Львівський ордена Леніна державний університет імені Івана Франка
Випуск 9 Питання механіки і математики 1962

М. Я. БАРТІШ

ДО МЕТОДУ ЛЕМЕРА ВИЗНАЧЕННЯ НУЛІВ ПОЛІНОМІВ, ЦІЛИХ І ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай дана функція

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad a_0 = 1 \tag{1}$$

голоморфна в середині круга збіжності радіуса r, нулі якої з круга збіжності розміщені по зростанню модулів

$$0 < |z_1| \leqslant |z_2| \leqslant |z_3| \leqslant \dots < r.$$

В роботі О. М. Костовського [1] доведена основна теорема методу Лемера числового визначення нулів.

Мета цієї замітки полягає в тому, щоб довести аналогічну теорему для модифікованого методу Лемера, даного О. М. Костовським в роботах [2] і [3]. Суть цієї модифікації полягає в тому, що для функції (1) в ролі допоміжної функції беремо її похідну

$$\pm f'(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots, \tag{2}$$

де $b_k = \pm (k+1)\, a_{k+1}$.

Формули перетворення коефіцієнтів рівнянь (1) і (2) беремо такі [2]:

$$\begin{aligned} a_l^{(\nu)} &= (-1)^l \left[\left(a_l^{(\nu-1)}\right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{l} (-1)^i a_{l-i}^{(\nu-1)} a_{l+i}^{(\nu-1)} \right] \\ b_l^{(\nu)} &= (-1)^l \left[a_l^{(\nu-1)} b_l^{(\nu-1)} + \sum_{i=1}^{l} (-1)^i \left(a_{l+i}^{(\nu-1)} b_{l-i}^{(\nu-1)} + a_{l-i}^{(\nu-1)} b_{l+i}^{(\nu-1)} \right) \right]. \end{aligned} \tag{3}$$

За цими формулами складемо відповідно функції

$$\begin{aligned} f_k(z) &= a_0^{(k)} + a_1^{(k)} z + \dots + a_n^{(k)} z^n + \dots, \\ f_k'(z) &= b_0^{(k)} + b_1^{(k)} z + \dots + b_n^{(k)} z^n + \dots \end{aligned} \tag{4}$$

Нехай $|z_n| < R < |z_{n+1}|$ (2′) (в частинному випадку $|z_n| < R < r$, якщо $f(z)$ має тільки n коренів у середині круга збіжності радіуса r), тоді для функції (1) голоморфної в колі $|z| < r$ має місце формула

$$\lim_{k \to \infty} \frac{(z_1 z_2 \dots z_n)^k\, b_n^{(k)}}{a_0^{(k)}} = \pm (-1)^n \left(\frac{a_1}{a_0} + \sum_{i=1}^{n} z_i^{-1} \right), \tag{5}$$

що є основним результатом цієї замітки.

Доведемо цю рівність, поклавши для простоти $a_0=1$.
З логарифмічної похідної функції $f(z)$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-z_i}+\sum_{m=1}^{\infty}c_m z^{m-1} \tag{6}$$

випливає, що $\psi(z)=\sum\limits_{m=1}^{\infty}c_m z^{m-1}$ збігається в середині і на границі круга радіуса $R<r$, значить, $|c_m|\leqslant\frac{M}{R^m}$, де можна вважати

$$M\geqslant 1. \tag{7}$$

Інтегруючи на відрізку $[0,z]$ праву і ліву частини (6), одержимо:

$$f(z)=\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_j}\right)e^{\sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{c_m}{m}z^m}\quad . \tag{8}$$

У рівнянні (1) і (8) зробимо заміну змінних $z=t\pm h$.
Вважаючи h нескінченно малою і нехтуючи членами, які містять h^2 і більш високі степені h, одержимо:

$$\varphi(t)=f(t\pm h)=f(t)\pm hf'(t)=A_0+A_1t+A_2t^2+\ldots, \tag{1'}$$

де $A_k=a_k+hb_k$

$$\varphi(t)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{z_i\mp h}{z_i}-\frac{t}{z_i}\right)e^{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{c_it^i}{i}\pm\sum\limits_{i=1}^{\infty}hc_it^{i-1}}\quad . \tag{8'}$$

Складемо функцію, нулі якої рівні k-тим степеням нулів функції (1′):

$$\varphi_k(t)=\prod_{j=0}^{k-1}\varphi\left(\omega^j\sqrt[k]{t}\right)=\dot{A}_0^{(k)}+A_1^{(k)}t+A_2^{(k)}t^2+\ldots \tag{1''}$$

$$\varphi_k(t)=\prod_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{z_i\mp h}{z_i}\right)^k-\frac{t}{z_i^k}\right]e^{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{k-1}\frac{\omega^{ji}t^{\frac{i}{k}}c_i}{i}\pm h\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{k-1}c_it^{\frac{i-1}{k}}\omega^{(i-1)j}}, \tag{8''}$$

де $\omega=e^{\frac{2\pi}{k}i}$ є первісний корень рівняння $\omega^k-1=0$ і $A_n^{(k)}=a_n^{(k)}+khb_n^{(k)}$

Рівняння (8″) можна записати так:

$$\varphi_k(t)=\prod_{i=1}^{n}\left[\left(1-\frac{t}{z_i^k}\right)\mp\frac{kh}{z_i}\right]e^{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{t^jc_{jk}}{j}\pm\sum\limits_{j=0}^{\infty}khc_{jk+1}t^j},$$

або

$$\varphi_k(t)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{t}{z_i^k}\right)(1+B_{1,k}t+\ldots)\mp kh\Big\{\Big[\frac{1}{z_1}\left(1-\frac{t}{z_2^k}\right)\ldots\left(1-\frac{t}{z_n^k}\right)+\ldots$$

$$+\left(1-\frac{t}{z_1^k}\right)\ldots\left(1-\frac{t}{z_{n-1}^k}\right)\frac{1}{z_n}\Big][1+B_{1,k}t+\ldots]-\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{t}{z_i^k}\right)[1+$$

$$+B_{1,k}t+\ldots][c_1+c_{k+1}t+\ldots]\Big\},\tag{9}$$

де

$$B_{n,k}=\sum_{\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n}\frac{1}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_n!}\left(\frac{c_k}{1}\right)^{\lambda_1}\left(\frac{c_{2k}}{2}\right)^{\lambda_2}\ldots\left(\frac{c_{nk}}{n}\right)^{\lambda_n},\tag{10}$$

і сумування поширено на всі цілі невід'ємні розв'язки діофантового рівняння $\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n=n$.

У роботі Поля [4] показано, що

$$|B_{n,k}|\leqslant\frac{M^n}{R^{nk}}.\tag{11}$$

Прирівнявши коефіцієнти при t^n у рівності (9) і (1″), одержимо:

$$A_n^{(k)}=(-1)^n\frac{1}{z_1^k\ldots z_n^k}+B_{1,k}(-1)^{n-1}S\left(\frac{1}{z_1^k\ldots z_{n-1}^k}\right)+\ldots+B_{n,k}\mp$$

$$\mp kh\Bigg\{\Bigg[B_{1,k}(-1)^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}\frac{1}{z_1^k\ldots z_{i-1}^k z_{i+1}^k\ldots z_n^k}\right)+$$

$$+(-1)^{n-2}B_{2,k}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}S\left(\frac{1}{z_1^k\ldots z_{i-1}^k z_{i+1}^k\ldots z_{n-1}^k}\right)+\ldots+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}B_{n,k}\Bigg]-$$

$$-\Bigg[(-1)^n\frac{1}{z_1^k\ldots z_n^k}c_1+(-1)^{n-1}S\left(\frac{1}{z_1^k\ldots z_{n-1}^k}\right)(c_1B_{1,k}+c_{k+1})+\ldots+$$

$$+c_1B_{n,k}+c_{k+1}B_{(n-1),k}+\ldots+c_{nk+1}\Bigg]\Bigg\},\tag{12}$$

де $S\left(\frac{1}{z_1^k\ldots z_j^k}\right)$ елементарна симетрична функція обернених величин нулів $z_1^k, z_2^k,\ldots,z_n^k$ функції $f_k(z)$.

З рівності (12) випливає

$$z_1^k z_2^k\ldots z_n^k A_n^{(k)}=(-1)^n+B_{1,k}(-1)^{n-1}S(z_1^k)+\ldots+B_{n,k}z_1^k\ldots z_n^k\mp$$

$$\mp kh\left\{B_{1,k}(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^k}{z_i}+(-1)^{n-2}B_{2,k}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{z_i^k}{z_i}\cdot S(z_j^k)+\ldots+\right.$$

$$\left.+B_{n,k}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}(z_1^k\ldots z_n^k)\right\}\pm kh\{(-1)^nc_1+(-1)^{n-1}(c_1B_{1,k}+$$

$$+c_{k+1})S(z_1^k)+\ldots+(z_1^k\ldots z_n^k)(c_1B_{n,k}+\ldots+c_{n,k+1})\},\tag{13}$$

приймаючи до уваги нерівність (2'), (7) і (11), одержимо:

$$\left|B_{j,k}S(z_1^k\dots z_j^k)\right| \leqslant \left|B_{j,k}\right|C_n^j\left|z_n\right|^{jk} \leqslant C_n^j M^j\left|\frac{z_n}{R}\right|^{jk} \leqslant C_n^j M^n\left|\frac{z_n}{R}\right|^k,$$

звідси

$$\left|\sum_{j=1}^{n} B_{j,k}S(z_1^k z_2^k\dots z_j^k)\right| \leqslant M^n 2^{n-1}\left|\frac{z_n}{R}\right|^k = N_1\left|\frac{z_n}{R}\right|^k. \qquad (14)$$

Такі оцінки можна одержати і для інших сум, а саме:

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i^k}{z_i}S(z_1^k\dots z_{i-1}^k z_{i+1}^k\dots z_j^k)B_{j,k}\right| \leqslant N_2\left|\frac{z_n}{R}\right|^k. \qquad (15)$$

$$\left|\sum_{j=1}^{n}S(z_1^k\dots z_j^k)(c_1 B_{j,k}+c_{k+1}B_{(j-1),k}+\dots+c_{(j-1)k+1}B_{1,k}+c_{jk+1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant N_3\left|\frac{z_n}{R}\right|^k, \qquad (16)$$

значить,

$$z_1^k z_2^k\dots z_n^k(a_n^{(k)}+khb_n^{(k)}) = (-1)^n \pm kh(-1)^n c_1 + kh\,0\left(\left|\frac{z_n}{R}\right|^k\right). \qquad (17)$$

Як показав Поля [4],

$$z_1^k z_2^k\dots z_n^k a_n^{(k)} = (-1)^n + kh0\left(\left|\frac{z_n}{R}\right|^k\right). \qquad (18)$$

Рівняння (17) можна записати так:

$$z_1^k z_2^k\dots z_n^k khb_n^{(k)} = \pm kh\left[(-1)^n c_1 + 0\left(\left|\frac{z_n}{R}\right|^k\right)\right]. \qquad (19)$$

З (19) одержимо:

$$\lim_{k\to\infty} z_1^k z_2^k\dots z_n^k b_n^{(k)} = \pm(-1)^n c_1. \qquad (20)$$

Для визначення c_1 використовуємо рівності (1) і (8)

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_j}\right)\left(1 + c_1 z + \frac{c_2 z^2}{2} + \dots + \frac{c_1^2 z^2}{2} + \dots\right).$$

Прирівнявши коефіцієнт при z, одержимо:

$$c_1 = a_1 + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \dots + \frac{1}{z_n}.$$

Підставляючи значення c_1 у рівність (20), одержимо:

$$\lim_{k\to\infty} z_1^k z_2^k\dots z_n^k b_n^{(k)} = \pm(-1)^n\left(a_1 + \sum_{i=1}^{n} z_i^{-1}\right), \qquad (5)$$

що і треба було довести.

З рівності (18) і (5) одержуємо:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{b_n^{(k)}}{a_n^{(k)}}=\pm\left(a_1+\sum_{i=1}^{n}z_i^{-1}\right). \tag{21}$$

Так само одержимо (при умові, що $\leqslant|z_{n-1}|<|z_n|<|z_{n+1}|\leqslant$)

$$\lim_{k\to\infty}\frac{b_{n-1}^{(k)}}{a_{n-1}^{(k)}}=\pm\left(a_1+\sum_{i=1}^{n-1}z_i^{-1}\right). \tag{22}$$

Звідси одержимо формулу для обчислення простих нулів

$$\pm z_n=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{b_n^{(k)}}{a_n^{(k)}}-\frac{b_{n-1}^{(k)}}{a_{n-1}^{(k)}}\right)^{-1},$$

якщо $\leqslant|z_{n-1}|<|z_n|<|z_{n+1}|\leqslant$.

Формулу (5) можна узагальнити на кратні дійсні або комплексні корені

$$z_{l+1}=z_{l+2}=\ldots=z_{l+g}=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

де $\leqslant|z_l|<\rho<|z_{l+g+1}|\leqslant$.

В цьому випадку формула (5) буде мати такий вигляд:

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{i=1}^{l+j}z_i^k b_{l+j}^{(k)}=\pm(-1)^{l+j}C_g^j\left(a_1+\sum_{i=1}^{l+j}z_i^{-1}\right), \tag{23}$$

де $j=0, 1, 2, \ldots, g$.

Формула (23) залишається справедливою, кратний корінь визначаємо стільки разів, яка його кратність.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Костовский. Основная теорема метода Лемера, численного определения нулей, целых и голоморфных функций. Успехи мат. наук, т. XVI № 4, 1961.

2. А. Н. Костовский. Формулы преобразования коэффициентов в методе Лемера численного решения алгебраических уравнений. ДАН СССР, т. 131, № 4, 1960.

3. А. Н. Костовский. К методу численного решения и алгебраического уравнения с комплексными коэффициентами. Материалы научно-техн. конферен. по вычисл. мат. и вычисл техн., К., 1960 г.

4. G. Polya. Über das Graeffesche Verfahren Zs. Math. u. Phys. 63. 1914.

Стаття надійшла 21. I 1961.