Львівський ордена Леніна державний університет імені Івана Франка
Випуск 9 Питання механіки і математики 1962

В. Г. КОСТЕНКО

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯННЯ $\Delta u = u_x^2 + u_y^2$

Нехай D — обмежена однозв'язна область, границя якої L має неперервну кривину.

Задача. Знайти функцію $u(x, y)$, яка в області D задовольняє рівнянню

$$\Delta u = u_x^2 + u_y^2, \tag{1}$$

а на її границі L — умові

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -(f(s) + c), \tag{2}$$

де $f(s)$ — неперервна функція довжини дуги s контура L, $\frac{\partial}{\partial n}$ — похідна по внутрішній нормалі, c — стала.

Для існування розв'язку задачі (1), (2) необхідно, щоб

$$\int_L (f(s) + c)ds \geqslant 0. \tag{3}$$

Справді, якщо задача (1), (2) має розв'язок, то з необхідністю одержимо

$$\iint_D \Delta u dxdy = \iint_D (u_x^2 + u_y^2)dxdy = -\int_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_L (f(s) + c)ds \geqslant 0.$$

Звідси

$$c = \frac{1}{\int_L ds}\left[\iint_D (u_x^2 + u_y^2)dxdy - \int_L f(s)ds\right]. \tag{4}$$

Зведенням задачі (1), (2) до інтегральних рівнянь і застосуванням методу послідовних наближень Ніче [3] встановив, що при умові (4) існує єдиний з точністю до сталого доданку розв'язок задачі (1), (2).

В роботі [2] груповим методом встановлено, що всі розв'язки рівняння (1) можуть бути представлені у вигляді

$$u(x,y) = -\ln \Phi(x,y), \tag{5}$$

де $\Phi(x,y)$ — довільна гармонійна функція, і задача (1), (2) зведена до третьої (змішаної) задачі для рівняння Лапласа:

$$\Delta\Phi = 0 \quad \text{(в області } D\text{)}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} - (f(s) + c)\Phi = 0 \quad \text{(на } L\text{)}. \tag{7}$$

Як відомо, задача (6), (7) при умові $f(s)+c \geqslant 0$ $(f(s)+c \not\equiv 0)$ має лише єдиний нульовий розв'язок, а тоді задача (1), (2) на підставі (5) розв'язку не має.

Якщо ж $f(s)+c \leqslant 0$ $(f(s)+c \not\equiv 0)$, то необхідна умова (3) існування розв'язку задачі (1), (2) не виконується, і остання, таким чином, не має розв'язку знову.

Нехай тепер $f(s)+c$ приймає на L і додатні, і від'ємні значення, але так, що

$$\int_L (f(s)+c)ds \geqslant 0. \tag{3}$$

Розв'язок задачі (6), (7) будемо шукати в формі потенціалу простого слою:

$$\Phi(x, y) = \int_L \rho(t) \ln \frac{1}{r}\, dt. \tag{8}$$

Задовольняючи умові (7) і користуючись неперервністю потенціалу простого слою та стрибком його нормальної похідної при переході через границю L області D, одержимо

$$-\pi\rho(s) + \int_L \rho(t) \frac{\cos(\bar{r}_{ts}, \bar{n}_s)}{r_{st}}\, dt - (f(s)+c) \int_L \rho(t) \ln \frac{1}{r_{st}}\, dt = 0,$$

тобто

$$\rho(s) - \int_L G(s, t)\, \rho(t)\, dt = 0,$$

або

$$\rho(s) - \lambda \int_0^l G(s, t)\, \rho(t)\, dt = 0, \quad (\lambda = 1), \tag{9}$$

де

$$G(s, t) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(\bar{r}_{ts}, \bar{n}_s)}{r_{st}} - (f(s)+c) \ln \frac{1}{r_{st}} \right], \tag{10}$$

l — довжина дуги замкненої кривої L.

Ядро $G(s,t)$ — квáзірегулярне, причому вже перше ітероване ядро

$$G_2(s, t) = \int_0^l G(s, \sigma)\, G(\sigma, t)\, d\sigma$$

є регулярним. Таким чином, інтегральне рівняння (9) еквівалентне рівнянню

$$\rho(s) - \lambda^2 \int_0^l G_2(s, t)\, \rho(t)\, dt = 0. \tag{11}$$

Оскільки в останньому випадку, при виконанні умов (3) та (4), згідно Ніче [3], задача (1), (2) має єдиний з точністю до сталого доданку розв'язок, а також враховуючи (5), одержуємо: $\lambda = 1$ є фундаментальне число ранга I ядра $G(s,t)$ і ядра $G_2(s,t)$, що й дає можливість записати в явному вигляді як розв'язок задачі (6), (7), так і розв'язок задачі (1), (2).

Легко бачити, що розв'язки інтегральних рівнянь (9) і (11) можуть відрізнятися лише числовим множником і, таким чином, їх лінійно незалежні розв'язки можуть бути вибрані однаковими:

$$\rho_1(s) = \frac{D(s, t_1'; 1)}{D(s_1', t_1'; 1)}, \tag{12}$$

де

$$D(s_1', t_1'; 1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_0^l (m) \int_0^l K\begin{pmatrix} \alpha_1, \ldots, \alpha_m, & s_1' \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m, & t_1' \end{pmatrix} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m \neq 0$$

перший мінор Фредгольма від $D(\lambda)$ при $\lambda = 1$ по ядру $G_2(s,t)$.

Всі розв'язки рівнянь (9) і (11) можуть бути представлені у вигляді

$$\rho(s) = A\rho_1(s),$$

де A — довільна стала.

Тоді

$$\Phi(x, y) = A \int_L \rho_1(t) \ln \frac{1}{r}\, dt \tag{13}$$

є розв'язки задачі (6), (7), а

$$u(x, y) = -\ln \int_L \rho_1(t) \ln \frac{1}{r}\, dt + c_1 \tag{14}$$

розв'язок задачі (1), (2), де c_1 — довільна стала.

ЛІТЕРАТУРА

1. И. И. Привалов. Интегральные уравнения, ОНТИ, НКТП, 1935.

2. В. Г. Костенко. Інтегрування деяких нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних груповим методом. Видавництво Львівського університету, 1959.

3. Nitsche Johannes, Nitsche Joachim. Bemerkungen zum zweiten Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta u = u_x^2 + u_y^2$. Mathematische Annalen, t. 126. 1953, стор. 69—74.

Стаття надійшла 10. XI 1960.