + \iint_{\omega_1} \vec{L} d\omega_1 + \iint_{\omega_1} \vec{\rho} \times \vec{R} d\omega_1 = 0,$$

де γ_1 — крива, яка обмежує поверхню ω_1 .

Розкладемо зусилля $\vec{R}_t$ і $\vec{R}$, моменти $\vec{Q}_t$ і $\vec{L}$ в подібній поверхні ω_1 на два напрямки. Одним з напрямків візьмемо напрямок, паралельний $\vec{n}$, побудований у точці O , за другий візьмемо лінію, паралельну лінії перетину дотичної площини π з площиною, яка проходить через перший напрямок і відповідно через вектори $\vec{R}_t$, $\vec{R}$; $\vec{Q}_t$ і $\vec{L}$. Так що

$$\begin{aligned} \vec{R}_t &= \vec{n} N_t + \vec{R}_t^*, & \vec{R} &= \vec{n} Z_n + \vec{R}^*, \\ \vec{Q}_t &= \vec{n} Q_t^{(n)} + \vec{Q}_t^*, & \vec{L} &= \vec{n} L_n + \vec{L}^*. \end{aligned} \quad (6)$$

Вектори в (6), позначені зірочкою, паралельні площині π . Кожне з рівнянь (5) тепер можна записати двома. Перше заміниться рівняннями вигляду

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \vec{R}_t^* ds_{\gamma_1} + \iint_{\omega_1} \vec{R}^* d\omega_1 &= 0, \\ \int_{\gamma_1} N_t ds_{\gamma_1} + \iint_{\omega_1} Z_n d\omega_1 &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Два наступні будуть еквівалентні другому рівнянню (5):

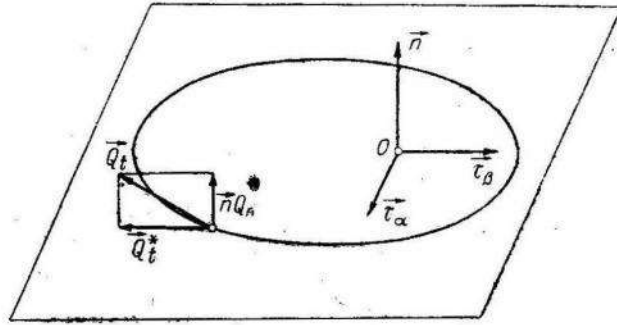


Рис. 2.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{Q}_t^* ds_{\gamma_1} + \iint_{\omega_1} \vec{L}^* d\omega_1 + \int_{\gamma_1} N_t \vec{\rho}^* \times \vec{n} ds_{\gamma_1} + \int_{\gamma_1} \vec{\rho}_n \times \vec{R}_t^* ds_{\gamma_1} + \\ + \iint_{\omega_1} Z_n \vec{\rho}^* \times \vec{n} d\omega_1 + \iint_{\omega_1} \vec{\rho}_n \times \vec{R}^* d\omega_1 = 0, \\ \vec{n} \int_{\gamma_1} Q_t^{(n)} ds_{\gamma_1} + \vec{n} \iint_{\omega_1} L_n d\omega_1 + \int_{\gamma_1} \vec{\rho}^* \times \vec{R}_t^* ds_{\gamma_1} + \iint_{\omega_1} \vec{\rho}^* \times \vec{R}^* d\omega_1 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де $\vec{\rho} = \vec{\rho}^* + \vec{\rho}_n$.

Тут вектор $\vec{\rho}^*$ паралельний площині π , ρ_n — перпендикулярний до неї. Спроектуємо поверхню ω і ω_1 на площину π і позначимо проєкції кривих γ_1 і γ на цю площину через γ'_1 і γ' . Тоді

$$\begin{aligned} ds_{\gamma_1} = \frac{1}{\cos(\pi, s)} ds_{\gamma'_1}, \quad ds_{\gamma} = \frac{1}{\cos(\pi, s)} ds_{\gamma'}, \\ d\omega = \frac{d\omega'}{\cos(\vec{n}, \vec{n}^0)}, \quad d\omega_1 = \frac{d\omega'_1}{\cos(\vec{n}, \vec{n}^0)}, \end{aligned} \quad (9)$$

де $ds_{\gamma'_1}$, $ds_{\gamma'}$ — елементи довжини дуги кривих γ'_1 і γ' , $d\omega'$, $d\omega'_1$ — елементи площ проєкцій поверхонь ω , ω_1 , площини π і вектор $\vec{s}$ одиничний вектор дотичної до кривої γ .

При цьому допускається, що контур γ обраний таким способом, що ні один з косинусів в (9) не перетворюється в нуль і при проектуванні не виникає перекривання. Криві γ' і γ'_1 також подібні, як і криві γ і γ' тому

$$d\omega'_1 = k^2 d\omega' \quad \text{і} \quad ds_{\gamma'_1} = k ds_{\gamma'}. \quad (10)$$

Позначимо через $\vec{R}_t^* = S^o \vec{s} + T^o \vec{t}$ складову напруження в довільному перерізі серединної поверхні, яка проходить через точку O , через $\vec{Q}_t^* = G^o \vec{s} + H^o \vec{t}$ згинальний момент у точці O в цьому пере-

різі і через N_t^o — нормальне зусилля в точці O . Зусилля $\vec{R}_t^o$ і момент $\vec{Q}_t^o$ лежать у площині π , зусилля N_t^o — перпендикулярно до площини. Переріз будемо брати такий, що одиничні вектори $\vec{s}$ і $\vec{t}$ відповідно були б паралельні одиничним векторам дотичної і нормалі кривої γ_1' або γ_1 .

Підставимо в (7) і в (8) співвідношення (9). Крім того, до першого і другого рівняння (7) і першого (8) додамо і віднімемо відповідно інтеграли

$$\int_{\gamma_1'} \vec{R}_t^{o*} ds_{\gamma_1'}, \int_{\gamma_1'} N_t^o ds_{\gamma_1'}, \int_{\gamma_1'} \vec{Q}_t^o ds_{\gamma_1'}.$$

У цих інтегралах змінним є напрямок перерізу, який проходить через точку O . До другого рівняння (8) нічого додавати і віднімати не будемо з тієї причини, що в точці O компонента вектора згинального моменту по нормалі до поверхні в цій точці дорівнює нулю. В результаті цих дій рівняння (7) і (8) легко приводяться до вигляду

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_1'} \left[\vec{R}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)} - \vec{R}_t^{o*} \right] ds_{\gamma_1'} + \int_{\gamma_1'} \vec{R}_t^o ds_{\gamma_1'} + \iint_{\omega_1'} \vec{R}^* \frac{d\omega_1'}{\cos(n, n^o)} = 0, \\ & \int_{\gamma_1'} \left[N_t \frac{1}{\cos(\pi, s)} - N_t^o \right] ds_{\gamma_1'} + \int_{\gamma_1'} N_t^o ds_{\gamma_1'} + \iint_{\omega_1'} Z_n \frac{d\omega_1'}{\cos(n, n^o)} = 0, \\ & \int_{\gamma_1'} \left[\vec{Q}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)} - \vec{Q}_t^o \right] ds_{\gamma_1'} + \int_{\gamma_1'} \vec{Q}_t^o ds_{\gamma_1'} + \iint_{\omega_1'} \vec{L}^* \frac{d\omega_1'}{\cos(n, n^o)} + \\ & + \int_{\gamma_1'} N_t^o \vec{\rho}_1^* \times \vec{n}^o \frac{ds_{\gamma_1'}}{\cos(\pi, s)} + \int_{\gamma_1'} \vec{\rho}_n \times \vec{R}_t^* \frac{ds_{\gamma_1'}}{\cos(\pi, s)} + \iint_{\omega_1'} Z_n \vec{\rho}^* \times \vec{n}^o \frac{d\omega_1'}{\cos(n, n^o)} + \\ & + \iint_{\omega_1'} \vec{\rho}_n \times \vec{R}^* \frac{d\omega_1'}{\cos(n, n^o)} = 0, \\ & \vec{n}^o \int_{\gamma_1'} Q_t^n \frac{ds_{\gamma_1'}}{\cos(\pi, s)} + \vec{n}^o \iint_{\omega_1'} L_n \frac{d\omega_1'}{\cos(n, n^o)} + \int_{\gamma_1'} \vec{\rho}^* \times \vec{R}_t^* \frac{ds_{\gamma_1'}}{\cos(\pi, s)} + \\ & + \iint_{\omega_1'} \vec{\rho}^* \times \vec{R}^* \frac{d\omega_1'}{\cos(n, n^o)} = 0. \end{aligned}$$

Величини $\vec{R}^* \frac{1}{\cos(\pi, s)}$, $N_t \frac{1}{\cos(\pi, s)}$, $\vec{Q}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)}$ мають неперервні частинні похідні по змінних α і β . Цього цілком достатньо, щоб ці величини задовольняли умові Ліпшица.

Величини $\vec{R}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)}$, $N_t \frac{1}{\cos(\pi, s)}$, $\vec{Q}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)}$ у точці O набувають значення $\vec{R}_t^o$, N_t^o , $\vec{Q}_t^o$. Отже, для підінтегральних виразів перших інтегралів трьох перших рівностей (11) для кожного окремо мають місце нерівності.

$$\begin{aligned}
\left| R_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)} - \vec{R}_t^{o*} \right| &\leq c_1 d_1, \\
\left| N_t^o \frac{1}{\cos(\pi, s)} - N_t^o \right| &\leq c_2 d_1, \\
\left| \vec{Q}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)} - \vec{Q}_t^o \right| &\leq c_3 d_1,
\end{aligned} \tag{12}$$

де d_1 — найбільша віддаль точки O до кривої γ_1' . Отже,

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_1'} \left(\vec{R}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)} - \vec{R}_t^{o*} \right) ds_{\gamma_1'} \right| &\leq c_1 d_1' l_{\gamma_1'}, \\
\left| \int_{\gamma_1'} \left(N_t^o \frac{1}{\cos(\pi, s)} - N_t^o \right) ds_{\gamma_1'} \right| &\leq c_2 d_1' l_{\gamma_1'}, \\
\left| \int_{\gamma_1'} \left(\vec{Q}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)} - \vec{Q}_t^o \right) ds_{\gamma_1'} \right| &\leq c_3 d_1' l_{\gamma_1'},
\end{aligned} \tag{13}$$

де $l_{\gamma_1'}$ — довжина кривої γ_1' .

Позначимо через d найбільшу віддаль від точки O до кривої γ' і через $l_{\gamma'}$ — її довжину. Тоді внаслідок подібності кривих γ_1' і γ'

$$l_{\gamma_1'} = k l_{\gamma'} \text{ і } d_1' = k d'. \tag{14}$$

В інтегралах $\int_{\gamma_1'} \vec{R}_t^o ds_{\gamma_1'}$, $\int_{\gamma_1'} N_t^o ds_{\gamma_1'}$, $\int_{\gamma_1'} \vec{Q}_t^o ds_{\gamma_1'}$ змінним є тільки напрямок перерізу, який проходить через точку O . Тому на основі (10) можна написати

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1'} \vec{R}_t^{o*} ds_{\gamma_1'} &= k \int_{\gamma'} \vec{R}_t^o ds_{\gamma'}, \\
\int_{\gamma_1'} N_t^o ds_{\gamma_1'} &= k \int_{\gamma'} N_t^o ds_{\gamma'}, \\
\int_{\gamma_1'} \vec{Q}_t^o ds_{\gamma_1'} &= k \int_{\gamma'} \vec{Q}_t^o ds_{\gamma'}.
\end{aligned} \tag{15}$$

З виразів (13) і (15) випливає, що при стягуванні контура γ_1' в точку O , тобто при $k \rightarrow 0$, інтеграли (13) прямують до нуля, як k^2 , а інтеграли (15) — як k ; легко показати, що останні інтеграли в перших трьох рівняннях (11) внаслідок обмеженості підінтегральних функцій при стягуванні контура γ_1' в точку O будуть прямувати до нуля не повільніше як k^2 . Покажемо це на одному з них. Візьмемо модуль інтеграла

$$\left| \int_{\gamma_1'} N_t^o \vec{\rho}_1^* \times \vec{n}^o \frac{ds_{\gamma_1'}}{\cos(\pi, s)} \right| \leq \int_{\gamma_1'} \left| \frac{N_t}{\cos(\pi, s)} \rho_1^* \right| ds_{\gamma_1'} \leq B d_1 l_{\gamma_1'} = k^2 B d l_{\gamma'}, \tag{16}$$

де $B = \max \left| \frac{N_t}{\cos(\pi, s)} \right|$ на кривій γ' . Звідси випливає сказане твердження. Що стосується останнього рівняння в (11), то при стягуванні контура γ_1'

в точку O всі інтеграли цього рівняння будуть прямувати до нуля не повільніше як k^2 .

Підставимо тепер у перші три рівняння (11) замість других доданків їх вирази з (15), потім поділимо ці рівняння на k і перейдемо до границі при $k \rightarrow 0$. В результаті граничного переходу в цих рівняннях залишаться тільки інтеграли, незалежні від k :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma'} \vec{R}_t^{o*} ds_{\gamma'} &= 0, \quad \int_{\gamma'} N_t^o ds_{\gamma'} = 0, \\ \int_{\gamma'} \vec{Q}_t^o ds_{\gamma'} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Четверте рівняння (11) при стягуванні контура γ'_1 в точку зникне.

Оскільки контур інтегрування в (17) довільний, то за контур інтегрування γ' можна взяти трикутник, дві сторони якого CD і DE (див. рис. 3)

відповідно паралельні векторам $\vec{\tau}_\beta$ і $\vec{\tau}_\alpha$, проведеним у точці O . Позначимо через λ кут, утворений вектором $\vec{t}$ з вектором $\vec{\tau}_\beta$.

Тоді

$$\begin{aligned} \int_{\gamma'} \vec{R}_t^o ds_{\gamma'} &= DCR_{-\beta}^o + DER_{-\alpha}^o + \\ &+ R_t^o CE = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Рис. 3.

Але

$$R_{-\alpha}^o = -R_\alpha^o, \quad R_{-\beta}^o = -R_\beta^o \quad \text{і} \quad \frac{CD}{CE} = \cos \lambda, \quad \frac{DE}{CE} = \sin \lambda.$$

Отже, з (18) маємо

$$\vec{R}_\beta^* \cos \lambda + \vec{R}_\alpha^* \sin \lambda = \vec{R}_t^*, \quad (19)$$

де

$$\vec{R}_\beta^* = \vec{\tau}_\beta T_2 + \vec{\tau}_\alpha S_2, \quad \vec{R}_\alpha^* = \vec{\tau}_\alpha T_1 + \vec{\tau}_\beta S_1, \quad \vec{R}_t^* = \vec{s} S + \vec{t} T.$$

Зробивши аналогічні обчислення в двох других інтегралах, одержимо

$$\begin{aligned} \vec{Q}_\alpha \sin \lambda + \vec{Q}_\beta \cos \lambda &= \vec{Q}_t, \\ N_2 \cos \lambda + N_1 \sin \lambda &= N_t. \end{aligned} \quad (20)$$

В кінцевих формулах (19) і (20) індекс «0» опущений, бо ці формули справедливі для довільної точки серединної поверхні, включаючи й її границю. Формули (19) і (20) дозволяють знайти зусилля і моменти в довільній точці серединної поверхні по довільному розрізу, який проходить через цю точку, якщо відомі зусилля і моменти в цій точці по головних розрізах. Ці формули будуть граничними умовами оболон-

ки, якщо вважати, що точка O взята на лінії γ , яка є границею середньої поверхні, і сторона трикутника CE паралельна дотичній до лінії γ в точці O .

Запишемо рівність (19) і (20) у скалярній формі. Для цього в (19) і в перше рівняння (20) замість $\vec{R}_t$, $\vec{R}_\alpha$, R_β і $\vec{Q}_t$, $\vec{Q}_\alpha$, $\vec{Q}_\beta$ відповідні вирази і замість $\vec{\tau}_\alpha$ і $\vec{\tau}_\beta$ підставимо їх вирази через $\vec{s}$ і $\vec{t}$

$$\vec{\tau}_\beta = \vec{s} \sin \lambda + \vec{t} \cos \lambda,$$

$$\vec{\tau}_\alpha = \vec{t} \sin \lambda - \vec{s} \cos \lambda.$$

Порівнюючи після цієї підстановки коефіцієнти при векторах $\vec{t}$ і $\vec{s}$, знайдемо, що

$$S = (T_2 - T_1) \sin \lambda \cos \lambda - S_2 \cos^2 \lambda + S_1 \sin^2 \lambda, \quad (21)$$

$$T = (S_2 + S_1) \sin \lambda \cos \lambda + T_2 \cos^2 \lambda + T_1 \sin^2 \lambda,$$

$$N = N_2 \cos \lambda + N_1 \sin \lambda,$$

$$G = (H_2 + H_1) \sin \lambda \cos \lambda + G_2 \cos^2 \lambda + G_1 \sin^2 \lambda, \quad (22)$$

$$H = (G_1 - G_2) \sin \lambda \cos \lambda + H_2 \cos^2 \lambda - H_1 \sin^2 \lambda.$$

З рівностей (20) легко отримати формули для S , T , G , H , N і для того випадку, коли трикутник CDE косокутний.

Таким чином, доведено, що отримані граничні умови (21) і (22) є наслідком статичних рівнянь (3).

Використаємо знову рівняння (3). Підставимо в ці рівняння замість $\vec{R}_t$ його вираз, отриманий з (19)

$$\vec{R}_t = \vec{R}_t^* + \vec{n} N_t,$$

і замість $\vec{Q}_t$ — його вираз із (20).

У результаті цієї підстановки рівняння рівноваги (3) приводяться до вигляду

$$\int_{\gamma} (\vec{R}_\beta \cos \lambda + \vec{R}_\alpha \sin \lambda) ds_\gamma + \iint_{\omega} \vec{R} d\omega = 0, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\omega} \vec{r} \times \vec{R} d\omega + \iint_{\omega} \vec{L} d\omega + \int_{\gamma} (\vec{Q}_\alpha \sin \lambda + \vec{Q}_\beta \cos \lambda) ds_\gamma + \\ + \int_{\gamma} \vec{r} \times (\vec{R}_\alpha \sin \lambda + \vec{R}_\beta \cos \lambda) ds_\gamma = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Помітимо, що $A d\alpha = ds_\alpha = ds_\gamma \cos(\tau_\alpha, \vec{s})$, $B d\beta = ds_\beta = ds_\gamma \cos(\tau_\beta, \vec{s})$. Безпосередньо з рисунка (3) видно, що

$$\cos(\tau_\alpha, \vec{s}) = -\cos \lambda, \quad \cos(\tau_\beta, \vec{s}) = \sin \lambda.$$

Тому з (23) і (24) випливає

$$\int_{\gamma^*} -(A\vec{R}_\beta) d\alpha + (B\vec{R}_\alpha) d\beta + \iint_{\omega_{(\alpha,\beta)}} AB\vec{R} d\alpha d\beta = 0, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^*} [-(A\vec{Q}_\beta + \vec{r} \times A\vec{R}_\beta) d\alpha + (B\vec{Q}_\alpha + \vec{r} \times B\vec{R}_\alpha) d\beta] + \\ + \iint_{\omega_{(\alpha,\beta)}} (\vec{L} + \vec{r} \times \vec{R}) AB d\alpha d\beta = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

де $\omega_{(\alpha,\beta)}$ — область зміни параметрів α і β і γ^* гранична крива цієї області. Піддамо одержані вирази дальшому перетворенню. За формулою Гріна маємо

$$\begin{aligned} \iint_{\omega_{\alpha\beta}} \left\{ \frac{\partial(B\vec{R}_\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(A\vec{R}_\beta)}{\partial\beta} + AB\vec{R} \right\} d\alpha d\beta = 0, \\ \iint_{\omega_{\alpha\beta}} \left\{ \frac{\partial B(\vec{Q}_\alpha + \vec{r} \times \vec{R}_\beta)}{\partial\alpha} + \frac{\partial A(\vec{Q}_\beta + \vec{r} \times \vec{R}_\alpha)}{\partial\beta} + (\vec{L} + \vec{r} \times \vec{R}) AB \right\} d\alpha d\beta = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Область $\omega_{\alpha\beta}$ довільна внаслідок довільності області ω , і, значить, до (27) можна застосувати принцип Остроградського, на основі якого з (27) випливає рівність нулю підінтегральних виразів

$$\begin{aligned} \frac{\partial B\vec{R}_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial A\vec{R}_\beta}{\partial\beta} + AB\vec{R} = 0, \\ \frac{\partial B\vec{Q}_\beta}{\partial\alpha} + \frac{\partial A\vec{Q}_\beta}{\partial\beta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial\alpha} \times B\vec{R}_\alpha + \frac{\partial \vec{r}}{\partial\beta} \times A\vec{R}_\beta + \vec{r} \times \left(\frac{\partial B\vec{R}_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial A\vec{R}_\beta}{\partial\beta} + AB\vec{R} \right) + \\ + AB\vec{L} = 0. \end{aligned} \quad (28) \quad (29)$$

Передостанній доданок в (29) на основі (28) можна відкинути. Крім цього, проведемо заміну

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial\alpha} = A\vec{\tau}_\alpha, \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial\beta} = B\vec{\tau}_\beta.$$

В результаті цих дій з (29) остаточно одержимо

$$\frac{\partial B\vec{Q}_{(\alpha)}}{\partial\alpha} + \frac{\partial A\vec{Q}_{(\beta)}}{\partial\beta} + AB(\vec{\tau}_\alpha \times \vec{R}_{(\alpha)} + \vec{\tau}_\beta \times \vec{R}_{(\beta)}) + LAB = 0. \quad (30)$$

Таким чином, показано, що рівняння (28) і (30) разом з рівностями (19) і (20) є необхідні умови для виконання статичних рівнянь рівноваги (3). Легко показати, що ці умови будуть і достатні. Для цього проведемо міркування в оберненому порядку. Дійсно, якщо виконуються рівності (29) і (30), то, очевидно, буде виконуватись і рівність (27). Користуючись цими трьома рівностями, не важко довести справедливості формул (26) і (25), з яких на основі (19) і (20) випливають рівняння рівноваги (3).

ФУНКЦІЇ НАПРУЖЕНЬ

Функція напружень в теорії оболонок була введена А. І. Лур'є і А. Л. Гольденвейзером шляхом підбору векторів, які задовольняють рівнянням (28) і (30). При такому виборі друге з статичних рівнянь рівноваги (3), складене для довільної кінцевої частини оболонки в припущенні, що $\vec{L}=0$ і $\vec{R}=0$, можуть не задовольнятися. Це питання потрібно вирішити по-іншому. Візьмемо рівняння (3) і покладемо в них $\vec{L}=0$ і $\vec{R}=0$. Рівняння (3) після цього наберуть вигляду

$$\int_{\gamma} \vec{R}_t ds_{\gamma} = 0 \quad \int_{\gamma} \vec{Q}_t ds_{\gamma} + \int_{\Gamma} (\vec{r} \times \vec{R}_t) ds_{\gamma} = 0, \quad (31)$$

або на основі (25)

$$\int_{\gamma_{(\alpha\beta)}} \vec{R}_t ds_{\gamma} = \int_{\gamma_{(\alpha\beta)}} -(A \vec{R}_{\beta}) d\alpha + (B \vec{R}_{\alpha}) d\beta = 0. \quad (32)$$

Припустимо, що поверхня оболонки однозв'язана. Для рівності нулю інтеграла (32) по довільному замкнутому контуру інтегрування проведеному в однозв'язаній області D , необхідно і достатньо, щоб підінтегральний вираз $-(A \vec{R}_{\beta}) d\alpha + (B \vec{R}_{\alpha}) d\beta$ був в області D повним диференціалом деякої функції $\vec{P}(\alpha, \beta)$, тобто

$$-A \vec{R}_{\beta} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \alpha}, \quad B \vec{R}_{\alpha} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial \beta}. \quad (33)$$

Для існування такої функції, як відомо, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial \beta \partial \alpha}. \quad (34)$$

Легко бачити, що при виконанні (34) рівняння (28) при $\vec{R}=0$ задовольняються. Аналогічні міркування справедливі і для другого рівняння (3), при $\vec{R}=0$, $\vec{L}=0$. Це рівняння повинно виконуватися по довільному контуру γ , проведений в однозв'язаній області D . Для цього потрібно, щоб вираз $-(A \vec{Q}_{\beta} + A \vec{r} \times \vec{R}_{\beta}) d\alpha + (B \vec{Q}_{\alpha} + B \vec{r} \times \vec{R}_{\alpha}) d\beta$ було би повним диференціалом деякої функції $\vec{K}_{(\alpha,\beta)}$, тобто:

$$-(A \vec{Q}_{\beta} - A \vec{R}_{\beta} \times \vec{r}) = \frac{\partial \vec{K}}{\partial \alpha}, \quad (B \vec{Q}_{\alpha} - B \vec{R}_{\alpha} \times \vec{r}) = \frac{\partial \vec{K}}{\partial \beta}.$$

Необхідною і достатньою умовою існування такої функції є, як відомо, умова

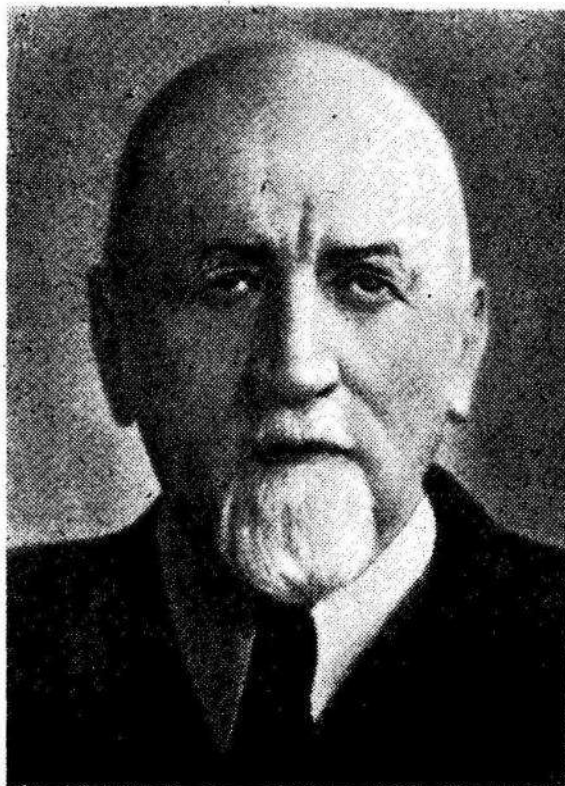
$$\frac{\partial^2 \vec{K}}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 \vec{K}}{\partial \beta \partial \alpha}, \quad (35)$$

при виконуванні якої рівняння рівноваги (30) задовольняється, коли в ньому прийняти $\vec{L}=0$ і $\vec{R}=0$.

Відзначимо, що даним способом може бути доведена аналогічна теорема і в математичній теорії пружності.

ЛІТЕРАТУРА

- А. И. Лурье. Общая теория упругих оболочек, ПММ, т. IV, в. 2, 1940.
А. Я. Гольденвейзер. Уравнения теории тонких оболочек, ПММ, т. IV, в. 2, 1940.
-



МИРОН ОНУФРІЙОВИЧ ЗАРИЦЬКИЙ

Львівський університет зазнав великої втрати: 19 серпня 1961 р. після важкої довготривалої хвороби на 73-му році життя помер професор математики Мирон Онуфрійович Зарицький.

Мирон Онуфрійович Зарицький народився в 1889 р. в селі Могильниця на Тернопільщині. Середню освіту здобув у гімназіях в Бережанах, Тернополі та Перемишлі.

Після закінчення гімназії М. О. Зарицький поступив на філософський факультет Віденського університету, де слухав лекції з природознавства і філософії. Сім семестрів М. О. Зарицький вчився у Львівському університеті, де вивчав математику і фізику, не залишаючи одночасно займатись філософією. Під впливом професора Серпінського Мирон Онуфрійович захопився теорією множин та теорією функцій дійсної змінної. Лекції професора Серпінського та участь Зарицького у семінарі, яким керував Серпінський, визначали пізніший напрям наукової діяльності молодого вченого.

Маючи великий нахил до наукової праці, Мирон Онуфрійович, проте, в умовах панської Польщі не міг мріяти про університетську доцентуру і тому мусив перейти на педагогічну роботу. Він учителював у приватних українських гімназіях Белза та Збаража, а потім у державних гімназіях Тернополя та Львова. В 1913 р. М. О. Зарицький здав іспит на вчителя математики і фізики в середніх школах.

З 1925 р. Мирон Онуфрійович працював у Львові і з того часу почав займатись науковою роботою. Перша його праця «Метод запровадження поняття доброго впорядкування в теорії множин» була надрукована в 1926 р. в XV томі Збірника математично-природничо-лікарської секції Наукового товариства імені Шевченка. Наступну працю «Деякі основні поняття аналізу положення з точки зору алгебри логіки»,

надруковану в IX томі журналу «*Fundamenta Mathematicae*» (1927), Львівський університет прийняв за докторську дисертацію, і Мирон Онуфрійович 25 жовтня 1930 р. здобув учений ступінь доктора філософії.

Ще раніше, 24 березня 1927 р., математично-природничо-лікарська секція Наукового товариства імені Шевченка обрала Мирона Онуфрійовича своїм дійсним членом.

Працюючи у Львові, Мирон Онуфрійович зблизився з видатними польськими математиками Штейнгаусом, Банахом, Стожеком, Мазуром та іншими, був прийнятий до Львівського відділу Польського математичного товариства і брав активну участь у його засіданнях. Був також членом Німецького математичного товариства.

Мирон Онуфрійович був учасником першого польського математичного з'їзду у Львові (1927), а в 1930 р. — делегатом Наукового товариства імені Шевченка на перший математичний з'їзд у Харкові.

До 1934 р. Мирон Онуфрійович надрукував близько 20 праць у виданнях Наукового товариства імені Шевченка та деяких іноземних журналах. Таким чином, він у цей період оформився як серйозний математик з філософським ухилом.

Після возз'єднання Західної України з УРСР Мирон Онуфрійович уже з 1 грудня 1939 р. починає працювати у Львівському університеті. Він одержав звання професора і керував кафедрою теорії імовірності, а потім кафедрою загальної математики. У 1939—1941 рр. він був продеканом, а у 1944—1947 рр. — деканом фізико-математичного факультету. В цей період М. О. Зарицький працював також старшим науковим співробітником Львівського філіалу Академії наук УРСР.

Роботу в університеті Мирон Онуфрійович поєднував з читанням лекцій у Львівському політехнічному інституті (1944—1946), а в 1950—1955 рр. читав також лекції в новозаснованому Ужгородському університеті.

В 1941 р. Мирон Онуфрійович виступав на конференціях Академії наук УРСР та ГрузРСР у Києві та Тбілісі.

Наукові інтереси Мирона Онуфрійовича охоплюють головним чином теорію множин з алгеброю логіки та теорію функцій дійсного змінного. Він займався дослідженням похідних множин методами алгебри логіки, виходячи тільки з кількох основних аксіом і не користуючись іншими геометричними міркуваннями.

Крім того, М. О. Зарицький займався теорією вимірних перетворень множин, тобто таких гомеоморфних перетворень, які переводять довільну вимірну множину в іншу множину такого самого роду.

У зв'язку з цим він також займався деякими теоретико-числовими питаннями і в останньому випуску (№ 8, т. 44) «Питань механіки і математики» він надрукував статтю «Деякі числові послідовності».

Мирон Онуфрійович був також великим знавцем історії математики, особливо античної, і надрукував кілька праць з історії точних наук. Сюди належить «Хрестоматія грецької математики» (польською мовою, 1936 р.), у якій вміщені невеликі уривки з творів Євкліда, Архімеда, Аполлонія Пергійського, Клавдія Птолемея та Діофанта в грецькому оригіналі та латинському перекладі, невеликий етюд «Зауваження до проблеми наближених обчислень у грецькій математиці», нарис «Астрономія в старину» (польською мовою, 1934 р.) та інші.

Цікаві також його нариси з методики математики в зв'язку з історією, що друкувались у польському журналі «Математика і школа».

Мирон Онуфрійович як філософ не міг не зацікавитись теорією імовірності та питаннями математичної статистики. Його стаття «Про коефіцієнт кореляції в теорії математичної статистики» (1937 р.) присвячена спробі аналізу балансів західно-українських кооперативів.

У доповіді «Ленін як творець радянської статистики», зробленій на науковій конференції Львівського університету в 1946 р., Мирон Онуфрійович розкриває ленінський метод опрацювання статистичних проблем.

Коли до цього додамо ще 20 статей, надрукованих у газетах «Вільна Україна», «Радянська Україна», «Червоний Штандар» та інших, декілька брошур та велику роботу «Культурні перетворення в західних областях УРСР» (яка, на жаль, залишилася в рукописі), побачимо, наскільки різноманітні і широкі були інтереси ученого.

Світлий образ Мирона Онуфрійовича Зарицького назавжди збережеться в серцях усіх, хто його знав.

НАУКОВА ХРОНІКА

ЗАХИСТ ДИСЕРТАЦІЙ ОБ'ЄДНАНОЇ РАДИ МЕХАНІКО-МАТЕМАТИЧНОГО ТА ФІЗИЧНОГО ФАКУЛЬТЕТІВ ЛДУ

№ п.п.	Прізвище дисертанта	Тема дисертації	Опоненти	Дата захисту
1957 р.				
1.	Вишневецький В. Н.	Дослідження люмінесценції домішкових молекулярних кристалів нафталін—антрацен	1. Доктор техн. наук проф. Андрієвський О. І. 2. Канд. фізико-мат. наук Лубченко А. Ф.	13. V
2.	Лаврук Б. Р.	Про один тип граничних задач для еліптичних систем лінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку	1. Чл.-кор. АН СРСР доктор фізико-мат. наук Векуа І. Н. 2. Доктор фізико-мат. наук проф. Кованько О. С.	21 V.
3.	Драпкин А. Б.	Асимптотика власних значень і функцій одного класу еліптичних систем	1. Доктор техн. наук проф. Рапапорт І. М. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Соколов І. Г.	27. V
4.	Ігнат'єв М. А.	Про деякі застосування методу відображень до систем рівнянь теорії пружності	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Шереметьєв М. П. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Вольперт О. І.	27. V
5.	Гестрин Г. М.	Про лінійні диф. оператори, інваріантні відносно групи перетворень	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Шереметьєв М. П. 2. Доктор фізико-мат. наук проф. Березанський Ю. М.	27. V
6.	Коронкевич О. І.	Динамічні системи під дією випадкових сил	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Кованько О. С. 2. Доктор фізико-мат. наук доц. Гіхман Й. І.	12. VI
7.	Музичук А. М.	Зміна опору напівпровідників у магнітному полі полярної моделі	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Самойлович 2. Канд. фізико-мат. наук Клінгер М. І.	28. VI
8.	Тульчий В. І.	Деякі задачі згину пластинок, підкріплених тонкими пружними стержнями	1. Чл.-кор. АН УРСР доктор фізико-мат. наук проф. Лопатинський Я. Б. 2. Доктор техн. наук проф. Григолюк Є. І. 3. Канд. фізико-мат. наук доц. Грилицький Д. В.	8. X

Продовження таблиці

№ п.п.	Прізвище дисертанта	Тема дисертації	Опоненти	Дата захисту
9.	Кравченко А. Л.	Структура та термоелектричні властивості закису міді	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Гохберг Б. Л. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Глауберман А. Ю.	30. X
10.	Дімарова Є. Н.	Явища Пельтье в полікристалічному закисі міді та деякі електричні властивості його		30. X
11.	Казимирський І. С.	Деякі загальні питання лінійної алгебри	1. Проф. Калужнін Л. О. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Берман С. Д.	16. XI
1958 р.				
12.	Єйснер Й. Я.	Про деякі особливості діелектричних властивостей монокристалів сегнетової солі	1. Засл. діяч науки і техніки УРСР проф. Карандеев К. Б. 2. Ст. наук. співробітник Інституту кристалографії АН СРСР канд. фізико-мат. наук Желудев І. С.	20. III
13.	Мартинovich Г. Л.	Розрахунок пластинок з підкріпленням краєм методом послідовних наближень	1. Чл.-кор. АН СРСР проф. Соколовський В. В. 2. Канд. фізико-мат. наук Підстригач Я. М.	3. VI
14.	Третяк І. Д.	Фізичні властивості окисних мідно-цинкових термоопорів	1. Доктор техн. наук проф. Карандеев К. Б. 2. Доктор фізико-мат. наук проф. Глауберман А. Ю.	16. VI
1959 р.				
15.	Меламер О. Я.	Ознаки обмежених розв'язків деяких систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними без старшого члена	1. Чл.-кор. АН УРСР проф. Лопатинський Я. Б. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Лянце В. Є.	23. III
16.	Мельник Д. П.	Фундаментальна матриця лінійних еліптичних систем диференціальних рівнянь для необмеженого простору	1. Чл.-кор. АН УРСР проф. Парасюк О. С. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Вольперт О. І.	29. V
17.	Костенко В. Г.	Інтегрування деяких нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних груповим методом	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Леонов М. Я. 2. Канд. фізико-мат. наук Сунчелеев Р. Я.	29. V
18.	Кушнір Р. М.	Резонансна перезарядка позитивних іонів і атомів калію і цезію	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Федоренко 2. Доктор фізико-мат. наук проф. Каплан С. А.	6. VI
19.	Волошина М. С.	Деякі граничні задачі для сильно еліптичних систем другого порядку	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Кованько О. С. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Лянце В. Є.	6. VI

Продовження таблиці

№ п.п.	Прізвище дисертанта	Тема дисертації	Опоненти	Дата захисту
1960 р.				
20.	Гавеля С. П.	Поширення одного методу зведення до регулярних інтегральних рівнянь граничних задач для еліптичних систем диференціальних рівнянь на випадок неопуклих областей	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Шереметьєв М. П. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Вольперт О. І.	8. I
21.	Мушинський В. П.	Деякі електричні, оптичні і фотоелектричні властивості системи	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Наследов Д. Н. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Музичук О. М.	24. V
22.	Буцко М. І.	Деякі електричні і фотоелектричні характеристики сірчатої ртуті	1. Доктор техн. наук проф. Андрієвський О. І. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Вишневський В. Н.	11. XI
23.	Білий М. І.	Вплив хімічних домішок на розподіл спектральної чутливості мідно-закисних вентильних фотоелементів	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Шалімова К. В. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Шнейдер А. Д.	11. XI
24.	Клячкин В. І.	Деякі питання статистичної теорії фазових переходів у молекулярних та іонних кристалах	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Глауберман А. Ю. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Юхновський І. Р.	26. XII
1961 р.				
25.	Піддубний Г. В.	Деякі контактні задачі теплопровідності в однорідному напівпросторі	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Потапов В. П. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Скоробогатько В. Я.	10. V
26.	Поленичка М. А.	Граничні задачі для квазілінійних еліптичних систем диференціальних рівнянь другого порядку	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Лопатинський Я. Б. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Скоробогатько В. Я.	31. X
27.	Ковальчик І. М.	Деякі питання теорії інтеграла Вінера	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Кованько О. С. 2. Канд. фізико-мат. наук доц. Далецький Ю. Л.	25. XII
28.	Швайко М. Ю.	Деякі задачі пружно-пластичного кручення призматичних стержнів	1. Доктор фізико-мат. наук проф. Шереметьєв М. П. 2. Доктор фізико-мат. наук проф. Мосаковський В. І.	25. XII

ЗМІСТ

	Стор.
В. Г. Костенко. Задача Неймана для рівняння $\Delta u = u_x^2 + u_y^2$.	3
Л. Д. Адаменко, Є. С. Шох. Важлива особливість виконання арифметичних операцій у режимі плаваючої коми на машинах типу «УРАЛ» (з фіксованою комою)	6
О. М. Костовський. Визначення коренів алгебраїчних рівнянь методом «кубування коренів»	11
М. Я. Бартіш. До методу Лемера визначення нулів поліномів, цілих і голоморфних функцій	16
Б. В. Ковальчук. Асимптотична оцінка залишку ряду Фур'є диференційованих функцій двох змінних	21
Б. В. Ковальчук. Про залишковий член ряду Фур'є для функцій, що мають неперервну похідну обмеженої варіації	28
Г. Л. Буймола. Оцінка точності графічного визначення значень полінома	30
С. В. Дениско. Про еквіареальні відображення поверхонь за допомогою спеціальних прямолінійних конгруенцій	35
О. С. Кованько. Про один критерій компактності системи $\tilde{B}$ та B_p майже періодичних функцій	41
О. С. Кованько. Один приклад нерівномірної збіжності послідовності функцій	46
М. П. Шереметьєв, Т. Л. Мартинович. Згин пластинки з підкріпленням краєм, область якої обмежена двома колами або колом і прямою	48
І. О. Прусов. Дослідження пружного стану у вагомій півплощині навколо кругових отворів	55
І. О. Прусов. Стиснення пружних півплощин	61
Н. П. Флейшман, Л. Т. Бережницький. Вільні коливання круглих та кільцевих плит з концентричними ребрами жорсткості	65
Т. Л. Мартинович. До питання про згин анізотропних пластинок з підкріпленням краєм	72
Д. В. Гриліцький. Основні граничні задачі теорії пружності для безмежної ізотропної пластинки з впаяною круглою ізотропною шайбою з розрізами на лінії спаю	79
В. І. Яковлева. Кручення стержня двотаврового перерізу	87
Ю. І. Койфман. Розв'язання деяких задач нелінійної плоскої теорії пружності	92
Д. Г. Хлебніков. Визначення напружень в напівнескінченній анізотропній пластинці з підкріпленням краєм	104
М. П. Шереметьєв. До питання про функції напружень в теорії оболонок	111
Мирон Онуфрійович Зарицький	121
Наукова хроніка	124

Редактор І. С. Квітко

Технічний редактор Т. В. Саранюк

Коректори С. О. Харитонова та Н. І. Трофимович

Львовский ордена Ленина государственный
университет имени Ивана Франко.

Вопросы механики и математики

Выпуск девятый.

(На украинском языке)

БГ. 00853. Здано до набору 1. VI. 1961 р. Підпи-
сано до друку 28. V. 1962 р. Формат 70 x 108 $\frac{1}{16}$.
Папер. арк. 4. Ум. друк. арк. 10,96. Обл.-вид. арк. 9,8.
Тираж 1000. Ціна 49 коп. Зак. 520.

Друкарня видавництва ЛДУ
Львів, Університетська, 1.

Ціна 49 коп.