Львівський ордена Леніна державний університет імені Івана Франка
Випуск 9 Питання механіки і математики 1962

Б. В. КОВАЛЬЧУК

ПРО ЗАЛИШКОВИЙ ЧЛЕН РЯДУ ФУР'Є ДЛЯ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ НЕПЕРЕРВНУ ПОХІДНУ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ

Розглядається клас $W^{(r)}H_{[v,\omega]}$ 2π-періодичних функцій f, що мають неперервну похідну (по Вейлю) r-го порядку φ, варіація якої не перевищує заданого числа v, а модуль неперервності — заданого модуля неперервності ω.

Нехай $S_n(f, x)$ — сума перших n членів ряду Фур'є для функції f.

С. М. Нікольський показав (див. [4]), що для функції, яка має неперервну похідну обмеженої варіації порядку $r \geqslant 0$,

$$\max_x |f(x) - S_n(f, x)| = o\left(\frac{1}{n^r}\right) \qquad (n \to \infty).$$

Якщо, крім цього, додатково задано модуль неперервності r-ої похідної, то можна одержати асимптотично точну оцінку верхньої грані залишкового члена ряду Фур'є по даному класу функцій. У випадку $r=0$ оцінки такого роду одержані в роботах С. Б. Стечкіна [5] і В. Г. Комінар [2].

Ставиться аналогічна задача при довільному $r \geqslant 0$.

Наступна теорема дає асимптотичну оцінку для величини

$$E_n(W^{(r)}H_{[v,\omega]}; x) = \sup_{f \in W^{(r)}H_{[v,\omega]}} |f(x) - S_n(f, x)|.$$

Теорема. Справедлива асимптотична рівність

$$E_n(W^{(r)}H_{[v,\omega]}; x) = \Theta_n \frac{2}{\pi^2} \frac{\lg \dfrac{1}{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}}{n^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t \, dt + O\left(\frac{v\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right),$$

де $\Theta_n = 1$, якщо ω—випукла функція, а в загальному випадку $\frac{1}{2} \leqslant \Theta_n \leqslant 1$.

При цьому константа C, яка входить в $O(1)$, є абсолютною константою.

Не важко переконатися, що задача зводиться до оцінки величини

$$E_n(W^{(r)}H_{[v,\omega]}; 0) = \sup_{\varphi \in \overline{H}_{[v,\omega]}} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^{(r)}(t) \varphi(t) \, dt \right|,$$

$$D_n^{(r)}(t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos\left(kt + \frac{r\pi}{2}\right)}{k^r},$$

а через $\overline{H}_{[v,\omega]}$ позначено клас функцій φ, які належать до класу $H_{[v,\omega]}$ і задовольняють умові $\varphi(0)=0$.

При дальшому доведенні міркуємо так само, як в роботі [1], спираючись при цьому на результат [2].

Примітка 1. Таку ж саму оцінку одержано нами для класу $\overline{W^{(r)}H_{[v,\omega]}}$ функцій, спряжених до функцій даного класу.

Примітка 2. Результат, одержаний в роботі [1] (див. [3]), збігається з даним тільки у випадку $\omega(t)=t$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Б. В. Ковальчук. Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. Сб. статей, М., 1961.

2. В. Г. Коминар. I межвузовская конференция по конструктивной теории функций. Тезисы докладов, Ленинград, 1959.

3. С. М. Никольский. ДАН СССР, 52, № 3, 1946.

4. С. М. Никольский. Изв. АН СССР, серия матем., 13, № 6, 1949.

5. С. Б. Стечкин. Успехи матем. наук., VII, вып. 4 (50), 1952.

Стаття надійшла 18. II 1961.