Львівський ордена Леніна державний університет імені Івана Франка
Випуск 9 Питання механіки і математики 1962

О. М. КОСТОВСЬКИЙ

ВИЗНАЧЕННЯ КОРЕНІВ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ «КУБУВАННЯ КОРЕНІВ»

Нехай дано рівняння з комплексними коефіцієнтами

$$f(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_n z^n = 0, \; A_0 \neq 0, \; A_k = a_k + ib_k, \tag{1}$$

корені якого розміщені по зростанню модулів

$$0 < |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \dots \leqslant |z_n|. \tag{2}$$

Введемо позначення

$$f(z) = P_0 + zP_1 = 0, \tag{3}$$

де

$$\begin{aligned} P_0(z^2) &= A_0 + A_2 z^2 + A_4 z^4 + \dots, \\ P_1(z^2) &= A_1 + A_3 z^2 + A_5 z^4 + \dots. \end{aligned} \tag{4}$$

Нехай z_l — один з коренів рівняння (1); підставляючи z_l в (3), при $P_1(z_l^2) \neq 0$, одержимо

$$z_l = -\frac{P_0(z_l^2)}{P_1(z_l^2)}. \tag{5}$$

Якщо $P_1(z_l^2) = 0$, то z_l є одноразово коренем рівнянь $f(z) = 0$ і $P_1(z^2) = 0$, а значить, і рівняння $P_0(z^2) = 0$.

Зробимо ν перетворень даного рівняння (1) методом Лобачевського—Грефе, одержимо рівняння

$$f_\nu(z) = A_0^{(\nu)} + A_1^{(\nu)} z + \dots + A_n^{(\nu)} z^n = P_0^{(\nu)} + zP_1^{(\nu)}, \tag{6}$$

з коренями $z_1^m, z_2^m, \dots, z_n^m$, $m = 2^\nu$.

Тоді, якщо для простого дійсного чи комплексного кореня має місце нерівність $\leqslant |z_{l-1}| < |z_l| < |z_{l+1}| \leqslant$, то

$$z_l^m = \frac{A_{l-1}^{(\nu)}}{A_l^{(\nu)}} = \frac{a_{l-1}^{(\nu)} + ib_{l-1}^{(\nu)}}{a_l^{(\nu)} + ib_l^{(\nu)}}. \tag{7}$$

Якщо рівняння (1) має дійсні коефіцієнти, то

$$z_l^m = \frac{a_{l-1}^{(\nu)}}{a_l^{(\nu)}} \tag{7'}$$

при $\leqslant |z_{l-1}| < |z_l| < |z_{l+1}| \leqslant$ (z_l — дійсний корінь). Або

$$z_l^m = \frac{-a_l^{(\nu)}}{2a_{l+1}^{(\nu)}} \pm i\frac{\sqrt{4a_{l-1}^{(\nu)}a_{l+1}^{(\nu)} - (a_l^{(\nu)})^2}}{2a_{l+1}^{(\nu)}} \tag{8}$$

при $\leqslant |z_{l-1}| < |z_l| = |z_{l+1}| < |z_{l+2}| \leqslant$, $z_l = \bar{z}_{l+1} = \rho e^{i\varphi}$.

За допомогою формули (5) знаходимо

$$z_l^{2^{\nu-1}} = -\frac{P_0^{(\nu-1)}(z_l^{2^\nu})}{P_1^{(\nu-1)}(z_l^{2^\nu})}, \quad z_l^{2^{\nu-2}} = -\frac{P_0^{(\nu-2)}(z_l^{2^{\nu-1}})}{P_1^{(\nu-2)}(z_l^{2^{\nu-1}})} \text{ і т. д.}$$

Зробивши ν кроків, ми визначимо корінь даного рівняння z_l, якщо $P_1^{(\eta)}(z_l^{2^{\eta+1}}) \neq 0$ для всіх $\eta = 0, 1, \ldots, \nu - 1$.

Цей метод був запропонований М. Карвало в його дисертації [1].

Метод Карвало можна узагальнити на визначення коренів алгебраїчних рівнянь методом «кубування коренів» [2].

Для цього введемо позначення

$$f(z) = P_0 + zP_1 + z^2P_2 = 0, \tag{9}$$

де

$$\begin{aligned} P_0(z^3) &= a_0 + a_3 z^3 + a_6 z^6 + \ldots, \\ P_1(z^3) &= a_1 + a_4 z^3 + a_7 z^6 + \ldots, \\ P_2(z^3) &= a_2 + a_5 z^3 + a_8 z^6 + \ldots \end{aligned} \tag{10}$$

Припустимо, що нам відомий куб z_l^3 кореня z_l рівняння (1), тоді корінь z_l можна знайти серед коренів квадратного рівняння (9)

$$P_2(z_l^3) \cdot z^2 + P_1(z_l^3) \cdot z + P_0(z_l^3) = 0, \tag{11}$$

а саме — це буде той з коренів квадратного рівняння, куб якого рівний даному значенню z_l^3.

Якщо $P_2(z_l^3) = 0$, то z_l знаходимо з рівняння

$$z_l = -\frac{P_0(z_l^3)}{P_1(z_l^3)}. \tag{11'}$$

Якщо z_l є коренем даного рівняння (1) і рівнянь $P_2(z^3) = 0$, $P_1(z^3) = 0$, то, очевидно, z_l є також коренем і рівняння $P_0(z^3) = 0$. Визначення z_l в цьому випадку приведемо нижче.

Складання перетворених рівнянь (12) можна також проводити за формулами

$$f_\eta(z) = A_0^{(\eta)} + A_1^{(\eta)} z + \ldots + A_n^{(\eta)} z^n = P_0^{(\eta)} + zP_1^{(\eta)} + z^2P_2^{(\eta)} = [P_0^{(\eta-1)}(z)]^3 +$$
$$+ z\{[P_1^{(\eta-1)}(z)]^3 - 3P_0^{(\eta-1)}(z)P_1^{(\eta-1)}(z)P_2^{(\eta-1)}(z)\} + z^2[P_2^{(\eta-1)}(z)]^3,$$

де

$$P_i^{(\eta-1)}(z) = A_i^{(\eta-1)} + A_{i+3}^{(\eta-1)} z + A_{i+6}^{(\eta-1)} z^2 + \ldots; \; i = 0, 1, 2; \; \eta = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Корені $f_{\nu-1}(z)$, $f_{\nu-2}(z), \ldots, f_1(z)$, $f(z)$ визначаємо з рівняння (11).

Припустимо тепер, що в формулі (5) $P_1(z_l^2) = 0$, де z_l один з коренів рівняння (1). Згідно (2) маємо $z_l \neq 0$. Приймаючи до уваги, що $P_0(z^2)$

і $P_1(z^2)$ мають z в парних степенях, очевидно, що z_l і $-z_l$ є також коренями рівнянь $P_i(z^2)=0$ і $D(z^2)=0$, де $D(z^2)$ спільний найбільший дільник P_0 і P_1.

Користуючись похідною j-го порядку

$$f^{(j)}(z)=P_0^{(j)}+zP_1^{(j)}+j\cdot P_1^{(j-1)},$$

функції (3) легко встановити таку теорему:

Теорема I. Якщо функція $f(z)$ має корені z_l і $-z_l$ ($z_l\neq 0$) відповідно кратностей k_1 і k_2, то $D(z^2)$ спільний найбільший дільник $P_0(z^2)$ і $P_1(z^2)$ має ці числа коренями кратності $k=\min(k_1, k_2)$.

З формул (3) і формули $f(-z)=P_0-zP_1$ одержуємо теорему.

Теорема II. Якщо $D(z^2)$ спільний найбільший дільник P_0 і P_1, а $D_1(z^2)$ спільний найбільший дільник $f(z)$ і $f(-z)$, то

$$D(z^2)=D_1(z^2).$$

Таким чином, якщо $P_1(z_l^2)=0$ в (5), то корінь z_l можна знайти серед коренів рівняння

$$D(z^2)=(P_0, P_1)=0.$$

Складемо рівняння

$$f_\nu(z)=A_0^{(\nu)}+A_1^{(\nu)}z+\ldots+A_n^{(\nu)}z^n=P_0^{(\nu)}+zP_1^{(\nu)}+z^2P_2^{(\nu)}=0, \qquad (12)$$

корені якого рівні z_l^m, $m=3^\nu$, $l=1,2,\ldots,n$. Зробивши для цього ν перетворень, в кожному перетворенні складаємо рівняння, корені якого рівні кубам коренів перетвореного рівняння. Формули перетворення коефіцієнтів наведені в роботі [2].

$$A_\mu^{(\eta)}=\frac{(-1)^{\frac{\mu(\mu+1)}{2}}}{\mu!}A_0^{3^\eta}\begin{vmatrix} S_{3\mu}^{(\eta-1)} & S_{3(\mu-1)}^{(\eta-1)} & \cdots & S_6^{(\eta-1)} & S_3^{(\eta-1)} \\ S_{3(\mu-1)}^{(\eta-1)} & S_{3(\mu-2)}^{(\eta-1)} & \cdots & S_3^{(\eta-1)} & \mu-1 \\ \vdots & \vdots & & \mu-2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ S_6^{(\eta-1)} & S_3^{(\eta-1)} & 2 & & \vdots \\ S_3^{(\eta-1)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=-\frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{\mu}S_{3i}^{(\eta-1)}A_{\mu-i}^{(\eta)}=$$

$$=A_0^{3^\eta}\sum_{\nu_1+2\nu_2+\ldots+\mu\nu_\mu=\mu}\frac{(-1)^{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\mu}}{\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_\mu!}\left(\frac{S_3^{(\eta-1)}}{1}\right)^{\nu_1}\left(\frac{S_6^{(\eta-1)}}{2}\right)^{\nu_2}\cdots\left(\frac{S_{3\mu}^{(\eta-1)}}{\mu}\right)^{\nu_\mu},$$

$$\eta=1,2,\ldots,\nu,$$

де сумування поширюється на всі цілі невід'ємні рішення діофантового рівняння $\nu_1+2\nu_2+\ldots+\mu\nu_\mu=\mu$.

$$S_\alpha^{(\eta-1)}=\frac{(-1)^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}}{(A_0^{(\eta-1)})^\alpha}\begin{vmatrix} \alpha A_\alpha^{(\eta-1)} & A_{\alpha-1}^{(\eta-1)} & \cdots & A_2^{(\eta-1)} & A_1^{(\eta-1)} \\ (\alpha-1)A_{\alpha-1}^{(\eta-1)} & A_{\alpha-2}^{(\eta-1)} & \cdots & A_1^{(\eta-1)} & A_0^{(\eta-1)} \\ \vdots & \vdots & & A_0^{(\eta-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 2A_2^{(\eta-1)} & A_1^{(\eta-1)} & & & \vdots \\ A_1^{(\eta-1)} & A_0^{(\eta-1)} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=-\frac{1}{A_0}\left[\sum_{i=1}^{\alpha-1}S_{\alpha-i}^{(\eta-1)}A_i-\right.$$

$$-\alpha A_\alpha] = \alpha \times$$

$$\times \sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=\alpha} \frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n}(\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_n!}\left(\frac{A_1^{(\eta-1)}}{A_0^{(\eta-1)}}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{A_2^{(\eta-1)}}{A_0^{(\eta-1)}}\right)^{\lambda_2}\cdots\left(\frac{A_n^{(\eta-1)}}{A_0^{(\eta-1)}}\right)^{\lambda_n},$$

$$\alpha = 3,6,\ldots,3\mu,$$

де сумування також поширюється на всі цілі невід'ємні розв'язки рівняння $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + n\lambda_n = \alpha$.

Припустимо тепер, що при визначенні кореня z_l методом «кубування коренів» у формулі (11) $P_2(z_l^3)=0$ і $P_1(z_l^3)=0$, тоді, очевидно, і $P_0(z_l^3)=0$, тобто z_l є коренем спільного найбільшого дільника $P_0(z^3)$, $P_1(z^3)$ і $P_2(z^3)$.

Користуючись похідною j-го порядку

$$f^{(j)}(z) = P_0^{(j)} + P_1^{(j)}z + P_2^{(j)}z^2 + jP_1^{(j-1)} + 2jzP_2^{(j-1)} + (j-1)jP_2^{(j-2)},$$

функції (9), легко встановити теорему.

Теорема III. Якщо функція $f(z)$ має корені z_l, εz_l $\varepsilon^2 z_l$ (де $\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}$ корінь кубічний з одиниці) відповідно кратностей k_1, k_2, k_3, то $D(z^3)$ спільний найбільший дільник $P_0(z^3)$, $P_1(z^3)$, $P_2(z^3)$ має ці числа коренями кратності $k = \min(k_1, k_2, k_3)$.

Приймаючи до уваги, що $P_i[(\varepsilon z_l)^3] = P_i[z_l^3]$, $P_i[(\varepsilon^2 z_l)^3] = P_i[z_l^3]$, $i = 0, 1, 2$, з формул

$$f(z) = P_0 + zP_1 + z^2 P_2,$$

$$f(\varepsilon z) = P_0 + \varepsilon z P_1 + \varepsilon^2 z^2 P_2,$$

$$f(\varepsilon^2 z) = P_0 + \varepsilon^2 z P_1 + \varepsilon z^2 P_2$$

і формул

$$P_0 = \frac{1}{3}[f(z) + f(\varepsilon z) + f(\varepsilon^2 z)],$$

$$zP_1 = \frac{1}{3}[f(z) + \varepsilon^2 f(\varepsilon z) + \varepsilon f(\varepsilon^2 z)],$$

$$z^2 P_2 = \frac{1}{3}[f(z) + \varepsilon f(\varepsilon z) + \varepsilon^2 f(\varepsilon^2 z)]$$

одержимо теорему.

Теорема IV. Якщо $D(z^3)$ спільний найбільший дільник $P_0(z^3)$, $P_1(z^3)$ і $P_2(z^3)$, а $D_1(z^3)$ спільний найбільший дільник $f(z)$, $f(\varepsilon z)$ і $f(\varepsilon^2 z)$, то

$$D(z^3) = D_1(z^3).$$

Таким чином, якщо в (11) має місце випадок $P_2(z_l^3) = 0$ і $P_1(z_l^3) = 0$, то z_l можна знайти серед коренів рівняння

$$D(z^3) = (P_0, P_1, P_2) = 0.$$

Розглянемо приклад

$$f(z) = 10 - 8z + 3z^2 + z^3 = 0.$$

В роботі [2] для визначення коренів цього рівняння $z_1=\bar{z}_2=1+i$, $z_3=-5$ було зроблено три перетворення даного рівняння ($\nu=3$) методом «кубування коренів».

$$f_1(z)=10^3+508z+129z^2+z^3=0, \tag{13}$$

$$f_2(z)=10^9-6{,}2499488\cdot10^7z+1{,}953093\cdot10^6z^2+z^3=0, \tag{14}$$

$$f_3(z)=10^{27}+1{,}220703\cdot10^{23}z+7{,}45058\cdot10^{18}z^2+z^3=0. \tag{15}$$

Визначимо корінь z_1 методом, запропонованим в даній статті. Знаходимо z_1^{27} з рівняння (15) по формулі (8)

$$z_1^{27}=-\frac{1{,}220703\cdot10^{23}}{2\cdot7{,}45058\cdot10^{18}}+i\,\frac{\sqrt{4\cdot7{,}45058\cdot10^{45}-(1{,}220703)^2\cdot10^{45}}}{2\cdot7{,}45058\cdot10^{18}}=$$

$$=8192{,}000+i\,8192{,}000.$$

Значить, $P_0^{(2)}=10^9+(z_1^9)^3=999991808+i\,8192{,}000$, $P_1^{(2)}=6{,}249488\cdot10^7$,

$$P_2^{(2)}=1{,}953093\cdot10^6.$$

Розв'язуючи квадратне рівняння з комплексними коефіцієнтами

$$P_2^{(2)}z^2+P_1^{(2)}z+P_0=0,$$

одержимо два корені $z'=16{,}00000+i\,16{,}00000$, $z''=\frac{3{,}124949}{0{,}1953093}-i\,16{,}00000$.

З них перший дає $(z')^3=z_1^{27}$, таким чином,

$$z_1^9=16{,}00000+i\,16{,}00000.$$

Визначаємо тепер $P_0^{(1)}=10^3+(z_1^3)^3=984{,}0000+i\,16{,}00000$, $P_1^{(1)}=$ $=508{,}000$, $P_2^{(1)}=129{,}000$. З рівняння $P_2^{(1)}z^2+P_1^{(1)}z+P_0^{(1)}=0$ одержуємо корені $z'=-2{,}00000+i\,2{,}00000$ і $z''=-\frac{150}{129}-2{,}00000\,i$. Маємо $(z')^3=$ $=z_1^9$, отже $z_1^3=-2{,}00000+i\,2{,}00000$.

Знаходимо $P_0=10+z_1^3=8+2{,}00000\,i$, $P_1=-8$, $P_2=3$.

З рівняння $P_2z^2+P_1z+P_0=0$ одержуємо корені $z'=1+i$ і $\frac{5}{3}-i=z''$, з яких $(z')^3=z_1^3$.

Таким чином, корінь даного рівняння є $z_1=1+i$.

В даному рівнянні, яке має одну пару спряжених комплексних коренів, можна знайти корені простіше, тому вказаним способом можна обчислювати корені рівнянь, що мають більше двох пар комплексних спряжених коренів, не рівних по модулю між собою (для рівнянь з дійсними коефіцієнтами), або рівнянь, що мають більше двох комплексних коренів, не рівних по модулю (для рівнянь з комплексними коефіцієнтами).

ЛІТЕРАТУРА

1. E. Carvallo. Méthode pratique pour la résolution numérique complète des equations algébriques au transcendantes. Thése de Paris, 1890, pp. 1—40.

2. А. Н. Костовский. Обобщенные формулы преобразования в методе Лобачевского—Греффе численного решения уравнений. Материалы научно-технической конференции «Новые разработки в области вычислительной математики и вычислительной техники». Киев, 1960.

Стаття надійшла 15. IV 1960.