І. О. ПРУСОВ

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРУЖНОГО СТАНУ У ВАГОМІЙ ПІВПЛОЩИНІ НАВКОЛО КРУГОВИХ ОТВОРІВ

Методом послідовних наближень розв'язується задача про напружений стан у вагомій півплощині в оточенні двох і трьох кругових отворів, центри яких розміщені на лінії, перпендикулярній напрямку сили ваги. Для спрощення перетворень у випадку трьох отворів вважається, що два з них рівні між собою і симетрично розміщені відносно третього.

1. ЗАГАЛЬНІ ФОРМУЛИ

Нехай L — коло радіуса R, яке обмежує круг S^+, S^- — зовнішність L. Припустимо, що пружне середовище займає область S^-.

Компоненти напружень σ_r, σ_ϑ, $\tau_{r\vartheta}$ в полярних координатах r, ϑ визначаються через аналітичні функції $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ так [1, 2]:

$$\sigma_r + \sigma_\vartheta = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right], \tag{1.1}$$

$$\sigma_r + i\tau_{r\vartheta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - \bar{z}\,\overline{\Phi'(z)} - \frac{\bar{z}}{z}\overline{\Psi(z)}\,. \tag{1.2}$$

При $|z|$ достатньо великих, функції $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ мають вигляд

$$\Phi(z) = \Gamma - \frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)z} + 0\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{1.3}$$

$$\Psi(z) = \Gamma' + \frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)z} + 0\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{1.4}$$

де $\Gamma = \frac{1}{4}(N_1 + N_2)$, $\Gamma' = \frac{1}{2}(N_2 - N_1)e^{-2i\alpha}$, N_1 і N_2 — головні напруження на безмежності, α—кут, який утворює з віссю OX напрям, що відповідає N_1 X і Y—компоненти головного вектора зовнішніх зусиль на L, $\varkappa$—відома константа пружного середовища.

Функції $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ визначені в S^- Покладемо, що функція $\Phi(z)$ в S^+ визначається так:

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z}\overline{\Phi}'\left(\frac{R^2}{z}\right) + \frac{R^2}{z^2}\overline{\Psi}\left(\frac{R^2}{z}\right) \qquad (|z| < R), \tag{1.5}$$

звідки

$$\Psi(z) = \frac{R^2}{z^2}\Phi(z) + \frac{R^2}{z^2}\overline{\Phi}\left(\frac{R^2}{z}\right) - \frac{R^2}{z}\Phi'(z) \qquad (|z| > R). \tag{1.6}$$

При $z \to 0$ функція $\Phi(z)$ має вигляд

$$\Phi(z) = \frac{R^2 \overline{\Gamma}'}{z^2} + \frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)z} + 0(1). \tag{1.7}$$

На основі (1. 6) формула (1.2) набирає вигляду:

$$\sigma_r + i\tau_{r\vartheta} = \Phi(z) - \Phi\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right) + \bar{z}\left(\frac{\bar{z}}{R^2} - \frac{1}{z}\right)\overline{\Psi(z)}. \tag{1.8}$$

Якщо початок координат перенести в точку $z_0 = x_0 + iy_0$ і покласти $z_1 = z - z_0$, то функції напружень $\Phi_1(z_1)$ і $\Psi_1(z_1)$ в новій системі координат визначаються через $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ так:

$$\Phi_1(z_1) = \Phi(z_1 + z_0), \quad \Psi_1(z_1) = \Psi(z_1 + z_0) + \bar{z}_0 \Phi'(z_1 + z_0). \tag{1.9}$$

2. НАПРУЖЕНИЙ СТАН У ВАГОМІЙ ПІВПЛОЩИНІ З ДВОМА ОТВОРАМИ

Нехай вагома пружна півплощина з прямолінійною границею L_0 має кругові отвори, обмежені колами L і L_1, центри яких знаходяться на глибині h від L_0 і розміщені на віддалі d (рис. 1). Зовнішнє навантаження на L, L_1, L_0 вважаємо відсутнім.

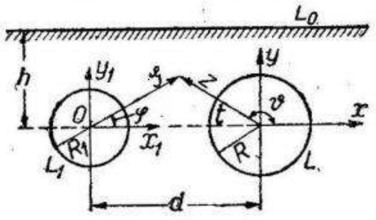

Рис. 1.

Позначимо радіуси отворів, обмежених L і L_1, через R і R_1 ($R_1 < R$) і введемо в розгляд дві площини комплексних змінних $z = x + iy = re^{i\vartheta}$, $\xi = x_1 + iy_1 = \rho e^{i\varphi}$. Компоненти напружень в суцільних півплощинах визначаються формулами

$$X_x = -\lambda\gamma(h - y), \quad Y_y = -\gamma(h - y);$$

$$X_x^{(1)} = -\lambda\gamma(h - y_1), \quad Y_y^{(1)} = -\gamma(h - y_1), \quad X_y = X_y^{(1)} = 0, \tag{2.1}$$

де γ — питома вага матеріалу півплощини, $\lambda = \frac{\nu}{1-\nu}$ — коефіцієнт розпору, ν — коефіцієнт Пауссона.

Користуючись (2. 1) та відомою формулою

$$\sigma_r + i\tau_{r\vartheta} = \frac{P+Q}{2} + \frac{P-Q}{2} e^{-2i\vartheta},$$

яка визначає компоненти напружень на похилих площинах через головні компоненти напружень P і Q, знайдемо, що в суцільній півплощині

$$\sigma_r + i\tau_{r\vartheta} = -\frac{\gamma h(1+\lambda)}{2} - \frac{i\gamma(1+\lambda)t}{4} + \frac{i\gamma R^2}{2t} + \frac{\gamma h(1-\lambda)R^2}{2t^2} - \frac{i\gamma(1-\lambda)R^4}{4t^3} \quad \text{на } L, \tag{2.2}$$

$$\sigma_\rho + i\tau_{\rho\varphi} = -\frac{\gamma h(1+\lambda)}{2} - \frac{i\gamma(1+\lambda)\sigma}{4} + \frac{i\gamma R_1^2}{2\sigma} + \frac{\gamma h(1-\lambda)R_1^2}{2\sigma^2} - \frac{i\gamma(1-\lambda)R_1^4}{4\sigma^3} \quad \text{на } L_1, \tag{2.3}$$

де $t = Re^{i\vartheta}$ і $\sigma = R_1 e^{i\varphi}$ — точки на L і L_1.

Нехай напружений стан (2. 1) в суцільній півплощині визначається функціями $\Phi_0(z)$ і $\Psi_0(z)$ в комплексній площині z або функціями $\Phi_{00}(\xi)$ і $\Psi_{00}(\xi)$ в площині ξ. Позначимо через $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$ функції, які знищують напруження (2. 2) на L. Тоді функції $\Phi_0(z)+\Phi_1(z)$ і $\Psi_0(z)+\Psi_1(z)$ задовольняють граничним умовам на L, причому функція $\Phi_1(z)$ на основі (1.8) задовольняє умові

$$\Phi_1^+(t)-\Phi_1^-(t)=\sigma_r+i\tau_{r\vartheta} \quad \text{на } L, \tag{2.4}$$

де $\sigma_r+i\tau_{r\vartheta}$ — права частина (2.2).

Рівняння (2. 4), враховуючи (1. 3) і (1. 7), має розв'язок [1]

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{(\sigma_r+i\tau_{r\vartheta})dt}{t-z}+\Gamma+\frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)z}+\frac{R^2\overline{\Gamma}'}{z^2}. \tag{2.5}$$

В даному випадку $\Gamma=\Gamma'=0$, $X+IY=i\gamma\pi R^2$. Тому з (2.5) маємо

$$\Phi_1(z)=-\frac{\gamma h(1+\lambda)}{2}-\frac{i\gamma(1+\lambda)z}{4}+\frac{i\gamma\varkappa R^2}{2(1+\varkappa)z} \quad (|z|<R), \tag{2.6}$$

$$\Phi_1(z)=-\frac{i\gamma R^2}{2(1+\varkappa)z}-\frac{\gamma h(1-\lambda)R^2}{2z^2}+\frac{i\gamma(1-\lambda)R^4}{4z^3} \quad (|z|>R). \tag{2.7}$$

За формулами (1. 6), (2, 6) і (2. 7) знайдемо, що

$$\Psi_1(z)=-\frac{i\gamma\varkappa R^2}{2(1+\varkappa)z}-\frac{\gamma h(1+\lambda)R^2}{2z^2}+\frac{i\gamma R^4}{4z^3}\left(1+\lambda-\frac{4}{1+\varkappa}\right)-\frac{3\gamma h(1-\lambda)R^4}{2z^4}+\frac{i\gamma(1-\lambda)R^6}{z^5}. \tag{2.8}$$

Слід зауважити, що функції $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$, за допомогою яких знищуються зовнішні напруження на L, вводять додаткове зовнішнє навантаження на L_0. Як показують підрахунки, впливом цього додаткового навантаження можно знехтувати, якщо $h\geqslant 5R$. Прийнявши це, функції $\Phi_0(z)+\Phi_1(z)$ і $\Psi_0(z)+\Psi_1(z)$ дають практично точний розв'язок задачі про напружений стан у вагомій півплощині з одним круговим отвором. Компонента напруження σ_ϑ в даному випадку на L набуває значення

$$\frac{\sigma_\vartheta}{\gamma h}=-(1+\lambda)-2(1-\lambda)\cos 2\vartheta+\frac{R}{h}\left[(1+\lambda)\sin\vartheta+(1-\lambda)\sin 3\vartheta-\frac{2\sin\vartheta}{1+\varkappa}\right], \tag{2.9}$$

Займемося тепер задовільненням граничної умови на контурі L_1. Для цієї мети введемо заміну $z=\xi-d$ (d — віддаль між центрами L і L_1). Тоді на основі (1.9), (2.7) і (2.8) маємо

$$\Phi_{11}(\xi)=\Phi_1(\xi-d)=-\frac{i\gamma R^2}{2(1+\varkappa)(\xi-d)}-\frac{\gamma h(1-\lambda)R^2}{2(\xi-d)^2}+\frac{i\gamma(1-\lambda)R^4}{4(\xi-d)^3}, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\Psi_{11}(\xi)=\Psi_1(\xi-d)-d\Phi_1'(\xi-d)=&-\frac{i\gamma\varkappa R^2}{2(1+\varkappa)(\xi-d)}-\left[h(1+\lambda)+\frac{id}{1+\varkappa}\right]\frac{\gamma R^2}{2(\xi-d)^2}+\\&+\left[iR^2\left(\frac{1+\lambda}{4}-\frac{1}{1+\varkappa}\right)-hd(1-\lambda)\right]\frac{\gamma R^2}{(\xi-d)^3}-(1-\lambda)(2h-id)\frac{3\gamma R^4}{4(\xi-d)^4}+\\&+\frac{i\gamma(1-\lambda)R^6}{(\xi-d)^5}.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Повне зовнішнє напруження $\sigma_\rho+i\tau_{\rho\varphi}$ на L_1 знайдемо накладанням (2.3) з напруженнями, які одержимо за формулою (1.2) з урахуванням (2.10) і (2.11). Аналогічно попередньому випадку знайдемо, що функції $\Phi_{22}(\xi)$ і $\Psi_{22}(\xi)$, які знищують зовнішні напруження на L_1, мають вигляд

$$\Phi_{22}(\xi)=-\frac{i\gamma R_1^2}{2(1+\varkappa)\xi}-\frac{\gamma h(1-\lambda)R_1^2}{2\xi^2}+\frac{i\gamma(1-\lambda)R_1^4}{4\xi^3}-\frac{i\gamma R^2}{2(1+\varkappa)A}-\frac{i\gamma R^2}{2(1+\varkappa)d}-$$

$$-\frac{\gamma h(1-\lambda)R^2}{2d^2}+\frac{i\gamma(1-\lambda)R^4}{4d^3}+\frac{\gamma h(1-\lambda)R^2}{2A^2}+\frac{i\gamma(1-\lambda)R^4}{4A^3}-\frac{i\gamma R^2R_1^2}{2(1+\varkappa)\xi A^2}+$$

$$+\frac{\gamma h(1-\lambda)R^4R_1^2}{\xi A^3}+\frac{3i\gamma(1-\lambda)R^4R_1^2}{4\xi A^4}+\frac{i\gamma\varkappa R^2R_1^2}{2(1+\varkappa)\xi^2A}-\frac{\gamma R^2R_1^2}{2\xi^2A^2}\left[(1+\lambda)h-\frac{id}{1+\varkappa}\right]-$$

$$-\frac{\gamma R^2R_1^2}{\xi^2A^3}\left[(1-\lambda)hd+iR^2\left(\frac{1+\lambda}{4}-\frac{1}{1+\varkappa}\right)\right]-\frac{3\gamma(1-\lambda)(2h+id)R^4R_1^2}{4\xi^2A^4}-$$

$$-\frac{i\gamma(1-\lambda)R^6R_1^2}{\xi^2A^5}\quad(|\xi|>R_1), \tag{2.12}$$

$$\Psi_{22}(\xi)=-\frac{i\gamma\varkappa R_1^2}{2(1+\varkappa)\xi}-\frac{\gamma hR_1^2}{\xi^2}\left[\frac{1+\lambda}{2}+\frac{(1-\lambda)R^2}{d^2}\right]+\frac{i\gamma R_1^4}{4\xi^3}\left(1+\lambda-\frac{4}{1+\varkappa}\right)-$$

$$-\frac{3\gamma h(1-\lambda)R_1^4}{2\xi^4}+\frac{i\gamma(1-\lambda)R_1^6}{\xi^5}-\frac{i\gamma R^2R_1^4}{2(1+\varkappa)\xi^3A^2}+\frac{\gamma h(1-\lambda)R^2R_1^4}{\xi^3A^3}+\frac{3i\gamma(1-\lambda)R^4R_1^4}{4\xi^3A^4}+$$

$$+\frac{3i\gamma\varkappa R^2R_1^4}{2(1+\varkappa)\xi^4A}-\frac{3\gamma R^2R_1^4}{2\xi^4A^2}\left[(1+\lambda)h-\frac{id}{1+\varkappa}\right]-\frac{\gamma R^2R_1^4}{\xi^4A^3}\left\{3\left[(1-\lambda)hd+iR^2\left(\frac{1+\lambda}{4}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{1+\varkappa}\right)\right]-\frac{iR_1^2}{1+\varkappa}\right\}-\frac{3\gamma(1-\lambda)}{4\xi^4A^4}\left[3(2h+id)R^4R_1^4+4hR^2R_1^6\right]-$$

$$-\frac{3i\gamma(1-\lambda)(R^6R_1^4+R^4R_1^6)}{\xi^4A^5}-\frac{i\gamma\varkappa R^2R_1^6}{2(1+\varkappa)\xi^5A^2}+\frac{\gamma R^2R_1^6}{\xi^5A^3}\left[(1+\lambda)h-\frac{id}{1+\varkappa}\right]+$$

$$+\frac{3\gamma R^2R_1^6}{\xi^5A^4}\left[(1-\lambda)hd+iR^2\left(\frac{1+\lambda}{4}-\frac{1}{1+\varkappa}\right)\right]+\frac{3\gamma(1-\lambda)(2h+id)R^4R_1^6}{\xi^5A^5}+$$

$$+\frac{5i\gamma(1-\lambda)R^6R_1^6}{\xi^5A^6}\quad(|\xi|>R_1);\quad A=\frac{R_1^2}{\xi}-d. \tag{2.13}$$

При

$$d-R-R_1\geqslant 0{,}1R,\ d-R-R_1\geqslant 4R_1,\ h\geqslant 5R\quad(R_1<R) \tag{2.14}$$

функції $\Phi_{22}(\xi)$ і $\Psi_{22}(\xi)$ практично не змінюють граничних умов на L_0 і L. Надалі припустимо, що умови (2.14) виконуються. Тоді пружний стан у вагомій півплощині з двома круговими отворами визначається функціями $\Phi_{00}(\xi)+\Phi_{11}(\xi)+\Phi_{22}(\xi)$ і $\Psi_{00}(\xi)+\Psi_{11}(\xi)+\Psi_{22}(\xi)$ або в площині комплексного змінного z функціями $\Phi_0(z)+\Phi_1(z)+\Phi_2(z)$ і $\Psi_0(z)+\Psi_1(z)+\Psi_2(z)$, які точно задовольняють граничним умовам на L_1 і практично точно на L_0 і L, де на основі (1.9) $\Phi_2(z)=\Phi_{22}(z+d)$, $\Psi_2(z)=\Psi_{22}(z+d)+$ $+d\Phi'_{22}(z+d)$, $\Phi_1(z)$—права частина (2.7).

Компоненти напружень σ_φ і σ_ϑ на L_1 і L визначаються за формулами

$$\sigma_\varphi=4Re[\Phi_{11}(\sigma)+\Phi_{22}(\sigma)]-\gamma(1+\lambda)(h-R_1\sin\varphi)\quad\text{на } L_1, \tag{2.15}$$

$$\sigma_\vartheta=4Re[\Phi_1(t)+\Phi_2(t)]-\gamma(1+\lambda)(h-R\sin\vartheta)\quad\text{на } L, \tag{2.16}$$

на основі яких, нехтуючи величинами порядку $1/h$, маємо

$$\frac{\sigma_\varphi}{\gamma h}=-(1+\lambda)-2(1-\lambda)\cos 2\varphi-\frac{2(1-\lambda)R^2}{d^2}+\frac{4(1-\lambda)R^2R_1}{E^3}\left[R_1^3\cos 2\varphi-\right.$$

$$- (d^2 + 3R_1^2)\, d\cos\varphi + 3R_1 d^2] - \frac{2(1+\lambda)R^2}{E^2}(R_1^2 - 2d\,R_1\cos\varphi + d^2\cos 2\varphi) -$$

$$- \frac{4(1-\lambda)R^2 d}{E^3}[(R_1^3 + 3R_1 d^2)\cos\varphi - d^3\cos 2\varphi - 3R_1^2 d] - \frac{6(1-\lambda)R^4}{E^4}[(R_1^4 +$$

$$+ d^4)\cos 2\varphi - 4R_1 d\,(d^2 + R_1^2)\cos\varphi + 6R_1^2 d^2], \tag{2.16}$$

$$\frac{\sigma_\vartheta}{\gamma h} = -(1+\lambda) - 2(1-\lambda)\cos 2\vartheta - \frac{2(1-\lambda)R^2}{d^2} -$$

$$- \frac{2(1-\lambda)(d^2 + 2dR\cos\vartheta + R^2\cos 2\vartheta)R_1^2}{(d^2 + 2dR\cos\vartheta + R^2)^2} + 4Re\left[\frac{(1-\lambda)R^2}{2B^2} - \frac{(1-\lambda)R^2R_1^2}{(d+t)B^3} - \frac{(1+\lambda)R^2R_1^2}{2(d+t)^2B^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(1-\lambda)dR^2R_1^2}{(d+t)^2B^3} - \frac{3(1-\lambda)R^4R_1^2}{2(d+t)^2B^4}\right], \tag{2.17}$$

$$E = d^2 - 2R_1\, d\cos\varphi + R_1^2, \quad B = d - \frac{R_1^2}{d+t}\,.$$

В окремому випадку, коли $R_1 : R \to 0$, $d - R \neq 0$, із (2.16) (2.17) маємо

$$\frac{\sigma_\varphi}{\gamma h} = -(1+\lambda) - 2(1-\lambda)\cos 2\varphi - \frac{2(1-\lambda)R^2}{d^2} + \frac{2(1-3\lambda)R^2\cos 2\varphi}{d^2} -$$

$$- \frac{6(1-\lambda)R^4\cos 2\varphi}{d^4}\,, \tag{2.18}$$

$$\frac{\sigma_\vartheta}{\gamma h} = -(1+\lambda) - 2(1-\lambda)\cos 2\vartheta. \tag{2.19}$$

Як видно з (2.18), (2.19), коефіцієнт концентрації напружень $\sigma : \gamma h$ при умовах (2.14) і $R : d \to 1$ досягає найбільшого значення на контурі меншого отвору L_1 і дорівнює 9 при $\lambda = 0$ і 6 при $\lambda = 1$. Це втроє перевищує коефіцієнт концентрації при наявності тільки одного отвору.

3. ПРУЖНИЙ СТАН У ПІВПЛОЩИНІ З ТРЬОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ

Припустимо тепер, що півплощина має три кругові отвори, обмежені колами L, L_1 і L_2, центри яких розміщені на віддалі h від прямолінійної границі L_0 півплощини (рис. 2). Радіус кола L дорівнює R, два інші кола рівні між собою і симетрично розміщені відносно третього, причому $R_1 = R_2 \angle R$.

Надалі покладемо, що параметри R, R_1, d і h задовольняють умовам (2.14). Тоді накладанням вище одержаного розв'язку для півплощини з двома отворами, обмеженими L і L_1, з функціями, які знищують зовнішні напруження на L_2, одержимо практично точний розв'язок для півплощини з трьома круговими отворами. Функції напружень в комплексній площині ξ в цьому випадку мають вигляд

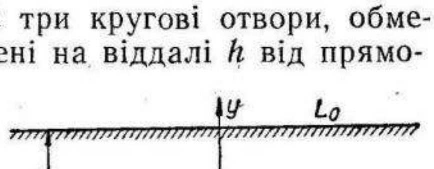

Рис. 2.

$$\Phi(\xi) = \Phi_{00}(\xi) + \Phi_{11}(\xi) + \Phi_{22}(\xi) + \Phi_{33}(\xi), \tag{3.1}$$

$$\Psi(\xi) = \Psi_{00}(\xi) + \Psi_{11}(\xi) + \Psi_{22}(\xi) + \Psi_{33}(\xi), \tag{3.2}$$

де $\Phi_{33}(\xi)$ і $\Psi_{33}(\xi)$ — функції, які одержуються з правих частин (2.12) і (2.13) заміною d на $-d$, а потім ξ на $\xi-2d$.

Компоненти напружень σ_φ і σ_ϑ на L_1 і L визначаються за формулами

$$\sigma_\varphi = 4Re[\Phi_{11}(\sigma) + \Phi_{22}(\sigma) + \Phi_{33}(\sigma)] - \gamma(1+\lambda)(h - R_1\sin\varphi), \quad (3.3)$$

$$\sigma_\vartheta = 4Re[\Phi_1(t) + \Phi_2(t) + \Phi_{33}(t-d)] - \gamma(1+\lambda)(h - R\sin\vartheta). \quad (3.4)$$

При умовах (2.14), як показують підрахунки, значенням функції $\Phi_{33}(\sigma)$ у формулі (3.3) можна знехтувати. Тому формула (3.3) практично співпадає з (2.15). Це вказує на те, що отвір, обмежений L_2, не впливає на розподіл напружень на L_1, і навпаки, отвір, обмежений L_1, не впливає на розподіл напружень на L_2.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, Москва, 1954, изд. 4.

2. И. Н. Карцивадзе. Эффективное решение основных задач теории упругости для некоторых областей. Сообщ. АН Груз.ССР, т. 7, № 8, 1946.

3. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. М—Л., 1951.

4. А. С. Космодамианский. Приближенный метод определения напряженного состояния изотропной пластинки с конечным числом круговых отверстий. Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, № 2, 1960.

Стаття надійшла 12. XII 1960.