

Н. П. ФЛЕЙШМАН, Л. Т. БЕРЕЖНИЦЬКИЙ

ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ КРУГЛИХ ТА КІЛЬЦЕВИХ ПЛИТ З КОНЦЕНТРИЧНИМИ РЕБРАМИ ЖОРСТКОСТІ

З метою збільшення міцності та жорсткості круглих та кільцевих плит часто практикують підсилення їх концентричними тонкими ребрами.

В даній роботі виведені рівняння частот для несиметричних вільних коливань круглих та кільцевих плит, підсилених пружними ребрами, а також детально досліджено вплив ребра на частоту коливань круглої плити з жорстко закріпленим краєм. При цьому вважається, що маса ребер мала порівняно з масою плити, а тому нею можна знехтувати.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо вільні коливання круглої плити радіуса R_1 , підсиленої одним тонким пружним ребром по контуру $r=R_1$ і другим концентричним ребром радіуса $R_2 < R_1$. Ці ребра мають постійний поперечний переріз, одна із головних осей інерції якого лежить в серединній площині плити. Осьова лінія внутрішнього ребра T розбиває область плити на дві частини $S_1 (r \leq R_2)$ і $S_2 (R_2 < r \leq R_1)$ з відповідними циліндричними жорсткостями на згин $D_i = E_i h_i^3 / 12(1 - \nu_i^2)$, ($i=1,2$).

Прогини плити в областях S_i матимуть відповідно вигляд (див. [1]):

$$W_i(r, \theta, t) = w_i(r, \theta) \cos \omega t, \quad (i=1,2), \quad (1.1)$$

де

$$w_1(r, \theta) = [A_{1n} J_n(k_1 r) + C_{1n} I_n(k_1 r)] \cos n\theta, \quad (1.2)$$

$$w_2(r, \theta) = [A_{2n} J_n(k_2 r) + B_{2n} N_n(k_2 r) + C_{2n} I_n(k_2 r) + D_{2n} K_n(k_2 r)] \cos n\theta.$$

Тут $I_n(k_i r)$, $K_n(k_i r)$ і $J_n(k_i r)$, $N_n(k_i r)$ — функції Бесселя відповідно до уявного та дійсного аргументів; $k_i^2 = \omega^2 m_i h_i / D_i$; ω — кругова частота коливань; m_i і h_i — маса, віднесена до одиниці площі та товщина плити в області S_i ($i=1,2$); r, θ — полярні координати.

Якщо знехтувати масою ребер, то граничні умови спаяю плити з тонким ребром матимуть вигляд (див. [2]):

При $r=R$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} (\delta_1 + \delta_2 + \nu_1 - \lambda \nu_2) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} + (\delta_1 + \nu_1 - \lambda \nu_2) \frac{\partial w_1}{\partial r} - \delta_2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial r \partial \theta^2} + R \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} - \lambda R \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} = 0, \\ \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\delta_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} - (\delta_2 + \nu_1 - 3 - \lambda \nu_2 + 3\lambda) w_1 \right] + \lambda R^2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial r^3} - R^2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial r^3} + \\ + \lambda R \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} - R \frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[(\delta_1 + \delta_2 + \nu_1 - 2 - \lambda \nu_2 + 2\lambda) \frac{\partial^2 w_1}{\partial \theta^2} + (1 - \lambda) w_1 \right] = 0, \quad (1.3) \end{aligned}$$

$$w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial r} = \frac{\partial w_2}{\partial r},$$

де

$$\delta_1 = \frac{A}{RD_1}, \quad \delta_2 = \frac{C}{RD_1}, \quad \lambda = \frac{D_2}{D_1},$$

ν_i —коефіцієнт Пуассона в області S_i ; A і C —сталі жорсткості на згин та кручення внутрішнього ребра¹.

Щоб записати граничні умови на зовнішньому контурі плити $r=R_1$, розглянемо окремо два випадки:

а) Підсилений край плити вільний. В цьому випадку одержимо такі граничні умови:

При $r=R_1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_1} (\delta_1' + \delta_2' + \nu_2) \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left[(\delta_1' + \nu_2) w_2 - \delta_2' \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} \right] + R_1 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} = 0, \\ \frac{1}{R_1} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\delta_1' \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} - (\delta_2' + \nu_2 - 3) w_2 \right] - R_1 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} - R_1^2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial r^3} + \\ + \frac{\partial}{\partial r} \left[(\delta_1' + \delta_2' + \nu_2 - 2) \frac{\partial^2 w_2}{\partial \theta^2} + w_2 \right] = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

де $\delta_1' = A'/R_1 D_2$, $\delta_2' = C'/R_1 D_2$; A' і C' —постійні за величиною жорсткості на згин та кручення зовнішнього ребра.

б) Плита оперта вздовж зовнішнього краю. В цьому випадку граничні умови (1.4) заміняться такими:

При $r=R_1$

$$\begin{aligned} w_2 = 0, \\ R_1 \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + (\delta_1' + \nu_2) \frac{\partial w_2}{\partial r} - \delta_2' \frac{\partial^3 w_2}{\partial r \partial \theta^2} = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. РІВНЯННЯ ЧАСТОТ ДЛЯ ВІЛЬНОЇ ПЛИТИ

Підставляючи (1.2) в (1.3)—(1.4) і прирівнюючи до нуля визначник системи рівнянь для коефіцієнтів A_{in} , B_{2n} , C_{in} , D_{2n} , одержимо після деяких перетворень таке рівняння частот:

$$\begin{vmatrix} S_{11}(x) & S_{12}(x) & \lambda S_{13}(x_2) & \lambda S_{14}(x_2) & \lambda S_{15}(x_2) & \lambda S_{16}(x_2) \\ S_{21}(x) & S_{22}(x) & \lambda S_{23}(x_2) & \lambda S_{24}(x_2) & \lambda S_{25}(x_2) & \lambda S_{26}(x_2) \\ -J_n(x) & -I_n(x) & J_n(x_2) & N_n(x_2) & I_n(x_2) & K_n(x_2) \\ S_{41}(x) & S_{42}(x) & S_{43}(x_2) & S_{44}(x_2) & S_{45}(x_2) & S_{46}(x_2) \\ 0 & 0 & S_{53}(x_2 \eta) & S_{54}(x_2 \eta) & S_{55}(x_2 \eta) & S_{56}(x_2 \eta) \\ 0 & 0 & S_{63}(x_2 \eta) & S_{64}(x_2 \eta) & S_{65}(x_2 \eta) & S_{66}(x_2 \eta) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.1)$$

де

$$S_{11}(x) = -(x^2 + a)J_n(x) - bxJ_{n+1}(x),$$

$$S_{12}(x) = (x^2 - a)I_n(x) + bxI_{n+1}(x),$$

¹ Для тонких ребер з того ж матеріалу, що і плита, врахування їх маси дає поправку на величину частоти першої форми коливань, яка перевищує 2% [3].

$$\begin{aligned}
S_{13}(x_2) &= [x_2^2 - n(n-1)]J_n(x_2) - x_2 J_{n+1}(x_2), \\
S_{14}(x_2) &= [x_2^2 - n(n-1)]N_n(x_2) - x_2 N_{n+1}(x_2), \\
S_{15}(x_2) &= -[x_2^2 + n(n-1)]I_n(x_2) + x_2 I_{n+1}(x_2), \\
S_{16}(x_2) &= -[x_2^2 + n(n-1)]K_n(x_2) - x_2 K_{n+1}(x_2), \\
S_{21}(x) &= (c + nx^2)J_n(x) + (xd - x^3)J_{n+1}(x), \\
S_{22}(x) &= (c - nx^2)I_n(x) - (xd + x^3)I_{n+1}(x), \\
S_{23}(x_2) &= [(n-1)^2 - x_2^2]nJ_n(x_2) + [x_2^2 - (n^2 + 1)]x_2 J_{n+1}(x_2), \\
S_{24}(x_2) &= [(n-1)^2 - x_2^2]nN_n(x_2) + [x_2^2 - (n^2 + 1)]x_2 N_{n+1}(x_2), \\
S_{25}(x_2) &= [(n-1)^2 + x_2^2]nI_n(x_2) + (x_2^2 + n^2 + 1)x_2 I_{n+1}(x_2), \\
S_{26}(x_2) &= [(n-1)^2 + x_2^2]nK_n(x_2) - (x_2^2 + n^2 + 1)x_2 K_{n+1}(x_2), \\
S_{41}(x) &= -xJ_{n+1}(x), \quad S_{42}(x) = -xI_{n+1}(x), \\
S_{43}(x_2) &= x_2 J_{n+1}(x_2), \quad S_{44}(x_2) = x_2 N_{n+1}(x_2), \\
S_{45}(x_2) &= -x_2 I_{n+1}(x_2), \quad S_{46}(x_2) = x_2 K_{n+1}(x_2), \\
S_{53}(x_2\eta) &= -(x_2^2\eta^2 + a')J_n(x_2\eta) - b'x_2\eta J_{n+1}(x_2\eta), \\
S_{54}(x_2\eta) &= -(x_2^2\eta^2 + a')N_n(x_2\eta) - b'x_2\eta N_{n+1}(x_2\eta), \\
S_{55}(x_2\eta) &= (x_2^2\eta^2 - a')I_n(x_2\eta) + b'x_2\eta I_{n+1}(x_2\eta), \\
S_{56}(x_2\eta) &= (x_2^2\eta^2 - a')K_n(x_2\eta) - b'x_2\eta K_{n+1}(x_2\eta), \\
S_{63}(x_2\eta) &= (x_2^2\eta^2 n + c')J_n(x_2\eta) + (d' - x_2^2\eta^2)x_2\eta J_{n+1}(x_2\eta), \\
S_{64}(x_2\eta) &= (c' + nx_2^2\eta^2)N_n(x_2\eta) + (d' - x_2^2\eta^2)x_2\eta N_{n+1}(x_2\eta), \\
S_{65}(x_2\eta) &= (c' - nx_2^2\eta^2)I_n(x_2\eta) - (d' + x_2^2\eta^2)x_2\eta I_{n+1}(x_2\eta), \\
S_{66}(x_2\eta) &= (c' - nx_2^2\eta^2)K_n(x_2\eta) + (d' + x_2^2\eta^2)x_2\eta K_{n+1}(x_2\eta), \\
a &= n^2(\delta_1 + \delta_2 + \nu_1 - 1 - \lambda\nu_2) - n(\delta_1 + \nu_1 - \lambda\nu_2 + \delta_2 n^2 - 1), \\
b &= \delta_1 + \nu_1 - \lambda\nu_2 + \delta_2 n^2 - 1, \\
c &= n^4\delta_1 + n^2(\delta_2 + \nu_1 - 1 - \lambda\nu_2 + 3\lambda) - n^3(\delta_1 + \delta_2 + \nu_1 - 1 - \lambda\nu_2 + 2\lambda) - \lambda n, \\
d &= n^2(\delta_1 + \delta_2 + \nu_1 - 1 - \lambda\nu_2 + 2\lambda) + \lambda, \\
a' &= n^2(\delta'_1 + \delta'_2 + \nu_2 - 1) - n(\delta'_1 + \nu_2 + \delta'_2 n^2 - 1), \\
b' &= \delta'_1 + \nu_2 + \delta'_2 n^2 - 1, \\
c' &= n^4\delta'_1 + n^2(\delta'_2 + \nu_2 - 1) - n^3(\delta'_1 + \delta'_2 + \nu_2 - 1), \\
d' &= n^2(\delta'_1 + \delta'_2 + \nu_2 - 1), \\
x &= k_1 R, \quad x_2 = k_2 R, \quad \eta = R_1/R.
\end{aligned}$$

Частота коливань p визначається за формулою:

$$p = \frac{x^2 \eta^2}{2\pi R_1^2} \sqrt{\frac{D_1}{m_1 h_1}} = \frac{x^2 \eta^2}{2\pi R_1^2} \sqrt{\frac{D_2}{m_2 h_2}}. \quad (2.2)$$

При часткових значеннях параметрів задачі з (2.1) легко одержуються рівняння частот для ряду важливих для практики випадків. Так, наприклад:

а) При $\delta'_1 = \delta'_2 = 0$, $\lambda = 1$ і $k_1 = k_2$, $n=0$ одержуємо рівняння частоти для симетричних коливань однорідної круглої плити постійної товщини, підсиленої одним концентричним ребром жорсткості по контуру $r=R$

$$\begin{aligned} & \frac{2}{x\eta} J_1(x) I_1(x) + [N_0^*(x\eta) + BK_1(x\eta) J_1(x\eta)] I_1^2(x) + \\ & + [M_0^*(x\eta) - BJ_1(x\eta) I_1(x\eta)] \cdot \left[\frac{2}{\delta_1} + K_1(x) I_1(x) - \frac{\pi}{2} J_1(x) N_1(x) \right] + \\ & + \frac{\pi}{2} [K_0^*(x\eta) - BN_1(x\eta) I_1(x\eta)] J_1^2(x) = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

де

$$\begin{aligned} B &= 2(1 - \nu_1)/x\eta, \\ N_0^*(x\eta) &= K_0(x\eta) J_1(x\eta) - J_0(x\eta) K_1(x\eta), \\ M_0^*(x\eta) &= J_0(x\eta) I_1(x\eta) + J_1(x\eta) I_0(x\eta), \\ K_0^*(x\eta) &= N_0(x\eta) I_1(x\eta) + N_1(x\eta) I_0(x\eta). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Якщо покласти в (2.3) $\eta=1$, одержимо частотне рівняння для випадку, коли ребро підсилює вільний край плити

$$M_0^*(x) + \frac{2(\delta_1 + \nu_1 - 1)}{x} J_1(x) I_1(x) = 0. \quad (2.5)$$

б) При $\lambda = \infty$ одержимо рівняння частот для вільної кільцевої плити, краї якої підсилені тонкими пружними ребрами:

$$\begin{vmatrix} S_{11}^*(x_2) & S_{12}^*(x_2) & S_{13}^*(x_2) & S_{14}^*(x_2) \\ S_{21}^*(x_2) & S_{22}^*(x_2) & S_{23}^*(x_2) & S_{24}^*(x_2) \\ S_{53}^*(x_2\eta) & S_{54}^*(x_2\eta) & S_{55}^*(x_2\eta) & S_{56}^*(x_2\eta) \\ S_{63}^*(x_2\eta) & S_{64}^*(x_2\eta) & S_{65}^*(x_2\eta) & S_{66}^*(x_2\eta) \end{vmatrix} = 0, \quad (2.6)$$

де

$$\begin{aligned} S_{11}^*(x_2) &= (x_2^2 - a^*) J_n(x_2) - b^* x_2 J_{n+1}(x_2), \\ S_{12}^*(x_2) &= (x_2^2 - a^*) N_n(x_2) - b^* x_2 N_{n+1}(x_2), \\ S_{13}^*(x_2) &= -(x_2^2 + a^*) I_n(x_2) + b^* x_2 I_{n+1}(x_2), \\ S_{14}^*(x_2) &= -(x_2^2 + a^*) K_n(x_2) - b^* x_2 K_{n+1}(x_2), \\ S_{21}^*(x_2) &= (c^* - n x_2^2) J_n(x_2) + (d^* + x_2^2) x_2 J_{n+1}(x_2), \end{aligned}$$

$$S_{22}^*(x_2) = (c^* - nx_2^2)N_n(x_2) + (d^* + x_2^2)x_2 N_{n+1}(x_2),$$

$$S_{23}^*(x_2) = (c^* + nx_2^2)I_n(x_2) - (d^* - x_2^2)x_2 I_{n+1}(x_2),$$

$$S_{24}^*(x_2) = (c^* + nx_2^2)K_n(x_2) + (d^* - x_2^2)x_2 K_{n+1}(x_2),$$

$$a^* = n^2(\delta_1^* + \delta_2^* - \nu_2 + 1) - n(\delta_1^* - \nu_2 + \delta_2^* n^2 + 1),$$

$$b^* = \delta_1^* - \nu_2 + n^2 \delta_2^* + 1,$$

$$c^* = n^4 \delta_1^* + n^2(\delta_2^* + 1 - \nu_2) - n^3(\delta_1^* + \delta_2^* + 1 - \nu_2),$$

$$d^* = n^2(\delta_1^* + \delta_2^* + 1 - \nu_2),$$

$$\delta_1^* = \frac{A}{RD_2}, \quad \delta_2^* = \frac{C}{RD_2}.$$

3. РІВНЯННЯ ЧАСТОТ ДЛЯ ОПЕРТОЇ ПЛИТИ

Для опертої по контуру $r=R_1$ плити можна одержати рівняння частот, замінюючи в (2.1) останні два рядки такими:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & J_n(x_2\eta) & N_n(x_2\eta) & I_n(x_2\eta) & K_n(x_2\eta) \\ 0 & 0 & S_{63}^*(x_2\eta) & S_{64}^*(x_2\eta) & S_{65}^*(x_2\eta) & S_{66}^*(x_2\eta) \end{vmatrix},$$

$$S_{63}^*(x_2\eta) = -J_{n+1}(x_2\eta), \quad S_{64}^*(x_2\eta) = -N_{n+1}(x_2\eta),$$

$$S_{65}^*(x_2\eta) = I_{n+1}(x_2\eta) + \frac{2x_2\eta}{b'} I_n(x_2\eta),$$

$$S_{66}^*(x_2\eta) = -K_{n+1}(x_2\eta) + \frac{2x_2\eta}{b'} K_n(x_2\eta).$$

Якщо в одержаному таким чином рівнянні частот давати параметрам задачі деякі часткові значення, без затруднень можна отримати рішення для цілого ряду практичних задач. Так, наприклад:

а) При $\delta_1' = \delta_2' = 0$, $\lambda = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, $k_1 = k_2$ і $n=0$ одержимо частотне рівняння для симетричних коливань однорідної круглої плити постійної товщини, підсиленої одним концентричним ребром жорсткості по контуру $r=R$:

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{x\eta} J_0(x)I_1(x) + [N_0^*(x\eta) - A_0 J_0(x\eta)K_0(x\eta)]I_1^2(x) + \\ & + \frac{\pi}{2} [K_0^*(x\eta) - A_0 N_0(x\eta)I_0(x\eta)]J_1^2(x) + \\ & + \left[\frac{2}{\delta_1} + K_1(x)I_1(x) - \frac{\pi}{2} J_1(x)N_1(x) \right] \cdot [M_0^*(x\eta) - A_0 J_0(x\eta)J_0(x\eta)] = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

де $A_0 = 2x\eta/(1-\nu)$.

б) При $\delta_1' = \delta_2' = 0$ і $\eta=1$ отримаємо рівняння частот для випадку, коли однорідна кругла плита, підсилена одним тонким ребром по краю $r=R_1$

$$2xJ_n(x)I_n(x) + (\delta_1 + n^2\delta_2 + \nu_1 - 1)M_n^*(x) = 0, \quad (3.2)$$

де

$$M_n^*(x) = J_n(x)I_{n+1}(x) + J_{n+1}(x)I_n(x).$$

в) При $\lambda = \infty$, $\delta'_1 = \delta'_2 = 0$ одержимо рівняння частот для шарнірно-опертої круглої плити з центральним отвором, край якого підсилений тонким кільцем. Це рівняння можна одержати також, якщо останні два рядки в (2.6) замінити такими:

$$\begin{vmatrix} J_n(x_2\eta) & N_n(x_2\eta) & I_n(x_2\eta) & K_n(x_2\eta) \\ S_{63}^*(x_2\eta) & S_{64}^*(x_2\eta) & S_{65}^0(x_2\eta) & S_{66}^0(x_2\eta) \end{vmatrix},$$

$$S_{65}^0(x_2\eta) = I_{n+1}(x_2\eta) - \frac{2x_2\eta}{1-\nu_2} I_n(x_2\eta),$$

$$S_{66}^0(x_2\eta) = -K_{n+1}(x_2\eta) - \frac{2x_2\eta}{1-\nu_2} K_n(x_2\eta).$$

г) Для жорстко закріпленої по краю $r=R_1$ плити ($\delta'_1 = \delta'_2 = \infty$) з одним тонким ребром радіуса $R < R_1$ одержимо рівняння частот з (2.1), замінюючи там останні рядки такими:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & J_n(x_2\eta) & N_n(x_2\eta) & I_n(x_2\eta) & K_n(x_2\eta) \\ 0 & 0 & J_{n+1}(x_2\eta) & N_{n+1}(x_2\eta) & -I_{n+1}(x_2\eta) & K_{n+1}(x_2\eta) \end{vmatrix}.$$

д) Для симетричних коливань ($n=0$) однорідної ($\lambda=1$, $k_1=k_2$) круглої плити з жорстко закріпленим краєм ($\delta'_1 = \delta'_2 = \infty$) та з підкріплюючим ребром по контуру $R < R_1$ одержимо рівняння частот у вигляді

$$-\frac{2}{x\eta} J_1(x) I_1(x) + I_1^2(x) N_0^*(x\eta) + \frac{\pi}{2} J_1^2(x) K_0^*(x\eta) +$$

$$+ M_0^*(x\eta) \left\{ \frac{2}{\delta_1} + K_1(x) I_1(x) - \frac{\pi}{2} J_1(x) N_1(x) \right\} = 0. \quad (3.3)$$

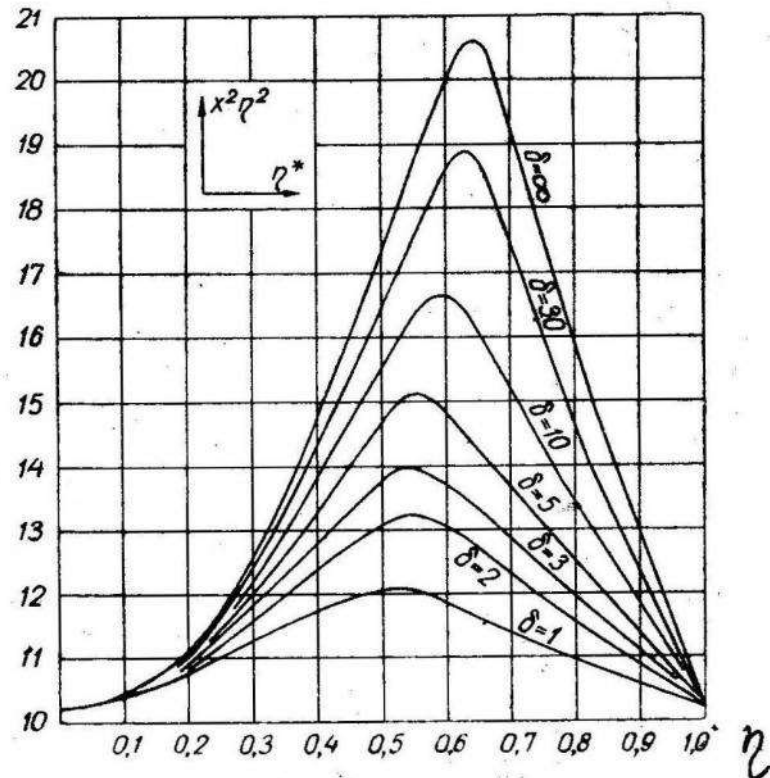
4. ВПЛИВ КОНЦЕНТРИЧНОГО РЕБРА НА ЧАСТОТУ КОЛИВАНЬ ЖОРСТКО ЗАКРІПЛЕНОЇ КРУГЛОЇ ПЛИТИ

Для дослідження впливу підкріплюючого ребра ($R < R_1$) на частоту вільних симетричних ($n=0$) коливань круглої плити з жорстко закріпленим краєм було підраховано перші корені $x\eta$ рівняння (3.3) для різних значень жорсткості підкріплюючого ребра та для різних його положень.

На рисунку наведені графіки величин $x^2\eta^2$, через які визначається частота коливань плити за формулою (2.2) у залежності від відношення $\eta^* = \frac{R}{R_1}$ та для різних значень параметра $\delta = \delta_1\eta^* = \frac{A}{R_1 D_1}$, характеризуючого жорсткість на згин підкріплюючого ребра.

Графіки на рис. показують, що із зростанням відносної жорсткості ребра δ частота нижчої форми коливань плити збільшується, причому найбільшу частоту можна досягти, якщо радіус ребра R дорівнює $0,5 \div 0,65 R_1$. Так, наприклад, якщо підкріплююче ребро має прямокутний поперечний перетин зі сторонами b і h при $\frac{b}{R} = 0,143$, $\frac{R}{R_1} = 0,55$, $\frac{h}{h_1} = 3,5$ та $\nu = 0,3$, то $\delta = \frac{b}{R} \cdot \frac{R}{R_1} (1 - \nu^2) \left(\frac{h^3}{h_1^3} - 1 \right) = 3$, і з графіка знаходимо, що $x^2\eta^2 = 14$. В цьому випадку частота плити, підкріпленої ребром, на

37,1% більше, ніж частота непідкріпленої плити, для якої $x^2\eta^2 = 10,21$. Оскільки ми тут не врахували маси ребра, то графіки на рис. визначають верхні границі відповідних частот.



На закінчення відмітимо, що за допомогою граничних умов (1.3) та (1.4) або (1.5) можна цілком аналогічно вивести рівняння частот для випадку, коли кругла або кільцева плита підкріплена більш ніж двома ребрами жорсткості.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. П. Филиппов. Колебания упругих систем, Изд-во АН УССР, 1956.
2. Н. П. Флейшман. Граничні умови для оболонки з отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем. Прикладна механіка, т. VII, вип. 1, 1961.
3. Н. П. Флейшман, О. М. Шаблій. Вплив концентричних ребер на частоту вільних коливань круглих та кільцевих плит. Прикладна механіка, т. VII, вип. 3, 1961.