Львівський ордена Леніна державний університет імені Івана Франка
Випуск 9 Питання механіки і математики 1962

О. С. КОВАНЬКО

ПРО ОДИН КРИТЕРІЙ КОМПАКТНОСТІ СИСТЕМИ $\tilde{B}$ ТА B_p МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

В одній нашій статті [1] ми довели умови компактності систем узагальнених майже періодичних функцій А. С. Безіковича (так звані $\tilde{B}$ та B_p майже періодичні функції).

Завдяки новому визначенню $\tilde{B}$ майже періодичних функцій, даним датським математиком Фольнером [2], що були названі ним KB майже періодичними, вдалося дати простішу умову компактності цих функцій і притому в більш вузькому значенні збіжності, ніж раніше.

§ 1. Нагадаємо основні визначення, позначення та теореми, якими ми будемо користуватися в даній статті.

Нехай E — деяка вимірна множина на $(-\infty<x<+\infty)$. Розглянемо величину середньої щільності за Безіковичем:

$$\delta_B E=\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{|E(-T,+T)|}{2T}.$$

Далі, нехай $f(x)$, $\varphi(x)\in L_p(-\infty<x<+\infty)$. Запровадимо таку метрику:

$$D^E_{B_p}(f,\varphi)=\overline{\lim_{T\to\infty}}\left\{\frac{1}{2T}\int_{E(-T,+T)}|f(x)-\varphi(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

$$\Big\{D^E_{B_p}(f,\varphi)=D_{B_p}(f,\varphi),$$

якщо

$$E=(-\infty,+\infty)\quad(p\geqslant 1)\Big\}.$$

Визначення I [2]. Вимірна функція $f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ називається $K.B.$—майже періодичною ($K.B.$ м. п.), якщо для будь-яких $\varepsilon>0$ і $\eta>0$ $(\eta<1)$ існує множина E та відносно щільна множина майже періодів $\tau=\tau(\varepsilon,\eta)$, що $|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon$,

коли $x\in E$, $x+\tau\in E$. $\sigma_B E>1-\eta$.

Крім того, $f(x)$ скінчена, за винятком, можливо, множини Z, такої, що $\delta_B Z=0$.

Відзначимо такі властивості $K.B.$ м. п. функцій:

1. Для будь-яких $\varepsilon>0$ та $\eta>0$ $(\eta<1)$:

а) Існує таке $M=M(\eta)>0$, що $|f(x)|<M$ для $x\in E_1$, де E_1—множина, для якої $\delta_B E_1>1-\eta$.

b) Існує таке $\rho=\rho(\varepsilon, \eta)>0$ та множина E_2 $[\delta_B E_2>1-\eta]$, що $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ при умові, що $x' \in E_2$, $x'' \in E_2$ та $|x'-x''|<\rho$.

c) Будь-яка скінчена система $K. B.$ м. п. функцій $\{f_k(x)\}$ $(k=1, 2, 3, \ldots, n)$ має спільну відносно щільну множину майже періодів $\{\tau\}$. Тобто, для будь-яких $\varepsilon>0$ та $\eta>0$ $(\eta<1)$ існує така множина E_3 $(\delta_B E_3>1-\eta)$, що $|f_k(x+\tau)-f_k(x)|<\varepsilon$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ та $x \in E_3$, $x+\tau \in E_3$.

2. Для будь-яких $\varepsilon>0$ та $\eta>0$ $(\eta<1)$ існує множина E така, що $\delta_B E>1-\eta$ та тригонометричний поліном $s_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{k=n} a_k e^{i\lambda_k x}$ такий, що $|f(x)-s_n(x)|<\varepsilon$ для $x \in E$.

В цьому значенні $f(x)$ називається «$\tilde{B}$ майже періодичною» («$\tilde{B}$. м. п.») [3].

Має місце також і обернене, а саме: якщо $f(x)$ є «$\tilde{B}$ м. п», то й $f(x)$ є «$K. B.$ м. п.».

Визначення II [3]. $f(x)$ є «B_p м. п.», якщо для будь-якого $\varepsilon>0$ можна знайти тригонометричний поліном $s_n(x)=\sum\limits_{1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x}$ такий, що $D_{B_p}\{f(x), s_n(x)\}<\varepsilon$.

Визначення III. Послідовність $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ називається «$\tilde{B}$ — асимптотично рівномірно» збіжною, якщо для довільного $\eta>0$ $(\eta<1)$ існує така множина E $[\delta_B E>1-\eta]$, на якій послідовність збігається рівномірно.

Ми, звичайно, використаємо і поняття ε-сітки (теорему Хаусдорфа), і теорему Арцеля про компактність системи неперервних функцій (в значенні рівномірної збіжності), узагальнивши її на область досконалої обмеженої множини.

§ 2. Розв'яжемо тепер питання про компактність систем $K. B.$ м. п. функцій в значенні «$\tilde{B}$ — асимптотично рівномірної збіжності».

Теорема A. Необхідна і достатня умова компактності системи $\{f(x)\} \to K.B.$ м. п. функцій в значенні „$\tilde{B}$ — асимптотично рівномірної збіжності" полягає в тому, що для будь-яких $\varepsilon>0$ та $\eta>0$ $(\eta<1)$.

1) Існує таке $M=M(\eta)>0$ і множина $E_1(\delta_B E_1>1-\eta)$, що $|f(x)|<M$, для всіх функцій $f(x)$ нашої системи $\{f(x)\}$ для $x \in E_1$.

2) Існує таке $\rho=\rho(\varepsilon, \eta)>0$ і множина E_2 $[\delta_B E_2>1-\eta]$, що для всіх функцій $f(x)$ нашої системи $\{f(x)\}$ виконується умова: $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, якщо $x' \in E_2$, $x'' \in E_2$, і $|x'-x''|<\rho$.

3) Існує загальна (для всіх функцій системи $\{f(x)\}$) відносно щільна множина майже періодів $\tau=\tau(\varepsilon, \eta)$ та множина $E_3(\delta_B E_3>1-\eta)$, що $|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon$, коли $x \in E_3$ та $x+\tau \in E_3$.

Доведення. Умови 1, 2, 3 необхідні.

Нехай система $\{f(x)\}$ компактна у вище вказаному значенні, тоді за теоремою Хаусдорфа для будь-яких $\varepsilon>0$ і $\eta>0$ $(\eta<1)$ існує скінчена $\frac{\varepsilon}{3}$ — сітка, що складається з $K.B.$ м. п. функцій: $f_1(x), \ldots f_n(x)$, та множина $E_0\left(\delta_B E_0>1-\frac{\eta}{2}\right)$, що для всякої функції $f(x)$ системи $\{f(x)\}$ знайдеться така функція $f_k(x)$ сітки, що $|f(x)-f_k(x)|<\frac{\varepsilon}{3}$ на множині E_0.

1) За властивістю $a)$ — $K.B.$ м. п. функцій можна підібрати таке $M = M(\eta) > 0$, що $|f_k(x)| < M - \frac{\varepsilon}{3}$, на деякій множині E_{1k} такій, що $\delta_B E_{1k} > 1 - \frac{\eta}{2n}$.

Тоді ми одержимо, що на множині $E_1' = \bigcap\limits_1^n E_{1k}$ будуть виконуватись n нерівностей: $f_k(x) < M - \frac{\varepsilon}{3}$ $(k=1, 2, 3, \ldots, n)$ при чому: $\delta_B E_1' > 1 - \frac{\eta}{2}$.

Значить, $|f(x)| \leqslant |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \left(M - \frac{\varepsilon}{3}\right) = M$ на множині $E_1 = E_0 \cap E_1'$, у якої $\delta_B E_1 > 1 - \eta$.

Таким чином, виконано умову 1) нашої теореми.

2) За властивістю $b)$ — $K.B.$ м. п. функцій знайдеться $\rho = \rho(\varepsilon, \eta) > 0$ та множина $E_{2k} (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$ такі, що $|f_k(x') - f_k(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$ для $|x' - x''| < \rho$, якщо $x' \in E_{2k}$ та $x'' \in E_{2k}$, причому $\delta_B E_{2k} > 1 - \frac{\eta}{2n}$.

Отже, мають місце нерівності: $|f_k(x') - f_k(x'')| < \frac{\varepsilon}{3} (k = 1, 2, 3, \ldots n)$ на множині $E_2' = \bigcap\limits_1^n E_{2k} \left\{\delta_B E_2' > 1 - \frac{\eta}{2}\right\}$.

З цього: $|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f_k(x')| + |f_k(x') - f_k(x'')| + |f_k(x'') - f(x'')| < \varepsilon$ на множині $E_2 = E_0 \cap E_2' [\delta_B E_2 > 1 - \eta]$, тобто для $x' \in E_2$, $x'' \in E_2$ і $|x' - x''| < \rho$.

Але тому що $f(x)$ довільна функція нашої системи, то ми прийшли до умови 2) даної теореми.

3) За властивістю $c)$ — $K.B.$ м. п. функцій для $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ знайдеться загальна відносно щільна множина майже періодів $\tau = \tau(\varepsilon, \eta)$ та відносні множини E_{3k}, такі, що $|f_k(x + \tau) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3} (k = 1, 2, \ldots n)$ для $x \in E_{3k}$ та $x + \tau \in E_{3k}$, причому $\delta_B E_{3k} > 1 - \frac{\eta}{2n}$.

Розглянемо множину $E_3 = E_0 \cap \left\{\bigcap\limits_1^n E_{3k}\right\}$. Легко перевірити, що $\delta_B E_3 > 1 - \eta$.

Тепер ми маємо, що для будь-якої функції $f(x)$ нашої системи виконується нерівність:

$$|f(x + \tau) - f(x)| \leqslant |f(x + \tau) - f_k(x + \tau)| + |f_k(x + \tau) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

якщо $x \in E_3$, $x + \tau \in E_3$.

Таким чином, виконується умова 3) нашої теореми.

Умови 1, 2, 3 — достатні.

Нехай вказані умови виконані і нехай (згідно з умовою 3) $l = l(\varepsilon, \eta)$* означає довжину інтервалу відносної щільності множини

* В кожному інтервалі довжини l існує майже період.

майже періодів всіх функцій системи $\{f(x)\}$, що належать до чисел ε та η.

Користуючись позначеннями, які ми використали при розгляді необхідності умов теореми, розглянемо множину:

$$\hat{E} = E_0 \cap E_1 \cap E_2 \cap E_3.$$

Очевидно, що $\delta_B \hat{E} > 1 - 4\eta$, причому ми можемо вважати, що $\hat{E}$ доскональна.

Кожній функції $f(x)$ нашої системи віднесемо деяку функцію $\tilde{f}(x)$, визначивши її таким чином:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) \ \dots \ x \in (-l \leqslant x \leqslant +l) \\ f(x - \tau_n) \ \dots \ x \in (nl \leqslant x (n+1) l), \ (n = \pm 1, \ \pm 2, \ \dots), \end{cases}$$

де під τ_n треба розуміти майже період, що лежить в інтервалі $(nl < < x < (n+1) l)$.

Очевидно, що система всіх функцій $\tilde{f}(x)$ задовольняє вимогам теореми Арцеля про компактність системи неперервних функцій в розумінні рівномірної збіжності на множині $\hat{E}(-l, +l)$, яку ми завжди можемо вважати не пустою, а також, що $\frac{|\hat{E}(-l, +l)|}{2l} > 1 - 4\eta$. Відповідним зсувом інтервалу $(-l < x < +l)$ ми завжди можемо цього досягти.

Оскільки $x - \tau_n \in (-l, +l)$, то з визначення функцій $\tilde{f}(x)$ виходить, що рівномірна збіжність послідовності цих функцій на $\hat{E}(-l, +l)$ приводить до рівномірної збіжності на всій множині $\hat{E}$. Значить, система всіх функцій $\{\tilde{f}(x)\}$ компактна в значенні „$\tilde{B}$ — асимптотично рівномірної збіжності". А тому що $|f(x) - \tilde{f}(x)| < \varepsilon$ для $x \in \hat{E}$, то з відомої властивості компактних систем випливає, що й система функцій $\{f(x)\}$ також компактна в значенні „$\tilde{B}$ — асимптотично рівномірної" збіжності, оскільки ε довільно мале, що і потрібно було довести.

§ 3. Припустимо тепер, що до умов теореми A ми додамо умову сумовності функцій системи. А саме, висловимо таку теорему:

Теорема *B*. Достатньою умовою компактності системи B_p м. п. функцій в значенні метрики D_{B_p} є компактність її в значенні „$\tilde{B}$—асимптотично рівномірної збіжності" та така умова:

Для довільно малого $\varepsilon > 0$ існує таке $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ $(\rho < 1)$, що $D_{B_p}^{E}\{f(x), 0\} < \varepsilon$, якщо $\delta_B E < \rho$ для всіх функцій нашої системи.*

Доведення. Нехай $\{f_n(x)\}$ $(n = 1, 2, 3 \dots)$ є послідовність, що складається з функцій нашої системи, яка збігається „$\tilde{B}$—асимптотично рівномірно" до $f(x)$.

Нехай E_0 є та множина, на якій послідовність $\{f_n(x)\}$ збігається рівномірно. Маємо $\delta_B E_0 > 1 - \eta$, де $\eta > 0$, наперед задане число. Задамо $\varepsilon > 0$ та підберемо $N = N(\varepsilon) > 0$ так, щоб $|f(a) - f_n(x)| < \varepsilon$ для $x \in E_0$ і для $n > N$.

Маємо:**

$$D_{B_p}(f, f_n) \leqslant D_{B_p}^{E_0}(f, f_n) + D_{B_p}^{cE_0}(f, f_n) \leqslant D_{B_p}^{E_0}(f, f_n) +$$

* Клас B_p м. п. функцій включається в клас B м. п. функцій.

** $f(x) \in L_p$, що легко перевірити.

$$+ D_{B_p}^{cE_0}(f, 0) + D_{B_p}^{cE_0}(f_n, 0) \leqslant \varepsilon (\delta_B E_3)^{\frac{1}{p}} + D_{B_p}^{cE_0}(f, 0) +$$
$$+ D_{B_p}^{cE_0}(f_n, 0) \leqslant \varepsilon + D_{B_p}^{cE_0}(f, 0) + D_{B_p}^{cE_0}(f_n, 0).$$

Підберемо $\eta > 0$ настільки малим, щоб згідно з даною додатковою умовою виконувалась нерівність:

$$D_{B_p}^{cE_0}(f, 0) < \varepsilon$$

та

$$D_{B_p}^{cE_0}(f_n, 0) < \varepsilon \quad (\delta_B cE_0 < \eta).$$

Тоді, очевидно, ми будемо мати:

$$D_{B_p}(f, f_n) < 3\varepsilon.$$

Звідси виходить, що

$$\lim_{n \to \infty} D_{B_p}(f, f_n) = 0,$$

що й потрібно було довести.

Примітка. Наступний приклад показує, що виведені умови є лише достатні але не необхідні.

Нехай $\chi_E(x)$ є характеристична функція множини E. Розглянемо послідовність $\psi_n(x) = \chi_{[0,\, n]}(x)$ $(n = 1,2,3,\ldots)$. Вона, очевидно, збігається до $\psi(x) \equiv 0$ в значенні метрики D_{B_p}, тому що $D_{B_p}(\psi, \psi_n) = 0$, але не збігається в значенні „$\tilde{B}$ асимптотично рівномірної" збіжності. Крім того, $\psi_n(x)$ є B_p м. п.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. С. Кованько. О компактности систем обобщенных почти периодических функций А. С. Безиковича. Мат. сб., т. 16 (58), № 3, 1945, стр. 365—382.
2. E. Folner. On the structure of generalised almost-periodic functions. D. K. Danske Videnskab Sel Bind, 21, N 11, 1945, p. 1—30.
3. A. S. Kovanko. Sur les classes de fonetions presque périodiques généralisées. Annali di Math VIII, 1930—1931, p. 1—24.

Стаття надійшла 15. IX 1960.