Львівський ордена Леніна державний університет імені Івана Франка
Випуск 9 Питання механіки і математики 1962

Т. Л. МАРТИНОВИЧ

ДО ПИТАННЯ ПРО ЗГИН АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИНОК З ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

Задача згину анізотропної пластинки, границя якої підкріплена тонким ізотропним кільцем сталого перерізу, зводиться, як відомо [1], до визначення двох аналітичних функцій $\varphi(z_1)$ і $\psi(z_2)$ з таких граничних умов:

$$2Re\left\{\frac{P_1}{\mu_1}\varphi(z_1)+\frac{P_2}{\mu_2}\psi(z_2)\right\}=-I_1^0(s)-C'x+C_1',$$
$$2Re\{q_1\varphi(z_1)+q_2\psi(z_2)\}=I_2^0(s)+C'y+C_2'; \tag{1}$$

$$2Re\{\varphi(z_1)+\psi(z_2)\}=-Q_{0y}-\int_0^s\left[\left(\frac{1}{A}\dot{x}^2+\frac{1}{C}\dot{y}^2\right)L_y+\dot{x}\dot{y}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)L_x\right]ds,$$
$$2Re\{\mu_1\varphi(z_1)+\mu_2\psi(z_2)\}=Q_{ox}+\int_0^s\left[\left(\frac{1}{A}\dot{y}^2+\frac{1}{C}\dot{x}^2\right)L_x+\dot{x}\dot{y}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)L_y\right]ds. \tag{2}$$

Тут позначено:

A і C — відповідно жорсткості кільця на згин і кручення;

$$z_1=x+\mu_1y,\ z_2=x+\mu_2y,\ \dot{x}=\frac{dx}{ds},\ \dot{y}=\frac{dy}{ds};$$

p_1, p_2, q_1, q_2 — відомі сталі величини, залежать від пружних характеристик пластинки;

$$L_x=L_{0x}+V_{0z}y_0-V_{0z}y+I_2^0(s)-I_2(s),$$
$$L_y=L_{0y}-V_{0z}x_0+V_{0z}x-I_1^0(s)+I_1(s);$$

$I_1^0(s)$ і $I_2^0(s)$ — невідомі функції;

$$I_1(s)=\int_0^s(m(s)dy+fdx),\ I_2(s)=\int_0^s(-m(s)dx+fdy),$$

де $f=\int_0^s p(s)\,ds$ — відомі функції зовнішніх зусиль, прикладених вздовж підкріплюючого кільця; $Q_{0x}, Q_{0y}, L_{0x}, L_{0y}, V_{0z}, C', C_1', C_2'$ — дійсні сталі величини.

Виявляється, що для ефективного розв'язання конкретних задач граничні умови (1) і (2) необхідно піддати дальшим суттєвим перетворенням.

Нехай $A=\alpha C$, і з рівностей (1) і (2) виключимо невідомі функції $I_1^0(s)$ і $I_2^0(s)$, в результаті одержимо:

$$2Re\left\{\frac{d}{ds}[\varphi(z_1)+\psi(z_2)]\right\}+\frac{1}{A}(\dot{x}^2+\alpha\dot{y}^2)\Big\{2Re\left[\frac{p_1}{\mu_1}\varphi(z_1)+\frac{p_2}{\mu_2}\psi(z_2)\right]+$$

$$+I_1(s)+Cx-C_1\Big\}+\frac{(\alpha-1)}{A}\dot{x}\dot{y}\Big\{2Re[q_1\varphi(z_1)+q_2\psi(z_2)]-I_2(s)-Cy-C_2\Big\}=0,$$

$$\tag{3}$$

$$2Re\left\{\frac{d}{ds}[\mu_1\varphi(z_1)+\mu_2\psi(z_2)]\right\}-\frac{1}{A}(\dot{y}^2+\alpha\dot{x}^2)\Big\{2Re[q_1\varphi(z_1)+q_2\psi(z_2)]-$$

$$-I_2(s)-Cy-C_2\Big\}-\frac{(\alpha-1)}{A}\dot{x}\dot{y}\Big\{2Re\left[\frac{p_1}{\mu_1}\varphi(z_1)+\frac{p_2}{\mu_2}\psi(z_2)\right]+I_1(s)+Cx-C_1\Big\}=0,$$

де позначено:

$$C_1'-L_{oy}+V_{oz}x_o=C_1,\ C_2'-L_{ox}-V_{oz}y_o=C_2,\ V_{oz}+C'=C.$$

Якщо область, зайнята пластинкою, однозв'язна, сталі C_1, C_2 і C можна, очевидно, покласти рівними нулю, а у випадку багатозв'язної області на одному з контурів можна покласти їх рівними нулю, на інших же визначити з умов задачі.

Введемо далі дві нові функції P_1 і Q_1 рівностями

$$P_1(z_1,z_2)=2Re\left\{\frac{p_1}{\mu_1}\varphi(z_1)+\frac{p_2}{\mu_2}\psi(z_2)\right\}+I_1(s)+Cx-C_1,$$

$$Q_1(z_1,z_2)=2Re\{q_1\varphi(z_1)+q_2\psi(z_2)\}-I_2(s)-Cy-C_2. \tag{4}$$

Враховуючи рівності (4), контурні умови (3) набудуть вигляду:

$$2Re\left\{\frac{d}{ds}[\varphi(z_1)+\psi(z_2)]\right\}+\frac{1}{A}(\dot{x}^2+\alpha\dot{y}^2)P_1(z_1,z_2)+\frac{\alpha-1}{A}\dot{x}\dot{y}Q_1(z_1,z_2)=0,$$

$$\tag{5}$$

$$2Re\left\{\frac{d}{ds}[\mu_1\varphi(z_1)+\mu_2\psi(z_2)]\right\}-\frac{1}{A}(\dot{y}^2+\alpha\dot{x}^2)Q_1(z_1,z_2)-\frac{\alpha-1}{A}\dot{x}\dot{y}P_1(z_1,z_2)=0.$$

Нехай функція

$$z=\omega(\zeta),\ \zeta=\rho e^{i\vartheta}, \tag{6}$$

конформно перетворює область зміни z, зайняту пластинкою, на кругову радіуса ρ; тоді, очевидно, функції

$$z_1=\omega_1(\zeta)\ \text{і}\ z_2=\omega_2(\zeta), \tag{7}$$

які одержуються із функції (6) шляхом афінного перетворення за відомими формулами, будуть також конформно переводити відповідні області зміни z_1 і z_2 на дану кругову область.

Якщо ввести позначення:

$$\varphi[\omega_1(\zeta)]=\Phi(\zeta),\ \psi[\omega_2(\zeta)]=\Psi(\zeta),$$

$$P_1[\omega_1(\zeta),\ \omega_2(\zeta)]=P(\zeta),\ Q_1[\omega_1(\zeta),\ \omega_2(\zeta)]=Q(\zeta),$$

$$I_1(s)=I_1^*(\vartheta),\ I_2(s)=I_2^*(\vartheta),$$

то контурні умови (5) і (4) в перетвореній області зведуться до такого вигляду:

$$
\left.
\begin{aligned}
&2Re\{i\sigma\Phi'(\sigma)+i\sigma\Psi'(\sigma)\}+\frac{1}{A}\left(\dot{x}^2+\alpha\dot{y}^2\right)\rho|\omega'(\sigma)|P(\sigma)+\\
&\qquad+\frac{\alpha-1}{A}\dot{x}\dot{y}\rho|\omega'(\sigma)|Q(\sigma)=0,\\
&2Re\{i\mu_1\sigma\Phi'(\sigma)+i\mu_2\sigma\Psi'(\sigma)\}-\frac{1}{A}\left(\dot{y}^2+\alpha\dot{x}^2\right)\rho|\omega'(\sigma)|Q(\sigma)-\\
&\qquad-\frac{\alpha-1}{A}\dot{x}\dot{y}\rho|\omega'(\sigma)|P(\sigma)=0,
\end{aligned}
\right\} \tag{8}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&2Re\left\{\frac{p_1}{\mu_1}\Phi(\sigma)+\frac{p_2}{\mu_2}\Psi(\sigma)\right\}=P(s)-I_1^*(\vartheta)-\frac{1}{2}C\left(\omega(\sigma)+\overline{\omega(\sigma)}\right)+C_1,\\
&2Re\{q_1\Phi(\sigma)+q_2\Psi(\sigma)\}=Q(\sigma)+I_2^*(\vartheta)-\frac{i}{2}C\left(\omega(\sigma)-\overline{\omega(\sigma)}\right)+C_2,
\end{aligned}
\right\} \tag{9}
$$

де

$$
\dot{x}^2+\alpha\dot{y}^2=\frac{1}{2}(\alpha+1)+\frac{\alpha-1}{4\rho^2}\left[\frac{\sigma^2\omega'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}+\frac{\bar{\sigma}^2\overline{\omega'(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\right],
$$

$$
\dot{y}^2+\alpha\dot{x}^2=\frac{1}{2}(\alpha+1)-\frac{\alpha-1}{4\rho^2}\left[\frac{\sigma^2\omega'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}+\frac{\bar{\sigma}^2\overline{\omega'(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\right],
$$

$$
\dot{x}\dot{y}=\frac{i}{4\rho^2}\left[\frac{\sigma^2\omega'(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}-\frac{\bar{\sigma}^2\overline{\omega'(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\right].
$$

$\sigma=\rho e^{i\vartheta}$ — значення ζ на границі області.

Отже, задача зводиться до визначення двох функцій $P(\sigma)$ і $Q(\sigma)$ з контурних умов (8). Знаючи функції $P(\sigma)$ і $Q(\sigma)$, з умови (9), яка аналогічна граничній умові пластинки без підкріплення, знаходимо функції напруження $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$.

Контурна умова (8) значно спрощується у випадку рівних жорсткостей кільця на згин і кручення; тоді $\alpha=1$ і рівність (8) прийме вигляд:

$$
\left.
\begin{aligned}
&2Re\{i\sigma\Phi'(\sigma)+i\sigma\Psi'(\sigma)\}+\frac{1}{A}\rho|\omega'(\sigma)|P(\sigma)=0,\\
&2Re\{i\mu_1\sigma\Phi'(\sigma)+i\mu_2\sigma\Psi'(\sigma)\}-\frac{1}{A}\rho|\omega'(\sigma)|Q(\sigma)=0.
\end{aligned}
\right\} \tag{10}
$$

1. АНІЗОТРОПНА ПЛАСТИНКА З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ, ПІДКРІПЛЕНИМ ТОНКИМ ПРУЖНИМ КІЛЬЦЕМ

Для прикладу розглянемо безмежну анізотропну пластинку з еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким ізотропним кільцем сталого перерізу. Для простоти викладок, не обмежуючи загальності методу розв'язування, будемо вважати, що пластинка і кільце вільні від дії зовнішнього навантаження, а зусилля на безмежності обмежені.

Крім того, приймемо, що жорсткість кільця на згин рівна жорсткості кільця на кручення.

Функції

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \quad (0 < m < 1),$$

$$z_1 = \frac{1}{2} R\left\{[(1+m) - i(1-m)\mu_1]\zeta + [(1+m) + i(1-m)\mu_1]\frac{1}{\zeta}\right\}, \quad (11)$$

$$z_2 = \frac{1}{2} R\left\{[(1+m) - i(1-m)\mu_2]\zeta + [(1+m) + i(1-m)\mu_2]\frac{1}{\zeta}\right\}$$

переводять, очевидно, області зміни z, z_1 і z_2 на зовнішність одиничного кола.

Функції $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\xi)$ представимо у вигляді:

$$\Phi(\zeta) = K_1\zeta + \Phi_0(\zeta),$$
$$\Psi(\zeta) = K_2\zeta + \Psi_0(\zeta), \quad (12)$$

де

$$\Phi_0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^{-n}, \quad \Psi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^{-n}.$$

Тут позначено:

$$K_1 = \frac{1}{2} R B_1^*[(1+m) - i\mu_1(1-m)],$$

$$K_2 = \frac{1}{2} R(B_2^* + iC_2^*)[(1+m) - i\mu_2(1-m)].$$

Сталі B_1^*, B_2^* і C_2^* визначаються з системи рівнянь

$$M_x^\infty = -2Re\{p_1 B_1^* + p_2(B_2^* + iC_2^*)\},$$
$$M_y^\infty = -2Re\{q_1 B_1^* + q_2(B_2^* + iC_2^*)\},$$
$$H_{xy}^\infty = -2Re\{r_1 B_1^* + r_2(B_2^* + iC_2^*)\}.$$

Враховуючи рівності (11) і (12), граничні умови (9) і (10) наберуть вигляду

$$2Re\{i\sigma\Phi_0'(\sigma) + i\sigma\Psi_0'(\sigma)\} + \frac{1}{A} R_0 P(\sigma) = \frac{1}{A}(R_0 - |\omega'(\sigma)|)P(\sigma) +$$
$$+ i(\overline{K}_1 + \overline{K}_2)\frac{1}{\sigma} - i(K_1 + K_2)\sigma;$$

$$(13)$$

$$2Re\{i\mu_1\sigma\Phi_0'(\sigma) + i\mu_2\sigma\Psi_0'(\sigma)\} - \frac{1}{A} R_0 Q(\sigma) = -\frac{1}{A}(R_0 - |\omega'(\sigma)|)Q(\sigma) +$$
$$+ i(\overline{\mu}_1\overline{K}_1 + \overline{\mu}_2\overline{K}_2)\frac{1}{\sigma} - i(\mu_1 K_1 + \mu_2 K_2)\sigma;$$

$$2Re\left\{\frac{p_1}{\mu_1}\Phi_0(\sigma) + \frac{p_2}{\mu_2}\Psi_0(\sigma)\right\} = P(\sigma) - \left(\frac{p_1}{\mu_1}K_1 + \frac{p_2}{\mu_2}K_2\right)\sigma -$$
$$-\left(\frac{\overline{p}_1}{\overline{\mu}_1}\overline{K}_1 + \frac{\overline{p}_2}{\overline{\mu}_2}\overline{K}_2\right)\frac{1}{\sigma};$$

$$(14)$$

$$2Re\{q_1\Phi_0(\sigma) + q_2\Psi_0(\sigma)\} = Q(\sigma) - (q_1K_1 + q_2K_2)\sigma - (\overline{q}_1\overline{K}_1 + \overline{q}_2\overline{K}_2)\frac{1}{\sigma}.$$

Внаслідок того, що модуль похідної відображаючої функції $|\omega'(\sigma)|$, що входить в контурні умови (13), є ірраціональна функція, задачу доводиться розв'язувати методом послідовних наближень. При знаходженні функцій $P(\sigma)$ і $Q(\sigma)$ в нульовому наближенні приймемо, що $R_0 = |\omega'(\sigma)|$.

Дійсні функції $P(\sigma)$ і $Q(\sigma)$ розкладемо в ряди Фур'є, записавши їх в такому вигляді:

$$P(\sigma) = P_1(\sigma) + P_2(\sigma), \quad Q(\sigma) = Q_1(\sigma) + Q_2(\sigma), \tag{15}$$

де

$$P_1(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sigma^n, \quad Q_1(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \sigma^n,$$

$$P_2(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\alpha}_n \sigma^{-n}, \quad Q_2(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_n \sigma^{-n}.$$

Далі застосуємо оператор Коші $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ до граничних умов (13) і (14) при $|\zeta| > 1$, поклавши в них $R_0 = |\omega'(\sigma)|$, одержимо:

$$\begin{gathered}
\zeta\Phi_0'(\zeta) + \zeta\Psi_0'(\zeta) - \frac{i}{A} R_0 P_2(\zeta) = (\bar{K}_1 + \bar{K}_2)\frac{1}{\zeta}, \\
\mu_1\zeta\Phi_0'(\zeta) + \mu_2\zeta\Psi_0'(\zeta) + \frac{i}{A} R_0 Q_2(\zeta) = (\bar{\mu}_1 \bar{K}_1 + \bar{\mu}_2 \bar{K}_2)\frac{1}{\zeta},
\end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered}
\frac{p_1}{\mu_1}\Phi_0(\zeta) + \frac{p_2}{\mu_2}\Psi_0(\zeta) - \frac{p_1}{\mu_1} a_0 = P_2(\zeta) - \left(\frac{\bar{p}_1}{\bar{\mu}_1}\bar{K}_1 + \frac{\bar{p}_2}{\bar{\mu}_2}\bar{K}_2\right)\frac{1}{\zeta}, \\
q_1 \Phi_0(\zeta) + q_2 \Psi_0(\zeta) - q_1 a_0 = Q_2(\zeta) - (\bar{q}_1 \bar{K}_1 + \bar{q}_2 \bar{K}_2)\frac{1}{\zeta}.
\end{gathered} \tag{17}$$

З рівностей (17) знаходимо:

$$\begin{gathered}
\Phi_0(\zeta) = \frac{q_2 \mu_1 \mu_2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} P_2(\zeta) - \frac{p_2 \mu_1}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} Q_2(\zeta) + S_1 \frac{1}{\zeta} + a_0; \\
\Psi_0(\zeta) = \frac{p_1 \mu_2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} Q_2(\zeta) - \frac{q_1 \mu_1 \mu_2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} P_2(\zeta) + S_2 \frac{1}{\zeta},
\end{gathered} \tag{18}$$

де

$$S_1 = \frac{p_2 \mu_1 (\bar{q}_1 \bar{K}_1 + \bar{q}_2 \bar{K}_2)}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} - \frac{q_2 \mu_1 \mu_2 (\bar{p}_1 \bar{\mu}_2 \bar{K}_1 + \bar{p}_2 \bar{\mu}_1 \bar{K}_2)}{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1)};$$

$$S_2 = \frac{q_1 \mu_1 \mu_2 (\bar{\mu}_2 \bar{p}_1 \bar{K}_1 + \bar{\mu}_1 \bar{p}_2 \bar{K}_2)}{\bar{\mu}_1 \bar{\mu}_2 (p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1)} - \frac{p_1 \mu_2 (\bar{q}_1 \bar{K}_1 + \bar{q}_2 \bar{K}_2)}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1}.$$

Підставляючи в (16) замість функцій $\Phi_0(\zeta)$ і $\Psi_0(\zeta)$ їх вирази з (18) і прирівнюючи далі коефіцієнти при однакових степенях ζ, прийнявши до уваги (15), знайдемо коефіцієнти функцій $P(\zeta)$ і $Q(\zeta)$ в нульовому наближенні:

$$\bar{\alpha}_1^{(0)} = \frac{D_2 B_1 - D_1 B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1};$$

$$\bar{\beta}_1^{(0)} = \frac{D_1 A_2 - D_2 A_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}; \qquad (19)$$

$$\bar{\alpha}_n^{(0)} = \bar{\beta}_\alpha^{(0)} = 0 \ (n \geqslant 2).$$

Тут позначено:

$$A_1 = \frac{q_2 \mu_1 \mu_2 - q_1 \mu_1 \mu_2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} + \frac{i}{A} R_0; \ B_1 = \frac{p_1 \mu_2 - p_2 \mu_1}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1};$$

$$A_2 = \frac{q_2 \mu_2 \mu_1^2 - q_1 \mu_1 \mu_2^2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1}; \ B_2 = \frac{p_1 \mu_1 \mu_2 - p_2 \mu_1^2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} - \frac{i}{A} R_0;$$

$$D_1 = \bar{K}_1 + \bar{K}_2 + S_1 + S_2;$$

$$D_2 = \bar{\mu}_1 \bar{K}_1 + \bar{\mu}_2 K_2 + \mu_1 S_1 + \mu_2 S_2.$$

Отже, функції напруження $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ в нульовому наближенні мають вигляд:

$$\Phi^{(0)}(\zeta) = K_1 \zeta + \left(\frac{q_2 \mu_1 \mu_2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} \bar{\alpha}_1^{(0)} - \frac{p_2 \mu_1}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} \bar{\beta}_1^{(0)} + S_1 \right) \frac{1}{\zeta};$$

$$\Psi^{(0)}(\zeta) = K_2 \zeta + \left(\frac{p_1 \mu_2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} \bar{\beta}_1^{(0)} - \frac{q_1 \mu_1 \mu_2}{p_1 q_2 \mu_2 - p_2 q_1 \mu_1} \bar{\alpha}_1^{(0)} + S_2 \right) \frac{1}{\zeta}. \qquad (20)$$

Коефіцієнти a_0, α_0 і β_0 рівні нулеві, що випливає з контурних умов (13) і (14) після застосування до них оператора Коші при $|\zeta| < 1$.

При знаходженні першого і наступних наближень функцій напруження $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ для простоти викладу візьмемо

$$|\omega'(\sigma)| = R\sqrt{1 + m^2 - m\left(\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2}\right)} \approx R_0 - \lambda\left(\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2}\right), \qquad (21)$$

де

$$R_0 = \frac{R(1+m+m^2)}{1+m}, \ \lambda = \frac{Rm}{2(1+m)}.$$

Підставляючи вираз (21) і знайдені в нульовому наближенні функції $P(\zeta)$ і $Q(\zeta)$ в праву частину контурних умов (13) і застосовуючи засіб, як і при знаходженні нульового наближення, одержимо в результаті функції $P(\zeta)$ і $Q(\zeta)$ в першому наближенні:

$$P_2^{(1)}(\zeta) = \bar{\alpha}_1^{(1)} \frac{1}{\zeta} + \bar{\alpha}_3^{(1)} \frac{1}{\zeta^3};$$

$$Q_2^{(1)}(\zeta) = \bar{\beta}_1^{(1)} \frac{1}{\zeta} + \bar{\beta}_3^{(1)} \frac{1}{\zeta^3}. \qquad (22)$$

Тут позначено:

$$\bar{\alpha}_1^{(1)} = \bar{\alpha}_1^{(0)} + \frac{i\lambda}{A} \cdot \frac{\beta_1^{(0)} B_1 + \alpha_1^{(0)} B_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1};$$

$$\bar{\beta}_1^{(1)} = \bar{\beta}_1^{(0)} - \frac{i\lambda}{A} \ \frac{\beta_1^{(0)} A_1 + \alpha_1^{(0)} A_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1};$$

$$\bar{\alpha}_3^{(1)} = \frac{\frac{i\lambda}{A}\left[\left(3B_2 + \frac{2i}{A}R_0\right)\bar{\alpha}_1^{(0)} + 3\bar{\beta}_1^{(0)}B_1\right]}{\left(3A_1 - \frac{2i}{A}R_0\right)\left(3B_2 + \frac{2iR_0}{A}\right) - 9A_2B_1};$$

$$\bar{\beta}_3^{(1)} = -\frac{\frac{i\lambda}{A}\left[\left(3A_1 - \frac{2i}{A}R_0\right)\bar{\beta}_1^{(0)} + 3\bar{\alpha}_1^{(0)}A_2\right]}{\left(3A_1 - \frac{2i}{A}R_0\right)\left(3B_2 + \frac{2i}{A}R_0\right) - 9A_2B_1}.$$

Підставляючи (22) в (18), з врахуванням (12), одержимо вирази функцій напруження $\Phi(\zeta)$ і $\Psi(\zeta)$ в першому наближенні.

Аналогічно знаходяться наступні наближення.

Повертаючись до змінних z_1 і z_2 підстановкою в функцію $\Phi(\zeta)$ замість ζ її значення

$$\zeta = \frac{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2 - \mu_1^2 b^2}}{a - i\mu_1 b},$$

а в функцію $\Psi(\zeta)$ замість ζ її значення

$$\zeta = \frac{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2 - \mu_2^2 b^2}}{a - i\mu_2 b},$$

знайдемо остаточний вигляд функцій $\varphi(z_1)$ і $\psi(z_2)$. Поклавши у виразах функцій $\Phi^{(0)}$ і $\Psi^{(0)}$ (20) жорсткість підкріплюючого кільця $A=0$, одержимо відомі функції напруження безмежної пластинки з еліптичним отвором. В цьому випадку $\bar{\alpha}_1^{(0)} = 0$, $\bar{\beta}_1^{(0)} = 0$.

При $m=0$ одержимо функції напруження безмежної пластинки з круговим отвором, підкріпленим тонким пружним кільцем, дані в праці М. П. Шереметьєва [1].

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Изгиб анизотропных и изотропных плит, ослабленных отверстием, край которого подкреплен упругим, тонким кольцом, ДАН УССР, № 6, 1950.

2. М. П. Шереметьєв, Т. Л. Мартинович. Згин нескінченної пластинки з еліптичним отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем. Прикладна механіка, т. III, вип. 2, 1957.

3. С. Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки, Гостехиздат, 1957.

4. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий, Гостехиздат, 1951.

Стаття надійшла 15. XI 1960.