С. В. ДЕНИСКО

ПРО ЕКВІАРЕАЛЬНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХОНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ СПЕЦІАЛЬНИХ ПРЯМОЛІНІЙНИХ КОНГРУЕНЦІЙ

1. Нехай порожнини еволюти поверхні Φ еквіареально відображаються одна на другу за допомогою нормалей цієї поверхні. Приймемо на поверхні Φ за координатні лінії u і v лінії кривини. Нехай R — радіус головної кривини в напрямку лінії u, а $\overset{*}{R}$ — радіус головної кривини в напрямку лінії v.

Тоді диференціальне рівняння асимптотичних ліній поверхні Φ матиме вигляд

$$R R_u^2\, du^2 + c^2 \overset{*}{R} \overset{*}{R}{}_v^2\, dv^2 = 0, \tag{1}$$

де c — стала.

Дійсно, нехай рівняння поверхні Φ

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}(u, v)$$

і $\bar{m}(u, v)$ — одиничний нормальний вектор до цієї поверхні в точці (u, v). Тоді рівняння порожнини еволюти запишуться таким чином:

$$\bar{r} = \bar{\rho} + R\bar{m},$$

$$\overset{*}{\bar{r}} = \bar{\rho} + \overset{*}{R}\bar{m}.$$

Звідси, диференціюючи і приймаючи до уваги формулу Родріга, дістанемо

$$\bar{r}_u = R_u \bar{m},$$

$$\bar{r}_v = \bar{\rho}_v + R_v \bar{m} - \frac{R}{\overset{*}{R}} \bar{\rho}_v,$$

$$\overset{*}{\bar{r}}_u = \bar{\rho}_u + \overset{*}{R}_u \bar{m} - \frac{\overset{*}{R}}{R} \bar{\rho}_u,$$

$$\overset{*}{\bar{r}}_v = \overset{*}{R}_v \bar{m}.$$

Останні рівності дають

$$[\bar{r}_u \bar{r}_v] = \frac{R_u}{\overset{*}{R}} \left(\overset{*}{R} - R\right) [\bar{m}\, \bar{\rho}_v],$$

$$\left[\overset{*}{\bar{r}}_u \overset{*}{\bar{r}}_v\right] = \frac{\overset{*}{R}_v}{R} \left(\overset{*}{R} - R\right) [\bar{m}\, \bar{\rho}_u],$$

або

$$[\overline{r_u r_v}]^2 = G\left[\frac{R_u}{\overset{*}{R}}\left(\overset{*}{R} - R\right)\right]^2,$$

$$\left[\overline{\overset{*}{r}_u \overset{*}{r}_v}\right]^2 = E\left[\frac{\overset{*}{R}_v}{R}\left(\overset{*}{R} - R\right)\right]^2,$$

де E, G — коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні Ф. Звідки, враховуючи, що порожнини еволюти еквіареально відображаються одна на другу за допомогою нормалей поверхні Ф, дістанемо

$$c^2 \frac{E^2}{G} = \frac{R^2 R_u^2}{\overset{*}{R}{}^2 \overset{*}{R}{}_v^2}, \tag{2}$$

де c — стала.

На поверхні Ф координатна сітка співпадає з сіткою ліній кривини, а тому для коефіцієнтів другої квадратичної форми цієї поверхні маємо такі вирази:

$$L = \frac{E}{R}, \quad M = 0,$$

$$N = \frac{G}{\overset{*}{R}},$$

або згідно (2)

$$L = \frac{GRR_u^2}{c^2 \overset{*}{R}{}^2 \overset{*}{R}{}_v^2},$$

$$N = \frac{G}{\overset{*}{R}}.$$

Підставляючи ці вирази для L і N в рівняння асимптотичних ліній

$$Ldu^2 + Ndv^2 = 0,$$

дістанемо рівняння (1).

Очевидно, і навпаки, якщо рівняння асимптотичних ліній має вигляд (1), то порожнини еволюти еквіареально відображаються одна на другу за допомогою нормалей поверхні Ф.

З (1) видно, що в тому випадку, коли $c=1$ (тоді ми маємо еквівалентне відображення) і поверхня Ф мінімальна, радіуси головних кривин поверхні Ф зберігають стале значення вздовж асимптотичних ліній одного сімейства.

Прикладом мінімальної поверхні, порожнини еволюти якої еквівалентно відображаються одна на другу за допомогою нормалей цієї поверхні, є прямий гелікоїд.

Покажемо, що рівняння асимптотичних ліній гелікоїда можна записати у вигляді (1).

Нехай λ — віддаль з відповідним знаком від точки гелікоїда до його осі і кут Θ — кут повороту твірної, який відраховується від її початкового положення. Тоді для прямого гелікоїда маємо [1]:

1) рівняння ліній кривини

$$Ar\,sh \frac{\lambda}{a} = \Theta - \Theta_1, \tag{3}$$

$$Ar\,sh \frac{\lambda}{a} = -\Theta + \Theta_2, \tag{4}$$

де a — хід гелікоїда і Θ_1, Θ_2 — довільні сталі;

2) рівняння асимптотичних ліній

$$d\lambda d\Theta = 0; \tag{5}$$

3) якщо R — радіус кривини нормального перерізу в напрямку лінії кривини сімейства (3) і — $\overset{*}{R}$ — радіус кривини нормального перерізу в напрямку лінії кривини сімейства (4), то

$$R = -\overset{*}{R} = -\frac{\lambda^2 + a^2}{a}. \tag{6}$$

Зробивши заміну

$$\lambda = a\,sh\frac{u+v}{2},$$

$$\Theta = \frac{u-v}{2},$$

дістанемо нову систему координат, координатна сітка якої згідно з (3) і (4) є сітка ліній кривини. В нових координатах (5) і (6) набувають вигляду

$$du^2 - dv^2 = 0, \tag{5'}$$

$$R = -\overset{*}{R} = -a\,ch\frac{u+v}{2}. \tag{6'}$$

В силу (6′)

$$R_u = R_v = -\overset{*}{R}_u = -\overset{*}{R}_v = -\frac{a}{2}\,sh\frac{u+v}{2},$$

а тому рівняння (5′) можна записати у вигляді (1).

2. Візьмемо пару конгруенцій

$$\bar{r} = \bar{\rho}(u, v) + \lambda\bar{m}(u, v),$$

$$\overset{*}{\bar{r}} = \bar{\rho}(u, v) + \lambda\overset{*}{\bar{m}}(u, v),$$

де $\bar{m}$ і $\overset{*}{\bar{m}}$ — одиничні вектори. Якщо λ є функція криволінійних координат, то попередні рівняння можна розглядати як рівняння двох поверхонь. Нехай першому рівнянню відповідає поверхня Φ, а другому — поверхня $\overset{*}{\Phi}$.

З'ясуємо, якими повинні бути опорна поверхня $\bar{\rho}$ (u, v) і дана пара конгруенцій в тому випадку, коли поверхні Φ і $\overset{*}{\Phi}$, якою б не була функція λ (u, v), еквівалентно відображаються одна на другу так, що відповідні точки мають однакові координати u, v.

Прирівнявши дискримінанти перших квадратичних форм поверхонь Φ і $\overset{*}{\Phi}$, дістанемо[1]

$$\lambda_u^2\left[(\bar{\rho}_v\bar{m})^2 - \left(\bar{\rho}_v\overset{*}{\bar{m}}\right)^2\right] + \lambda_v^2\left[(\bar{\rho}_u\bar{m})^2 - \left(\bar{\rho}_v\overset{*}{\bar{m}}\right)^2\right] +$$

$$+ 2\lambda_u\lambda_v\left[(\bar{\rho}_u\bar{m})(\bar{\rho}_v\bar{m}) - \left(\bar{\rho}_u\overset{*}{\bar{m}}\right)\left(\bar{\rho}_v\overset{*}{\bar{m}}\right)\right] +$$

$$+ 2\lambda_u\left[\left(\bar{\rho}_u\bar{m} - \bar{\rho}_u\overset{*}{\bar{m}}\right)G - \left(\bar{\rho}_v\bar{m} - \bar{\rho}_v\overset{*}{\bar{m}}\right)F\right] +$$

[1] Виписуємо всі члени, які містять в собі похідні функції λ (u, v) і не містять самої функції, а також ті члени, в які входять функція λ (u, v) в першій степені і квадрати або добутки її похідних; всі останні члени позначаємо крапками.

$$+2\lambda_v\left[-\left(\bar\rho_u\bar m-\bar\rho_u\overset{*}{\bar m}\right)F+\left(\bar\rho_v\bar m-\bar\rho_v\overset{*}{\bar m}\right)E\right]+$$

$$+\lambda\lambda_u^2\left(\bar\rho_v\bar m_v-\bar\rho_v\overset{*}{\bar m}_v\right)+\lambda\lambda_v^2\left(\bar\rho_u\bar m_u-\bar\rho_u\overset{*}{\bar m}_u\right)-$$

$$-2\lambda\lambda_u\lambda_v\left(\bar\rho_u\bar m_v-\bar\rho_u\overset{*}{\bar m}_v+\bar\rho_v\bar m_u-\bar\rho_v\overset{*}{\bar m}_u\right)+\ldots=0,$$

де E, F, G — коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні $\bar\rho\ (u, v)$. Звідки, враховуючи, що $\lambda(u, v)$ — довільна функція, знайдемо

$$\left(\bar\rho_u\bar m\right)^2=\left(\bar\rho_u\overset{*}{\bar m}\right)^2,\quad\left(\bar\rho_v\bar m\right)^2=\left(\bar\rho_v\overset{*}{\bar m}\right)^2,\quad\left(\bar\rho_u\bar m\right)\left(\bar\rho_v\bar m\right)=\left(\bar\rho_u\overset{*}{\bar m}\right)\left(\bar\rho_v\overset{*}{\bar m}\right),$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\bar\rho_u\bar m-\bar\rho_u\overset{*}{\bar m}\right)G-\left(\bar\rho_v\bar m-\bar\rho_v\overset{*}{\bar m}\right)F=0,\\&-\left(\bar\rho_u\bar m-\bar\rho_u\overset{*}{\bar m}\right)F+\left(\bar\rho_v\bar m-\bar\rho_v\overset{*}{\bar m}\right)E=0,\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}&\bar\rho_u\bar m_u-\bar\rho_u\overset{*}{\bar m}_u=0,\\&\bar\rho_v\bar m_v-\bar\rho_v\overset{*}{\bar m}_v=0,\\&\bar\rho_u\bar m_v-\bar\rho_u\overset{*}{\bar m}_v+\bar\rho_v\bar m_u-\bar\rho_v\overset{*}{\bar m}_u=0.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

З перших трьох рівностей видно, що можливі тільки такі два випадки:

$$\left.\begin{aligned}&\bar\rho_u\bar m=\bar\rho_u\overset{*}{\bar m},\\&\bar\rho_v\bar m=\bar\rho_v\overset{*}{\bar m}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

або

$$\left.\begin{aligned}&\bar\rho_u\bar m=-\bar\rho_u\overset{*}{\bar m},\\&\bar\rho_v\bar m=-\bar\rho_v\overset{*}{\bar m}.\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

Згідно (9), вектор $\bar m-\overset{*}{\bar m}$ є нормальним до поверхні $\bar\rho(u, v)$, а тому в силу (8) коефіцієнти її другої квадратичної форми дорівнюють нулю.

Отже, в першому випадку поверхня $\bar\rho(u, v)$ є площина. Крім цього, кожна пряма однієї конгруенції симетрична відносно площини $\bar\rho\ (u, v)$ деякій прямій другої конгруенції.

Якщо ж мають місце рівності (10), то враховуючи, що $EG-F^2\neq0$, з (7) дістанемо

$$\bar\rho_u\bar m=\bar\rho_v\bar m=\bar\rho_u\overset{*}{\bar m}=\bar\rho_v\overset{*}{\bar m}=0.$$

Таким чином, вектори $\bar m$ і $\overset{*}{\bar m}$ нормальні до поверхні, і оскільки поверхні Φ і $\overset{*}{\Phi}$ не співпадають, то $\bar m=-\overset{*}{\bar m}$. Тому з (8) видно, що коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні $\bar\rho(u, v)$ дорівнюють нулю.

Отже, в другому випадку поверхня $\bar\rho\ (u, v)$ є площина і прямі обох конгруенцій перпендикулярні до неї.

Очевидно, як в першому, так і в другому випадку поверхні Φ і $\overset{*}{\Phi}$, якою б не була функція $\lambda(u, v)$, еквівалентно відображаються одна на другу так, що відповідні точки мають однакові координати u, v.

3. Доведемо, що тільки площина, сфера і коловий циліндр допускають еквіареальне відображення за допомогою нормалей на паралельні до них поверхні.

Якщо Φ, $\overset{*}{\Phi}$ — паралельні поверхні і h — віддаль між ними, то [2]

$$\overset{*}{\gamma} = (1 - 2Hh + Kh^2)^2 \gamma,$$

де $\overset{*}{\gamma}$, γ — дискримінанти перших квадратичних форм поверхонь $\overset{*}{\Phi}$ і Φ, а K і H — повна і середня кривина поверхні Φ.

Нехай поверхня Φ за допомогою нормалей еквіареально відображається на поверхню $\overset{*}{\Phi}$. Тоді, згідно з попередньою рівністю,

$$1 - 2Hh + Kh^2 = c, \tag{11}$$

де c — стала.

Припустимо, що поверхня Φ розгортувальна. Тоді $K=0$, а тому в силу (11) $H=\text{const}$. Але [3] якщо навіть повна і середня кривина зберігають сталі значення лише на лініях кривини одного сімейства, то поверхня є або поверхнею обертання, або циліндром. Таким чином, розгортувальна поверхня Φ є циліндр, причому або коловий циліндр, або площина, бо $H=\text{const}$.

Покажемо тепер, що коли $K \neq 0$, то поверхня Φ є сфера.

Вирази для повної кривини $\overset{*}{K}$ і середньої кривини $\overset{*}{H}$ поверхні $\overset{*}{\Phi}$ можна записати таким чином [2]:

$$\overset{*}{K} = \frac{K}{1 - 2Hh + Kh^2},$$

$$H = \frac{H - Kh}{1 - 2Hh + Kh^2}.$$

Припустимо, що $c=1$. Тоді попередні формули згідно (11) дають

$$\overset{*}{K} = K,$$

$$\overset{*}{H} = -H.$$

Звідси випливає, що коли змінимо напрямки одиничних нормальних векторів однієї з поверхонь на супротивні, то головні кривини в кожній точці поверхні Φ будуть такі ж самі, як і головні кривини у відповідній точці поверхні $\overset{*}{\Phi}$. Тому внаслідок теореми Погорєлова [4] поверхня Φ за допомогою нормалей ізометрично відображається на поверхню $\overset{*}{\Phi}$. Враховуючи це, згідно з рівностями [2],

$$\overset{*}{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} - 2\pi_{ij}h + \nu_{ij}h^2,$$

де $\overset{*}{\gamma}_{ij}$ — коефіцієнт першої квадратичної форми поверхні $\overset{*}{\Phi}$, а γ_{ij}, π_{ij}, ν_{ij} — коефіцієнти першої, другої і третьої квадратичних форм поверхні Φ, маємо

$$\nu_{ij}h = 2\pi_{ij}.$$

Якщо на поверхні Φ координатна сітка складається з ліній кривини, то, беручи до уваги формулу Родріга, з останніх рівностей знайдемо головні кривини k_1 і k_2 поверхні Φ, а саме:

$$k_1 = k_2 = \frac{2}{h}.$$

Таким чином, поверхня Φ — сфера.

З рівності (11) дістанемо

$$K = \mathrm{const}, \quad H = \mathrm{const}.$$

Звідси випливає, що поверхня Φ — поверхня обертання, відмінна від колового циліндра і від площини, бо $K \neq 0$. Оскільки єдиною мінімальною поверхнею обертання, крім площини, є катеноїд, повна кривина якого не є сталою, то $H \neq 0$. А тому поверхня Φ може бути тільки сферою.

Отже, наше твердження доведено повністю.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. Я. Выгодский. Дифференциальная геометрия, М.—Л., 1949.
2. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей, т. I, М.—Л., 1947.
3. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей, т. II, М.—Л., 1948.

Стаття надійшла 20. V 1960.