Львівський ордена Леніна державний університет імені Івана Франка
Випуск 9 Питання механіки і математики 1962

О. С. КОВАНЬКО

# ОДИН ПРИКЛАД НЕРІВНОМІРНОЇ ЗБІЖНОСТІ ПОСЛІДОВНОСТІ ФУНКЦІЙ

Нехай $\{f_n(x)\}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ послідовність комплексно-значних вимірних функцій на відрізку $[a \leqslant x \leqslant b]$, яка збігається на цьому відрізку до $f(x)$.

Визначення I. (Osgood). Точка $x=c$ відрізка $[a \leqslant x \leqslant c]$ називається $\chi$ точкою, якщо для довільно малого інтервала $(c-\delta < x < < c+\delta)$ має місце:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \{\sup_{x\in(c-\delta,\ c+\delta)} |f(x)-f_n(x)|\} = +\infty.$$

Наведемо без доказу таке твердження: Якщо $X$ є множина всіх точок категорії $\chi$ і якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ інтегрована скільки завгодно разів почленно і $X_m$ є множина $\chi$-точок для послідовності:

$$\left\{\int_a^x \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{m-1}} f_n(t)\,dt\,dt_1 \ldots dt_{m-1}\right\} (n=1, 2, 3, \ldots),$$

тоді $X \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots$.

Визначення II. Якщо $c \in X_m$ і $c \overline{\in} X_{m+1}$, то $c$ є точка категорії $\chi_m$, а якщо $c \in \lim_{m\to\infty} X_m \neq 0$, то ми маємо точку категорії $\chi_\omega$.

Розглянемо приклад таких точок. Нехай

$$f_n(x) = \begin{cases} A_n e^{2\pi n^2 xi} & \text{якщо } x \in \left[\frac{1}{n},\ \frac{2}{n}\right], \\ 0 & \text{,, } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right) \cup \left(\frac{2}{n},\ 1\right], \end{cases}$$

де $\lim_{n\to\infty} A_n = +\infty$ ($A_n$ — дійсне), ми бачимо, що $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \equiv 0$ для $x \in [0, 1]$.

Візьмемо залишковий член: $R_n(x) = f(x) - f_n(x) = -A_n e^{2\pi n^2 xi}$; проінтегрувавши $R_n(x)$ послідовно $m$ разів, одержимо функцію:

$$\{R_n^{[m]}(x)\} = \int_0^x \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{m-1}} R_n(t)\,dt\,dt_1 \ldots dt_{m-1}.$$

Отже, маємо:

$$R_n^{[1]}(x) = -\int_0^x A_n e^{2\pi n^2 x}\, dt = -\frac{A_n}{2\pi n^2 i}\left[e^{2\pi n^2 x i} - 1\right] = -\frac{A_n}{\lambda_n}\left[e^{\lambda_n x} - 1\right],$$

якщо $\frac{1}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2}{n}$, де для скорочення ми поклали $2\pi n^2 i = \lambda_n$ і $R_n^{[1]}(x) = 0$, якщо $x \overline{\in} \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$. Взагалі, ми маємо:

$$R_n^{[m]}(x) = -\frac{A_n}{\lambda_n^m}\left[e^{\lambda_n\left(x - \frac{1}{n}\right)} - \left(1 + \frac{\lambda_n\left(x - \frac{1}{n}\right)}{1!} + \frac{\lambda_n^2\left(x - \frac{1}{n}\right)^2}{2!} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ldots + \frac{\lambda_n^{m-1}\left(x - \frac{1}{n}\right)^{m-1}}{(m-1)!}\right)\right],$$

якщо $x \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$ і $R_n^{[m]}(x) = 0$, якщо $x \overline{\in} \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]$.

Очевидно, що $\lim\limits_{n \to \infty} R_n^{[m]}(x) = 0 \to x \in [0, 1]$ для довільного $m$.

Припустимо, що

$$\lim_{n \to \infty}\left|\frac{A_n}{\lambda_n^k}\right| = \begin{cases} +\infty \ (k = m) \\ a < +\infty (k > m) \end{cases}$$

тоді $c$ є точка $\chi_m$ (наприклад, $A_n = n^{2m+2}$).

Але якщо $\lim\limits_{n \to \infty}\left|\frac{A_n}{\lambda_n^m}\right| = +\infty$ для довільного $m$, тоді ми маємо точку $\chi_\omega$ (наприклад $A_n = e^n$). Покажемо, що о є дійсно точка категорії $\chi_\omega$. Ми бачимо, що для $x = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$,

$$R_n^{[m]}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = -\frac{e^n}{\lambda_n^m}\left[e^{2\pi i} - \left(1 + \frac{2\pi i}{1!} + \frac{(2\pi i)^2}{2!} + \ldots \frac{(2\pi i)^{m-1}}{(m-1)!}\right)\right].$$

Вираз у дужках відрізняється від 0, а тоді випливає, що

$$\lim_{n \to \infty}\left|R_n^{[m]}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\right| = +\infty \text{ (для довільного } m),$$

що й треба було довести.

---

*Стаття надійшла 15. II 1960.*