Львівський ордена Леніна державний університет імені Івана Франка
Випуск 9 Питання механіки і математики 1962

Г. Л. БУЙМОЛА

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ГРАФІЧНОГО ВИЗНАЧЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ПОЛІНОМА

У журналі «Математическое просвещение», вип. I, за 1957 р. у проміжках між статтями, стор. 210, була вказана графічна схема обчислення значень полінома

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \\ + \ldots + a_n. \qquad (1)$$

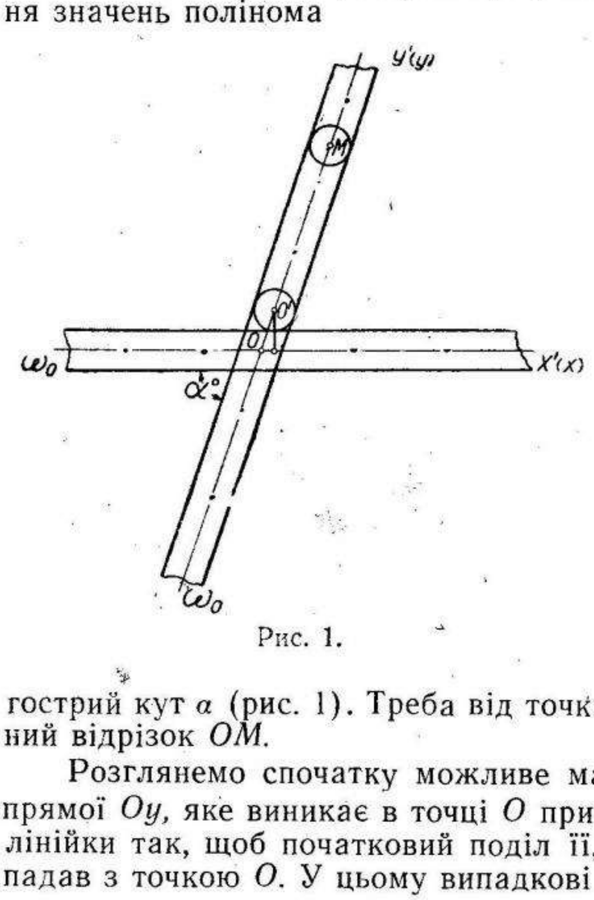

Рис. 1.

При використанні будь-яких графічних способів обчислення практиків цікавить питання точності їх. Для оцінки точності графічного обчислення, проведеного за вказаною схемою, знайдемо те максимальне відхилення (похибку), що може виникнути при виконанні простіших геометричних побудов, з яких ця схема складається, і обчислимо коефіцієнт точності вказаної побудови в цілому [1].

1. Нехай точка O задана перетином двох графічних прямих $X'(x)$, $Y'(y)$, що утворюють гострий кут α (рис. 1). Треба від точки O на прямій y відкласти одиничний відрізок OM.

Розглянемо спочатку можливе максимальне відхилення T_0 вздовж прямої Oy, яке виникає в точці O при прикладуванні до неї масштабної лінійки так, щоб початковий поділ її, від якого ведеться рахунок, співпадав з точкою O. У цьому випадкові

$$|T_0| = |OO'| = \left|\frac{\omega_0}{\sin\alpha}\right|, \qquad (2)$$

де $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$, $2\omega_1$ — товщина проведених прямих, а ω_2 — радіус кружечка, що вважається за графічну точку. Відрахунок по шкалі і відмітка точки M на прямій y' проводиться з точністю (ω_0), бо сумісне положення штриха на масштабній лінійці і графічної точки, якою відмічають поділ на прямій, утворює смугу інцидентності точки та прямої, ширина якої $\leqslant |\omega_0|$ [2].

Отже, максимальне відхилення, що з'являється при відкладуванні відрізка OM, буде:

$$|T_1| = \left|\frac{\omega_0}{\sin\alpha} + \omega_0\right| = \left|\omega_0 \frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha}\right|. \tag{3}$$

І коефіцієнт точності цієї операції —

$$K_1 = \frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}. \tag{4}$$

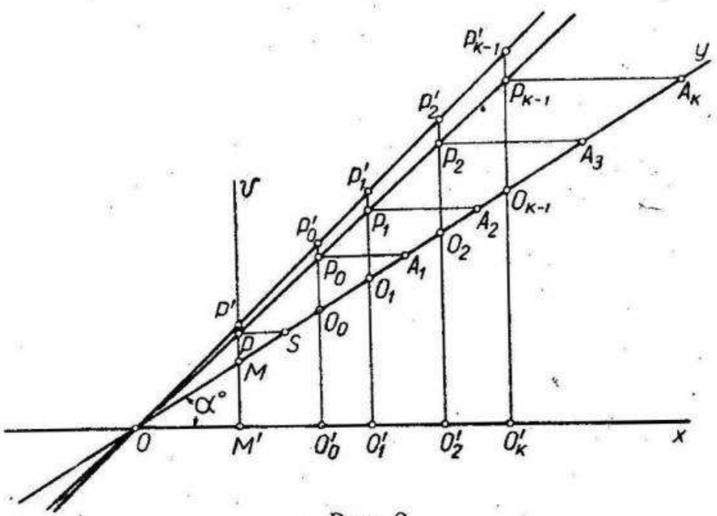

Рис. 2.

2. Далі нам треба за допомогою лінійки і косинця провести пряму v, яка проходила б через точку M і була перпендикулярною до прямої Ox (рис. 2).

Прикладування лінійки (або одного з катетів косинця) до прямої Ox вносить у побудову відхилення при точці M' в напрямі MM', рівне $\pm\omega_0$. Проекція цього відхилення на напрямок Oy буде $\omega_0' = |\omega_0 \sin\alpha|$.

Відхилення, що вноситься в побудову при прикладуванні другого катета косинця до точки M, дорівнює $|\omega_0|$ (інцидентність точки і прямої). Отже, при проведенні перпендикуляра $M'M$ похибка T_2 (або відхилення вздовж Oy) при точці M буде складатися з двох відхилень ω_0 і ω_0'

$$T_2 = \omega_0(1+\sin\alpha). \tag{6}$$

Коефіцієнт точності цієї побудови K_2 буде:

$$K_2 = \frac{1}{1+\sin\alpha}. \tag{7}$$

Відхилення, що з'являється в побудові при відкладуванні відрізка $OS = x$ вздовж Oy, яке ми позначимо через T_3, може бути обчислене, як зазначалося раніше, за формулою (3) і коефіцієнт точності K_3 — за формулою (4).

3. Для побудови прямої (SP), паралельної прямій Ox (або перпендикулярної до прямої MV), косинець розміщують в площині рисунку так, щоб один катет його пішов по прямій MV, а другий проходив би через точку S (рис. 2). Тут, як і у випадку прикладування катета косинця до сторони Ox, відхилення від прямої MV вздовж прямої PS буде

дорівнювати $\pm\omega_0$. Проекція цього відхилення на напрям Oy буде $\omega_1' = \omega_0 \cos\alpha$.

Прикладування другого катета косинця до точки S також вносить відхилення $\pm\omega_0$ вздовж осі Oy.

Отже, сумарне відхилення при точці S вздовж Oy буде дорівнювати

$$T_4 = |\omega_0 (1 + \cos\alpha)|. \tag{8}$$

При позначенні точки P на прямій MV також вноситься в побудову помилка $\pm\omega_0$. Проекцію відхилення $|T_3 + T_4|$ в точці S на напрям MV можна обчислити так:

$$|\delta| = |\omega_0 (1 + \sin\alpha\cos\alpha + 2\sin\alpha)|. \tag{9}$$

Отже, сумарне (максимально можливе) відхилення точки P від дійсного її положення вверх або вниз по прямій MV буде

$$|\beta| = |\omega_0 + \delta| = |\omega_0 (2 + 2\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha| \tag{10}$$

і коефіцієнт точності побудови точки —

$$K_4 = \frac{1}{2 + 2\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}.$$

4. Для того щоб обчислити відхилення в точках $A_1, A_2, \ldots A_k$, нам необхідно знати величину відхилень в точках $P, P_0, P_1 \ldots P_{k-1}$. Ці відхилення ми обчислимо як довжини відрізків $PP', P_0P_0', P_1P_1', \ldots P_{k-1}P_{k-1}'$, що характеризують відхилення прямої OP' від її безпомилкового положення в цих точках O і P. Для цього обчислимо спочатку довжини відрізків OP, OP_1, OP_{k-1}. Оскільки $OM = 1$, то $M'M = \sin\alpha$, $MP = (x-1)\sin\alpha$, де $x = OS$, $M'P = x\sin\alpha$. Звідки

$$OP = \sqrt{OM'^2 + M'P^2} = \sqrt{\cos^2\alpha + x^2\sin^2\alpha}.$$

Позначивши цей корінь через Θ, дістанемо

$$OP = \Theta, \quad O_0O_0' = a_0 \sin\alpha,$$

де $OO_0 = a_0$, $O_0P_0 = O_0A_1 \sin\alpha$ або

$$O_0P_0 = (p_0x - a_0)\sin\alpha,$$

де $p_0x = OA_1$.

Враховуючи, що $a_0 = p_0$, знаходимо $O_0P_0 = p_0(x-1)\sin\alpha$ і, отже,

$$O_0'P_0 = O_0'O_0 + O_0P_0 = p_0 x \sin\alpha.$$

Звідси

$$OP_0 = p_0\sqrt{\cos^2\alpha + x^2\sin^2\alpha} = p_0\Theta.$$

Аналогічно знайдемо

$$O_1'O_1 = p_1 \sin\alpha;$$
$$O_1P_1 = p_1(x-1)\sin\alpha;$$
$$O_1'P_1 = p_1 x \sin\alpha;$$

$$OP_1 = p_1\sqrt{\cos^2\alpha + x^2\sin^2\alpha} = p_1\Theta, \ \ldots, \ OP_k = p_k\Theta.$$

Отже, $OP = \Theta$; $OP_0 = p_0\Theta$; $OP_1 = p_1\Theta, \ \ldots, \ OP_k = p_k\Theta$.

Знаючи відхилення PP' в точці P, рівне

$$|\beta| = \omega_0 (2 + 2\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha),$$

обчислимо відхилення $PP'_0, PP'_1, \ldots, P_{k-1}P'_{k-1}$ в точках $P_0, P_1 \ldots, P_{k-1} \ldots$

Позначивши ці відхилення відповідно через $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$, з подібності трикутників OPP', $OP_0P'_0, \ldots, OP_{k-1}P'_{k-1}, \ldots$, знаходимо $\frac{OP}{OP_0} = \frac{\beta}{\beta_0}$, звідки $|\beta_0| = \frac{OP_0\beta}{OP}$, або $|\beta_0| = |p_0\beta| = |p_0\omega_0 (2 + 2\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)|$ аналогічно,

$$|\beta_1| = |p_1\omega_0 (2 + 2\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)| \qquad (11)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$|\beta_k| = |p_k\omega_0 (2 + 2\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)|.$$

Позначаючи похибку (відхилення) в точці A_1 через ξ_0, дістанемо

$$|\beta_0| = |\xi_0| \sin\alpha.$$

Звідки

$$|\xi_0| = \frac{|\beta_0|}{|\sin\alpha|} = \frac{|p_0\omega_0 (2 + 2\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)|}{|\sin\alpha|}. \qquad (12)$$

Аналогічно відхилення (ξ_1) в точці A_2 буде рівне:

$$|\xi_1| = \frac{|p_1\omega_0 (2 + 2\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)|}{|\sin\alpha|}, \ \ldots, \ |\xi_{k-1}| = \frac{|p_{k-1}\omega_0 (2 + 2\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)|}{|\sin\alpha|}. \qquad (12)$$

У дальшому операції косинцем і лінійкою повторюються.

а) Відкладання відрізка OO_1 вносить у побудову відхилення, рівне $T_5 = T_1 = \omega_0 (\cos c\alpha + 1)$ і $K_5 = \frac{1}{\cos c\alpha + 1}$;

б) Побудова перпендикуляра O'_0O_0 вносить відхилення

$$T_6 = T_2 = \omega_0 (1 + \sin\alpha) \text{ і } K_6 = \frac{1}{1 + \sin\alpha};$$

в) Відхилення в довільній точці A_k обчислюється за формулою (12)

$$K_7 = \frac{|\sin\alpha|}{|p_{k-1}(2 + 2\sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha)|}.$$

4) Відкладання на осі Oy відрізків $A_1O_1 = a_1$, $A_2O_2 = a_2$, ..., $A_kO_k = a_k$, ... вносить у побудову відхилення відповідно рівні $R_0 = \xi_0 + \omega_0$, $R_1 = \xi_1 + \omega_0$, ..., $R_k = \xi_k + \omega_0$, ...

Коефіцієнт точності цієї побудови буде $K_k = \frac{\omega_0}{R_k}$.

Усі розглянуті нами похибки (відхилення), які вносяться в побудову, є випадковими векторіальними похибками і підлягають законові Гауса. Тому при оцінці точності графічної побудови відрізка $OO_n = p_n = f(x)$ обчислимо η — корінь квадратний із суми квадратів проекцій всіх відхилень вздовж осі Oy

$$|\eta| = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + \ldots + T_k^2 + R_0^2 + R_1^2 + \ldots + R_k^2 + \ldots}$$

і $K = \frac{\omega_0}{|\eta|}$.

Цей коефіцієнт точності і буде характеризувати точність розглядуваного графічного обчислення.

Зауважимо, що побудови тут проведено тільки за допомогою косинця і масштабної лінійки. Аналогічно всі графічні обчислення можна провести, використовуючи інші креслярські приладдя. Порівняння коефіцієнтів точності таких побудов дало б можливість зробити висновок про конструктивну потужність того чи іншого креслярського приладдя.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Л. Буймола. Коефіцієнт точності геометричних побудов. Учені записки Львівського державного університету ім. Ів. Франка, т. V, 1947.

2. Г. Л. Буймола. Дослідження первинних помилок геометричних побудов. Учені записки Львівського державного університету ім. Ів. Франка, т. XXIX, вип. 1/6. 1954.

Стаття надійшла 20. V 1960.