Львівський ордена Леніна державний університет імені Івана Франка
Випуск 9 Питання механіки і математики 1962

М. П. ШЕРЕМЕТЬЄВ, Т. Л. МАРТИНОВИЧ

# ЗГИН ПЛАСТИНКИ З ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ, ОБЛАСТЬ ЯКОЇ ОБМЕЖЕНА ДВОМА КОЛАМИ АБО КОЛОМ І ПРЯМОЮ

Розглянемо пружну ізотропну пластинку, обмежену двома колами або колом і прямою, краї яких підкріплені тонким пружним кільцем сталого перерізу. Підкріплююче кільце розглядається як тонкий пружний стержень, наділений жорсткостями на згин і кручення.

Припускається, що лінія спаю пластинки з кільцем співпадає з віссю кільця.

Нехай пластинка зазнає дії згинних моментів $m_\alpha(s)$, перерізуючих сил $p_\alpha(s)$, прикладених вздовж підкріплених країв, і розподіленого нормального навантаження інтенсивності $q(x, y)$.

Позначимо через $L_1$ і $L_2$ кола, що обмежують область пластинки; радіуси останніх нехай будуть $R_1$ і $R_2$.

Дробово-лінійна функція

$$z = \omega(\zeta) = \frac{\zeta}{1 - a\zeta}, \tag{1}$$

як відомо, дає конформне відображення кругового кільця, яке розміщене між концентричними колами $\gamma_1$ і $\gamma_2$ з радіусами $\rho_1$ і $\rho_2$ в площині $\zeta$, на область, розміщену між ексцентричними колами $L_1$ і $L_2$, якщо $\rho_1 < \rho_2 < \frac{1}{a}$, або на безмежну область, що складається з точок, розміщених ззовні двох даних кіл $L_1$ і $L_2$, якщо $\rho_1 < \frac{1}{a}$ і $\rho_2 > \frac{1}{a}$ або на область, що міститься між колом $L_1$ і заданою прямою $L_2$ $(R_2 = \infty)$, якщо $\rho_1 < \rho_2 = \frac{1}{a}$, в площині $z$.

Для визначення радіусів $\rho_1$ і $\rho_2$ кіл $\gamma_1$ і $\gamma_2$ на площині $\zeta$ та дійсної сталої «$a$» необхідно задати елементи, що визначають першу область.

Функції $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$, що визначають напружений стан пластинки, візьмемо у вигляді:

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{iP_z}{4D}\frac{\zeta}{1-a\zeta} + \frac{M_x^* + i M_y^*}{4D}\right]\ln\zeta + \varphi_0(\zeta),$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\frac{M_x^* - iM_y^*}{4D}\ln\zeta + \psi_0(\zeta), \tag{2}$$

де $\varphi_0(\zeta)$ і $\psi_0(\zeta)$ — голоморфні функції в області пластинки, які подамо в такому вигляді:

$$\varphi_0(\zeta) = P_1(\zeta) + P_2(\zeta), \quad \psi_0(\zeta) = Q_1(\zeta) + Q_2(\zeta). \tag{3}$$

Тут позначено:

$$P_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \qquad P_2(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^{-n},$$

$$Q_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n \zeta^n, \qquad Q_2(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \zeta^{-n},$$

$p_z$ — головний вектор, $M_x^*$ і $M_y^*$ — компоненти головного моменту зовнішнього навантаження.

Як показано в працях [1] і [2], задача, яка розглядається, зводиться, з урахуванням рівностей (1) і (2), до знаходження голоморфних функцій $\varphi_0(\zeta)$ і $\psi_0(\zeta)$ та функції $U_\alpha(\sigma_\alpha)$ з таких граничних умов:

$$U'_\alpha(\sigma_\alpha) - \frac{K_\alpha \rho_\alpha}{(1-a\sigma_\alpha)(\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2)} U_\alpha(\sigma_\alpha) - K'_\alpha \rho_\alpha^3 \frac{1-a\sigma_\alpha}{(\sigma_\alpha - a\rho_\alpha)^3} \overline{U_\alpha(\sigma_\alpha)} =$$

$$= (1-\varkappa) \frac{\rho_\alpha^2}{\sigma_\alpha^2} \overline{\varphi'_0(\sigma_\alpha)} + f'_\alpha(\sigma_\alpha) + iC_\alpha \frac{\rho_\alpha^2}{(\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2)^2} \text{ на } \gamma_\alpha\,(\alpha=1,2), \tag{4}$$

$$\varkappa \overline{\varphi_0(\sigma_\alpha)} + \frac{\rho_\alpha^2(1-a\sigma_\alpha)^2}{\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2} \varphi'_0(\sigma_\alpha) + \psi_0(\sigma_\alpha) = U_\alpha(\sigma_\alpha) - f_\alpha^*(\sigma_\alpha) +$$

$$+ iC_\alpha \frac{\rho_\alpha^2}{\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2} + C'_\alpha \text{ на } \gamma_\alpha\,(\alpha=1,2). \tag{5}$$

Тут позначено:

$$f_\alpha(\sigma_\alpha) = \frac{1}{D(1-\nu)} [I_\alpha(\sigma_\alpha) - I_\alpha^*(\sigma_\alpha)] - 2\frac{\partial W_2}{\partial t} - \frac{\varkappa - 1}{2\pi i} \left[ \frac{iP_z}{4D} \frac{\rho_\alpha^2}{\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{M_x^* - iM_y^*}{4D} \right] (\ln\sigma_\alpha - 2\ln\rho_\alpha). \tag{6}$$

$$f_\alpha^*(\sigma_\alpha) = f_\alpha(\sigma_\alpha) + 2\frac{\partial W_2}{\partial t} + \frac{P_z}{8\pi D} \frac{\rho_\alpha^2(1-a\sigma_\alpha)}{\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2} + \frac{1}{2\pi i} \frac{M_x^* + iM_y^*}{4D} \frac{\rho_\alpha^2(1-a\sigma_\alpha)^2}{\sigma_\alpha(\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2)} +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \left[ \frac{iP_z}{4D} \frac{\rho_\alpha^2}{\sigma_\alpha - a\rho_\alpha^2} - \frac{M_x^* - iM_y^*}{4D} \right] \ln\rho_\alpha \tag{7}$$

$\varkappa = -\frac{3+\nu}{1-\nu}$, $\nu$ — коефіцієнт Пуассона.

$$K_\alpha = \frac{(n+1)(1-\nu)D}{2G_\alpha}, \qquad K'_\alpha = \frac{(n-1)(1-\nu)D}{2G_\alpha}, \quad G_\alpha = nA_\alpha,$$

$A_\alpha$ — жорсткість на згин, $G_\alpha$ — жорсткість на кручення підкріплюючого кільця.

$$I_\alpha(\sigma_\alpha) = \int_{\rho_\alpha}^{\sigma_\alpha} \left\{ -m_\alpha + i\rho_\alpha \int_0^{\vartheta} \rho_\alpha |\omega'(\sigma_\alpha)|\, d\vartheta_1 \right\} \overline{\omega'(\sigma_\alpha)}\, d\overline{\sigma}_\alpha,$$

$$I_\alpha^*(\sigma_\alpha) = \int\limits_{\rho_\alpha}^{\sigma_\alpha}\left\{-M_n(W_2)+i\rho_\alpha\int\limits_0^{\vartheta}\left(N_n(W_2)+\frac{dH_{n\tau}(W_2)}{ds}\right)|\omega^1(\sigma_\alpha)|d\vartheta_1\right\}\overline{\omega^1(\sigma_\alpha)}d\bar{\sigma}_\alpha \quad (8)$$

$W_2$ — частинний розв'язок рівняння $D\Delta\Delta\, W=q$, $\sigma_\alpha=\rho_\alpha e^{i\vartheta}$ — афікс точки границі області; $C_\alpha$ — дійсна, $C_\alpha'$ — взагалі комплексна сталі.

Сталі $C_\alpha$ і $C_\alpha'$ на одному з контурів $\gamma_\alpha$ можемо покласти рівними нулеві, а на іншому визначаються в процесі розв'язування задачі. Далі будемо вважати, що $C_2=C_2'=0$. Припустимо, що функції $f_\alpha(\sigma_\alpha)$ і $f_\alpha^*(\sigma_\alpha)$ розкладаються в ряди Фур'є за степенями $\sigma_\alpha$, тоді з рівності (5) випливає можливість розкладу в ряд за степенями $\sigma_\alpha$ функції $U_\alpha(\sigma_\alpha)$.

Функції $U_\alpha(\sigma_\alpha)$, $f_\alpha(\sigma_\alpha)$ і $f_\alpha^*(\sigma_\alpha)$ подамо у вигляді рядів:

$$U_\alpha(\sigma_\alpha) = U_\alpha^{(1)}(\sigma_\alpha) + U_\alpha^{(2)}(\sigma_\alpha),$$

$$U_\alpha^{(1)}(\sigma_\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{(\alpha)}\sigma_\alpha^n,\quad U_\alpha^{(2)}(\sigma_\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n^{(\alpha)}\sigma_\alpha^{-n}, \quad (9)$$

$$f_\alpha(\sigma_\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{(\alpha)}\sigma_\alpha^n + \sum_{n=1}^{\infty}\tau_n^{(\alpha)}\sigma_\alpha^{-n}, \quad (10)$$

$$f_\alpha^*(\sigma_\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n^{*(\alpha)}\sigma_\alpha^n + \sum_{n=1}^{\infty}\tau_n^{*(\alpha)}\sigma_\alpha^{-n}. \quad (11)$$

Тепер застосуємо оператор Коші $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{\gamma_\alpha}\frac{(\ldots)\,d\sigma_\alpha}{\sigma_\alpha-\zeta}$ до контурних рівностей (4) і (5) при $|\zeta|<\rho_\alpha$ і $|\zeta|>\rho_\alpha$, враховуючи при цьому (3), (9), (10) і (11); в результаті прийдемо до таких рівностей:

$$U_\alpha^{(1)\prime}(\zeta) - \frac{K_\alpha\rho_\alpha U_\alpha^{(1)}(\zeta)}{(1-a\zeta)(\zeta-a\rho_\alpha^2)} - \frac{K_\alpha'\rho_\alpha^3(1-a\zeta)\overline{U}_\alpha^{(2)}\left(\frac{\rho_\alpha^2}{\zeta}\right)}{(\zeta-a\rho_\alpha^2)^3} =$$

$$=(1-\varkappa)\frac{\rho_\alpha^2}{\zeta^2}\overline{P}_2'\left(\frac{\rho_\alpha^2}{\zeta}\right) - \frac{S_\alpha^0}{\zeta-a\rho_\alpha^2} - \frac{K_\alpha'\left[a\rho_\alpha^2(a^2\rho_\alpha^2-2)+\zeta\right]\overline{S}_\alpha'}{a^3\rho_\alpha(\zeta-a\rho_\alpha^2)^2} -$$

$$-\frac{K_\alpha\rho_\alpha S_\alpha}{(1-a^2\rho_\alpha^2)}\,\frac{1}{\zeta-\frac{1}{a}} + \frac{K_\alpha'\rho_\alpha^3(a\zeta-1)\overline{S}_\alpha}{(\zeta-a\rho_\alpha^2)^3} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)r_{n+1}^{(\alpha)}\zeta^n \quad (|\zeta|<\rho_\alpha). \quad (12)$$

$$U_\alpha^{(2)\prime}(\zeta) - \frac{K_\alpha\rho_\alpha U_\alpha^{(2)}(\zeta)}{(1-a\zeta)(\zeta-a\rho_\alpha^2)} - \frac{K_\alpha'\rho_\alpha^3(1-a\zeta)\overline{U}_\alpha^{(1)}\left(\frac{\rho_\alpha^2}{\zeta}\right)}{(\zeta-a\rho_\alpha^2)^3} =$$

$$=(1-\varkappa)\frac{\rho_\alpha^2}{\zeta^2}\overline{P}_1'\left(\frac{\rho_\alpha^2}{\zeta}\right) + \frac{S_\alpha^0}{\zeta-a\rho_\alpha^2} + \frac{K_\alpha'\left[a\rho_\alpha^2(a^2\rho_\alpha^2-2)+\zeta\right]\overline{S}_\alpha'}{a^3\rho_\alpha(\zeta-a\rho_\alpha^2)^2} + \quad (13$$

$$+\frac{K_\alpha\rho_\alpha S_\alpha}{(1-a^2\rho_\alpha^2)}\,\frac{1}{\zeta-\frac{1}{a}} - \frac{K_\alpha'\rho_\alpha^3(a\zeta-1)\overline{S}_\alpha}{(\zeta-a\rho_\alpha^2)^3} - \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\tau_{n-1}^{(\alpha)}\zeta^{-n} + \frac{ic_\alpha\rho_\alpha^2}{(\zeta-a\rho_\alpha^2)^2}\,(|\zeta|>\rho_\alpha)$$

$$\varkappa\bar{P}_2\left(\frac{\rho_\alpha^2}{\zeta}\right)+\varkappa\bar{a}_0+\frac{\rho_\alpha^2(1-a\zeta)^2}{\zeta-a\rho_\alpha^2}P_1'(\zeta)+Q_1(\zeta)=U_\alpha^{(1)}(\zeta)+$$

$$+\frac{S_\alpha^*}{\zeta-a\rho_\alpha^2}-\sum_{n=0}^{\infty}r_n^{*(\alpha)}\zeta^n+C_\alpha',\ (|\zeta|<\rho_\alpha),\tag{14}$$

$$\varkappa P_1\left(\frac{\rho_\alpha^2}{\zeta}\right)-\varkappa\bar{a}_0+\frac{\rho_\alpha^2(1-a\zeta)^2}{\zeta-a\rho_\alpha^2}P_2'(\zeta)+Q_2(\zeta)=U_\alpha^{(2)}(\zeta)-$$

$$-\frac{S_\alpha^*}{\zeta-a\rho_\alpha^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\tau_n^{*(\alpha)}\zeta^{-n}+iC_\alpha\frac{\rho_\alpha^2}{\zeta-a\rho_\alpha^2},\ (|\zeta|>\rho_\alpha),\tag{15}$$

де

$$S_\alpha^0=\frac{K_\alpha\rho_\alpha}{1-a^2\rho_\alpha^2}U_\alpha^{(1)}(a\rho_\alpha^2)+\frac{K_\alpha'(1-a^2\rho_\alpha^2)}{2a^4\rho_\alpha}\bar{U}_\alpha''\left(\frac{1}{a}\right),$$

$$S_\alpha=U_\alpha^{(2)}\left(\frac{1}{a}\right),\ S_\alpha'=U_\alpha^{(2)\prime}\left(\frac{1}{a}\right),\tag{16}$$

$$S_\alpha^*=\rho_\alpha^2(1-a^2\rho_\alpha^2)^2P_1'(a\rho_\alpha^2),\ \alpha=1,2.$$

При знаходженні співвідношень (12), (13), (14) і (15) ми прийняли $\rho_1<\rho_2<\frac{1}{a}$, що відповідає згину пластинки у вигляді ексцентричного кільця. Аналогічні співвідношення можна одержати і для випадку $\rho_1<\frac{1}{a}$ і $\rho_2>\frac{1}{a}$.

В рівності (14) і (15) входить чотири функції: $P_1(\zeta)$, $P_2(\zeta)$, $Q_1(\zeta)$ і $Q_2(\zeta)$, що підлягають визначенню. Виключаючи із (14) і (15) $Q_1(\zeta)$ і $Q_2(\zeta)$, одержимо такі два рівняння, що містять тільки функції $P_1(\zeta)$ і $P_2(\zeta)$:

$$\varkappa\left[\bar{P}_2\left(\frac{\rho_2^2}{\zeta}\right)-\bar{P}_2\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right)\right]+\frac{(\rho_2^2-\rho_1^2)\zeta(1-a\zeta)^2}{(\zeta-a\rho_2^2)(\zeta-a\rho_1^2)}P_1'(\zeta)=U_2^{(1)}(\zeta)-U_1^{(1)}(\zeta)-$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}(r_n^{*(2)}-r_n^{*(1)})\zeta^n+\frac{S_2^*}{\zeta-a\rho_2^2}-\frac{S_1^*}{\zeta-a\rho_1^2}-C_1',\ (|\zeta|<\rho_1),\tag{17}$$

$$\varkappa\left[\bar{P}_1\left(\frac{\rho_2^2}{\zeta}\right)-\bar{P}_1\left(\frac{\rho_1^2}{\zeta}\right)\right]+\frac{(\rho_2^2-\rho_1^2)\zeta(1-a\zeta)^2}{(\zeta-a\rho_2^2)(\zeta-a\rho_1^2)}P_2'(\zeta)=U_2^{(2)}(\zeta)-U_1^{(2)}(\zeta)-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(\tau_n^{*(2)}-\tau_n^{*(1)})\zeta^{-n}-\frac{S_2^*}{\zeta-a\rho_2^2}+\frac{S_1^*}{\zeta-a\rho_1^2}-iC_1\frac{\rho_1^2}{\zeta-a\rho_1^2},\ (|\zeta|>\rho_2).\tag{18}$$

З властивостей інтегралів типу Коші випливає, що рівності (12) і (17) являють собою функцію змінної $\zeta$, регулярну всередині $\gamma_1$, а рівності (13) і (18) — регулярну зовні $\gamma_2$, включаючи і безмежно віддалену точку.

Розкладаючи вирази, що входять в рівності (12) і (17), в ряди за додатними степенями $\zeta$, а вирази, що входять в рівності (13) і (18), — в ряди за від'ємними степенями $\zeta$ і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $\zeta$, в результаті прийдемо до таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів розкладу функцій $\varphi(\zeta)$ і $U_\alpha(\zeta)$:

$$(n+1)\alpha_{n+1}^{(\alpha)}+K_\alpha\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k^{(\alpha)}\alpha_{n-k}^{(\alpha)}+\frac{K_\alpha'}{a^3\rho_\alpha^{2n+3}}\bar{\beta}_n^{(\alpha)}-K_\alpha'\rho_\alpha^{-(2n+3)}\sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^{(\alpha)}\bar{\beta}_{n-k}^{(\alpha)}=$$
$$=(\varkappa-1)(n+1)\rho_\alpha^{-2(n+1)}\bar{b}_{n+1}-K_\alpha S_\alpha\varepsilon_n^{(\alpha)}-K_\alpha'\rho_\alpha^{-(2n+3)}\bar{S}_\alpha\gamma_n^{(\alpha)}+$$
$$+\frac{K_\alpha'\bar{S}_\alpha'}{a^3\rho_\alpha}(n+1)(1-a^2\rho_\alpha^2)(a\rho_\alpha^2)^{-n+1}+(n+1)r_{n+1}^{(\alpha)},\ (n=0,1,2,\ldots),\ \alpha=1,2. \quad (19)$$

$$(n-1)\beta_{n-1}^{(\alpha)}-K_\alpha\sum_{k=2}^{n-1}\Theta_k^{(\alpha)}\beta_{n-k}^{(\alpha)}-K_\alpha'a\rho_\alpha^{2n-1}\bar{\alpha}_{n-2}^{(\alpha)}+K_\alpha'\rho_\alpha^{2n-3}\sum_{k=3}^{n}\delta_k^{(\alpha)}\bar{\alpha}_{n-k}^{(\alpha)}=$$
$$=(\varkappa-1)(n-1)\rho_\alpha^{2(n-1)}\bar{a}_{n-1}-K_\alpha S_\alpha\Theta_n^{(\alpha)}-K_\alpha'\rho_\alpha^{2n-3}\delta_n^{(\alpha)}\bar{S}_\alpha+$$
$$+\frac{K_\alpha'\bar{S}_\alpha'}{a^3\rho_\alpha}(n-1)(1-a^2\rho_\alpha^2)(a\rho_\alpha^2)^{n-1}+(n-1)\tau_{n-1}^{(\alpha)}-$$
$$-iC_\alpha\rho_\alpha^2(n-1)(a\rho_\alpha^2)^{n-2},\ (n=2,3\ldots),\ \alpha=1,2. \quad (20)$$

$$\varkappa(\rho_2^{-2n}-\rho_1^{-2n})\bar{b}_n+\sum_{k=2}^{n}(n-k+1)\varepsilon_k^*a_{n-k+1}+\mu n a_n=(\alpha_n^{(2)}-\alpha_n^{(1)})-$$
$$-(r_n^{*(2)}-r_n^{*(1)})+S_1^*(a\rho_1^2)^{-(n+1)}-S_2^*(a\rho_2^2)^{-(n+1)}-C_1',\ (n=0,1,2\ldots), \quad (21)$$

$$\varkappa(\rho_2^{2n}-\rho_1^{2n})\bar{a}_n+a^2(\rho_1^2-\rho_2^2)nb_n+\mu^*(n-1)b_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1)\Theta_k^*b_{n-k-1}=$$
$$=(\beta_n^{(2)}-\beta_n^{(1)})-(\tau_n^{*(2)}-\tau_n^{*(1)})+S_1^*(a\rho_1^2)^{n-1}-S_2^*(a\rho_2^2)^{n-1}-$$
$$-iC_1\rho_1^2(a\rho_1^2)^{n-1},\ (n=1,2,3\ldots). \quad (22)$$

Тут введені позначення:

$$\varepsilon_k^{(\alpha)}=\frac{\rho_\alpha}{1-a^2\rho_\alpha^2}\left[(a\rho_\alpha^2)^{-(k+1)}-\left(\frac{1}{a}\right)^{-(k+1)}\right],$$

$$\Theta_k^{(\alpha)}=\frac{\rho_\alpha}{1-a^2\rho_\alpha^2}\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{k-1}-(a\rho_\alpha^2)^{k-1}\right],$$

$$\gamma_k^{(\alpha)}=\frac{k+1}{2}\left[k(a^2\rho_\alpha^2-1)-2\right]a^{-(k+3)}, \quad (23$$

$$\delta_k^{(\alpha)}=\frac{k-1}{2}\left[k(1-a^2\rho_\alpha^2)-2\right]a^{k-3},$$

$$\varepsilon_k^*=[\rho_1^2(1-a^2\rho_1^2)^2(a\rho_1^2)^{-(k+1)}-\rho_2^2(1-a^2\rho_2^2)^2(a\rho_2^2)^{-(k+1)}],$$

$$\Theta_k^*=[\rho_1^2(1-a^2\rho_1^2)^2(a\rho_1^2)^{k-1}-\rho_2^2(1-a^2\rho_2^2)^2(a\rho_2^2)^{k-1}],$$

$$\mu = \left[\frac{2a^2\rho_2^2-1}{a^2\rho_2^2} - \frac{2a^2\rho_1^2-1}{2a^2\rho_1^2}\right],$$

$$\mu^* = [a\rho_1^2(a^2\rho_1^2-2) - a\rho_2^2(a^2\rho_2^2-2)].$$

При складанні систем (19) і (20) врахована рівність

$$S_\alpha^0 + \frac{K_\alpha\,\rho_\alpha S_\alpha}{1-a^2\,\rho_\alpha^2} + \frac{K_\alpha'\,\overline{S}_\alpha'}{a^3\,\rho_\alpha} = 0,$$

що одержується при $n=1$. Параметри $S_\alpha$, $S_\alpha'$, $S_\alpha^*$, що входять в системи рівнянь (19)—(22), на підставі рівностей (3) і (9) легко виражаються через коефіцієнти $a_n$ і $\beta_n^{(\alpha)}$:

$$S_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a^n\beta_n^{(\alpha)},\quad S_\alpha' = -\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,a^n\beta_{n-1}^{(\alpha)},$$

$$S_\alpha^* = \rho_\alpha^2(1-a^2\rho_\alpha^2)^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(a\rho_\alpha^2)^n. \tag{24}$$

Розв'язуючи сумісно системи рівнянь (19)—(22), знайдемо коефіцієнти $a_n$, $b_n$, $\alpha_n^{(\alpha)}$, $\beta_n^{(\alpha)}$ розкладу функції $U_\alpha$ і $\varphi_0$. Функцію $\psi_0$ знаходимо із рівності (14) і (15). Параметри $S_\alpha$, $S_\alpha'$ і $S_\alpha^*$, які ввійдуть у вирази шуканих коефіцієнтів, знаходяться з умов (24). Дійсна стала $C_1$ визначається з умови однозначності прогину пластинки.

Якщо один з контурів пластинки жорстко закріплений, наприклад, $L_2(\gamma_2)$, то в цьому випадку в одержаних системах рівнянь потрібно покласти $K_2 = K_2' = 0$. Прямуючи $K_\alpha \to \infty$ і $K_\alpha' \to \infty$, одержимо, як окремий випадок, розв'язок задачі для пластинки без підкріплення, $U_\alpha \equiv 0$.

У випадку рівних жорсткостей підкріплюючого кільця на згин і кручення розв'язок задачі значно спрощується; тоді $K_\alpha' = 0$, і система рівнянь (19) і (20) набуває вигляду:

$$(n+1)\alpha_{n+1}^{(\alpha)} + K_\alpha\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k^{(\alpha)}\alpha_{n-k}^{(\alpha)} = (\varkappa-1)(n+1)\rho_\alpha^{-2(n+1)}\overline{b}_{n+1} -$$

$$- K_\alpha S_\alpha \varepsilon_n^{(\alpha)} + (n+1)r_{n+1}^{(\alpha)}\quad (n=0,1,2\ldots), \tag{25}$$

$$(n-1)\beta_{n-1}^{(\alpha)} - K_\alpha\sum_{k=2}^{n-1}\Theta_k^{(\alpha)}\beta_{n-k}^{(\alpha)} = (\varkappa-1)(n-1)\rho_\alpha^{2(n-1)}\overline{a}_{n-1} - K_\alpha S_\alpha\Theta_n^{(\alpha)} +$$

$$+ (n-1)\tau_{n-1}^{(\alpha)} - iC_\alpha\rho_\alpha^2(n-1)(a\rho_\alpha^2)^{n-2},\ (n=2,3,\ldots),\ \alpha=1,2. \tag{26}$$

Переходячи до границі в рівностях (19)—(22) при $a\to 0$, одержимо розв'язок задачі для пластинки у вигляді кругового концентричного кільця з підкріпленим краєм, а при $\rho_2 \to \frac{1}{a}$ — розв'язок для півплощини з круговим отвором, краї якої підкріплені.

## ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Изгиб тонких плит с подкрепленным краем. Укр. матем. журнал № 1, 1953.

2. М. П. Шереметьєв, Т. Л. Мартинович. Згин нескінченої пластинки з еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем. Прикладна механіка, т. III, вип. 2, 1957.

*Стаття надійшла 15. XI 1960.*