Львівський ордена Леніна державний університет імені Івана Франка
Випуск 9 Питання механіки і математики 1962

І. О. ПРУСОВ

СТИСНЕННЯ ПРУЖНИХ ПІВПЛОЩИН

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ЗАГАЛЬНІ ФОРМУЛИ

Нехай нижню півплощину $y<0\,(S^-)$ заповнює пружний ізотропний матеріал з сталими μ і $\varkappa$, а верхню $y>0$ (S^+) — матеріал зі сталими μ_1 і $\varkappa_1$. Припустимо, що ці півплощини, які стикаються без тертя по прямій L, що співпадає з віссю OX, стискуються зосередженими або розподіленими силами, розташованими в даних півплощинах.

Як відомо [1], напружено-деформований стан в S^- визначається за допомогою функції $\Phi(z)$, визначеної як в S^-, так і в S^+ за формулами

$$X_x + Y_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \tag{1.1}$$

$$Y_y - i X_y = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\,\overline{\Phi'(z)}, \tag{1.2}$$

$$2\mu(u' + iv') = \varkappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\,\overline{\Phi'(z)}, \tag{1.3}$$

де $u' + iv' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$ — похідна по x від зміщень $u+iv$.

Аналогічними формулами, які відрізняються від (1.1)—(1.3) тільки індексами, визначається за допомогою функції $\Phi_1(z)$ напружено-деформований стан S^+.

Якщо в точці z_0 півплощини S^- прикладена зосереджена сила (X, Y), то функцію $\Phi(z)$ можна представити у вигляді

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)(z-z_0)} + \text{голоморфна функція в } S^-, \tag{1.4}$$

$$\Phi(z) = \frac{X-iY}{2\pi(1+\varkappa)}\,\frac{z_0-\bar{z}_0}{(z-\bar{z}_0)^2} - \frac{\varkappa(X+iY)}{2\pi(1+\varkappa)(z-\bar{z}_0)} + $$
$$+ \text{ голоморфна функція в } S^+. \tag{1.5}$$

Функція $\Phi_1(z)$ голоморфна як в S^+, так і в S^-.

У випадку, коли зосереджена сила $(X_1 Y_1)$ прикладена в точці z_1 півплощини S^+, функція $\Phi_1(z)$ має вигляд

$$\Phi_1(z) = -\frac{X_1+iY_1}{2\pi(1+\varkappa_1)(z-z_1)} + \text{голоморфна функція в } S^+, \tag{1.6}$$

$$\Phi_1(z) = \frac{X_1-iY_1}{2\pi(1+\varkappa_1)}\,\frac{z_1-\bar{z}_1}{(z-\bar{z}_1)^2} - \frac{\varkappa_1(X_1+iY_1)}{2\pi(1+\varkappa)_1(z-\bar{z}_1)} + $$
$$+ \text{ голоморфна функція в } S^-. \tag{1.7}$$

Функція $\Phi(z)$ голоморфна як в S^-, так і в S^+.

Граничні умови на L полягають у рівності нулю дотичних напружень, а також у рівності нормального тиску і нормальних складових переміщень з боку верхньої і нижньої півплощин. Аналітично ці умови зводяться до рівнянь на L

$$[\Phi_1(t)+\Phi(t)]^+ - [\Phi_1(t)+\Phi(t)]^- = 0, \tag{1.8}$$

$$Im[\Phi_1^+(t)-\Phi_1^-(t)]=0,\ Im[\Phi_1^-(t)-r\Phi^-(t)]=0,\ r=\frac{\mu_1(1+\varkappa)}{\mu(1+\varkappa_1)}. \tag{1.9}$$

2. ЗОСЕРЕДЖЕНА СИЛА, ПРИКЛАДЕНА В НИЖНІЙ ПІВПЛОЩИНІ

Нехай зосереджена сила (X,Y) прикладена в точці z_0 півплощини S^- В цьому випадку $\Phi(z)$ має в точках z_0 і $\bar{z}_0$ особливості, які визначаються рівняннями (1.4), (1.5). Функція $\Phi_1(z)$ голоморфна як в S^+, так і в S^-. Спробуємо задовольнити цим умовам та рівнянням (1.8), (1.9), поклавши, що

$$\Phi(z)=A(z,z_0)+nB(z,z_0)+m\bar{A}(z,\bar{z}_0) \text{ в } S^-,$$

$$\Phi(z)=B(z,z_0)+n_1\bar{B}(n,\bar{z}_0)+m_1A(z,z_0) \text{ в } S^+,$$

$$\Phi_1(z)=k\bar{A}(z,\bar{z}_0)+sB(z,z_0) \text{ в } S^-,$$

$$\Phi_1(z)=k_1A(z,z_0)+s_1\bar{B}(z,\bar{z}_0) \text{ в } S^+, \tag{2.1}$$

де $A(z,z_0)$ — головна частина $\Phi(z)$ в S^-, $B(z,z_0)$ — головна частина $\Phi(z)$ в S^+, які визначаються правими частинами (1.4), (1.5), n, n_1, m, m_1, k, k_1, s і s_1 — довільні постійні.

На підставі (2.1) рівняння (1.8), (1.9) запишуться в скороченому вигляді так:

$$k_1A+s_1\bar{B}+B+n_1\bar{B}+m_1A-(k\bar{A}+sB+A+nB+m\bar{A})=0,$$
$$Im(k_1A+s_1\bar{B}-k\bar{A}-sB)=0,\quad Im[k\bar{A}+sB-r(A+nB+m\bar{A})]=0. \tag{2.2}$$

Враховуючи, що $A(z,z_0)$ і $\bar{A}(z,\bar{z}_0)$, $B(z,z_0)$ і $\bar{B}(z,\bar{z}_0)$ — комплексно спряжені на L, рівнянням (2.2) тотожно задовольнимо, якщо покладемо

$$k_1=-k,\ s_1=-s,\ k-rm=-r,\ s-rn=0,$$
$$k_1+m_1=1,\ s+n=1,\ k+m=0,\ s_1+n_1=0. \tag{2,3}$$

Із рівнянь (2.3) одержимо

$$nr=m=-k=s=n_1=rm_1=k_1=-s_1=\frac{r}{1+r}. \tag{2,4}$$

Легко переконатися, що функції $\Phi(z)$ і $\Phi_1(z)$, які визначаються формулами (2.1), (2.4), мають відомі особливості і задовольняють усім граничним умовам на L. Задача, таким чином, розв'язана.

3. ЗОСЕРЕДЖЕНА СИЛА, ПРИКЛАДЕНА У ВЕРХНІЙ ПІВПЛОЩИНІ

Покладемо, що зосереджена сила (X_1, Y_1) прикладена в точці z_1 півплощини S^+. В цьому випадку функція $\Phi(z)$ голоморфна як в S^-, так і в S^+. Функція $\Phi_1(z)$ в точках z_1 і $\bar{z}_1$ має особливості виду (1.6), (1.7).

Враховуючи це, аналогічно, як і в попередньому випадку, розв'язок задачі одержимо у вигляді

$$\begin{aligned}
\Phi_1(z) &= A_1(z, z_1) + n' B_1(z, z_1) + m' \overline{A}_1(z, \overline{z}_1) \text{ в } S^+, \\
\Phi_1(z) &= B_1(z, z_1) + n_1' \overline{B}_1(z, \overline{z}_1) + m_1' A_1(z, z_1) \text{ в } S^-, \\
\Phi(z) &= k' \overline{A}_1(z, \overline{z}_1) + s' B_1(z, z_1) \text{ в } S^+, \\
\Phi(z) &= k_1' A_1(z, z_1) + s_1' \overline{B}_1(z, \overline{z}_1) \text{ в } S^-,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

де

$$A_1(z, z_1) = -\frac{X_1 + iY_1}{2\pi(1+\varkappa_1)(z - z_1)}, \quad B_1(z, z_1) =$$

$$= \frac{X_1 - iY_1}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{z_1 - \overline{z}_1}{(z - \overline{z}_1)^2} - \frac{\varkappa_1(X_1 + iY_1)}{2\pi(1+\varkappa_1)(z - \overline{z}_1)}, \tag{3.2}$$

$$n' = rm' = -rk' = rs' = rn_1' = m_1' = rk_1' = -rs_1' = \frac{r}{1+r}.$$

Накладанням розв'язків (2.1) і (3.1) можна одержати розв'язок деяких інших задач. Наведемо прості приклади.

а) Стиснення півплощин двома зосередженими силами

Нехай в точці $z_0(0, -h)$ півплощини S^- прикладена сила $P(0, p)$, а в точці $z_1(0, +h)$ півплощини S^+ — сила $P_1(0, -p)$, рівна і протилежна силі P. Тоді, враховуючи, що $X = X_1 = 0$, $Y = -Y_1 = p$, $z_0 = \overline{z}_1 = -ih$, накладанням розв'язків (2.1) і (3.1) одержимо

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= -\frac{ip_0}{z+ih} + \frac{2h(p_1 - p_0)}{(1+r)(z-ih)^2} + i\frac{(1+\varkappa_1)p_1 + (r-\varkappa)p_0}{(1+r)(z-ih)} \text{ в } S^-, \\
\Phi(z) &= -\frac{2hp_0}{(z-ih)^2} - \frac{i\varkappa p_0}{z-ih} - \frac{2h(rp_0 + p_1)}{(1+r)(z+ih)^2} + i\frac{(r\varkappa - 1)p_0 + (1+\varkappa_1)p_1}{(1+r)(z+ih)} \text{ в } S^+, \\
\Phi_1(z) &= -\frac{2hp_1}{(z+ih)^2} + \frac{i\varkappa_1 p_1}{z+ih} - \frac{2h(rp_0 + p_1)}{(1+r)(z-ih)^2} + i\frac{(r-\varkappa_1)p_1 - r(1+\varkappa)p_0}{(1+r)(z-ih)} \text{ в } S^-, \\
\Phi_1(z) &= \frac{ip_1}{z-ih} + \frac{2rh(p_0 - p_1)}{(1+r)(z+ih)^2} + i\frac{(r\varkappa_1 - 1)p_1 - r(1+\varkappa)p_0}{(1+r)(z+ih)} \text{ в } S^+,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

де

$$p_0 = \frac{p}{2\pi(1+\varkappa)}, \quad p_1 = \frac{p}{2\pi(1+\varkappa_1)}.$$

Компоненти напружень в кожній з півплощин знайдемо за формулами (1.1), (1.2) і (3.3). В окремому випадку на L одержимо формулу

$$Y_y^+ = Y_y^- = \frac{rp_0 + p_1}{1+r} \frac{4h(x^2 - h^2)}{(x^2+h^2)^2} - \frac{hp}{\pi(x^2+h^2)}. \tag{3.4}$$

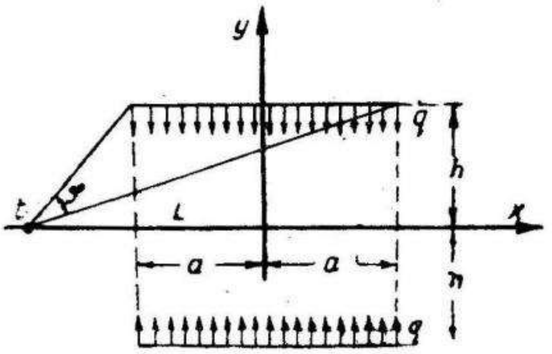
Якщо покласти в формулах (3.3) $p_1 = 0$ або $p_0 = 0$, одержимо розв'язок у випадку стиснення півплощин одною силою, перпендикулярною до L.

б) Стиснення півплощин рівномірно розподіленими силами

Розглянемо стиснення півплощин силами сталої інтенсивності q на відрізках прямої, симетричних відносно координатних осей (рис.).

Вираз функцій $\Phi(z)$ і $\Phi_1(z)$ одержимо з (2.1) і (3.1), якщо покласти

$$X = X_1 = 0,\ z_0 = -ih + \xi,\ z_1 = ih + \xi,\ Y = -Y_1 = q\,d\xi$$



і проінтегрувати по ξ з границях від $-a$ до $+a$. Однак в даному випадку краще скористатися формулами (3.3), на підставі яких після введення параметра та інтегрування по ньому одержимо

$$\Phi(z) = -iq_0 \ln\frac{z+ih+a}{z+ih-a} + \frac{4ah(q_1-q_0)}{(1+r)[(z-ih)^2-a^2]} + i\,\frac{(1+\varkappa_1)q_1+(r-\varkappa)q_0}{1+r}\ln\frac{z-ih+a}{z-ih-a} \text{ в } S^-,$$

$$\Phi(z) = -\frac{4ahq_0}{(z-ih)^2-a^2} - i\varkappa q_0 \ln\frac{z-ih+a}{z-ih-a} - \frac{4ah(rq_0+q_1)}{(1+r)[(z+ih)^2-a^2]} + i\,\frac{(r\varkappa-1)q_0+(1+\varkappa_1)q_1}{1+r}\ln\frac{z+ih+a}{z+ih-a} \text{ в } S^+,$$

$$\Phi_1(z) = -\frac{4ahq_1}{(z+ih)^2-a^2} + i\varkappa_1 q_1 \ln\frac{z+ih+a}{z+ih-a} - \frac{4ah(rq_0+q_1)}{(1+r)[(z-ih)^2-a^2]} + i\,\frac{(r-\varkappa_1)q_1-r(1+\varkappa)q_0}{1+r}\ln\frac{z-ih+a}{z-ih-a} \text{ в } S^-,$$

$$\Phi_1(z) = \frac{4arh(q_0-q_1)}{(1+r)[(z+ih)^2-a^2]} + iq_1 \ln\frac{z-ih+a}{z-ih-a} + i\,\frac{(r\varkappa_1-1)q_1-r(1+\varkappa)q_0}{1+r}\ln\frac{z+ih+a}{z+ih-a} \text{ в } S^+.$$

Для тиску на L одержимо таку формулу

$$Y_y^+ = Y_y^- = \frac{rq_0+q_1}{1+r}\,\frac{8ah(x^2-h^2-a^2)}{(x^2+h^2-a^2)^2+4a^2h^2} - \frac{q\varphi}{\pi},$$

де φ — кут, під яким видно із точок t осі OX відрізки, навантажені зусиллям q (рис.), $2\pi q_1(1+\varkappa_1) = 2\pi q_0(1+\varkappa) = q$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, Москва, 1954, изд. 4.

Стаття надійшла 15. XII 1960.