Львівський ордена Леніна державний університет імені Івана Франка
Випуск 9 Питання механіки і математики 1962

Д. Г. ХЛЄБНІКОВ

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ В ПІВНЕСКІНЧЕННІЙ АНІЗОТРОПНІЙ ПЛАСТИНЦІ З ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

В роботі М. П. Шереметьєва і автора [5] розв'язано задачу про пружну рівновагу ізотропної півплощини з підкріпленим краєм і вказано, що розв'язок може бути поширений і на випадок анізотропної півплощини. Нижче подається цей розв'язок. Іншим методом без дослідження одержаних результатів задача розв'язана Галасі [8].

Нехай півнескінченна пружна анізотропна пластинка ($y \leq 0$), край якої спаяний з нескінченно довгим тонким пружним прямолінійним стержнем сталої жорсткості, знаходиться в умовах узагальненого плоского напруженого стану. Стержень завдяки незначній його висоті будемо вважати пружною лінією, що працює на згин та розтяг. Інтенсивність прикладеного до стержня поперечного та поздовжнього навантаження позначимо через $q(x)$ і $n(x)$*, а шукані нормальну та дотичну складові контактних напружень на контурі спаю пластинки і стержня — через $p(x)$ і $t(x)$.

На лінії спаю $y=0$, крім рівності напружень, повинна виконуватись також умова рівності переміщень стержня u_0, v_0 та півплощини u, v:

$$u = u_0, \quad v = v_0. \tag{1}$$

Переміщення стержня зв'язані з діючим на нього навантаженням формулами опору матеріалів [2] (див. також [5])

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = \frac{1}{G_1}[t(x) - n(x)], \tag{2}$$
$$\frac{d^4 v_0}{dx^4} = \frac{1}{G_2}[q(x) - p(x)],$$

де G_1 і G_2 — жорсткості стержня на розтяг та згин, віднесені до товщини пластинки.

Використовуючи для величин, що характеризують напружено-деформований стан пластинки, звичайні позначення [1], помічаємо, що з закону Гука

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}, \tag{3}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}$$

* Величини $q(x)$ і $n(x)$ віднесено до товщини пластинки, тобто вони мають розмірність напружень.

з врахуванням рівнянь рівноваги

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0 \tag{4}$$

випливає

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a_{11}\sigma_x+a_{12}\sigma_y+a_{16}\tau_{xy},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2a_{16}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}-a_{11}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+a_{26}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+(a_{12}+a_{66})\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}. \tag{5}$$

Тому умови (1') можна записати в формі:

$$\left.\begin{aligned}&\left[a_{11}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+a_{12}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+a_{16}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\right]_{y=0}=\frac{1}{G_1}\left[t(x)-n(x)\right],\\&\left[2a_{16}\frac{\partial^3\sigma_x}{\partial x^3}-a_{11}\frac{\partial^3\sigma_x}{\partial x^2\partial y}+a_{26}\frac{\partial^3\sigma_y}{\partial x^3}+(a_{12}+a_{66})\frac{\partial^3\tau_{xy}}{\partial x^3}\right]_{y=0}=\frac{1}{G_2}\left[q(x)-p(x)\right].\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Система (6) є вихідною для визначення $p(x)$ і $t(x)$. При цьому вирази напружень в лівих частинах через функції $p(x)$ і $t(x)$ одержуються з відомого (див., напр., [1] стор. 114) розв'язку плоскої задачі для непідкріпленої анізотропної півплощини при заданих на її краю напруженнях $p(x)$ і $t(x)$.

Умовимось надалі позначати трансформанту Фур'є деякої функції $f(x)$ через $\tilde{f}(\lambda)$, тобто

$$\tilde{f}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\lambda x}dx \tag{7}$$

і

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda. \tag{8}$$

Тоді трансформанти Фур'є компонентів напруження в півплощині, одержані методом інтегральних перетворень Фур'є, будуть мати вигляд:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_y&=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left[(\mu_1e^{-i\lambda\mu_2y}-\mu_2e^{-i\lambda\mu_1y})\tilde{p}+(e^{-i\lambda\mu_2y}-e^{-i\lambda\mu_1y})\tilde{t}\right],\\\tilde{\tau}_{xy}&=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left[\mu_1\mu_2(e^{-i\lambda\mu_1y}-e^{-i\lambda\mu_2y})\tilde{p}+(\mu_1e^{-i\lambda\mu_1y}-\mu_2e^{-i\lambda\mu_2y})\tilde{t}\right],\\\tilde{\sigma}_x&=\frac{1}{\mu_1-\mu_2}\left[\mu_1\mu_2(\mu_2e^{-i\lambda\mu_2y}-\mu_1e^{-i\lambda\mu_1y})\tilde{p}+(\mu_2^2e^{-i\lambda\mu_2y}-\mu_1^2e^{-i\lambda\mu_1y})\tilde{t}\right]\end{aligned} \tag{9}$$

при $\lambda\geqslant 0$. Якщо $\lambda<0$, то вирази трансформант в (9) і далі одержуються заміною μ_1 і μ_2 на $\bar{\mu}_1$ і $\bar{\mu}_2$ відповідно.

Тут

$$\mu_k=\alpha_k+i\beta_k,\ \ \bar{\mu}_k=\alpha_k-i\beta_k\,(\beta_k>0),\ \ k=1,2 \tag{10}$$

корені характеристичного рівняння [1]:

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0, \tag{11}$$

які припускаємо різними. У випадку попарно рівних коренів ($\mu_1 = \mu_2$) відповідні формули одержуються з (9) граничним переходом $\mu_2 \to \mu_1$. Корені рівняння (11) зв'язані з його коефіцієнтами відомими формулами Вієта:

$$\begin{gathered}
\mu_1 + \mu_2 + \bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2 = \frac{2a_{16}}{a_{11}}, \\
\mu_1\mu_2 + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 + (\mu_1 + \mu_2)(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2) = \frac{1}{a_{11}}(2a_{12} + a_{66}), \\
\mu_1\mu_2(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2) + \bar{\mu}_1\bar{\mu}_2(\mu_1 + \mu_2) = \frac{2a_{26}}{a_{11}}, \\
\mu_1\mu_2\bar{\mu}_1\bar{\mu}_2 = \frac{a_{22}}{a_{11}}.
\end{gathered} \tag{12}$$

Зокрема, при $y=0$ з (9) випливає

$$\begin{gathered}
\tilde{\sigma}_y = \tilde{p}, \quad \tilde{\tau}_{xy} = \tilde{t}, \quad \tilde{\sigma}_x = -\mu_1\mu_2\tilde{p} - (\mu_1 + \mu_2)\tilde{t}, \\
\frac{d\tilde{\sigma}_x}{dy} = i\lambda\left[\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2)\tilde{p} + (\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)\tilde{t}\right].
\end{gathered} \tag{13}$$

Застосовуючи тепер перетворення Фур'є до рівнянь (6) та враховуючи (13), а також співвідношення (12), приходимо до системи двох алгебраїчних рівнянь відносно $\tilde{p}$ і $\tilde{q}$, розв'язок якої записується ($\lambda \geqslant 0$):

$$\begin{gathered}
\tilde{p}(\lambda) = \frac{1}{D(\lambda)}\left[(G_1 a_3\lambda + 1)\tilde{q} + iG_2\bar{a}_2\lambda^3\tilde{n}\right], \\
\tilde{t}(\lambda) = \frac{1}{D(\lambda)}\left[-iG_1 a_2\lambda\tilde{q} + (G_2 a_1\lambda^3 + 1)\tilde{n}\right],
\end{gathered} \tag{14}$$

де

$$D(\lambda) = G_1 G_2 a_0\lambda^4 + G_2 a_1\lambda^3 + G_1 a_3\lambda + 1,$$

а для сталих, що залежать від пружних властивостей півплощини, введено позначення:

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_1 a_3 - a_2\bar{a}_2, \\
a_1 &= i\left[a_{26} - a_{11}\mu_1\mu_2(\bar{\mu}_1 + \bar{\mu}_2)\right] = a_{22}\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \frac{\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}\right), \\
a_2 &= b_1 + b_2 i = a_{12} - \mu_1\mu_2 a_{11}, \\
a_3 &= i\left[a_{16} - a_{11}(\mu_1 + \mu_2)\right] = a_{11}(\beta_1 + \beta_2).
\end{aligned} \tag{16}$$

Зауважимо, що $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, і якщо припустити $\beta_1\beta_2 > \alpha_1^2$, $\beta_1\beta_2 > \alpha_2^2$, то і $a_0 > 0$.

У випадку ортотропної півплощини з головними напрямками, що паралельні та перпендикулярні до прямолінійного краю, $b_2 = 0$ і всі зазначені сталі є додатними та виражаються через технічні пружні константи E_1 E_2, G, ν_1, ν_2 формулами

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1E_2} + \frac{1}{G\sqrt{E_1E_2}}, \\
a_1 &= \sqrt{\frac{1}{E_2}\left(\frac{1}{G} + \frac{2(1-\sqrt{\nu_1\nu_2})}{\sqrt{E_1E_2}}\right)}, \\
a_2 &= \frac{1-\sqrt{\nu_1\nu_2}}{\sqrt{E_1E_2}}, \\
a_3 &= \sqrt{\frac{1}{E_1}\left(\frac{1}{G} + \frac{2(1-\sqrt{\nu_1\nu_2})}{\sqrt{E_1E_2}}\right)}.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Остаточні вирази для $p(x)$ і $t(x)$ одержуються з (14) за допомогою формул (7) і (8)

$$
\begin{aligned}
p(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{G_1a_3\lambda+1}{D(\lambda)}\,d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} q(t)\cos\lambda(t-x)\,dt - \\
-\frac{G_2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^3 d\lambda}{D(\lambda)}\int_{-\infty}^{\infty} n(t)[b_1\sin\lambda(t-x) - b_2\cos\lambda(t-x)]\,dt, \\
t(x) = \frac{G_1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda\, d\lambda}{D(\lambda)}\int_{-\infty}^{\infty} q(t)[b_1\sin\lambda(t-x) + b_2\cos\lambda(t-x)]\,dt + \\
+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{G_2a_1\lambda^3+1}{D(\lambda)}\,d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} n(t)\cos\lambda(t-x)\,dt
\end{aligned}
\tag{18}
$$

і мають той же вигляд, що і для ізотропної півплощини [5], для якої

$$
a_0 = \frac{(3-\nu)(1+\nu)}{E^2},\ a_1 = a_3 = \frac{2}{E},\ a_2 = b_1 = \frac{1-\nu}{E},\ b_2 = 0. \tag{19}
$$

Якщо припустити, що функції $q(x)$ і $n(x)$ є абсолютно інтегрованими в інтервалі $(-\infty, \infty)$, то інтеграли в (18) збігатимуться, тому що многочлен $D(\lambda)$ не має коренів в проміжку інтегрування. Неважко переконатись, що $D(\lambda)$ завжди має два дійсних від'ємних і два комплексних корені. Насправді [3], його коефіцієнти є додатними, а дискримінант

$$
\Delta = -\frac{1}{64}G_1^3G_2^3a_2\bar{a}_2(9a_1a_3 - 8a_2\bar{a}_2)^2 - \frac{27}{256}G_2^2(G_1^3a_0a_3 - G_2a_1^2)^2
$$

від'ємним.

Формули для напружень у довільній точці півплощини одержуються після підстановки (14) в (9) і використання формули обернення (8).

Нехай зовнішнє навантаження являє собою зосереджену поперечну силу P, що прикладена в початку координат. Тоді у випадку пластинки одиничної товщини

$$
p(x) = -\frac{P}{\pi}\int_0^\infty \frac{G_1a_3\lambda+1}{D(\lambda)}\cos\lambda x\,d\lambda, \tag{20}
$$

$$t(x)=\frac{PG_1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{b_1 \sin\lambda x - b_2 \cos\lambda x}{D(\lambda)}\lambda\, d\lambda, \tag{20}$$

а для згинаючого момента в стержні будемо мати

$$M(x)=\frac{PG_2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{G_1 a_0\lambda + a_1}{D(\lambda)}\lambda \cos\lambda x\, d\lambda. \tag{21}$$

Інтеграли в правих частинах (20) і (21) після розкладу їх раціональних ядер на найпростіші дроби нескладними перетвореннями можуть бути виражені через функції $\mathrm{Si}(z)$ і $\mathrm{Ci}(z)$, причому в силу раніш сказаного про корені многочлена $D(\lambda)$ при підрахунках доведеться знаходити значення цих функцій і для комплексних значень аргумента*. Тому практично, мабуть, зручніше обчислювати інтеграли чисельним інтегруванням, користуючись при цьому завдяки наявності осцилюючого множника спеціальними квадратурними формулами [4, стор. 92—94].

При великих значеннях x інтеграли обчислюються на основі асимптотичних розвинень [4]:

$$\int\limits_0^\infty f(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda = -\frac{f'(0)}{x^2}+\frac{f'''(0)}{x^4}-\frac{f^{\mathrm{V}}(0)}{x^6}+\ldots,$$

$$\int\limits_0^\infty f(\lambda)\sin\lambda x\, d\lambda = \frac{f(0)}{x}-\frac{f''(0)}{x^3}+\frac{f^{\mathrm{IV}}(0)}{x^5}-\ldots,$$

при цьому похідні раціонального ядра $f(\lambda)$ в нулі зручно знаходити з розкладу його в ряд Маклорена.

Таким шляхом при великих x одержимо:

$$p(x)=\frac{PG_2}{\pi}\left[\frac{3!\,a_1}{x^4}-5!\,G_1^2\,a_3\frac{a_2\overline{a_2}}{x^6}+7!\,G_1\,(2G_2a_1+G_1^3a_3^3)\frac{a_2\overline{a_2}}{x^8}-\ldots\right], \tag{22}$$

$$t(x)=\frac{PG_1}{\pi}\left[\frac{b_2}{x^2}+2G_1a_3\frac{b_1}{x^3}-3!\,G_1^2a_3^2\frac{b_2}{x^4}-4!\,(G_2a_1+G_1^3a_3^3)\frac{b_1}{x^5}+\ldots\right].$$

Найбільшу величину $p(x)$ і $M(x)$ мають під силою при $x=0$. Не важко оцінити вплив жорсткості розтягу G_1 на ці величини. При $G_1=0$ після інтегрування з (20) і (21) одержуємо

$$p_{\max}^0=-\frac{2P}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{G_2a_1}}, \qquad M_{\max}^0=\frac{2P}{3\sqrt{3}}\sqrt[3]{G_2a_1}, \tag{23}$$

а при $G_1=\infty$

$$p_{\max}^\infty=-\frac{2P}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{G_2a_1(1-k)}}, \qquad M_{\max}^\infty=\frac{2P}{3\sqrt{3}}\sqrt[3]{G_2a_1(1-k)}, \tag{24}$$

де

$$k=\frac{a_2\overline{a_2}}{a_1a_3}. \tag{25}$$

Легко перевірити, що $p_{\max}$ і $M_{\max}$ є монотонними функціями від G_1. Отже, при $0<G_1<\infty$ їх значення містяться між граничними, що да-

* Таблиці інтегрального синуса і косинуса комплексного аргумента відсутні, хоч на необхідність їх складання є вказівки в літературі (див. напр., [6]).

ються формулами (23) і (24). Однак ці граничні значення, як випливає з наведеної нижче таблиці, мало відрізняються один від одного (в усякому разі для багатьох поширених анізотропних матеріалів).

Таблиця

Порівняння p_{max} і M_{max} при $G_1=0$ і $G_1=\infty$

Матеріал	E_1, 10^5 *кг/см²*	E_2, 10^5 *кг/см²*	G, 10^5 *кг/см²*	ν_2	$k=\frac{a_2\overline{a_2}}{a_1a_3}$	$\frac{\overset{\circ}{p}_{max}}{\overset{\infty}{p}_{max}}$	$\frac{\overset{\circ}{M}_{max}}{\overset{\infty}{M}_{max}}$
Сосна	1,0	0,042	0,075	0,01	0,195	0,930	1,075
Дельта-деревина	3,05	0,467	0,22	0,02	0,123	0,957	1,045
Авіафанера березова	1,2	0,6	0,07	0,036	0,064	0,978	1,022
СВАМ	3,46	3,46	0,81	0,13	0,125	0,956	1,046
КАСТ-В	1,97	1,36	0,33	0,12	0,110	0,962	1,040
Ізотропний матеріал	—	—	—	0,3	0,123	0,957	1,045

Примітка. Чисельні значення пружних констант для склопластиків СВАМ і КАСТ-В взяті із збірника [7], а для деревини наведені в монографії [1, стор. 52—55].

Таким чином, врахування розтягливості підкріплюючого стержня при дії сили, перпендикулярної до його осі, майже не впливає на максимуми згинаючого моменту $M(x)$ та контактного тиску $p(x)$. Однак величина поздовжньої сили в стержні

$$N(x)=-\frac{PG_1}{\pi}\int_0^\infty \frac{b_1\cos\lambda x+b_2\sin\lambda x}{D(\lambda)}\,d\lambda \tag{26}$$

істотно залежить від G_1, нескінченно зростаючи при $G_1\to\infty$.

Відзначимо також, що для ортотропної півплощини ($b_2=0$) стискуюча поздовжня сила $N(x)$ має найбільше значення при $x=0$, а у випадку неортотропної пластинки відбувається зміщення її максимуму.

Якщо зосереджена в точці (0,0) сила Q направлена вздовж осі стержня, то

$$p(x)=\frac{QG_2}{\pi}\int_0^\infty \frac{b_1\sin\lambda x+b_2\cos\lambda x}{D(\lambda)}\,\lambda^3 d\lambda, \tag{27}$$

$$t(x)=\frac{Q}{\pi}\int_0^\infty \frac{G_2a_1\lambda^3+1}{D(\lambda)}\cos\lambda x\,d\lambda,$$

а при дії зосередженого моменту M, прикладеного в початку координат,

$$p(x)=\frac{M}{\pi}\int_0^\infty \frac{G_1a_3\lambda+1}{D(\lambda)}\,\lambda\sin\lambda x\,d\lambda, \tag{28}$$

$$t(x)=\frac{MG_1}{\pi}\int_0^\infty \frac{b_1\cos\lambda x+b_2\sin\lambda x}{D(\lambda)}\,\lambda^2\,d\lambda.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. С. Г. Лехницкий. Анизотропные пластинки, ГИТТЛ, 1957.
2. М. М. Филоненко-Бородич и др. Курс сопротивления материалов, т. I, ГИТТЛ, М., 1955.
3. А. К. Сушкевич. Основы высшей алгебры, ГТТИ, 1932.
4. К. Дж. Трантер. Интегральные преобразования в математической физике, ГИТТЛ, 1956.
5. М. П. Шереметьев и Д. Г. Хлебников. Упругое равновесие полуплоскости с подкрепленным краем, Доповіді та повідомлення ЛДУ, вип. 7, ч. III, 1957.
6. E. Kreysing. Über den allgemeinen Integralsinus Si(z, a), Acta Mathematica (Uppsala), 85, 1951, s. 117—187.
7. Стеклотекстолиты и другие конструкционные пластики. Сборник статей. Оборонгиз, М., 1960.
8. А. А. Галаси. Об упругом равновесии полубесконечной анизотропной пластинки с подкрепленным краем. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение № 3, 1960.

Стаття надійшла 10. XII 1960.