Львівський ордена Леніна державний університет імені Івана Франка
Випуск 9 Питання механіки і математики 1962

Ю. І. КОЙФМАН

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОЇ ПЛОСКОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ[1]

В зв'язку з використанням в техніці нових конструктивних матеріалів (спеціальні види пластмас та ін.) зараз виникла необхідність рішення задач теорії пружності в нелінійній постановці [1], [2].

§ 1.

Для однорідного та ізотропного в недеформованому стані матеріалу найбільш загальний зв'язок між компонентами тензора напружень і тензора деформацій записується таким чином [2], [3]:

$$\tau^{ij} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_1} g^{ij} + \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_2} B^{ij} + 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3} G^{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1.1}$$

де W — пружний потенціал; I_r — інваріанти деформації; τ^{ij} — контрваріантні компоненти тензора напружень, віднесені до довільної криволінійної системи координат у деформованому тілі; G^{ij}, g^{ij} — компоненти метричного тензора деформованого та недеформованого тіла відповідно; $B^{ij} = g^{ij} I_1 - g^{ir} g^{js} G_{rs}$.

Якщо ввести у випадку плоскої задачі комплексні координати $(z, \bar{z})$ і $(\eta, \bar{\eta})$ для деформованого та недеформованого тіла відповідно, то функція зміщень $D = u + iv$ дається формулою:

$$D = z - \eta. \tag{1.2}$$

Рівняння рівноваги плоскої задачі при відсутності об'ємних сил мають вигляд [3]:

$$\tau^{\alpha\beta} \parallel_{\alpha} = 0; \qquad (\alpha, \beta = 1, 2). \tag{1.3}$$

Після використання функції напружень U, яка задовольняє рівнянням (1.3), та співвідношень (1.1), (1.2) у роботі [3] була одержана вирішальна система рівнянь нелінійної плоскої теорії. Ця система інтегрувалась методом розвинення рішення в ряд по характеристичному параметру ε:

$$\begin{aligned} U &= {}^0H\varepsilon\,(U^{(1)} + \varepsilon U^{(2)} + \varepsilon^2 U^{(3)} + \ldots); \\ D &= \quad \varepsilon D^{(1)} + \varepsilon^2 D^{(2)} + \varepsilon^3 D^{(3)} + \ldots, \end{aligned} \tag{1.4}$$

де ${}^0H$ — постійна, яка дорівнює μ або $2\,h\mu$ для плоскої деформації та узагальненого плоско-напруженого стану відповідно (μ — модуль зсуву у лінійній теорії).

[1] Доповідь на семінарі з теорії пружності при кафедрі механіки Львівського ун-ту в травні 1959 року.

При інтегруванні перше наближення дає відомі формули Колосова—Мусхелішвілі [5]; члени другого порядку даються такими співвідношеннями [4]:

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial \bar{z}} = \varphi^{(2)}(z) + z\overline{\varphi'^{(2)}(z)} + \overline{\psi^{(2)}(z)} - F(z, \bar{z}, \gamma, \delta); \tag{1.5}$$

$$D^{(2)} = k\varphi^{(2)}(z) - z\overline{\varphi'^{(2)}(z)} - \overline{\psi^{(2)}(z)} - F_1(z, \bar{z}, \gamma, \delta), \tag{1.6}$$

де

$$F(z, \bar{z}, \gamma, \delta) = \gamma\{[(z\overline{\Phi'^{(1)}(z)} + \overline{\Psi^{(1)}(z)}]\bar{D}^{(1)} + [\delta\overline{\Phi^{(1)}(z)} + \Phi^{(1)}(z)]D^{(1)}\} -$$
$$- k_3 z[\overline{\Phi^{(1)}(z)}]^2 - k_1\int\overline{\Phi^{(1)}(z)}\,\overline{\Psi^{(1)}(z)}\,d\bar{z} - k_2\int[\Phi^{(1)}(z)]^2\,dz; \tag{1.7}$$

$$F_1(z, \bar{z}, \gamma, \delta) = -\gamma\{[(z\overline{\Phi'^{(1)}(z)} + \overline{\Psi^{(1)}(z)}]\bar{D}^{(1)} + [\delta\overline{\Phi^{(1)}(z)} - k\Phi^{(1)}(z)]D^{(1)}\} -$$
$$- k_3'[\overline{\Phi^{(1)}(z)}]^2 - k_1'\int\overline{\Phi^{(1)}(z)}\,\overline{\Psi^{(1)}(z)}\,d\bar{z} - k_2'\int[\Phi^{(1)}(z)]^2\,dz; \tag{1.8}$$

$\Phi^{(1)}(z)$, $\Psi^{(1)}(z)$ — потенціальні функції першого порядку.

Значення постійних γ, δ, k, k_i k_i' $(i = 1, 2, 3)$ наведені у роботі [4]; вони визначаються через пружні постійні матеріалу, які знаходяться експериментальним шляхом:

$$\mu = -2\left[\frac{\partial W}{\partial J_2}\right]_0; \quad c_1 = -\frac{2}{\mu}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial J_1^2}\right]_0; \quad c_2 = -\frac{2}{\mu}\left[\frac{\partial^2 W}{\partial J_1 \partial J_2}\right]_0;$$
$$c_3 = -\frac{2}{\mu}\left[\frac{\partial W}{\partial J_3}\right]_0; \quad c_4 = -\frac{2}{\mu}\left[\frac{\partial^3 W}{\partial J_1^3}\right]_0.$$

Для переходу в правих частинах формул (1. 5), (1. 6) до координат $(\eta, \bar{\eta})$ досить замінити $(z, \bar{z})$ на $(\eta, \bar{\eta})$ і постійні γ, δ на $\gamma' = \gamma - 1$; $\delta' = \frac{\gamma\delta - 1}{\gamma'}$ [4].

Компоненти тензора напружень зв'язані з функцією U таким чином:

$$\tau^{12} = \sigma_x + \sigma_y = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}; \quad \tau^{22} = \sigma_x - \sigma_y - 2i\sigma_{xy} = -4\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{1.9}$$

Якщо вибрати ε так, щоб $2^\circ H\varepsilon$ дорівнювало 1 $кг/см^2$ у випадку плоскої деформації та 1 $кг/см$ для плоско-напруженого стану, і обмежитись другим наближенням, то формули (1. 9) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2\left[\frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{1}{2^\circ H}\frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial z \partial \bar{z}}\right]; \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\sigma_{xy} &= 2\left[\frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{1}{2^\circ H}\frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial \bar{z}^2}\right]. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Використовуючи метод, розроблений акад М. І. Мусхелішвілі, розглянемо деякі задачі.

§ 2. РІШЕННЯ ПЕРШОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ КРУГОВОГО КІЛЬЦЯ

Припустимо, що область, яка розглядається, являє собою кругове кільце (трубу), обмежене двома концентричними колами L_1 і L_2 (зовнішній радіус — R_1, внутрішній — R_2) з центром у початку координат.

Нехай до контурів L_1 і L_2 прикладена деяка система зовнішніх зусиль. Загальне рішення лінійної задачі наведене у монографії [5], тому потенціали першого порядку та функцію $F(z, \bar{z}, \gamma, \delta)$ будемо вважати відомими.

Граничні умови для потенціалів другого порядку мають такий вигляд:

$$\varphi^{(2)}(t) + t\,\overline{\varphi'^{(2)}(t)} + \overline{\psi^{(2)}(t)} = f^{(2)}(t) + F(t, \bar{t}, \gamma, \delta) \text{ на } L_i;\ (i = 1, 2). \tag{2.1}$$

Праві частини формул (2.1) можна представити таким чином:

$$f^{(2)}(t) + F(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(j)} e^{in\vartheta} + Ni\vartheta;\ (j = 1, 2). \tag{2.2}$$

Підставляючи[1]

$$\varphi^{(2)}(z) = B^{(2)} \ln z + \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n^{(2)} z^n;\ \psi^{(2)}(z) = B'^{(2)} \ln z + \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n^{(2)} z^n \tag{2.3}$$

до формул (2.1) та виконуючи необхідні перетворення, знайдемо:

$$N = B^{(2)} - \overline{B}'^{(2)};$$

$$a_1^{(2)} = \frac{R_1 A_1^{(1)} - R_2 A_1^{(2)}}{2\left(R_1^2 - R_2^2\right)};\ b_{-1}^{(2)} = \frac{\left(R_1 A_1^{(2)} - R_2 A_1^{(1)}\right) R_1 R_2}{R_1^2 - R_2^2};$$

$$a_2^{(2)} = \frac{R_1^2 A_2^{(1)} - R_2^2 A_2^{(2)}}{R_1^4 - R_2^4} - \frac{B^{(2)}}{R_1^2 + R_2^2};\ b_{-2}^{(2)} = \frac{\left(R_1^2 A_2^{(2)} - R_2^2 A_2^{(1)}\right) R_1^2 R_2^2}{R_1^4 - R_2^4} - \frac{B^{(2)} R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2};$$

$$a_n^{(2)} = \frac{\left(R_1^{2(2-n)} - R_2^{2(2-n)}\right) B_n^{(1)} - (2-n)\left(R_1^2 - R_2^2\right) B_n^{(2)}}{\left(R_1^{2n} - R_2^{2n}\right)\left(R_1^{2(2-n)} - R_2^{2(2-n)}\right) - n(2-n)\left(R_1^2 - R_2^2\right)^2}; \tag{2.4}$$

$$b_n^{(2)} = \overline{A}_n^{(1)} R_1^{-n} - \overline{a}_{-n}^{(2)} R_1^{-2n} - a_{n+2}^{(2)} (2-n) R_1^2;$$

$$B_n^{(1)} = A_n^{(1)} R_1^n - A_n^{(2)} R_2^n;\ B_n^{(2)} = \overline{A}_{2-n}^{(1)} R_1^{2-n} - \overline{A}_{2-n}^{(2)} R_2^{2-n};$$

$$(n = -1, -2, \pm 3, \pm 4, \ldots).$$

Таким чином, всі коефіцієнти розкладу функцій $\varphi^{(2)}(z)$ і $\psi^{(2)}(z)$ знайдені.

Н е л і н і й н а з а д а ч а Л а м е. Розглянемо випадок, коли кільце (труба) піддається рівномірному внутрішньому та зовнішньому тиску інтенсивністю P_2 та P_1.

Граничні умови цієї задачі мають такий вигляд:

$$2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}}\Big|_{L_i} = -P_i t; \tag{2.5}$$

або

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \bar{z}}\Big|_{L_i} = -P_i t,\ \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \bar{z}}\Big|_{L_i} = 0.$$

---

[1] Коефіцієнти $B^{(2)}$ та $B'^{(2)}$ визначаються з умов однозначності зміщень та виразу для головного вектора [7].

Потенціали першого порядку дорівнюють:

$$\varphi^{(1)}(z) = a^{(1)}z;\ \psi^{(1)}(z) = \frac{b^{(1)}}{z}; \tag{2.6}$$

де

$$a^{(1)} = \frac{P_1R_1^2 - P_2R_2^2}{2\left(R_2^2 - R_1^2\right)};\ b^{(1)} = \frac{\left(P_2 - P_1\right)R_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

На відміну від задач лінійної теорії при визначенні потенціалів другого порядку можливі два варіанти у постановці граничних задач: границя області задана в деформованому або недеформованому тілі.

I. Рішення задачі у випадку, коли границя задана у деформованому тілі.

У цьому випадку

$$f^{(2)}(t) = 0;\ F(t, \overline{t}, \gamma, \delta) = A_1^{(j)}e^{i\vartheta}\ (j = 1, 2) \tag{2.7}$$

з формул (2,4), (2,7) одержимо:

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(z) &= \left\{\left[\gamma(1+\delta)(k-1) - k_3\right]a^{(1)^2} - \frac{\gamma}{R_1^2R_2^2}b^{(1)^2}\right\}\frac{z}{2}; \\ \psi^{(2)}(z) &= \gamma\left[\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_1^2R_2^2}b^{(1)^2} - (k+\delta)a^{(1)}b^{(1)}\right]\frac{1}{z}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

За формулами для напружень і зміщень знайдемо:

$$\sigma_r^{\mathrm{I}} = \frac{P_1R_1^2 - P_2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} + \frac{(P_2 - P_1)R_1^2R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)R^2}\left(1 - \frac{\gamma(P_2 - P_1)(R_1^2 - R^2)(R_2^2 - R^2)}{2\,(^\circ H)(R_2^2 - R_1^2)R^2}\right);$$

$$\sigma_\vartheta^{\mathrm{I}} = \frac{P_1R_1^2 - P_2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} -$$

$$- \frac{(P_2 - P_1)R_1^2R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)R^2}\left(1 - \frac{\gamma(P_2 - P_1)[2(R_1^2R_2^2 - R^4) + (R_1^2 - R^2)(R_2^2 - R^2)]}{2(^\circ H)(R_2^2 - R_1^2)R^2}\right); \tag{2.9}$$

$$u_r^{\mathrm{I}} = \frac{R}{2\,^\circ H}\left\{(k-1)a^{(1)} - \frac{b^{(1)}}{R^2} + \frac{1}{2(^\circ H)}\left\{\left[2(k_3' + k_2') - k_3(k-1) + \right.\right.\right.$$

$$\left. + \gamma(\delta - 1)(k^2 - 1)\right]\frac{a^{(1)^2}}{2} + \gamma\left[(R_1^2 - R^2)(R_2^2 - R^2) - \frac{k+1}{2}R^4\right]\frac{b^{(1)^2}}{R_1^2R_2^2R^4} +$$

$$\left.\left. + \frac{(k+1)(2\gamma - 1)}{R^2}a^{(1)}b^{(1)}\right\}\right\};\ u_\vartheta^{\mathrm{I}} = 0. \tag{2.9'}$$

У випадку плоскої деформації нестисливого матеріалу[1] $\left(k = \delta = 1;\ \gamma = k_3' = -k_2' = \frac{1}{2}\right)$, зміщення точок контуру дорівнюють:

$$u_r^{(j)} = -\frac{(P_2 - P_1)R_1^2R_2^2}{2(^\circ H)(R_2^2 - R_1^2)R_j}\left[1 - \frac{(P_1 - P_2)R_j^2}{4(^\circ H)(R_2^2 - R_1^2)}\right];\ (j = 1, 2). \tag{2.10}$$

[1] Для нестисливого матеріалу пружний потенціал вибирається у формі, яка запропонована Муні: $W = C_1'(I_1 - 3) + C_2'(I_2 - 3)$.

II. Рішення задачі у випадку, коли границя задана у недеформованому тілі.

В даному разі, вживаючи розклад Тейлора до функції $f(t)=2\frac{\partial U}{\partial \bar z}\Big|_{L_i}$

$$(f(t)=f(t^*)+D\cdot f'(t^*)+\ldots=f^{(1)}(t^*)+\varepsilon\,[f^{(2)}(t^*)+ + D^{(1)}f'^{(1)}(t^*)]+\ldots),$$

не важко переконатись у тому, що граничні умови запишуться таким чином:

$$\varphi^{(2)}(t)+t\bar\varphi'^{(2)}(\bar t)+\bar\psi^{(2)}(\bar t)=f^{(2)}(t)+F^*(t,\bar t,\gamma,\delta) \text{ на } L_i^*; \tag{2.11}$$

де

$$F^*(t,\bar t,\gamma',\delta')=F(t,\bar t,\gamma'\,\delta')+D^{(1)}f'^{(1)}(t); \tag{2.11'}$$

t — афікс точки контуру недеформованого тіла.

Оскільки

$$f^{(2)}(t)=0;\ \ F^*(t,\bar t,\gamma',\delta')=A_1^{*(j)}e^{i\vartheta};$$

то, як і раніше, знайдемо:

$$\varphi^{(2)}(\eta)=\left\{[\gamma(1+\delta)(k-1)-k_3]a^{(1)^2}-\frac{\gamma-2}{R_1^2R_2^2}b^{(1)^2}\right\}\frac{\eta}{2};$$
$$\psi^{(2)}(\eta)=\left\{(\gamma-2)\frac{R_1^2+R_2^2}{R_1^2R_2^2}b^{(1)^2}-[\gamma(k+\delta)-2(k-1)]a^{(1)}b^{(1)}\right\}\frac{1}{\eta}. \tag{2.12}$$

Формули для напружень та зміщень мають такий вигляд:

$$\sigma_r^{\text{II}}=\frac{P_1R_1^2-P_2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}+\frac{(P_2-P_1)R_1^2R_2^2}{(R_2^2-R_1^2)R^2}\left(1-\frac{(\gamma-2)(P_2-P_1)(R_1^2-R^2)(R_2^2-R^2)}{2(^\circ H)(R_2^2-R_1^2)R^2}\right);$$
$$\sigma_\vartheta^{\text{II}}=\frac{P_1R_1^2-P_2R_2^2}{R_2^2-R_1^2}-$$
$$-\frac{(P_2-P_1)R_1^2R_2^2}{(R_2^2-R_1^2)R^2}\left(1-\frac{(P_2-P_1)[(\gamma-2)(R_1^2-R^2)(R_2^2-R^2)+2\gamma(R_1^2R_2^2-R^4)+4R^4]}{2(^\circ H)(R_2^2-R_1^2)R^2}\right); \tag{2.13}$$

$$u_r^{\text{II}}=\frac{R}{2^\circ H}\left\{(k-1)a^{(1)}-\frac{b^{(1)}}{R^2}+\frac{1}{2(^\circ H)}\left\{[2(k_3'-k_2')-k_3(k-1)-\right.\right.$$
$$-\gamma(1-\delta)(k^2-1)+2(k-1)^2]\frac{a^{(1)^2}}{2}+\left[1+\frac{\gamma-2}{R_1^2R_2^2R^4}\Big((R_1^2-R^2)(R_2^2-R^2)-\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{k+1}{2}R^4\Big)\right]b^{(1)^2}+(k+1)\left[2\gamma-1-\frac{2(k-1)}{k+1}\right]\frac{a^{(1)}b^{(1)}}{R^2}\right\}\right\};\ \ u_\vartheta^{\text{II}}=0. \tag{2.13'}$$

Аналогічно співвідношенню (2.10), одержимо:

$$u_r^{(j)}=-\frac{(P_2-P_1)R_1^2R_2^2}{2(^\circ H)(R_2^2-R_1^2)R}\left[1-\frac{(P_2-P_1)(2R_1^2R_2^2+3R_j^4)}{4(^\circ H)(R_2^2-R_1^2)R_j^2}\right].\ (j=1,2). \tag{2.14}$$

Таблиця

P/μ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\sigma_\vartheta^{\mathrm{I}}/\mu$	0,269	0,556	0,861	1,184	1,502
$\sigma_\vartheta^{\mathrm{II}}/\mu$	0,275	0,578	0,911	1,274	1,663
$\sigma_\vartheta^{\text{лін.}}/\mu$	0,260	0,520	0,780	1,040	1,300

У таблиці наведені значення $\sigma_\vartheta^{\mathrm{I}}$, $\sigma_\vartheta^{\mathrm{II}}$, $\sigma_\vartheta^{\text{лін.}}$ на контурі L_2 у випадку плоскої деформації при $P_1=0$; $\frac{R_1}{R_2}=1{,}5$; $\gamma=\frac{1}{2}$. Як випливає з таблиці, в даному разі напруження $\sigma_\vartheta^{\mathrm{I}}$ та $\sigma_\vartheta^{\mathrm{II}}$ значно більші, ніж $\sigma_\vartheta^{\text{лін.}}$.

Якщо покласти у співвідношеннях (2.9)—(2.9′) і (2.13)—(2.13′) $R_1\to\infty$; $P_1=0$, то одержимо формули напружень та зміщень для безмежної площини з круговим отвором, край якого піддається рівномірному тиску інтенсивністю P:

$$\sigma_r^{\mathrm{I}}=-P\frac{R_2^2}{R^2}\left[1-\frac{\gamma P}{2(^\circ H)}\left(1-\frac{R_2^2}{R^2}\right)\right];\quad \sigma_\vartheta^{\mathrm{I}}=P\frac{R_2^2}{R^2}\left[1-\frac{\gamma P}{2(^\circ H)}\left(1-3\frac{R_2^2}{R^2}\right)\right];$$

$$\sigma_r^{\mathrm{II}}=-P\frac{R_2^2}{R^2}\left[1-\frac{(\gamma-2)P}{2(^\circ H)}\left(1-\frac{R_2^2}{R^2}\right)\right]; \tag{2.15}$$

$$\sigma_\vartheta^{\mathrm{II}}=P\frac{R_2^2}{R^2}\left[1-\frac{(\gamma-2)P}{2(^\circ H)}\left(1-\frac{R_2^2}{R^2}-\frac{2\gamma}{\gamma-2}\frac{R_2^2}{R^2}\right)\right].$$

§ 3. ПЛАСТИНА З КРУГОВИМ ОТВОРОМ, В ЯКИЙ ВПРЕСОВАНА ШАЙБА З ІНШОГО МАТЕРІАЛУ

Розглянемо обмежену пластину з деяким числом отворів, у які впресовані шайби з іншого матеріалу. Одержане таким чином тіло позначимо через S, його границю через L_0, причому L_0 — простий замкнутий контур; позначимо також через L_m контури дотикання пластини з шайбами.

Будемо вважати, що задані зовнішні зусилля, які діють на L_0, та стрибки зміщень $g_m(t)$ при переході через L_m.

На L_0 та контурах L_m повинні виконуватись такі умови:

$$2\frac{\partial U}{\partial \bar z}\Big|_{L_0}=f(t);\ D_0(t)=D_m(t)+g_m(t);\ \left(\frac{\partial U}{\partial \bar z}\right)_0=\left(\frac{\partial U}{\partial \bar z}\right)_m \text{ на } L_m. \tag{3.1}$$

або

$$\text{I}\quad \left.\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \bar z}\right|_{L_0} = f^{(1)}(t);\ \varepsilon_0 D_0^{(1)} = \varepsilon_m D_m^{(1)} + g_m(t);\ \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \bar z}\right)_0 = \left(\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \bar z}\right)_m \text{ на } L_m; \tag{3.2}$$

$$\text{II}\quad \left.\frac{\partial U^{(2)}}{\partial \bar z}\right|_{L_0} = f^{(2)}(t);\ \varepsilon_0^2 D_0^2 = \varepsilon_m^2 D_m^2;\ \varepsilon_0\left(\frac{\partial U^{(2)}}{\partial \bar z}\right)_0 = \varepsilon_m\left(\frac{\partial U^{(2)}}{\partial \bar z}\right)_m \text{ на } L_m, \tag{3.3}$$

де $D_0, \left(\frac{\partial U}{\partial \bar z}\right)_0$; $D_m, \left(\frac{\partial U}{\partial \bar z}\right)_m$ — зміщення та похідна функції Эрі відповідно для пластини та шайби.

Підставляючи формули (1. 5), (1. 6) до співвідношення (3. 3), одержимо граничні умови для потенціалів другого порядку:

$$\varphi_0^{(2)}(t) + t\overline{\varphi_0'}^{(2)}(\bar t) + \overline{\psi}_0^{(2)}(\bar t) - F^{(0)}(t, \bar t, \gamma, \delta) = f^{(2)}(t) \text{ на } L_0;$$

$$\varphi_0^{(2)}(t) + t\overline{\varphi_0'}^{(2)}(\bar t) + \overline{\psi}_0^{(2)}(\bar t) - F^{(0)}(t, \bar t, \gamma, \delta) = n_m[\varphi_m^{(2)}(t) + t\overline{\varphi_m'}^{(2)}(\bar t) + \overline{\psi}_m^{(2)}(\bar t) - F^{(m)}(t, \bar t, \gamma, \delta)]; \tag{3.4}$$

$$k_0\varphi_0^{(2)}(t) - t\overline{\varphi_0'}^{(2)}(\bar t) - \overline{\psi}_0^{(2)}(\bar t) - F_1^{(0)}(t, \bar t, \gamma, \delta) = n_m^2[k_m\varphi_m^{(2)}(t) - t\overline{\varphi_m'}^{(2)}(\bar t) - \overline{\psi}_m^{(2)}(\bar t) - F_1^{(m)}(t, \bar t, \gamma, \delta)] \text{ на } L_m;$$

$$n_m = \frac{{}^\circ H_0}{{}^\circ H_m}.$$

Як приклад розглянемо випадок, коли в кругове кільце (зовнішній радіус — R_1, внутрішній — R_2) впресована шайба з другого матеріалу, радіус якої до деформації був рівний $R_2+\beta$; крім того, на контур діє нормальний тиск інтенсивністю q.

В даному разі граничні умови задачі мають такий вигляд:

$$g_1(t) = \beta e^{i\vartheta};\ 2\left.\frac{\partial U}{\partial \bar z}\right|_{L_0} = -qt;$$

I. Рішення задачі у випадку завдання граничних умов у деформованому тілі.

Маємо

$$f^{(1)}(t) = -qt;\ g_1(t) = \beta e^{i\vartheta};\ f^{(2)}(t) = 0.$$

Звичайним шляхом з граничних умов для потенціалів першого та другого порядку знайдемо:

$$\varphi_0^{(i)} = a^{(i)}z;\ \psi_0^{(i)} = \frac{b^{(i)}}{z};\ \varphi_1^{(i)} = a_1^{(i)}z;\ \psi_1^{(i)} = 0. \quad (i = 1,2), \tag{3.6}$$

де

$$b^{(i)} = \frac{{}^\circ H_0 C^{(i)} + [(k_0-1) - n_1(k_1-1)]A^{(i)}}{[n_1(k_1-1)-(k_0-1)]R_2^2 - [2+n_1(k_1-1)]R_1^2} R_1^2 R_2^2;$$

$$a^{(i)} = -\frac{1}{2}\left(A^{(i)} + \frac{b^{(i)}}{R_1^2}\right); \; a_1^{(i)} = \frac{1}{2}\left[B^{(i)} - \alpha^{(i)} b^{(i)}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right)\right]; \tag{3.7}$$

$$A^{(1)} = -B^{(1)} = q; \; C^{(1)} = \frac{4\beta}{R_2}; \; \alpha^{(1)} = 1; \tag{3.8}$$

$$A^{(2)} = -[\gamma_0(1+\delta_0)(k_0-1) - k_{3,0}]a^{(1)^2} - \frac{\gamma_0}{R_1^4}b^{(1)^2} + \frac{\gamma_0(k_0+\delta_0)}{R_1^2}a^{(1)}b^{(1)};$$

$$B^{(2)} = [\gamma_1(1+\delta_1)(k_1-1) - k_{3,1}]a_1^{(1)^2} +$$

$$+ \frac{\gamma_0}{n_1}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right)\left[\frac{R_1^2+R_2^2}{R_1^2 R_2^2}b^{(1)} - (k_0+\delta_0)a^{(1)}\right]b^{(1)}; \tag{3.8'}$$

$$C^{(2)} = \frac{2}{{}^{\circ}H_0}\left\{[2(k'_{3,1}+k'_{2,1}) - k_{3,1}(k_1-1) - \gamma_1(1-\delta_1)(k_1^2-1)]\frac{n_1^2}{2}a_1^{(1)^2} +\right.$$

$$+\left\{\gamma_0(k_0-1)\left[k_0-\delta_0-\frac{n_1(k_1-1)(1+\delta_0)}{2}\right] + \frac{n_1(k_1-1)k_{3,0}}{2} -\right.$$

$$\left.-(k'_{3,0}+k'_{2,0})\right\}a^{(1)^2} - \frac{\gamma_0}{2R_2^4}[2+n_1(k_1-1)]b^{(1)^2} + \left[\gamma_0(\delta_0-1) - k'_{1,0} +\right.$$

$$\left.\left.+\gamma_0(k_0+\delta_0)\frac{n_1(k_1-1)}{2}\right]\frac{a^{(1)}b^{(1)}}{R_2^2}\right\}; \quad \alpha^{(2)} = \frac{1}{n_1}.$$

Формули для напружень та зміщень мають такий вигляд:
для кільця

$$\sigma_r^{\mathrm{I}} = 2a^{(1)} + \frac{b^{(1)}}{R^2} + \frac{1}{2({}^{\circ}H_0)}\left\{2a^{(2)} + \frac{b^{(2)}}{R^2} - \gamma_0\left[\frac{b^{(1)^2}}{R^4} -\right.\right.$$

$$\left.\left.-(1-k_0\delta_0-2k_0)a^{(1)^2} - (k_0+\delta_0)\frac{a^{(1)}b^{(1)}}{R^2}\right]\right\};$$

$$\sigma_\vartheta^{\mathrm{I}} = 2a^{(1)} - \frac{b^{(1)}}{R^2} + \frac{1}{2({}^{\circ}H_0)}\left\{2a^{(2)} - \frac{b^{(2)}}{R^2} + \gamma_0\left[\frac{3b^{(1)^2}}{R^4} +\right.\right.$$

$$\left.\left.+(1-k_0\delta_0-2k_0)a^{(1)^2} - (k_0+\delta_0)\frac{a^{(1)}b^{(1)}}{R^2}\right]\right\}; \tag{3.9}$$

$$u_r^{\mathrm{I}} = \frac{R}{2({}^{\circ}H_0)}\left\{(k_0-1)a^{(1)} - \frac{b^{(1)}}{R^2} + \frac{1}{2({}^{\circ}H_0)}\left\{(k_0-1)a^{(2)} + \frac{b^{(2)}}{R^2} -\right.\right.$$

$$-[\gamma_0(k_0-\delta_0)(k_0-1) - (k'_{3,0}+k'_{2,0})]a^{(1)^2} + \gamma_0\frac{b^{(1)^2}}{R^4} -$$

$$\left.\left.-[\gamma_0(\delta_0-1) - k'_{1,0}]\frac{a^{(1)}b^{(1)}}{R^2}\right\}\right\};$$

$$u_\vartheta^{\mathrm{I}} = 0;$$

для шайби:

$$\sigma_r^{\mathrm{I}} = \sigma_\vartheta^{\mathrm{I}} = 2a_1^{(1)} + \frac{1}{2({}^0H)_1}\left[2a_1^{(2)} + \gamma_1(1 - k_1\delta_1 - 2k_1)a_1^{(1)^2}\right]; \qquad (3.10)$$

$$u_r^{\mathrm{I}} = \frac{R}{2({}^0H_1)}\left\{(k_1 - 1)a_1^{(1)} + \frac{1}{2({}^0H_1)}\left\{(k_1 - 1)a_1^{(2)} - \left[\gamma_1(k_1 - \delta_1)(k_1 - 1) - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - (k'_{3,1} + k'_{2,1})\right] a_1^{(1)^2}\right\}\right\};$$

$$u_\vartheta^{\mathrm{I}} = 0.$$

Якщо покласти в формулу (3.9) — (3.10) $R_1 \to \infty$, $q=0$, то знайдемо рішення задачі для безмежної пластини з круговим отвором, в який впресована шайба з другого матеріалу.

Тоді, вводячи позначення

$$\alpha = 1 - \frac{n_1^2[2(k'_{3,1}+k'_{2,1}) - k_{3,1}(k_1-1) - \gamma_1(1-\delta_1)(k_1^2-1)]}{4\gamma_0[2+n_1(k_1-1)]};$$

$$P = \frac{4({}^0H_0)\beta}{[2+n_1(k_1-1)]R_2}; \quad R_2 = a;$$

одержимо:

для пластини:

$$\sigma_r^{\mathrm{I}} = -P\frac{a^2}{R^2}\left[1 - \frac{\gamma_0 P}{2({}^0H_0)}\left(\alpha - \frac{a^2}{R^2}\right)\right];$$

$$\sigma_\vartheta^{\mathrm{I}} = P\frac{a^2}{R^2}\left[1 - \frac{\gamma_0 P}{2({}^0H_0)}\left(\alpha - 3\frac{a^2}{R^2}\right)\right]; \qquad (3.11)$$

$$u_r^{\mathrm{I}} = \frac{Pa^2}{2R({}^0H_0)}\left[1 - \frac{\gamma_0 P}{2({}^0H_0)}\left(\alpha - \frac{a^2}{R^2}\right)\right];$$

для шайби:

$$\sigma_r^{\mathrm{I}} = \sigma_\vartheta^{\mathrm{I}} = -P\left[1 - \frac{\gamma_0 P}{2({}^0H_0)}(\alpha - 1)\right];$$

$$u_r^{\mathrm{I}} = -\frac{PR(k_1-1)}{2({}^0H_1)}\left[1 + \frac{\gamma_0 P(\alpha-1)}{n_1^2({}^0H_1)(k_1-1)}\right]. \qquad (3.12)$$

II. Рішення задачі у випадку, коли границя задана у недеформованому тілі.

З врахуванням співвідношення (2.11′) одержимо:

$$A^{(2)} = -[\gamma_0(1+\delta_0)(k_0-1) - k_{3,0}]a^{(1)^2} - \frac{\gamma_0-2}{R_1^4}b^{(1)^2} +$$

$$+ [\gamma_0(k_0+\delta_0) - 2(k_0-1)]\frac{a^{(1)}b^{(1)}}{R_1^2};$$

$$B^{(2)} = \{[\gamma_1(1+\delta_1) - 2](k_1-1) - k_{3,1}\}a^{(1)^2} -$$

$$-\frac{\gamma_0-1}{n_1}b^{(1)}\left(\frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2}\right)\left[\frac{R_1^2+R_2^2}{R_1^2R_2^2}b^{(1)} - (k_0+\delta_0')a^{(1)}\right] +$$

$$+\frac{1}{n_1}\left[2(k_0-1)a^{(1)^2} - \frac{b^{(1)^2}}{R_1^4} + \frac{1}{R_1^2}(k_0-3)a^{(1)}b^{(1)}\right]; \qquad (3.13)$$

$$C^{(2)}=\frac{2}{{}^0H_0}\left\{[2(k'_{3,1}+k'_{2,1})-k_{3,1}(k_1-1)-\right.$$

$$-\gamma_1(1-\delta_1)(k_1^2-1)]\frac{n_1^2}{2}a_1^{(1)2}+\left\{(k_0-1)\left[\gamma'_0(k_0-\delta'_0)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{n_1(k_1-1)}{2}\gamma'_0(1+\delta'_0)\right]-\frac{n_1(k_1-1)k_{3,0}}{2}-(k'_{3,0}+k'_{2,0})\right\}a^{(1)2}-$$

$$-\frac{(\gamma_0-1)}{2R_2^4}[2+n_1(k_1-1)]b^{(1)2}+\left[\gamma_0(\delta_0-1)-k'_{1,0}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{n(k_1-1)}{2}\gamma'_0(k_0+\delta'_0)\right]\frac{a^{(1)}b^{(1)}}{R_2^2}\right\}.$$

Якщо, як і раніше, покласти $R_1\to\infty$, $q=0$, то одержимо $\left(\text{при } \alpha_1=\right.$ $\left.=\frac{\gamma_0\alpha-1}{\gamma_0-2}\right)$:

для пластини:

$$\sigma_r^{II}=-P\frac{a^2}{R^2}\left[1-\frac{(\gamma_0-2)P}{2({}^0H_0)}\left(\alpha_1-\frac{a^2}{R^2}\right)\right];$$

$$\sigma_r^{II}=P\frac{a^2}{R^2}\left[1-\frac{(\gamma_0-2)P}{2({}^0H_0)}\left(\alpha_1-\frac{a^2}{R^2}-\frac{2\gamma_0}{\gamma_0-2}\frac{a^2}{R^2}\right)\right]; \tag{3.14}$$

для шайби:

$$\sigma_r^{II}=\sigma_\vartheta^{II}=-P\left[1-\frac{P(\gamma_0-2)}{2({}^0H_0)}\left(\alpha_1-1-\frac{2+n_1(k_1-1)}{2(\gamma_0-2)}\right)\right]. \tag{3.15}$$

Використовуючи співвідношення (3,7), (3.9), (3.10), можна одержати рішення і в інших частинних випадках.

Якщо матеріал пластини та впресованих шайб однаковий, то рішення задачі можна отримати, використовуючи метод Д. Й. Шермана [6].

§ 4. РІШЕННЯ ПЕРШОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ БЕЗМЕЖНОЇ ПЛОЩИНИ З ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ

Розглянемо безмежну площину з криволінійним отвором, до контуру якого прикладена деяка система зовнішніх зусиль; напружений стан на безмежності будемо вважати однорідним.

Якщо ввести функцію $Z=\omega(\zeta)$ (або $\eta=\omega(\zeta)$, яка відображає область на безмежну площину з круговим отвором, то потенціальні функції другого порядку записуються таким чином:

$$\varphi^{(2)}(\zeta)=B^{(2)}\ln\zeta+R\Gamma^{(2)}\zeta+\varphi_0^{(2)}(\zeta);$$

$$\psi^{(2)}(\zeta)=B'^{(2)}\ln\zeta+R\Gamma'^{(2)}\zeta+\psi_0^{(2)}(\zeta), \tag{4.1}$$

де коефіцієнти $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma'^{(2)}$ характеризують напружений стан на безмежності.

Функції $\varphi_0^{(2)}(\zeta)$ і $\psi_0^{(2)}(\zeta)$ визначаються з граничних умов за відомими формулами М. І. Мусхелішвілі [5]:

$$\varphi_0^{(2)}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left[\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi}_0^{\prime(2)}\left(\frac{1}{\sigma}\right)-K_0(\sigma)\right]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}; \tag{4.2}$$

$$\psi_0^{(2)}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\left[\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi_0^{\prime(2)}(\sigma)-\overline{K}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]\frac{d\sigma}{\sigma-\zeta},$$

де

$$K_0(\sigma)=f^{(2)}(\sigma)+F(\sigma,\gamma,\delta)-\Gamma^{(2)}R\sigma\left[1+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}\sigma}\right]-\overline{\Gamma}'^{(2)}\frac{R}{\sigma}-$$

$$-(B^{(2)}-\overline{B}'^{(2)})\ln\sigma-\sigma\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{B}^{(2)};$$

$$\Gamma^{(2)}=\frac{1}{2}\{[\gamma(1+\delta)(k-1)-k_2-k_3]\Gamma^{(1)2}-\gamma\Gamma'^{(1)}\overline{\Gamma}'^{(1)}\};$$

$$\Gamma'^{(2)}=[\gamma(k-2-\delta)-k_1]\,\Gamma^{(1)}\Gamma'^{(1)};$$

$$\Gamma^{(1)}=\frac{1}{4}(N_1+N_2);\ \Gamma'^{(1)}=-\frac{1}{2}(N_1+N_2)e^{-2i\alpha};$$

N_1, N_2 — головні напруження на безмежності.

Якщо контур отвору заданий в недеформованому тілі, то $K_0(\sigma)$ замінюється на $K_0^*(\sigma)$.

Як приклад наведемо, обмежуючись другим наближенням, формулу напруження σ_ϑ на контурі для площини з еліптичним отвором, яка піддається дії всебічного розтягу на безмежності ($N_1=N_2$):

$$\sigma_\vartheta^{\mathrm{I}}=\frac{2N}{D}\left\{(1-m^2)+\frac{N}{2(^0H)}\left[R_1+R_2\cos2\vartheta+\frac{1}{D}(R_3+R_4\cos2\vartheta+\right.\right.$$

$$\left.\left.+R_5\cos4\vartheta)\right]\right\};$$

$$\sigma_\vartheta^{\mathrm{II}}=\frac{2N}{D}\left\{(1-m^2)+\frac{N}{2(^0H)}\left[R_1^*+R_2^*\cos2\vartheta+\right.\right. \tag{4.3}$$

$$\left.\left.+\frac{1}{D}(R_3^*+R_4^*\cos2\vartheta+R_5^*\cos4\vartheta)\right]\right\},$$

де

$$R_1=2(1-m^2)\Gamma^{(2)}-2mC+\frac{\gamma}{4}(1-k\delta)(1+m^2);\ R_2=\frac{\gamma}{2}m(1-k\delta)+2C;$$

$$R_3=\gamma\left[(1-m^2)^2\left(1-\frac{k}{2}\right)-km^2-4m^2(k+1)\right];$$

$$R_4=2\gamma m(1+m^2)(k+1);\ R_5=-\gamma km^2;$$

$$D=1-2m\cos2\vartheta+m^2;\ C=-\frac{m}{4}[\gamma(k+1)(1-\delta)-k_3];$$

$$R_1=R_2^*;\ R_2=R_2^*;\ R_5=R_5^*;$$

$$R_3^* = \gamma\left[(1-m^2)^2\left(1-\frac{k}{2}\right)-km^2\right]-4m^2(k+1)(\gamma-1);$$

$$R_4^* = 2m(1+m^2)(k+1)(\gamma-1).$$

Використовуючи методи Мусхелішвілі, можна одержати рішення і інших задач нелінійної плоскої теорії пружності.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. В. Новожилов. Теория упругости. Судпромгиз. 1958.
2. A. E. Green, W. Zerna. Theoretical elasticity, Oxford, 1954.
3. J. E. Adkins, A. E. Green, G. G. Nicholas. Two-dimensional theory of elasticity for finite deformations. Phil. Trans. ser A., 247, 1954.
4. J. E. Adkins, A. E. Green. Plane problems in second-order elasticity theory. Proc. Roy. Soc. ser A., N 1219, vol 239, 1957.
5. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
6. Д. И. Шерман. Об одной задаче теории упругости. ДАН СССР, т. XXVII, № 4, 1940.
7. Г. М. Савін, Ю. І. Койфман. Деякі задачі плоскої нелінійної теорії пружності. Прикладна механіка, т. VII, № 6, 1961.