Львівський ордена Леніна державний університет імені Івана Франка
Випуск 9 Питання механіки і математики 1962

М. П. ШЕРЕМЕТЬЄВ

ДО ПИТАННЯ ПРО ФУНКЦІЇ НАПРУЖЕНЬ В ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК

Функції напружень в теорії оболонок були введені А. І. Лур'є (1) і А. Л. Гольденвейзером (2) шляхом підбору двох векторів, які задовольняють однорідні умови рівноваги

$$\begin{gathered}\frac{\partial(BR_\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(AR_\beta)}{\partial\beta}+AB\vec{R}=0,\\ \frac{\partial(BQ_\alpha)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(AQ_\beta)}{\partial\beta}+AB\left[\tau_\alpha\times R_\alpha+\tau_\beta\times R_\beta\right]+AB\vec{L}=0\end{gathered}\tag{1}$$

і отримуються з (1), якщо прийняти $\vec{R}=0$, $\vec{L}=0$.

Перед тим як приступити до побудови нових функцій напружень, доведемо теорему, яка, на наш погляд, має безпосередній інтерес.

Теорема. Необхідною і достатньою умовою для виконання статичних рівнянь рівноваги, складених для довільної кінцевої частини оболонки, є умови рівноваги (1) і умови

$$\begin{gathered}R_\beta\cos\lambda+R_\alpha\sin\lambda=\vec{R}_t,\\ Q_\alpha\sin\lambda+Q_\beta\cos\lambda=\vec{Q}_t,\end{gathered}\tag{2}$$

де λ — кут, утворений вектором $\vec{t}$ з вектором $\vec{\tau}_{(\beta)}$.

Для доведення візьмемо на оболонці яку-небудь точку O. Візьмемо цю точку в довільний контур γ. Позначимо через ω частину оболонки, обмеженої цим контуром. Рівняння статики для цієї частини оболонки будуть мати вигляд:

$$\begin{gathered}\int\limits_\gamma\vec{R}_t\,ds_\gamma+\iint\limits_\omega\vec{R}\,d\omega=0,\\ \int\limits_\gamma\vec{Q}_t ds_\gamma+\iint\limits_\omega\vec{L}\,d\omega+\int\limits_\Gamma\vec{r}\times\vec{R}_t ds_\gamma+\iint\limits_\omega\vec{r}\times\vec{R}\,d\omega=0.\end{gathered}\tag{3}$$

Позначимо через $\vec{n}$, $\vec{\tau}_\alpha$, $\vec{\tau}_\beta$ одиничні вектори основного тріедра в точці O. Проведемо в точці O дотичну площину π (точка O може бути взята і на кривій γ).

Примітка. У позначеннях R_α, R_β, Q_α, Q_β, τ_α, τ_β, R_t, Q_t індекси не означають диференціювання.

Побудуємо поверхню, подібну поверхні ω. Для цього відкладемо радіус-вектор

$$\vec{\rho} = k\vec{r} \tag{4}$$

на радіусі-векторі $\vec{r}$, де $k \neq 1$.

Коли вектор $\vec{r}$ описує поверхню ω, кінець вектора $\vec{\rho}$ описує поверхню ω_1, подібну ω.

Точці O буде відповідати точка O_1 поверхні ω_1. Напрямок і інтенсивність навантаження, прикладеного до подібної оболонки, візьмемо таким же, як і в заданому. При такому її навантаженні зусилля і моменти у відповідних точках у довільному перетині в подібній і в заданій поверхнях будуть рівні. Якщо задана поверхня ω під дією прикладеного до неї навантаження знаходиться у рівновазі, то в рівновазі під дією прикладеного до неї навантаження буде знаходитись і подібна до неї оболонка. Рівняння рівноваги для подібної оболонки мають вигляд

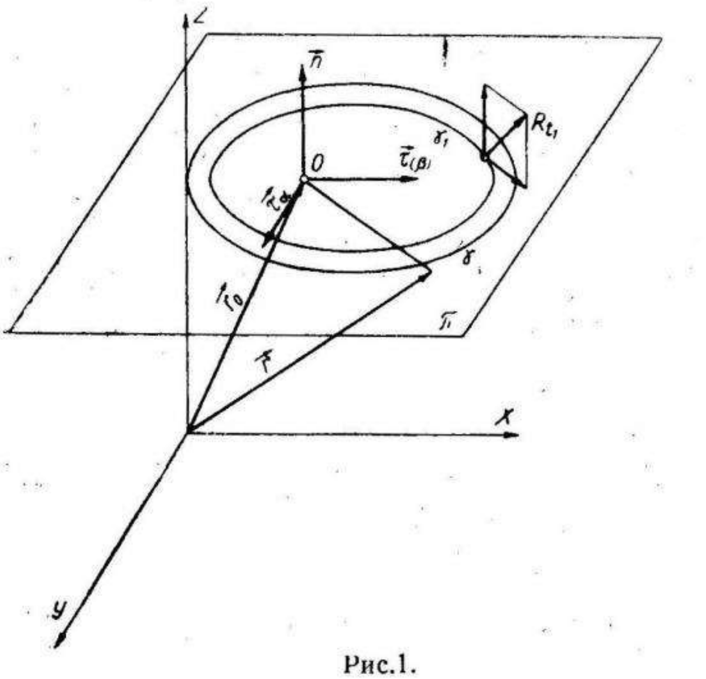

Рис.1.

$$\int_{\gamma_1} \vec{R}_t \, ds_{\gamma_1} + \iint_{\omega_1} \vec{R} d\,\omega_1 = 0,$$

$$\int_{\gamma_2} Q_t ds_{\gamma_1} + \int_{\gamma_1} \vec{\rho} \times \vec{R}_t \, ds_{\gamma_1} + \iint_{\omega_1} \vec{L} \, d\,\omega_1 + \iint_{\omega_1} \vec{\rho} \times \vec{R} d\omega_1 = 0, \tag{5}$$

де γ_1 — крива, яка обмежує поверхню ω_1.

Розкладемо зусилля $\vec{R}_t$ і $\vec{R}$, моменти $\vec{Q}_t$ і $\vec{L}$ в подібній поверхні ω_1 на два напрямки. Одним з напрямків візьмемо напрямок, паралельний $\vec{n}$, побудований у точці O, за другий візьмемо лінію, паралельну лінії перетину дотичної площини π з площиною, яка проходить через перший напрямок і відповідно через вектори $\vec{R}_t$, $\vec{R}$; $\vec{Q}_t$ і $\vec{L}$. Так що

$$\vec{R}_t = \vec{n} N_t + \vec{R}_t^*, \quad \vec{R} = \vec{n} Z_n + \vec{R}^*,$$

$$\vec{Q}_t = \vec{n} Q_t^{(n)} + \vec{Q}_t^*, \quad \vec{L} = \vec{n} L_n + \vec{L}^*. \tag{6}$$

Вектори в (6), позначені зірочкою, паралельні площині π. Кожне з рівнянь (5) тепер можна записати двома. Перше заміниться рівняннями вигляду

$$\int\limits_{\gamma_1}\vec{R}_t^* ds_{\gamma_1} + \iint\limits_{\omega_1}\vec{R}^* d\omega_1 = 0,$$
$$\int\limits_{\gamma_1}N_t ds_{\gamma_1} + \iint\limits_{\omega_1}Z_n d\omega_1 = 0. \qquad (7)$$

Два наступні будуть еквівалентні другому рівнянню (5):

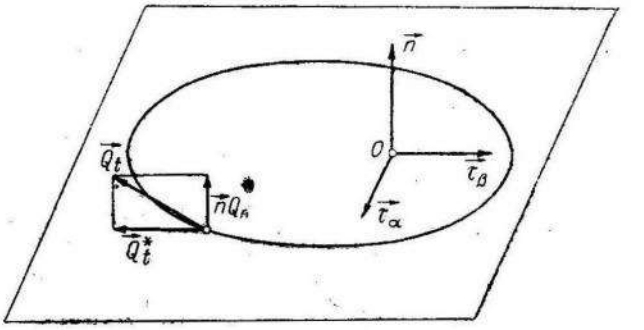

Рис. 2.

$$\int\limits_{\gamma_1}\vec{Q}_t^* ds_{\gamma_1} + \iint\limits_{\omega_1}\vec{L}^* d\omega_1 + \int\limits_{\gamma_1}N_t\vec{\rho}^*\times\vec{n}ds_{\gamma_1} + \int\limits_{\gamma_1}\vec{\rho}_n\times\vec{R}_t^* ds_{\gamma_1} +$$
$$+\iint\limits_{\omega_1}Z_n\vec{\rho}^*\times\vec{n}\,d\omega_1 + \iint\vec{\rho}_n\times\vec{R}^* d\omega_1 = 0, \qquad (8)$$
$$\vec{n}\int\limits_{\gamma_1}Q_t^{(n)} ds_{\gamma_1} + \vec{n}\iint\limits_{\omega_1}L_n d\omega_1 + \int\limits_{\gamma_1}\vec{\rho}^*\times\vec{R}_t^* ds_{\gamma_1} + \iint\limits_{\omega_1}\vec{\rho}^*\times\vec{R}^* d\omega_1 = 0,$$

де $\vec{\rho} = \vec{\rho}^* + \vec{\rho}_n$.

Тут вектор $\vec{\rho}^*$ паралельний площині π, ρ_n — перпендикулярний до неї. Спроектуємо поверхню ω і ω_1 на площину π і позначимо проекції кривих γ_1 і γ на цю площину через γ_1' і γ'. Тоді

$$ds_{\gamma_1} = \frac{1}{\cos(\pi, s)} ds_{\gamma_1'},\quad ds_\gamma = \frac{1}{\cos(\pi, s)} ds_{\gamma'},$$
$$d\omega = \frac{d\omega'}{\cos(\vec{n}, \vec{n}^0)},\quad d\omega_1 = \frac{d\omega_1'}{\cos(\vec{n}, \vec{n}^0)}, \qquad (9)$$

де $ds_{\gamma_1'}$, $ds_{\gamma'}$ — елементи довжини дуги кривих γ_1' і γ', $d\omega', d\omega_1'$ — елементи площ проекцій поверхонь ω, ω_1, площини π і вектор $\vec{s}$ одиничний вектор дотичної до кривої γ.

При цьому допускається, що контур γ обраний таким способом, що ні один с косинусів в (9) не перетворюється в нуль і при проектуванні не виникає перекривання. Криві γ' і γ_1' також подібні, як і криві γ і γ' тому

$$d\omega_1' = k^2 d\omega' \ \text{ i } \ ds_{\gamma_1'} = k ds_{\gamma'}. \qquad (10)$$

Позначимо через $\vec{R}_t^{o*} = S^o\vec{s} + T^o\vec{t}$ складову напруження в довільному перерізі серединної поверхні, яка проходить через точку O, через $\vec{Q}_t^o = G^o\vec{s} + H^o\vec{t}$ згинальний момент у точці O в цьому перерізі і через N_t^o — нормальне зусилля в точці O. Зусилля $\vec{R}_t^o$ і момент $\vec{Q}_\gamma^o$ лежать у площині π, зусилля N_t^o — перпендикулярно до площини. Переріз будем брати такий, що одиничні вектори $\vec{s}$ і $\vec{t}$ відповідно були б паралельні одиничним векторам дотичної і нормалі кривої γ_1' або γ'.

Підставимо в (7) і в (8) співвідношення (9). Крім того, до першого і другого рівняння (7) і першого (8) додамо і віднімемо відповідно інтеграли

$$\int_{\gamma_1'} \vec{R}_t^{o*} ds_{\gamma_1'}, \quad \int_{\gamma_1'} N_t^o ds_{\gamma_1'}, \quad \int_{\gamma_1'} \vec{Q}_t^o ds_{\gamma_1'}.$$

У цих інтегралах змінним є напрямок перерізу, який проходить через точку O. До другого рівняння (8) нічого додавати і віднімати не будемо з тієї причини, що в точці O компонента вектора згинального моменту по нормалі до поверхні в цій точці дорівнює нулю. В результаті цих дій рівняння (7) і (8) легко приводяться до вигляду

$$\int_{\gamma_1'} \left[\vec{R}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)} - \vec{R}_t^{o*}\right] ds_{\gamma_1'} + \int_{\gamma_1'} \vec{R}_t^o \, ds_{\gamma_1'} + \iint_{\omega_1'} \vec{R}^* \frac{d\omega_1'}{\cos(n, n^o)} = 0,$$

$$\int_{\gamma_1'} \left[N_t \frac{1}{\cos(\pi, s)} - N_t^o\right] ds_{\gamma_1'} + \int_{\gamma_1'} N_t^o ds_{t_1'} + \iint_{\omega_1'} Z_n \frac{d\omega_1'}{\cos(n, n^o)} = 0,$$

$$\int_{\gamma_1'} \left[\vec{Q}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)} - \vec{Q}_t^o\right] ds_{\gamma_1'} + \int_{\gamma_1'} \vec{Q}_t^o ds_{\gamma_1'} + \iint_{\omega_1'} \vec{L}^* \frac{d\omega_1'}{\cos(n, n^o)} +$$

$$+ \int_{\gamma_1'} N_t \vec{\rho}_1^* \times \vec{n}^o \frac{ds_{\gamma_1'}}{\cos(\pi, s)} + \int_{\gamma_1'} \vec{\rho}_n \times \vec{R}_t^* \frac{ds_{\gamma_1'}}{\cos(\pi, s)} + \iint_{\omega_1'} Z_n \vec{\rho}^* \times \vec{n}^o \frac{d\omega_1'}{\cos(n, n^o)} +$$

$$+ \iint_{\omega_1'} \vec{\rho}_n \times \vec{R}^* \frac{d\omega_1'}{\cos(n, n^o)} = 0,$$

$$\vec{n}^o \int_{\gamma_1'} Q_t^n \frac{ds_{\gamma_1'}}{\cos(\pi, s)} + \vec{n}^o \iint_{\omega_1'} L_n \frac{d\omega_1'}{\cos(n, n^o)} + \int_{\gamma_1'} \vec{\rho}^* \times \vec{R}_t^* \frac{ds_{\gamma_1'}}{\cos(\pi, s)} +$$

$$+ \iint_{\omega_1} \vec{\rho}^* \times \vec{R}^* \frac{d\omega_1}{\cos(n, n^o)} = 0.$$

Величини $\vec{R}^* \frac{1}{\cos(\pi, s)}$, $N_t \frac{1}{\cos(\pi, s)}$, $\vec{Q}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)}$ мають неперервні частинні похідні по змінних α і β. Цього цілком достатньо, щоб ці величини задовольняли умові Ліпшица.

Величини $\vec{R}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)}$, $N_t \frac{1}{\cos(\pi, s)}$, $\vec{Q}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)}$ у точці O набирають значення $\vec{R}_t^o$, N_t^o, $\vec{Q}_t^o$. Отже, для підінтегральних виразів перших інтегралів трьох перших рівностей (11) для кожного окремо мають місце нерівності.

$$\left| R_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)} - \vec{R}_t^{o*} \right| \leqslant c_1 d_1,$$
$$\left| N_t^o \frac{1}{\cos(\pi, s)} - N_t^o \right| \leqslant c_2 d_1, \qquad (12)$$
$$\left| \vec{Q}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)} - \vec{Q}_t^o \right| \leqslant c_3 d_1,$$

де d_1 — найбільша віддаль точки O до кривої γ_1'. Отже,

$$\left| \int_{\gamma_1'} \left(\vec{R}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)} - \vec{R}_t^{o*} \right) ds_{\gamma_1'} \right| \leqslant c_1 d_1' l_{\gamma_1'},$$
$$\left| \int_{\gamma_1'} \left(N_t \frac{1}{\cos(\pi, s)} - N_t^o \right) ds_{\gamma_1'} \right| \leqslant c_2 d_1' l_{\gamma_1'}, \qquad (13)$$
$$\left| \int_{\gamma_1'} \left(\vec{Q}_t^* \frac{1}{\cos(\pi, s)} - \vec{Q}_t^o \right) ds_{\gamma_1'} \right| \leqslant c_3 d_1' l_{\gamma_1'},$$

де $l_{\gamma_1'}$ — довжина кривої γ_1'.

Позначимо через d найбільшу віддаль від точки O до кривої γ' і через $l_{\gamma'}$ — її довжину. Тоді внаслідок подібності кривих γ_1' і γ'

$$l_{\gamma_1'} = k l_{\gamma'} \text{ і } d_1' = k d'. \qquad (14)$$

В інтегралах $\int_{\gamma_1'} \vec{R}_t^o \, ds_{\gamma_1'}$, $\int_{\gamma_1'} N_t^o \, ds_{\gamma_1'}$, $\int_{\gamma_1'} \vec{Q}_t^o \, ds_{\gamma_1'}$ змінним є тільки напрямок перерізу, який проходить через точку O. Тому на основі (10) можна написати

$$\int_{\gamma_1^*} \vec{R}_t^{o*} \, ds_{\gamma_1'} = k \int_{\gamma'} \vec{R}_t^o \, ds_{\gamma'},$$
$$\int_{\gamma_1'} N_t^o ds_{\gamma_1'} = k \int_{\gamma'} N_t^o ds_{\gamma'}, \qquad (15)$$
$$\int_{\gamma_1'} \vec{Q}_t^o ds_{\gamma_1'} = k \int_{\gamma'} \vec{Q}_t^o ds_{\gamma'} .$$

З виразів (13) і (15) випливає, що при стягуванні контура γ_1' в точку O, тобто при $k = \to 0$, інтеграли (13) прямують до нуля, як k^2, а інтеграли (15) — як k; легко показати, що останні інтеграли в перших трьох рівняннях (11) внаслідок обмеженості підінтегральних функцій при стягуванні контура γ_1' в точку O будуть прямувати до нуля не повільніше як k^2. Покажемо це на одному з них. Візьмемо модуль інтеграла

$$\left| \int_{\gamma_1'} N_t \vec{\rho}_1^* \times \vec{n}^o \frac{ds_{\gamma_1'}}{\cos(\pi, s)} \right| \leqslant \int_{\gamma_1'} \left| \frac{N_t}{\cos(\pi, s)} \rho_1^* \right| ds_{\gamma_1'} \leqslant B d_1 l_{\gamma_1'} = k^2 B d l_{\gamma'}, \qquad (16)$$

де $B = \max \left| \frac{N_t}{\cos(\pi, s)} \right|$ на кривій γ'. Звідси випливає сказане твердження. Що стосується останнього рівняння в (11), то при стягуванні контура γ_1'

в точку O всі інтеграли цього рівняння будуть прямувати до нуля не повільніше як k^2.

Підставимо тепер у перші три рівняння (11) замість других доданків їх вирази з (15), потім поділимо ці рівняння на k і перейдемо до границі при $k \to 0$. В результаті граничного переходу в цих рівняннях залишаться тільки інтеграли, незалежні від k:

$$\int_{\gamma'} \vec{R}_t^{o*} ds_{\gamma'} = 0, \quad \int_{\gamma'} N_t^o ds_{\gamma'} = 0,$$

$$\int_{\gamma'} \vec{Q}_t^o ds_{\gamma'} = 0. \tag{17}$$

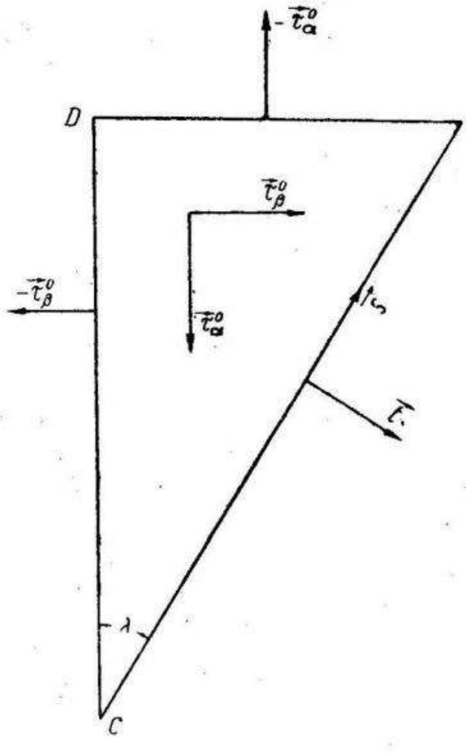

Рис. 3.

Четверте рівняння (11) при стягуванні контура γ_1' в точку зникне. Оскільки контур інтегрування в (17) довільний, то за контур інтегрування γ' можна взяти трикутник, дві сторони якого CD і DE (див. рис. 3) відповідно паралельні векторам $\vec{\tau}_\beta$ і $\vec{\tau}_\alpha$, проведеним у точці O. Позначимо через λ кут, утворений вектором $\vec{t}$ з вектором $\vec{\tau}_\beta$.

Тоді

$$\int_{\gamma'} \vec{R}_t^o ds_{\gamma'} = DCR_{-\beta}^o + DER_{-\alpha}^o + R_t^o CE = 0. \tag{18}$$

Але

$$R_{-\alpha}^o = -R_\alpha^o, \quad R_{-\beta}^o = -R_\beta^o \quad \text{і} \quad \frac{CD}{CE} = \cos\lambda, \quad \frac{DE}{CE} = \sin\lambda.$$

Отже, з (18) маємо

$$\vec{R}_\beta^* \cos\lambda + \vec{R}_\alpha^* \sin\lambda = \vec{R}_t^*, \tag{19}$$

де

$$\vec{R}_\beta^* = \vec{\tau}_\beta T_2 + \vec{\tau}_\alpha S_2, \quad \vec{R}_{(\alpha)}^* = \vec{\tau}_\alpha T_1 + \vec{\tau}_\beta S_1, \quad \vec{R}_t = \vec{s} S + \vec{t}\, \vec{T}.$$

Зробивши аналогічні обчислення в двох других інтегралах, одержимо

$$\begin{gathered} \vec{Q}_\alpha \sin\lambda + \vec{Q}_\beta \cos\lambda = \vec{Q}_t, \\ N_2 \cos\lambda + N_1 \sin\lambda = N_t. \end{gathered} \tag{20}$$

В конечних формулах (19) і (20) індекс «0» опущений, бо ці формули справедливі для довільної точки серединної поверхні, включаючи й її границю. Формули (19) і (20) дозволяють знайти зусилля і моменти в довільній точці серединної поверхні по довільному розрізу, який проходить через цю точку, якщо відомі зусилля і моменти в цій точці по головних розрізах. Ці формули будуть граничними умовами оболонки, якщо вважати, що точка O взята на лінії γ, яка є границею серединної поверхні, і сторона трикутника CE паралельна дотичній до лінії γ в точці O.

Запишемо рівність (19) і (20) у скалярній формі. Для цього в (19) і в перше рівняння (20) замість $\vec{R}_t$, $\vec{R}_\alpha$, R_β і $\vec{Q}_t$, $\vec{Q}_\alpha$, $\vec{Q}_\beta$ відповідні вирази і замість $\vec{\tau}_\alpha$ і $\vec{\tau}_\beta$ підставимо їх вирази через $\vec{s}$ і $\vec{t}$

$$\vec{\tau}_\beta = \vec{s}\sin\lambda + \vec{t}\cos\lambda,$$

$$\vec{\tau}_\alpha = \vec{t}\sin\lambda - \vec{s}\cos\lambda.$$

Порівнюючи після цієї підстановки коефіцієнти при векторах $\vec{t}$ і $\vec{s}$, знайдемо, що

$$\begin{aligned} S &= (T_2 - T_1)\sin\lambda\cos\lambda - S_2\cos^2\lambda + S_1\sin^2\lambda, \\ T &= (S_2 + S_1)\sin\lambda\cos\lambda + T_2\cos^2\lambda + T_1\sin^2\lambda, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} N &= N_2\cos\lambda + N_1\sin\lambda, \\ G &= (H_2 + H_1)\sin\lambda\cos\lambda + G_2\cos^2\lambda + G_1\sin^2\lambda, \\ H &= (G_1 - G_2)\sin\lambda\cos\lambda + H_2\cos^2\lambda - H_1\sin^2\lambda. \end{aligned} \tag{22}$$

З рівностей (20) легко отримати формули для S, T, G, H, N і для того випадку, коли трикутник CDE косокутний.

Таким чином, доведено, що отримані граничні умови (21) і (22) є наслідком статичних рівнянь (3).

Використаємо знову рівняння (3). Підставимо в ці рівняння замість $\vec{R}_t$ його вираз, отриманий з (19)

$$\vec{R}_t = \vec{R}_t^* + \vec{n}N_t,$$

і замість $\vec{Q}_t$ — його вираз із (20).

У результаті цієї підстановки рівняння рівноваги (3) приводяться до вигляду

$$\int_\gamma \left(\vec{R}_\beta\cos\lambda + \vec{R}_\alpha\sin\lambda\right) ds_\gamma + \iint_\omega \vec{R}\, d\omega = 0, \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &\iint_\omega \vec{r}\times\vec{R}\, d\omega + \iint_\omega \vec{L}\, d\omega + \int_\gamma \left(\vec{Q}_\alpha\sin\lambda + \vec{Q}_\beta\cos\lambda\right) ds_\gamma + \\ &\quad + \int_\gamma \vec{r}\times\left(\vec{R}_\alpha\sin\lambda + \vec{R}_\beta\cos\lambda\right) ds_\gamma = 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Помітимо, що $A\,d\alpha = ds_\alpha = ds_\gamma\cos(\tau_\alpha, s)$, $B\,d\beta = ds_\beta = ds_\gamma\cos(\vec{\tau}_\beta, \vec{s})$. Безпосередньо з рисунка (3) видно, що

$$\cos(\vec{\tau}_\alpha, \vec{s}) = -\cos\lambda, \quad \cos(\vec{\tau}_\beta, \vec{s}) = \sin\lambda.$$

Тому з (23) і (24) випливає

$$\int_{\gamma^*} -(A\vec{R}_\beta)\,d\alpha + (B\vec{R}_\alpha)d\beta + \iint_{\omega_{(\alpha,\beta)}} AB\vec{R}d\alpha\,d\beta = 0, \tag{25}$$

$$\int_{\gamma^*} [-(A\vec{Q}_\beta + \vec{r}\times A\vec{R}_\beta)\,d\alpha + (B\vec{Q}_\alpha + \vec{r}\times B\vec{R}_\alpha)d\beta] +$$

$$+ \iint_{\omega_{(\alpha,\beta)}} (\vec{L} + \vec{r}\times\vec{R})ABd\alpha d\beta = 0, \tag{26}$$

де $\omega_{(\alpha\beta)}$ — область зміни параметрів α і β і γ^* гранична крива цієї області. Піддамо одержані вирази дальшому перетворенню. За формулою Гріна маємо

$$\iint_{\omega_{\alpha\beta}} \left\{ \frac{\partial(BR_\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(AR_\beta)}{\partial\beta} + AB\vec{R} \right\} d\alpha d\beta = 0,$$

$$\iint_{\omega_{\alpha\beta}} \left\{ \frac{\partial B(\vec{Q}_\alpha + \vec{r}\times\vec{R}_\beta)}{\partial\alpha} + \frac{\partial A(\vec{Q}_\beta + \vec{r}\times\vec{R}_\alpha)}{\partial\beta} + (\vec{L} + \vec{r}\times\vec{R})AB \right\} d\alpha\,d\beta = 0. \tag{27}$$

Область $\omega_{\alpha\beta}$ довільна внаслідок довільності області ω, і, значить, до (27) можна застосувати принцип Остроградського, на основі якого з (27) випливає рівність нулю підінтегральних виразів

$$\frac{\partial B\vec{R}_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial A\vec{R}_\beta}{\partial_\beta} + AB\vec{R} = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial B\vec{Q}_\beta}{\partial\alpha} + \frac{\partial AQ_\beta}{\partial\beta} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha}\times B\vec{R}_\alpha + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\beta}\times A\vec{R}_\beta + r\times\left(\frac{\partial B\vec{R}_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial A\vec{R}_\beta}{\partial\beta} + AB\vec{R}\right) +$$

$$+ AB\vec{L} = 0. \tag{29}$$

Передостанній доданок в (29) на основі (28) можна відкинути. Крім цього, проведемо заміну

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\alpha} = A\vec{\tau}_\alpha, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\beta} = B\vec{\tau}_\beta.$$

В результаті цих дій з (29) остаточно одержимо

$$\frac{\partial B\vec{Q}_{(\alpha)}}{\partial\alpha} + \frac{\partial A\vec{Q}_{(\beta)}}{\partial\beta} + AB(\vec{\tau}_\alpha\times\vec{R}_{(\alpha)} + \tau_\beta\times\vec{R}_{(\beta)}) + LAB = 0. \tag{30}$$

Таким чином, показано, що рівняння (28) і (30) разом з рівностями (19) і (20) є необхідні умови для виконання статичних рівнянь рівноваги (3). Легко показати, що ці умови будуть і достатні. Для цього проведемо міркування в оберненому порядку. Дійсно, якщо виконуються рівності (29) і (30), то, очевидно, буде виконуватись і рівність (27). Користуючись цими трьома рівностями, не важко довести справедливість формул (26) і (25), з яких на основі (19) і (20) випливають рівняння рівноваги (3).

ФУНКЦІЇ НАПРУЖЕНЬ

Функція напружень в теорії оболонок була введена А. І. Лур'є і А. Л. Гольденвейзером шляхом підбору векторів, які задовольняють рівнянням (28) і (30). При такому виборі друге з статичних рівнянь рівноваги (3), складене для довільної конечної частини оболонки в припущенні, що $\vec{L}=0$ і $\vec{R}=0$, можуть не задовольнятися. Це питання потрібно вирішити по-іншому. Візьмемо рівняння (3) і покладемо в них $\vec{L}=0$ і $\vec{R}=0$. Рівняння (3) після цього наберуть вигляду

$$\int_{\gamma}\vec{R}_t ds_\gamma=0 \quad \int_{\gamma}\vec{Q}_t ds_\gamma+\int_{\Gamma}(\vec{r}\times\vec{R}_t)ds_\gamma=0, \tag{31}$$

або на основі (25)

$$\int\vec{R}_t ds_\gamma=\int_{\gamma_{(\alpha\beta)}}-(A\vec{R}_\beta)d\alpha+(B\vec{R}_\alpha)d\beta=0. \tag{32}$$

Припустимо, що поверхня оболонки однозв'язана. Для рівності нулю інтеграла (32) по довільному замкнутому контуру інтегрування проведеному в однозв'язаній області D, необхідно і достатньо, щоб підінтегральний вираз $-(A\vec{R}_\beta)d\alpha+(BR_\alpha)d\beta$ був в області D повним диференціалом деякої функції $\vec{P}(\alpha, \beta)$, тобто

$$-AR_\beta=\frac{\partial\vec{P}}{\partial\alpha},\ BR_\alpha=\frac{\partial\vec{P}}{\partial\beta}. \tag{33}$$

Для існування такої функції, як відомо, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial\beta\,\partial\alpha}. \tag{34}$$

Легко бачити, що при виконанні (34) рівняння (28) при $R=0$ задовольняються. Аналогічні міркування справедливі і для другого рівняння (3), при $\vec{R}=0$, $\vec{L}=0$. Це рівняння повинно виконуватися по довільному контуру γ, проведеній в однозв'язаній області D. Для цього потрібно, щоб вираз $-(A\vec{Q}_\beta+A\vec{r}\times\vec{R}_\beta)d\alpha+(B\vec{Q}_\alpha+B\vec{r}\times\vec{R}_\alpha)d\beta$ було би повним диференціалом деякої функції $\vec{K}_{(\alpha,\beta)}$, тобто:

$$-(A\vec{Q}_\beta-A\vec{R}_\beta\times\vec{r})=\frac{\partial K}{\partial\alpha},\ (B\vec{Q}_\alpha-B\vec{R}_\alpha\times\vec{r})=\frac{\partial K}{\partial\beta}.$$

Необхідною і достатньою умовою існування такої функції є, як відомо, умова

$$\frac{\partial^2 K}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\frac{\partial^2 K}{\partial\beta\,\partial\alpha}, \tag{35}$$

при виконуванні якої рівняння рівноваги (30) задовольняється, коли в ньому прийняти $\vec{L}=0$ і $\vec{R}=0$.

Відзначимо, що даним способом може бути доведена аналогічна теорема і в математичній теорії пружності.

ЛІТЕРАТУРА

А. И. Лурье. Общая теория упругих оболочек, ПММ, т. IV, в. 2, 1940.
А. Я. Гольденвейзер. Уравнения теории тонких оболочек, ПММ, т. IV, в. 2, 1940.