Львівський ордена Леніна державний університет імені Івана Франка
Випуск 9 Питання механіки і математики 1962

Б. В. КОВАЛЬЧУК

АСИМПТОТИЧНА ОЦІНКА ЗАЛИШКУ РЯДУ ФУР'Є ДИФЕРЕНЦІЙОВАНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Нехай $W^{(r,l)}H_{\omega_1,\omega_2}(l \geqslant r \geqslant 0)$ — клас функцій $f(x, y)$ періоду 2π відносно кожної змінної x і y, для яких виконуються співвідношення:

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)| \leqslant \omega_1(|x_1 - x_2|) + \omega_2(|y_1 - y_2|),\\
&|\psi(x_1, 0) - \psi(x_2, 0)| \leqslant \omega_1(|x_1 - x_2|),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де $\varphi(x, y) = \frac{\partial^l f}{\partial y^l}$, $\psi(x, y) = \frac{\partial^r f}{\partial x^r}$,

і ω_1, ω_2 — задані модулі неперервності.

Знайдемо асимптотичну оцінку величини

$$
E_{n,m}(W^{(r,l)}H_{\omega_1,\omega_2}; x, y) = \sup_{f \in W^{(r,l)}H_{\omega_1,\omega_2}} |f(x, y) - S_{n,m}(f; x, y)|, \tag{2}
$$

де через $S_{n,m}(f; x, y)$ позначена сума Фур'є порядку (n, m) функцій $f(x,y)$.

Теорема. Справедлива асимптотична рівність

$$
E_{n,m}(W^{(r,l)}H_{\omega_1,\omega_2}; x, y) = \Theta_n \frac{2}{\pi^2} \frac{\lg n}{n^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_1\left(\frac{2u}{n}\right) \sin u\, du +
$$

$$
+ \Theta_{n,m} \frac{8}{\pi^4} \frac{\lg n \lg m}{m^l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\omega_1\left(\frac{2u}{n}\right), \omega_2\left(\frac{2v}{m}\right)\right\} \sin u \sin v\, du\, dv +
$$

$$
+ O\left[\frac{\lg n + \lg m}{m^l}\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right] + O\left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right), \tag{3}
$$

де $\Theta_n = 1$, $\Theta_{n,m} = 1$, якщо ω_1, ω_2 — випуклі функції, а в загальному випадку $\frac{1}{2} \leqslant \Theta_n \leqslant 1$, $\frac{1}{2} \leqslant \Theta_{n,m} \leqslant 1$. Причому метод доведення теореми такий, що константа C, яка входить в $O(1)$, є абсолютною константою.

Доведення. Не важко показати, що верхня грань (2) не зміниться, якщо покласти $x = y = 0$ і поширити її на клас $\overline{W^{(r,l)}}H_{\omega_1,\omega_2}$ функцій $f(x, y)$, які належать до класу $W^{(r,l)}H_{\omega_1,\omega_2}$ і перетворюються в нуль при $x = y = 0$. Крім цього, шукана верхня грань не зміниться, якщо поширити її на більш вужчий клас $\overline{W}^{(r,l)}H^{(0)}_{\omega_1,\omega_2}$ функцій $f(x, y)$, періоду 2π по x і y, для яких виконуються співвідношення (1) і які задовольняють умові $\varphi(o, o) = \psi(o, o) = 0$.

Для даного класу функцій можна знайти (див. [2]), що

$$f(o, o) - S_{n,m}(f; o, o) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^{(r)}(t)\psi(t, o)dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) D_m^{(l)}(z)\varphi(t, z)dt\,dz, \qquad (4)$$

де

$$D_n(t) = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}, \quad D_n^{(r)}(t) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{\cos\left(it + \frac{r\pi}{2}\right)}{i^r}.$$

Але на основі результату [3] маємо

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^{(r)}(t)\psi(t, o)\,dt \right| \leqslant \frac{2}{\pi^2} \frac{\lg n}{n^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_1\left(\frac{2u}{n}\right) \sin u\,du + O\left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right). \qquad (5)$$

Займемося тепер оцінкою інтеграла

$$I_{n,m}(\varphi) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) D_m^{(l)}(z)\varphi(t, z)\,dt\,dz.$$

Спираючись на результати [3] і [4], знаходимо оцінки:

$$\left| \frac{1}{\pi^2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) D_m^{(l)}(z)\varphi(t, z)\,dt\,dz \right| \leqslant O\left[\frac{\lg m}{m^l}\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) \mp \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right], \qquad (6)$$

$$\left| \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{-\frac{1}{n}} \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} D_n(t) D_m^{(l)}(z)\varphi(t, z)dt\,dz \right| \leqslant O\left[\frac{\lg n}{m^l}\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right], \qquad (7)$$

$$\left| \frac{1}{\pi^2} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \int_{-\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}} D_n(t) D_m^{(l)}(z)\varphi(t, z)dt\,dz \right| \leqslant O\left[\frac{\lg n}{m^l}\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right]. \qquad (8)$$

Тоді інтеграл $I_{n,m}(\varphi)$ можна записати так:

$$I_{n,m}(\varphi) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{-\frac{1}{n}} \int_{-\pi}^{-\frac{1}{m}} D_n(t) D_m^{(l)}(z)\varphi(t, z)\,dt\,dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \int_{\frac{1}{n}}^{\pi} \int_{-\pi}^{-\frac{1}{m}} D_n(t) D_m^{(l)}(z)\varphi(t, z)\,dt\,dz +$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi}\int\limits_{\frac{1}{m}}^{\pi}D_n(t)D_m^{(l)}(z)\varphi(t,z)\,dt\,dz+$$

$$+\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{-\frac{1}{n}}\int\limits_{\frac{1}{m}}^{\pi}D_n(t)D_m^{(l)}(z)\varphi(t,z)dt\,dz+O\left[\frac{\lg n+\lg m}{m^l}\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right]. \quad (9)$$

Усі чотири інтеграли правої частини рівності (9) оцінюються аналогічно один одному. Оцінимо, наприклад, інтеграл

$$I_{n,m}^{(3)}(\varphi)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi}\int\limits_{\frac{1}{m}}^{\pi}D_n(t)D_m^{(l)}(z)\varphi(t,z)\,dt\,dz.$$

За допомогою інтегрального представлення О. М. Тверитіна (див. [5]) ядро $D_m^{(l)}(z)$ можна представити у вигляді

$$D_m^{(l)}(z)=\frac{1}{\Gamma(l)}\int\limits_0^1\rho^m\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{l-1}\frac{(1-\rho)\cos\left(mz+\frac{l\pi}{2}\right)}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{z}{2}}\,d\rho-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(l)}\int\limits_0^1\rho^m\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{l-1}\frac{(1-\cos z)\cos\left(mz+\frac{l\pi}{2}\right)}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{z}{2}}\,d\rho-$$

$$-\frac{1}{\Gamma(l)}\int\limits_0^1\rho^m\left(\lg\frac{1}{\rho}\right)^{l-1}\frac{\sin z\sin\left(mz+\frac{l\pi}{2}\right)}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{z}{2}}\,d\rho.$$

Доводимо справедливість співвідношень:

$$\left|\frac{\sqrt{\rho}}{\pi^2}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi}\int\limits_{\frac{1}{m}}^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\;\frac{(1-\rho)\cos\left(mz+\frac{l\pi}{2}\right)}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{z}{2}}\varphi(t,z)\,dt\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant O\left[\lg n\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right], \quad (10)$$

$$\left|\frac{\rho}{\pi^2}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi}\int\limits_{\frac{1}{m}}^{\pi}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\;\frac{(1-\cos z)\cos\left(mz+\frac{l\pi}{2}\right)}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{z}{2}}\varphi(t,z)\,dt\,dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant O\left[\lg n\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right]. \quad (11)$$

Використовуючи ці співвідношення, одержимо, що

$$\left| I^{(3)}_{n,m}(\varphi) \right| = \left| \frac{1}{\pi^2\Gamma(l)} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi} \int\limits_{\frac{1}{m}}^{\pi} \int\limits_{0}^{1} \rho^{m-1} \left(\lg \frac{1}{\rho}\right)^{l-1} D_n(t) A^{(l)}_m(z) \varphi(t,z)\, dt\, dz\, d\rho \right| +$$

$$+ O\left[\frac{\lg n}{m^l}\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right], \tag{12}$$

де

$$A^{(l)}_m(z) = \frac{\rho \sin z \sin\left(mz + \frac{l\pi}{2}\right)}{(1-\rho)^2 + 4\rho \sin^2 \frac{z}{2}}.$$

Покладемо тепер для $\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 1, 2, \ldots, m-2$

$$t_\nu = \nu h^{(1)}_n,\ \ h^{(1)}_n = \frac{2\pi}{2n+1},$$

$$z_\mu = \left(\mu + s - \frac{l}{2}\right) h^{(2)}_m,\ \ h^{(2)}_m = \frac{\pi}{m},$$

$$s \geqslant \frac{l}{2}\ (s \text{ — ціле, найменше із таких чисел}),$$

$$\Delta^{(1)}_\nu = \int\limits_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}} D_n(t)\, dt,\ \ \Delta^{(2)}_\mu = \int\limits_{z_{\mu-\frac{1}{2}}}^{z_{\mu+\frac{1}{2}}} A^{(l)}_m(z)\, dz,$$

$$\varphi_{\nu,\mu}(t,z) = \varphi(t,z) - \varphi(t_\nu, z_\mu).$$

Не важко переконатися в справедливості співвідношення

$$\frac{1}{\pi^2} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\pi} \int\limits_{\frac{1}{m}}^{\pi} D_n(t) A^{(l)}_m(z) \varphi(t,z)\, dt\, dz =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m-2} \int\limits_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}} \int\limits_{z_{\mu-\frac{1}{2}}}^{z_{\mu+\frac{1}{2}}} D_n(t) A^{(l)}_m(z) \varphi_{\nu,\mu}(t,z)\, dt\, dz +$$

$$+ \frac{1}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m-2} \varphi(t_\nu, z_\mu) \Delta^{(1)}_\nu \Delta^{(2)}_\mu + O\left[(\lg n + \lg m)\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right]. \tag{13}$$

Для другого доданка правої частини рівності (13) знаходимо оцінку

$$\left| \frac{1}{\pi^2} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m-2} \varphi(t_\nu, z_\mu) \Delta^{(1)}_\nu \Delta^{(2)}_\mu \right| \leqslant O\left[\omega_1\left(\frac{1}{n}\right) + \omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right]. \tag{14}$$

Далі має місце рівність (див. [1]).

$$\int_{t_\nu-\frac{1}{2}}^{t_\nu+\frac{1}{2}}\int_{z_\mu-\frac{1}{2}}^{z_\mu+\frac{1}{2}} D_n(t)A_m^{(l)}(z)\varphi_{\nu,\mu}(t,z)dtdz =$$

$$=\frac{(-1)^{\nu+\mu+s}}{16}\int_0^{\frac{h_n^{(1)}}{2}}\int_0^{\frac{h_m^{(2)}}{2}}[(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4)(p_1+$$

$$+p_2)(q_1+q_2)]\sin\frac{2n+1}{2}u\sin mv\,du\,dv+I_{n,m}^{(3,1)}(\varphi)+I_{n,m}^{(3,2)}(\varphi)+I_{n,m}^{(3,3)}(\varphi),$$

де

$$\alpha_1=\varphi_{\nu,\mu}(t_\nu-u,z_\mu-v),\ \alpha_2=\varphi_{\nu,\mu}(t_\nu-u,z_\mu+v),$$

$$\alpha_3=\varphi_{\nu,\mu}(t_\nu+u,z_\mu-v),\ \alpha_4=\varphi_{\nu,\mu}(t_\nu+u,z_\mu+v),$$

$$p_1=\frac{1}{\sin\frac{t_\nu-u}{2}},\quad p_2=\frac{1}{\sin\frac{t_\nu+u}{2}},$$

$$q_1=\frac{\rho\sin(z_\mu-v)}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{z_\mu-v}{2}},\quad q_2=\frac{\rho\sin(z_\mu+v)}{(1-\rho)^2+4\rho\sin^2\frac{z_\mu+v}{2}},$$

а три останні доданки правої частини рівності відповідно мають значення:

$$I_{n,m}^{(3,1)}(\varphi)=\frac{(-1)^{\nu+\mu+s}}{16}\int_0^{\frac{h_n^{(1)}}{2}}\int_0^{\frac{h_m^{(2)}}{2}}[(\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3-\alpha_4)(p_1-$$

$$-p_2)(q_1+q_2)]\sin\frac{2n+1}{2}u\sin mv\,du\,dv,$$

$$I_{n,m}^{(3,2)}(\varphi)=\frac{(-1)^{\nu+\mu+s}}{16}\int_0^{\frac{h_n^{(1)}}{2}}\int_0^{\frac{h_m^{(2)}}{2}}[(\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)(p_1+$$

$$+p_2)(q_1-q_2)]\sin\frac{2n+1}{2}u\sin mv\,du\,dv,$$

$$I_{n,m}^{(3,3)}(\varphi)=\frac{(-1)^{\nu+\mu+s}}{16}\int_0^{\frac{h_n^{(1)}}{2}}\int_0^{\frac{h_m^{(2)}}{2}}[(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)(p_1-$$

$$-p_2)(q_1-q_2)]\sin\frac{2n+1}{2}u\sin mv\,du\,dv.$$

Справедливі такі співвідношення:

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m-2}\left|I_{n,m}^{(3,1)}(\varphi)\right| \leqslant O\left[\lg n\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right], \tag{15}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m-2}\left|I_{n,m}^{(3,2)}(\varphi)\right| \leqslant O\left[\lg m\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right], \tag{16}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m-2}\left|I_{n,m}^{(3,3)}(\varphi)\right| \leqslant O\left[\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right]. \tag{17}$$

Внаслідок цих співвідношень знаходимо

$$\left|\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\int_{\frac{1}{m}}^{\pi} D_n(t)\,A_m^{(l)}(z)\,\varphi(t,z)\,dt\,dz\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{16\pi^2}\int_0^{\frac{h_n^{(1)}}{2}}\int_0^{\frac{h_m^{(2)}}{2}}\left[(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4)(p_1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+p_2)(q_1+q_2)\right]\sin\frac{2n+1}{2}u\sin mv\,du\,dv\right| +$$

$$+O\left[(\lg n+\lg m)\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right].$$

Звідси, зауваживши, що

$$|\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+\alpha_4| \leqslant 2\min\{\omega_1(2u),\ \omega_2(2v)\},$$

після ряду оцінок одержимо нерівність

$$\left|\frac{1}{\pi^2}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\int_{\frac{1}{m}}^{\pi} D_n(t)\,A_m^{(l)}(z)\,\varphi(t,z)\,dt\,dz\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\lg n\lg m}{\pi^4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\min\left\{\omega_1\left(\frac{2u}{n}\right),\ \omega_2\left(\frac{2v}{n}\right)\right\}\sin u\sin v\,du\,dv +$$

$$+O\left[(\lg n+\lg m)\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right]. \tag{18}$$

Таким чином, нами доведено, що

$$\left|I_{n,m}^{(3)}(\varphi)\right| \leqslant \frac{2}{\pi^4}\,\frac{\lg n\lg m}{m^l}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\min\left\{\omega_1\left(\frac{2u}{n}\right),\ \omega_2\left(\frac{2v}{m}\right)\right\}\sin u\sin v\,du\,dv +$$

$$+O\left[\frac{\lg n+\lg m}{m^l}\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right]. \tag{19}$$

Такі самі оцінки одержимо для трьох інших інтегралів правої частини рівності (9).

На основі цих оцінок, а також оцінки (5) ми із (4) приходимо до асимптотичної нерівності

$$E_{n,m} \leqslant \frac{2}{\pi^2}\,\frac{\lg n}{n^r}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_1\left(\frac{2u}{n}\right)\sin u\,du \pm$$

$$+\frac{8}{\pi^4}\,\frac{\lg n \lg m}{m^l}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\omega_1\left(\frac{2u}{n}\right),\ \omega_2\left(\frac{2v}{m}\right)\right\}\sin u \sin v\,du\,dv +$$

$$+O\left[\frac{\lg n + \lg m}{m^l}\left(\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)+\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)\right)\right]+O\left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right). \tag{20}$$

Залишилося зауважити, що в заданому класі існує функція, для якої нерівність (20) перетворюється в асимптотичну рівність (3).

Із доведеної теореми випливає

Н а с л і д о к. Для $l=r$ має місце асимптотична рівність

$$E_{n,m} = \Theta_{n,m}\frac{8}{\pi^4}\,\frac{\lg n \lg m}{m^r}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \min\left\{\omega_1\left(\frac{2u}{n}\right),\ \omega_2\left(\frac{2v}{m}\right)\right\}\sin u \sin v\,du\,dv +$$

$$+O\left[(\lg n + \lg m)\left(\frac{\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}+\frac{\omega_2\left(\frac{1}{m}\right)}{m^r}\right)\right]. \tag{21}$$

Слід зауважити, що при $l=r=0$ теорема доведена П. Т. Бугайцем [1]. У випадку $\omega_1(u)=u^\alpha (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, $\omega_2(v)=v^\beta (0 \leqslant \beta \leqslant 1)$ оцінка величини (2) одержана М. М. Горбачом [2].

ЛІТЕРАТУРА

1. П. Т. Б у г а е ц. ДАН СССР, 79, № 4, 1951.
2. М. М. Г о р б а ч. ДАН УРСР, № 8, 1960.
3. Б. В. К о в а л ь ч у к. I межвузовская конференция по конструктивной теории функций. Тезисы докладов, Ленинград, 1959.
4. С. М. Н и к о л ь с к и й. ДАН СССР, 52, № 3, 1946.
5. А. Н. Т в е р и т и н. ДАН СССР, 61, № 6, 1948.

Стаття надійшла 12. XII 1960.