Теоретическая и прикладная МАТЕМАТИКА

Выпуск I

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЬВОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1958

МВО УССР

ЛЬВОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Ив. ФРАНКО
И
ЛЬВОВСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

ВЫПУСК I

ИЗДАТЕЛЬСТВО ЛЬВОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1958

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

В. О. ГУКЕВИЧ

ОСТАТОК РЯДУ ФУР'Є ФУНКЦИЙ, r-ТА ПОХІДНА ЯКИХ ЗАДОВОЛЬНЯЄ УМОВІ ЛІПШІЦА

Нехай $W^{(r)}KH^{(\alpha)}$ є класом функцій ($r \geqslant 1, 0 < \alpha \leqslant 1$) періоду 2π, r-похідна яких за Вейлем задовольняє умові $Lip\alpha$ з константою K.

Вважають, що вимірна функція φ періоду 2π є похідна r-ого порядку за Вейлем функції f періоду 2π, якщо $\int\limits_0^{2\pi} f(u)du = 0$, $\int\limits_0^{2\pi} \varphi(u)du = 0$

і f і φ зв'язані між собою рівністю

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int\limits_0^{2\pi} \cos\left[k(t-x) + \frac{r\pi}{2}\right] \varphi(t)dt.$$

Розглянемо вираз

$$E_{s_n}(W^{(r)}KH^{(\alpha)}) = \sup_{f \in W^{(r)}KH^{(\alpha)}} |f(x) - S_n(f; x)|, \tag{1}$$

де $S_n(f, x)$ є n-а сума ряду Фур'є функції f.

С. М. Селівановою була доведена теорема, яка в деякому смислі уточнює відому теорему С. М. Нікольського [1].

Теорема. *Для будь-яких чисел r і α, що задовольняють умові $r \geqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$ справедлива асимптотична рівність*

$$E_{s_n}(W^{(r)}KH^{(\alpha)}) = K\left[\frac{2^{\alpha+1}\lg n}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} v^\alpha \sin v dv + e_{n,r}\right] \tag{2}$$

причому $|e_{n,r}| < \frac{cr}{n^{r+\alpha}}$, *де c абсолютна константа.*

В цій статті покажемо, що, користуючись методом С. М. Нікольського [1], можна одержати більш точний результат

$$|e_{n,r}| < \frac{c_1}{n^{r+\alpha}} \quad (n \geqslant 3), \tag{3}$$

де c_1 абсолютна константа,

Нехай $K=1$. (У випадку $K\neq 1$ результат можно на K). Тоді [1]

$$E_{s_n}(W^{(r)}H^{(\alpha)})=\sup\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_n^{(r)}(u)\,\varphi(u)\,du\right|, \tag{4}$$

де

$$\varphi(u)=f^{(r)}(u);\quad \varphi(0)=0;\ D_n^{(r)}(u)=\sum_{k=nн}^{\infty}\frac{\operatorname{los}\left(ku+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}$$

Положимо

$$E_{s_n}(W^{(r)}K\,H^{(\alpha)})=I_1+I_2+I_3, \tag{5}$$

де

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\frac{l\pi}{n}}D_n^{(r)}(u)\,\varphi(u)\,du,\quad I_2=\int\limits_{\frac{l\pi}{n}}^{\frac{l\pi}{n}}D_n^{(r)}(u)\,\varphi(u)\,du,$$

$I_3=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{\frac{l\pi}{n}}^{\pi}D_n^{(r)}(u)\,\varphi(u)\,du$ і l є число, що задовольняє нерівності $0<l\leqslant\dfrac{3}{2}$.

Нашою метою є доведення таких трьох нерівностей, з яких негайно випливатиме (3):

$$\left|I_1-\frac{2^{\alpha}\lg(n-1)}{\pi^2\,n^{r+\alpha}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}v^{\alpha}\sin v\,dv\right|<\frac{c}{n^{r+\alpha}}, \tag{6}$$

$$|I_2|<\frac{c}{n^{r+\alpha}}, \tag{7}$$

$$\left|I_3-\frac{2^{\alpha}\lg(n-1)}{\pi^2\,n^{r+\alpha}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}v^{\alpha}\sin v\,dv\right|<\frac{c}{n^{r+\alpha}} \tag{8}$$

Нерівність (7) доводиться легко.* Для цього достатньо зауважати (див., наприклад, [4]), що

$$|\varphi(u)|=|\varphi(u)-\varphi(0)|<|u|^{\alpha};$$

$$\int\limits_{\frac{l\pi}{n}}^{\frac{l\pi}{n}}|D_n^{(r)}(u)|\,du<\frac{c}{n^{r+\alpha}}\qquad 0<l\leqslant\frac{3}{2}.$$

Таким чином, основна трудність полягає у доведенні (6) і (8).

* Усі абсолютні постійні позначені однією і тією ж буквою.

З огляду на повну аналогію міркувань зупинимось тільки на доведенні нерівності (8).

Застосуємо перетворення [4]

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos(kx+\alpha)}{k^r} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^1 \varrho^n \left(\lg \frac{1}{\varrho}\right)^{r-1} \frac{\cos(\overline{n+1}\,x+\alpha) - \varrho \cos\ nx+\alpha)}{\varrho^3 - 2\varrho \cos x + 1} d\varrho$$

(l дійсне), а також тотожність

$$\cos(\overline{n+1}\,x+\alpha) - \varrho\cos(nx+\alpha) = (1-\varrho)\cos(nx+\alpha) + (\cos x - 1)\times$$
$$\times \cos(nx+\alpha) - \sin x \sin(nx+\alpha)$$

і запишемо I_3 у вигляді $I_3 = \sum\limits_{i=1}^{3} I_1^{(i)}$, де

$$I_3^{(1)} = \frac{1}{\pi\Gamma(r)} \int_0^1 \varrho^n \left(\lg \frac{1}{\varrho}\right)^{r-1} d\varrho \int_{\frac{1\pi}{n}}^{\pi} \varphi(x) \frac{(1-\varrho)\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho \sin^2 \frac{x}{2}} dx \qquad (9)$$

$$I_3^{(2)} = -\frac{1}{\pi\Gamma(r)} \int_0^1 \varrho^n \left(\lg \frac{1}{\varrho}\right)^{r-1} d\varrho \int_{\frac{1\pi}{n}}^{\pi} \varphi(x) \frac{(1-\cos x)\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)}{(1-\varrho)^3 + 4\varrho \sin^2 \frac{x}{2}} dx \qquad (10)$$

$$I_3^{(3)} = -\frac{1}{\pi\Gamma(r)} \int_0^1 \varrho^n \left(\lg \frac{1}{\varrho}\right)^{r-1} d\varrho \int_{\frac{1\pi}{n}}^{\pi} \varphi(x) \frac{\sin x \cdot \sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho \sin^2 \frac{x}{2}} dx \qquad (11)$$

Далі покажемо справедливість таких нерівностей

$$|I_3^{(1)}| < \frac{c}{n^{r+\alpha}}, \qquad (12)$$

$$|I_3^{(2)}| < \frac{c}{n^{r+\alpha}}, \qquad (13)$$

$$\left| I_3^{(3)} - \frac{2^\alpha \lg(n-1)}{\pi^3 n^{r+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v^\alpha \sin v\, dv \right| < \frac{c}{n^{r+\alpha}}, \qquad (14)$$

звідки буде випливати справедливість (8).

Доведення нерівності (12).

Нехай, як в [1], m є натуральне число, що задовольняє нерівності.

$$(m-1)\pi \leqslant \frac{r\pi}{2} < m\pi = \frac{r\pi}{2} + \omega, \quad 0 < \omega \leqslant \pi$$

$$t_\nu = \frac{\omega + \nu\pi}{n}, \tag{15}$$

причому

$$t_{\frac{1}{2}} > \frac{\pi}{2n},\ t_{n-\frac{3}{2}} \leqslant \pi - \frac{\pi}{2n},\ t_{n-\frac{3}{2}} \geqslant \pi - \frac{3\pi}{2n}$$

$$\int\limits_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}} \frac{(1-\varrho)\cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{x}{2}} = (-1)^{m+\nu} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} \left[\frac{1}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{t_\nu + t}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{t_\nu - t}{2}}\right]^{(1-\rho)\cos nt\, dt}$$

$$\int\limits_{t_{\frac{1}{2}}}^{\pi} \frac{(1-\varrho)\cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{x}{2}} = \sum_{\nu=1}^{n-2} \int\limits_{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \frac{[(\varphi(x) - \varphi(t_\nu)]}{(1-\varrho)^2 + \sin^2\frac{x}{2}} \times$$

$$\times (1-\varrho)\cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right) + \sum_{\nu=1}^{n-2} \varphi(t_\nu) \int\limits_{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} (1-\varrho) \frac{\cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{c}{n\varrho} \tag{16}$$

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n-2} \int\limits_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} (1-\varrho) \frac{\varphi(x) - \varphi(t_\nu)}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{x}{2}} \cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha \int\limits_{t_{\frac{1}{2}}}^{t_{n-\frac{3}{2}}} \frac{(1-\varrho)\,d\chi}{(1-\varrho)^2 + \frac{4}{\pi 2}\varrho x^2} < \frac{c}{n^\alpha \varrho^{\frac{1}{2}}} \tag{17}$$

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n-2} \varphi(t_\nu) \int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}} \frac{(1-\varrho)\cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2 + \varrho\sin^2\frac{x}{2}} = \right.$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-2} \varphi(t_\nu)(-1)^{m+\nu} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} \left[\frac{1}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{t_\nu + t}{2}} + \right.$$

$$+\left.\frac{1}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}\right](1-\varrho)\cos nt\,dt$$

Позначимо

$$a_\nu=(-1)^{m+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\left[\frac{1}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+t}{2}}+\right.$$

$$+\left.\frac{1}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+t}{2}}\right](1-\varrho)\cos nt\,dt$$

Мають місце нерівності

$$|a_1|<|a_3|<|a_4|<\ldots|a_{n-2}| \tag{18}$$

Застосовуючи перетворення Абеля і беручи до уваги (18), одержуємо

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\varphi(t_\nu)\,a_\nu\right|<\frac{c}{n^\alpha\varrho^{\frac{1}{2}}}$$

Остання нерівність разом з (16) і (17) завершує доведення (12).

Доведення нерівності (13).

Нехай

$$v_\nu=\int_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{(1-\cos x)\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=(-1)^{m+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\left[\frac{1-\cos(t_\nu-t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}+\frac{1-\cos(t_\nu+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+t}{2}}\right]\cos nt\,dt.$$

Має місце рівність

$$\int_{\frac{t_1}{2}}^{\pi}\varphi(x)\frac{(1-\cos x)\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-2}\int_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}[\varphi(x)-\varphi(t_\nu)]\frac{(1-\cos x)\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}\,dx+$$

$$+\sum_{\nu+1}^{n-2}\varphi(t_\nu)v_\nu+\frac{c}{n\varrho}, \tag{19}$$

при чому

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-2}\int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}[\varphi(x)-\varphi(t_\nu)]\frac{(1-\cos x)\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha\int\limits_{t_{\frac{1}{2}}}^{t\left(n-\frac{3}{2}\right)}\frac{(1-\cos x)\,dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}<\frac{c}{n^\alpha\varrho}. \tag{20}$$

Щодо оцінки $\sum\limits_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)v_\nu$, то, користуючись перетворенням Абеля і беручи до уваги нерівності $|v_1|<|v_2|<\ldots|v_{n-2}|$, маємо

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)v_\nu\right|<\frac{c}{n^\alpha\varrho}. \tag{21}$$

В результаті (21), а також (19) і (20) одержуємо нерівність (13).

Доведення нерівності (14).

$$\int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{\sin x\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)}{(1-\varrho)^2+\sin^2\frac{x}{2}}dx=$$

$$=(-1)^{m+\nu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}\left[\frac{\sin(t_\nu+t)}{(-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}-\frac{\sin(t_\nu-t)}{(-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}\right]\sin nt\,dt,$$

де m і t_ν ті самі, що в (15).

Легко бачити, що

$$\left|\frac{1}{\Pi\Gamma(r)}\int\limits_0^1\varrho^n\left(\lg\frac{1}{\varrho}\right)^{r-1}d\varrho\int\limits_{t\left(n-\frac{3}{2}\right)}^{\pi}\varphi(x)\frac{\sin x\cdot\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)}{(1-\varrho)^2+4\sin^2\frac{x}{2}}\right|<\frac{c}{n^{\alpha+r}}.$$

Таким чином, необхідно оцінити вираз

$$\frac{1}{\Pi\Gamma(r)}\int\limits_0^1 \varrho^n\left(\lg\frac{1}{\varrho}\right)^{r-1}\int\limits_{t_{\frac{1}{2}}}^{t\left(n-\frac{3}{2}\right)}\varphi(x)\frac{\sin \boldsymbol{x}\cdot\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin\frac{x}{2}}$$

$$\int\limits_{t_{\frac{1}{2}}}^{\pi}\varphi(x)\frac{\sin x\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-2}\int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}[\varphi(x)-\varphi(t_\nu)]\frac{\sin x\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^3+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{\sin x\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{c}{n^{\alpha+r}}. \qquad (22)$$

Нехай

$$\Delta_\nu=\int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{\sin x\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Тоді

$$\sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{\sin x\sin\left(\boldsymbol{nx}+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^3+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}=\sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\Delta_\nu$$

При цьому, з одного боку

$$\Delta_\nu=(-1)^{m+\nu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}\left[\frac{\sin(t_\nu+u)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+4}{2}}-\frac{\sin(t_\nu+u)}{(1-\varrho)^3+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+4}{2}}\right]\sin nu\,du=$$

$$=(-1)^{m+\nu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}2u\,\frac{(1+\varrho^2)\cos(t_\nu+\Theta_\nu u)-2\varrho}{[1+\varrho^2-2\varrho\cos(t_\nu+\Theta_\nu u)]^2}\sin nu\,du, \qquad (23)$$

де $-1<\Theta_\nu<1$.

З другого боку Δ_ν можна записати у вигляді

$$\Delta_\nu = (-1)^{m+\nu}[d_\nu^+ - d_\nu^-],$$

де

$$d_\nu^+ = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(t_\nu + u)\sin nu\, du}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho \sin^2 \frac{t_\nu + u}{2}}$$

$$d_\nu^- = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(t_\nu - u)\sin nu\, du}{(1-\chi)^2 + 4\varrho \sin^2 \frac{t_\nu - u}{2}}$$

Оцінимо тепер $\sum\limits_{\nu=1}^{n-2} \varphi(t_\nu)\Delta_\nu$; для цього відмітимо справедливість деяких нерівностей.

Нехай $f_1(x) = \frac{\sin x}{1+\varrho^2 - 2\varrho \cos}$, $x_1(\varrho)$ є корень виразу $(1+\varrho)^2 \cos x - - 2\varrho$, коли $0 < x < \pi$ і $\nu_1(\varrho)$ число, що задовольняє нерівності $t_{\nu_1(\rho)-\frac{1}{2}} < x_1(\varrho) < t_{\nu_1(\rho)+\frac{1}{2}}$.

Можна переконатись у справедливості таких нерівностей

$$|d_1^-| < |d_1^+| < |d_2^-| < |d_2^+| < \ldots \quad |d^-_{\nu_1(\rho)-1}| < |d^+_{\nu_1(\rho)+1}| \tag{24}$$

$$|d^-_{\nu_1(\rho)+1}| < |d^+_{\nu_1(\rho)+1}| < \ldots \quad |d^+_{n-2}| < |d^-_{n-2}| \tag{25}$$

Нехай далі

$$f_2(x) = \frac{(1+\varrho^2)\cos x - 2\varrho}{(1+\varrho^2 - 2\varrho \cos x)^2},$$

$$f_2'(x) = \frac{\sin x \cdot [8\varrho^2 - (1+\varrho^2)^2 - 2\varrho(1+\varrho^2)\cos x]}{(1+\varrho^2 - 2\varrho\cos x]^3},$$

$x_2(\varrho)$ є корень рівняння $8\varrho^2 - (1+\varrho^2)^2 - 2\varrho(1+\varrho^2)\cos x = 0\ (0 < x < \pi)$ і $\nu_2(\varrho)$ натуральне число, що задовольняє нерівності

$$t_{\nu_2(\rho)-\frac{1}{2}} < x_2(\varrho) \leqslant t_{\nu_2(\rho)+\frac{1}{2}}.$$

Мають місце нерівності

$$x_2(\varrho) < x_1(\varrho)$$

$$|\Delta_1| < |\Delta_2| < \ldots \quad |\Delta_{\nu_1(\rho)-1}| > |\Delta'_{\nu_1(\rho)}| \tag{26}$$

$$|\Delta''_{\nu_1(\rho)}| < |\Delta_{\nu_1(\rho)+1}| < \ldots \quad |\Delta_{\nu_2(\rho)-1}| \tag{27}$$

$$|\Delta_{\nu_2(\rho)+1}| > |\Delta_{\nu_2(\rho)+2}| > \ldots \quad > |\Delta_{n-2}|, \tag{28}$$

де через $\Delta'_{\nu_1(\rho)}$ позначено ту частину $\Delta_{\nu_1(\rho)}$, в якій вираз $(-1)^{m+\nu}\Delta_{\nu_1(\rho)}$ додатній, і через $\Delta''_{\nu_1(\rho)}$ ту її частину, де цей вираз від'ємний.

Відповідно до (25), (26) і (27) представимо суму $\sum\limits_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\Delta_\nu$ у вигляді

$$\sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\Delta_\nu=\sum_{\nu=1}^{\nu_1(\rho)}{}'\varphi(t_\nu)\Delta_\nu+\sum_{\nu=\nu_1(\rho)}^{\nu_2(\rho)-1}{}''\varphi(t_\nu)\Delta_\nu+\varphi(t_{\nu_2(\rho)})\Delta_{\nu_2(\rho)}+$$
$$+\sum_{\nu=\nu_2(\rho)+1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\Delta_\nu,$$

де значок $'$ у першій сумі означає, що замість останнього доданку беремо $\varphi(t_{\nu_1(\rho)})\Delta'_{\nu_1(\rho)}$, а значок $''$ у другій сумі, що замість першого її доданку беремо $\varphi(t_{\nu_1(\rho)})\Delta''_{\nu_1(\rho)}$.

Застосовуючи тепер перетворення Абеля, дістаємо

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_1(\rho)}{}'\varphi(t_\nu)\Delta_\nu=\varphi(t_1\Sigma_1+\sum_{\nu=1}^{\nu_1(\rho)-1}[\varphi(t_{\nu+1})-\varphi(t_\nu)]\Sigma_{\nu+1},$$

де
$$\Sigma_{\nu+1}=\Delta_{\nu+1}+\Delta_{\nu+2}+\ldots\Delta_{\nu_1(\rho)-1}+\Delta'_{\nu_1(\rho)}.$$

Але
$$|\Sigma_{\nu+1}|<|\Delta_{\nu+1}|,\ \text{коли}\ \nu\leqslant\nu_1(\varrho)-|;$$

і
$$|\varphi(t_1)|=|\varphi(t_1)-\varphi(0)|\leqslant 2\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha.$$

З останнього внаслідок (26) і (24) випливає

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\nu_1(\rho)}\varphi(t_\nu)\Delta_\nu\right|\leqslant 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha\left[d^+_{\nu_1(\rho)-1}+d^+_1\right] \tag{29}$$

Здійснюючи подібні перетворення над сумами

$$\sum_{\nu=\nu_1(\rho)}^{\nu_2(\rho)-1}{}''\varphi(t_\nu)\Delta_\nu\quad\text{і}\quad\sum_{\nu=\nu_2(\rho)+1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\Delta_\nu,$$

дістаємо

$$\left|\sum_{\nu=\nu_1(\rho)}^{\nu_2(\rho)-1}{}''\varphi(t_\nu)\Delta_\nu\right|\leqslant|\varphi(t_{\nu_2(\rho)-1})||\Delta_{\nu_2(\rho)-1}|+\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha[|\Delta_{\nu_1(\rho)+1}|+d^-_{\nu_1(\rho)+1}], \tag{30}$$

$$\left| \sum_{\nu=\nu_2(\rho)+1}^{n-2} \varphi(t_\nu)\,\Delta_\nu \right| \leqslant |\varphi(t_{\nu_2(\rho)+1})|\,|\Delta_{\nu_2(\rho)+1}| + \left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha d^-_{\nu_2(\rho)+1} \qquad (31)$$

Таким чином,

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n-2} \varphi(t_\nu)\,\Delta_\nu \right| \leqslant 2\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha \left[d^+_{\nu_1(\rho)-1} - d^+_1 + d^-_{\nu_1(\rho)+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\, d_{\nu_2(\rho)+1} \right] + S_{\nu_2(\rho)}, \qquad (32)$$

де

$$S_{\nu_2(\rho)} = |\varphi(t_{\nu_2(\rho)-1})|\,|\Delta_{\nu_2(\rho)-1}| + |\varphi(t_{\nu_2(\rho)})|\,|\Delta_{\nu_2(\rho)}| + |\varphi(t_{\nu_2(\rho)+1}|\,|\Delta_{\nu_2(\rho)+1}|.$$

Розглянемо $S_{\nu_2(\rho)}$.

Досліджуючи функцію $f_2(x)$, можна переконатися в тому, що $\max|\Delta_\nu| \leqslant \frac{(1+\varrho^2)^2}{8\varrho(1-\varrho^2)^2}\ \frac{\pi^2}{4n^2}$; легко також встановити справедливість нерівності $(1-\varrho)^2 > \frac{4}{9\pi^2}\, x_2^2(\varrho)\ \left(1-\varrho<\frac{1}{3}\right)$, що виявляє зв'язок між ϱ і $x_2(\varrho)$.

Звідси у випадку, коли $1-\varrho \leqslant \frac{1}{3}$, маємо

$$|\varphi(t_{\nu_2(\rho)})|\,|\Delta_{\nu_2(\rho)}| \leqslant |t_{\nu_2(\rho)}|^\alpha \frac{(1+\varrho^2)^2}{8\varrho(1-\varrho^2)^2}\ \frac{\pi^2}{4n^2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\omega + \nu_2(\varrho)\,\pi}{n}\right)^\alpha \frac{9\,\pi^2}{\left[32\left[\nu_2(\varrho)-\frac{1}{2}\right]\right]^2} \leqslant \frac{c}{n^\alpha \varrho}.$$

З другого боку, коли $1-\varrho \geqslant \frac{1}{3}$, дістаємо

$$|\varphi(t_{\nu_2(\rho)})|\,|\Delta_{\nu_2(\rho)}| \leqslant \frac{c}{n\varrho}$$

Аналогічними міркуваннями можна переконатися у справедливості таких самих оцінок для двох інших членів суми $S_{\nu_2(\rho)}$.

Беручи тепер до уваги нерівність (32), а також факт, що для будь-яких ν $(1 \leqslant \nu \leqslant n-2)$ справедливі нерівності $d^+_\nu < \frac{A}{\varrho}$ і $d^-_\nu < \frac{B}{\varrho}$, де A і B абсолютні константи, дістаємо

$$\left| \frac{1}{\Pi\Gamma(r)} \int_0^1 \varrho^n \left(\lg\frac{1}{2}\right)^{r-1} d\varrho \sum_{\nu=1}^{n-2} \varphi(t_\nu)\,\Delta_\nu \right| < \frac{c}{n^{\alpha+r}}.$$

Необхідно ще оцінити

$$\sum_{\nu=1}^{n-2} \int_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \frac{[\varphi(x)-\varphi(t_\nu)] \sin x \sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right) dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}. \tag{33}$$

Маємо

$$\sum_{\nu=1}^{n-2} \int_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \frac{[\varphi(x)-\varphi(t_\nu)] \sin x \sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right) dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-2} (-1)^{m+\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left[\frac{\psi_\nu(t_\nu+t)\sin(t_\nu+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+t}{2}} - \frac{\psi_\nu(t_\nu-t)\sin(t_\nu-t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}\right] \sin nt\, dt,$$

де

$$\psi_\nu(x) = \varphi(x) - \varphi(t_\nu).$$

Позначимо

$$A_\nu^+ = \frac{\sin(t_\nu+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}, \qquad A_\nu^- = \frac{\sin(t_\nu-t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}$$

$$\psi_\nu^+ = \psi_\nu(t_\nu+t), \qquad \psi_\nu^+ = \psi_\nu(t_\nu-t).$$

Легко бачити, що

$$\left(\psi_\nu^+ - \psi_\nu^-\right)\left(A_\nu^+ + A_\nu^-\right) + \left(\psi_\nu^+ + \psi_\nu^-\right)\left(A_\nu^+ - A_\nu^-\right) = 2\left(\psi_\nu^+ A_\nu^+ - \psi_\nu^- A_\nu^-\right).$$

Таким чином,

$$\sum_{\nu=1}^{n-2} \int_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \frac{[\varphi(x)-\varphi(t_\nu)] \sin x \sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right) dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n-2} (-1)^{m+\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} [\psi_\nu(t_\nu+t)+\psi_\nu(t_\nu-t)] \left[\frac{\sin(t_\nu+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+t}{2}} -\right.$$

$$-\frac{\sin(t_\nu - t)}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{t_\nu - t}{2}}\Bigg]\sin nt\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n-2}(-1)^{m+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}[\psi_\nu(t_\nu+t)-\psi_\nu(t_\nu-t)]\left[\frac{\sin(t_\nu+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}+\right.$$

$$\left.-\frac{\sin(t_\nu-t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}\right]\sin nt\,dt \tag{34}$$

і далі, враховуючи (24), (25), а також нерівність

$$|\psi_\nu(t_\nu+t)+\psi_\nu(t_\nu-t)|\leqslant 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha$$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-2}(-1)^{m+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}[\psi_\nu(t_\nu+t)+\psi_\nu(t_\nu-t)]\left[\frac{\sin(t_\nu+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu'-t}{2}}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\sin(t_\nu-t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}\right]\sin nt\,dt\right|\leqslant 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha\left(\sum_{\nu=1}^{\nu_1(\rho)}|\Delta_\nu|+\right.$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\left|\frac{\sin(t_{\nu_1(\rho)}+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_{\nu_1(\rho)}+t}{2}}-\frac{\sin(t_{\nu_1(\rho)}-t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_{\nu_1(\rho)}-t}{2}}\right|\sin nt\,dt+$$

$$\left.+\sum_{\nu=\nu_1(\rho)+1}^{n-2}|\Delta_\nu|\right)\leqslant 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha\left[\sum_{\nu=1}^{\nu_1(\rho)-1}|d_\nu^+-d_\nu^-|+\max|d^+_{\nu\,(\rho)-1},\,d^-_{\nu\,(\rho)+1}|+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=\nu_1(\rho)+1}^{n-2}|d_\nu^+-d_\nu^-|\right]\leqslant 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha\left[d^+_{\nu\,(\rho)-1}+\max|d^+_{\nu_1(\rho)-1},\,d^-_{\nu_1(\rho)+1}|+\right.$$

$$\left.+d^-_{\nu_1(\rho)+1}\right]<\frac{c}{n^\alpha\varrho}. \tag{35}$$

Що стосується першого доданку правої частини рівності (33), то його можна оцінити, діючи подібно до того, як це зроблено в роботі [1]

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2n}}[\psi_\nu(t_\nu+t)-\psi_\nu(t_\nu-t)]\left[\frac{\sin(t_\nu+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sin(t_\nu-t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}\right]\sin nt\,dt\right|=\frac{2^\alpha}{\pi^2\varrho}\;\frac{\lg(n-1)}{n^\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}}v^\alpha\sin v\,dv+$$

$$+\frac{c}{n^\alpha\varrho} \tag{36}$$

Беручи до уваги (22), (33), (34), (35) і (36), одержимо нерівність (14).

Підраховуючи числові значення констант в наших нерівностях, можна переконатись в тому, що за верхню грань для констант і A в рівності

$$E_{s_n}(W^{(r)}KH^{(\alpha)})=K\left[\frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2}\;\frac{\lg(n-1)}{n^{r+\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}v^\alpha\sin v\,dv+\frac{A(\pi)^\alpha}{n^{r+\alpha}}\right]\quad(n\leqslant 3)$$

можна взяти число 41,4.

В заключення виражаю глибоку подяку І. Г. Соколову, під керівництвом якого була виконана ця робота.

ЛІТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский. Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 15 (1945).
2. И. Г. Соколов. ДАН СССР, 1955, т. 103, № 1.
3. С. Г. Селиванова. ДАН СССР, 1955, т. 105, № 5.
4. А. Н. Тверитин. ДАН СССР 64, № 6, (1953).

Робота поступила в травні 1957 р.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

В. Э. ЛЯНЦЕ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ИДЕМПОТЕНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Линейный оператор J называется идемпотентным, если $J^2 = J$. Каждому самосопряженному оператору A в гильбертовом пространстве Н соответствует разложение единицы $\{E(\sigma)\}$, представляющее собой некоторое семейство самосопряженных идемпотентных операторов $E(\sigma)$, т. е. операторов ортогонального проектирования. Если оператор A не является самосопряженным, то соответствующее ему разложение единицы, коль оно существует, не будет уже, вообще говоря, состоять из самосопряженных идемпотентных операторов, т. е., проекции не будут ортогональными. В настоящей статье изучаются некоторые свойства общих (неортогональных) идемпотентных операторов в комплексном гильбертовом пространстве. В частности, устанавливается связь между J и J^* и их областями значений, а также выводятся формулы, выражающие норму идемпотентного оператора через „углы наклона" соответствующих многообразий.

1. Напомним некоторые характеристики взаимного расположения многообразий в гильбертовом пространстве (см. [1]).

1.1 Пусть М линейное многообразие в гильбертовом пространстве Н. Обозначим через $P_{\text{М}}$ оператор ортогонального проектирования на М, а через

$$\operatorname{dis}(x, \text{М}) = \sqrt{\|x\|^2 - \|P_{\text{М}} x\|^2} \tag{1}$$

расстояние вектора x до многообразия М. Раствором пары линейных многообразий М_1 и М_2 в Н называется (см. [1]) число

$$\Theta(\text{М}_1, \text{М}_2) = \max(\varrho_1, \varrho_2), \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \sup[\operatorname{dis}(x, \text{М}_2) \mid x \in \text{М}_1, \|x\| = 1], \\ \varrho_2 &= \sup[\operatorname{dis}(x, \text{М}_1) \mid x \in \text{М}_2, \|x\| = 1], \end{aligned} \tag{3}$$

Всегда $0 \leqslant \Theta(\text{М}_1, \text{М}_2) \leqslant 1$, причем, если $\Theta(\text{М}_1, \text{М}_2) < 1$, то многообразия $\text{М}_1, \text{М}_2$ имеют одинаковую размерность.

1.2 Пара линейных многообразий М_1 и М_2 называется правильной, если единственным вектором, принадлежащим к одному из них и ортогональным ко второму, является нулевой вектор. Для обозначения того, что пара многообразий М_1 и М_2 правильная, будем писать $(\text{М}_1, \text{М}_2) = 1$. В [1] доказано, что если $(\text{М}_1, \text{М}_2) = 1$, то $\varrho_1 = \varrho_2$ (см. [3]) и, следовательно,

$$\Theta(M_1, M_2) = \varrho_1 = \varrho_2. \tag{4}$$

Угол $\varphi^{(M)}$, определяемый соотношениями

$$0 \leqslant \varphi^{(M)} \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \sin \varphi^{(M)} = \Theta(M_1, M_2), \tag{5}$$

называется максимальным углом наклона многообразий M_1, M_2.

1.3. Пусть M и N произвольная пара линейных многообразий в H, вообще говоря, неправильная. Минимальный угол наклона этих многообразий $\psi^{(m)}$ определяется с помощью соотношений

$$0 \leqslant \psi^{(m)} \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \cos \psi^{(m)} = \sup [\, |(x, y)| \,|\, x \in M, y \in N, \|x\| = \|y\| = 1] \tag{6}$$

1.4. *Пусть* M_1 и M_2 — *правильная пара многообразий*, $(M_1, M_2) = 1$, а N_1 — *ортогональное дополнение* M_2 *в* $H, H = M_2 \oplus N_1$. *Обозначим через* $\varphi^{(M)}$ *минимальный угол наклона* M_1 и N_1. *Тогда*

$$\varphi^{(M)} + \psi^{(m)} = \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $x = x_\varepsilon \in M_1$, $\|x\| = 1$ и

$$\varrho(x, M_2) = \sqrt{1 - \|P_{M_2} x\|^2} \leqslant \sin \varphi^{(M)} - \varepsilon.$$

Положим

$$y = y_\varepsilon = (x - P_{M_2} x) \cdot \|x - P_{M_2} x\|^{-1}.$$

Как показывает несложное вычисление

$$(x, y) = \sqrt{1 - \|P_{M_2} x\|^2} \leqslant \sin \varphi^{(M)} - \varepsilon,$$

а поскольку $P_{M_2} y = 0$ и, следовательно, $y \in N_1$ и $\|y\| = 1$, то в силу (6)

$$\cos \psi^{(m)} \leqslant \sin \varphi^{(M)} - \varepsilon$$

или, так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\cos \psi^{(m)} \leqslant \sin \varphi^{(M)} - \varepsilon.$$

Докажем теперь обратное неравенство. Пусть $x = x_\varepsilon \in M_1$, $y = y_\varepsilon \in N_1$, $\|x\| = \|y\| = 1$, и

$$(x, y) < \cos \varphi^{(m)} - \varepsilon;$$

(умножая один из векторов x или y на число вида e^{ia}, a — действительно, всегда можно добиться того, чтобы скалярное произведение (x, y) было действительным и $\geqslant 0$ без изменения его абсолютного значения). Положим

$$z = z_\varepsilon = (x - P_{M_2} x)(1 - \|P_{M_2} x\|^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Пусть $\lambda = (1 - \|P_{M_2} x\|^2)^{\frac{1}{2}} = (x, z)$. Из (8) находим $x = \lambda z + P_{M_2} x$. Принимая во внимание, что $P_{M_2} y = 0$, ибо $y \in N_1$, найдем

$$(x, y) = (\lambda z + P_{M_2} x, y) = \lambda (z, y) = (x, z)(z, y),$$

Следовательно,

$$(x, y) \leqslant (x, z) \cdot \| z \| \cdot \| y \| = (x, z)$$

и. таким образом,

$$\sqrt{1 - \| P_{M_2} x \|^2} = (x, z) \leqslant \cos \psi^{(m)} - \varepsilon.$$

Отсюда

$$\sin \varphi^{(м)} \leqslant \cos \psi^{(m)}.$$

В силу условий $0 \leqslant \varphi^{(м)} \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \cos \varphi^{(m)} \leqslant \frac{\pi}{2}$ равенство (7) доказано.

1.5. *Для того, чтобы прямая сумма непересекающихся подпространств* M_1 *и* N_1 *гильбертова пространства* H *была полным пространством,* $\overline{M_1 + N_1} = M_1 + N_1$, *необходимо и достаточно, чтобы минимальный угол наклона* $\psi^{(m)}$ *подпространств* M_1 и N_1 *был больше нуля,* $\psi^{(m)} > 0$.

Это предложение сформулировано без доказательства в [1]. Ввиду того, что оно в дальнейшем существенно используется, ради полноты изложения приведем его доказательство.

Достаточность. Предположим, что $\varphi^{(m)} > 0$. Пусть $z = x + y$, где $x \in M_1$, $y \in N_1$. Полагая $\cos \gamma = |(x, y)| / \| x \| \cdot \| y \|$, имеем $\cos \gamma < < \cos \psi^{(m)}$. Если $(x, y) = |(x, y)| e^{i\delta}$, то как показывает несложное вычисление

$$\| z \|^2 = (\| x \| + \| y \| \cos \gamma \cos \delta)^2 + \| y \|^2 (1 - \cos^2 \gamma \cos^2 \delta)$$

и, следовательно,

$$\| z \|^2 \leqslant (\| x \| + \| y \| \cos \gamma \cos \delta)^2 + \| y \|^2 (1 - \cos^2 \psi^{(m)}). \tag{9}$$

Из (9) сразу вытекает полнота прямой суммы $M_1 + N_1$. В самом деле, если векторы $z_n = x_n + y_n$, $x_n \in M_1$, $y_n \in N_1$, $n = 1, 2, \ldots$ образуют фундаментальную последовательность, то в силу (9) $x_n \to x, y_n \to y, n \to \infty)$, а так как по условию M_1 и N_1 замкнутые подпространства, то $x \in M_1$, $y \in N_1$, так что $\lim z_n = z = x + y \in M_1 + N_1$.

Необходимость. Предположим, что прямая сума $M_1 + N_1$ есть полное пространство H_1. Обозначим через M_2 ортогональное дополнение N_1 в H_1, $H_1 = M_2 \oplus N_1$. Проверим, что $(M_1, M_2) = 1$. Пусть $x \in M_1$ и x ортогонально к M_2. Тогда $x \in N_1$, а так как M_1 и N_1 не пересекаются, то $x = 0$. Наоборот, пусть $x \in M_2$ и x ортогонально к M_1. Тогда x ортогонально к N_1 и, следовательно, x ортогонально к $M_1 + N_1 = H_1$. Так как $x \in H_1$, то $x = 0$. Итак, $(M_1, M_2) = 1$. Проверим, далее, что $P_{M_2} M_1 = M_2$. Пусть $x \in M_2$. Представим x в виде $x = x_1 + y_1$, где $x_1 \in M_1$, $y_1 \in N_1$. Вследствие того, что $P_{M_2} y_1 = 0$, то $P_{M_2} x_1 = x$. Таким образом, действительно $P_{M_2} x_1 M_1 = M_2$. Отображение P_{M_2} пространства M_1 на M_2 является взаимно однозначным. Действительно, если $x \in M_1$ и $P_{M_2} x = 0$, то $x \in N_1$, а так как пространства M_1 и N_1 не пересекаются, то $x = 0$. Так как взаимно однозначное отображение P_{M_2} пространства M_1 на полное пространство M_2 непрерывно, то обратное отображение тоже непрерывно (см. [4]). Следовательно, существует такое $\mu > 0$, что для всех $x \in M_1$ $\| P_{M_2} x \| \geqslant \mu \| x \|$ очевидно, если $\varphi^{(м)}$ максимальный угол наклона M_1 и M_2, то $\sin \varphi^{(м)} \leqslant \sqrt{1 - \mu^2} < 1$ и $\varphi^{(м)} < < \frac{\pi}{2}$. Поэтому, в силу предложения 2.4 $\psi^{(m)} > 0$, что и требовалось доказать.

2. Выясним связь между ограниченным оператором J его областью значения $\mathrm{M}=J\mathrm{H}$ и областью значений $\mathrm{M}^*=J^*\mathrm{H}$ сопряженного ему оператора J^*.

2.1. *Для того, чтобы подпространства* M *и* M* *служили областями значений ограниченных идемпотентных операторов* J *и* J^* *необходимо и достаточно, чтобы пара подпространств* M *и* M* *была правильной,* $(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)=1$ *и чтобы максимальный угол наклона* $\varphi^{(M)}$ *этих подпространств был меньше* $\frac{\pi}{2}$, $\varphi^{(M)}<\frac{\pi}{2}$.[1] *Пусть* $\mathrm{N}=\mathrm{H}\ominus\mathrm{M}^*$, а $\mathrm{N}^*=\mathrm{H}\ominus\mathrm{M}$. Тогда $(I-J)\mathrm{H}=\mathrm{N}$, $(I-J^*)\mathrm{H}=\mathrm{N}^*$.

Операторы J *и* J^* *определяются подпространствами* M *и* M* *однозначно.*

Доказательство. Пусть J ограниченный идемпотентный оператор. Положим $\mathrm{M}=J\mathrm{H}$, $\mathrm{M}^*=J^*\mathrm{H}$. Если для некоторого $x_0\in\mathrm{M}^*$ условие $(x,x_0)=0$ выполняется для всех $x\in\mathrm{M}$, то $(y,x_0)=0$ для всех $y\in\mathrm{H}$, ибо так как $x_0=J^*x_0$, то $(y,x_0)=(y,\ J^*x_0)=0$ и следовательно $x_0=0$. Аналогично, если $x_0\in\mathrm{M}$ и $(x,x_0)=0$ для всех $x\in\mathrm{M}^*$, то $x_0=0$. Таким образом, доказано, что $(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)=1$. Положим $\mathrm{N}=(I-J)\mathrm{H}$. Если $(x_0,x)=0$ для всех $x\in\mathrm{M}^*$, то $(Jx_0,y)=(x_0,J^*y)=0$ для всех $y\in\mathrm{H}^*$ и $Jx_0=0$, и таким образом $x_0\in\mathrm{N}$. Наоборот, если $x_0\in\mathrm{N}$, а $x_1\in\mathrm{M}^*$, то $(x_0,x_1)=(x_0,J^*x_1)=(Jx_0,x_1)=(0,x_1)$, т. е. x_0 ортогонально к M*. Итак, N совпадает с ортогональным дополнением M*, $\mathrm{H}=\mathrm{M}^*\oplus\mathrm{N}$. Аналогично доказывается, что $\mathrm{H}=\mathrm{M}\oplus\mathrm{N}^*$, где $\mathrm{N}^*=(I-J^*)\mathrm{H}$. Ввиду того, что прямая сумма $\mathrm{M}+\mathrm{N}=J\mathrm{H}=(I-J)=\mathrm{H}$ есть полное пространство, на основании 1.5 можно утверждать, что минимальный угол наклона $\psi^{(m)}$ подпространств M и N больше нуля или, в силу 1 4, что максимально угол наклона $\varphi^{(M)}$ подпространств M и M* меньше $\frac{\pi}{2}$, $\Theta(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)<1$.

Пусть идемпотентные операторы J_1 и J^*_1 имеют те же области значений M и M*, что и операторы J и J^*. Имеем $J=(J^*)^*=(J_1{}^*J^*)=JJ=J_1$, т. е., $J=J_1$ и $J^*=J_1{}^*$. Таким образом, в подпространстве M и M* определяют оператор J, а поэтому и J^*, однозначно.

Предположим, наконец, что $(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)=1$ а $\Theta(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)<1$. Пусть по-прежнему $\mathrm{N}=\mathrm{H}\ominus\mathrm{M}^*$, $\mathrm{N}^*=\mathrm{H}\ominus\mathrm{M}$. Подпространства M и N не пересекаются. В самом деле, если $x_0\in\mathrm{M}$ и $x_0\in\mathrm{N}$, то x_0 ортогонально к M*, а так как $(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)=1$, то $x_0=0$.

Аналогично проверяем, что подпространства M* и N* не пересекаются. Образуем прямые суммы $\mathrm{M}+\mathrm{N}=\mathrm{H}_1$ и $\mathrm{M}^*+\mathrm{N}^*=\mathrm{H}_2$. Так H_1, H_2 как $\Theta(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)<1$, то, в силу 1.4, минимальный угол $\psi^{(m)}$ между M и N, равный минимальному углу между M* и N*, больше нуля и, в силу 1.5, прямые суммы H_1 и H_2 являются замкнутыми подпространствами. Проверим, что $\mathrm{H}_1=\mathrm{H}_2=\mathrm{H}$. Очевидно, достаточно убедиться, что H_1 и H_2 плотно в H. Пусть $(x,x_0)=0$ для всех $x\in\mathrm{H}_1$. Тогда x_0 ортогонально к N и, следовательно, $x_0\in\mathrm{M}^*$, а так как x_0 ортогонально к M и $(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)=1$, то $x_0=0$. Таким образом $\mathrm{H}_1=\mathrm{H}$ и, вследствие того, что H_1 замкнуто, то $\mathrm{H}_1=\mathrm{H}$. Точно также $\mathrm{H}_2=\mathrm{H}$. Разложениям в прямые суммы $\mathrm{H}=\mathrm{M}+\mathrm{N}$ и $\mathrm{H}=\mathrm{M}^*+\mathrm{N}^*$ соответствуют идемпотентные операторы J и J' такие что $J\mathrm{H}=\mathrm{M}$, $(I-J)\mathrm{H}=\mathrm{N}$, $J'\mathrm{H}=\mathrm{M}^*$, $(I-J')\mathrm{H}=\mathrm{N}^*$. Проверим, что $J'=J^*$. Принимая во внимание, что для

[1] т. е. раствор Θ (M, M*) был меньше единицы.

любых $x, y \in \mathrm{H}$ будет $(Jx, (I-J')y) = 0$ и $((I-J)x, J'y) = 0$, имеем $(Jx, y) = (Jx, J'y) + ((I-J)x, J'y) = (x, J'y)$. Наконец, оператор J ограничен, ибо он замкнут, так как $J = J'^*$ и задан на всем H.

2.2 *Пусть J ограниченный идемпотентный оператор в гильбертовом пространстве* H. *Положим* $\mathrm{M} = J\mathrm{H}$, $\mathrm{M}^* = J^*\mathrm{H}$

Тогда

$$\|J\| = (1-\Theta^2)^{-\frac{1}{2}} = \sec \varphi^{(M)},$$

где $\Theta = \Theta(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*)$ раствор подпространств M и M^*, а $\varphi^{(M)}$ их максимальный угол наклона.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что $J = JP_{\mathrm{M}^*}$, где P_{M^*} оператор ортогонального проектирования на M^*. Действительно, для любых $x, y \in \mathrm{H}$ имеет $(JP_{\mathrm{M}^*}x, y) = (x, P_{\mathrm{M}^*}J^*y) = (Jx, y)$. Принимая во внимание, что $JP_{\mathrm{M}^*} = J$ и что $\|P_{\mathrm{M}^*}x\| \leqslant \|x\|$, приходим к выводу, что

$$\|J\| = \sup[\,\|Jx\| \mid x \in \mathrm{M}^*, \|x\| = 1]. \tag{10}$$

Заметим далее, что если $x \in \mathrm{M}^*$, то x является ортогональной проекцией Jx на M^*

$$P_{\mathrm{M}^*}Jx = x \quad (x \in \mathrm{M}^*). \tag{11}$$

Действительно, $(P_{\mathrm{M}^*}Jx, y) = (x, J^*P_{\mathrm{M}^*}y) = (x, P_{\mathrm{M}^*}y) = (P_{\mathrm{M}^*}x, y) = (x, y)$ для любых $x \in \mathrm{M}^*$ и $y \in \mathrm{H}$. Следовательно, если $x \in \mathrm{M}^*$, то $(x, Jx - x) = 0$ и $\|Jx\|^2 = \|x\|^2 + \|Jx - x\|^2 = \|x\|^2 + \|Jx\|^2 \cdot \left\| \frac{Jx}{\|Jx\|} - \frac{x}{\|Jx\|} \right\|^2$, что может быть переписано в виде $\|Jx\|^2 = \|x\|^2 + \|Jx\|^2\left[\operatorname{dis}\left(\frac{Jx}{\|Jx\|}, M^*\right)\right]^2$, где $\operatorname{dis}\left(\frac{Jx}{\|Jx\|}, \mathrm{M}^*\right)$ расстояние вектора $\frac{Jx}{\|Jx\|}$ до подпространства M^*.

Таким образом, если $x \in \mathrm{M}^*$ и $\|x\| = 1$, то

$$\|Jx\| = \left[1 - \varrho^2\left(\frac{Jx}{\|Jx\|}, \mathrm{M}^*\right)\right]^{-1/2}$$

и

$$\sup \|Jx\| = \left[1 - \sup \varrho^2\left(\frac{Jx}{\|Jx\|}, \mathrm{M}^*\right)\right]^{-1/2}.$$

В силу (10), (4) и (5) для завершения доказательства остается лишь проверить, что любой элемент $z \in \mathrm{M}$, удовлетворяющий условию $\|z\| = 1$, имеет вид $\frac{Jx}{\|Jx\|}$, где $x \in \mathrm{M}^*$. Но это очевидно, ибо вообще $J\mathrm{M}^* = \mathrm{M}$. Действительно, так как $JP_{\mathrm{M}^*} = J$, то $J\mathrm{M}^* = JP_{\mathrm{M}^*}\mathrm{M}^* = JP_{\mathrm{M}^*}\mathrm{H} = J\mathrm{H} = \mathrm{M}$.

2.3 *Пусть J ограниченный идемпотентный оператор в гильбертовом пространстве* H. *Положим* $\mathrm{M} = J\mathrm{H}$, $\mathrm{N} = (I-J)\mathrm{H}$.

Тогда

$$\|J\| = \operatorname{cosec} \psi^{(m)},$$

где $\psi^{(m)}$ минимальный угол между подпространствами M и N.

Это предложение вытекает из 2.2 и 1.4.

2.4. *Для любого ограниченного идемпотентного оператора J в гильбертовом пространстве* H

$$\|I-J\|=\|J\|.$$

Это очевидное следствие предложения 2.3.

2.5. *Для того, чтобы ограниченный идемпотентный оператор J в гильбертовом пространстве* H *был самосопряженным, т. е. служил оператором ортогонального проектирования, необходимо и достаточно, чтобы $\|J\|=1$.*

Действительно, если $\|J\|=1$, то, в силу 2.3, $\psi^{(m)}=\frac{\pi}{2}$ и подпространства $\mathrm{M}=J\mathrm{H}$ и $\mathrm{N}=(I-J)\mathrm{H}$ взаимно ортогональны так, что $\mathrm{H}=\mathrm{M}\oplus\mathrm{N}$.

3. На основании изложенного выше весьма просто рассмотреть вопрос о монотонных последовательностях идемпотентных операторов.

3.1. *Пусть $\{J_n\}$ — такая последовательность идемпотентных операторов в гильбертовом пространстве* H, *для которой $J_\mu J_\nu=J_\lambda$, где $\lambda=\min(\mu,\nu)$ и $\|J_n\|\leqslant c<\infty$ при $n=1,2,\ldots$ Тогда эта последовательность сильно сходится к ограниченному идемпотентному оператору J.*

Доказательство. Положим $\mathrm{M}_n=J_n\mathrm{H}$, $\mathrm{M}_n^*=J_n^*\mathrm{H}$ $n=1,2,\ldots$, $\mathrm{M}_0=U_{n=1}^{\infty}\mathrm{M}_n$, $\mathrm{M}=\overline{\mathrm{M}}_0$, $\mathrm{M}_0^*=U_{n=1}^{\infty}\mathrm{M}_n^*$ $\mathrm{M}^*=\overline{\mathrm{M}}_0^*$. Убедимся в первую очередь, в том, что $(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)=1$. Пусть $x_0^*\in\mathrm{M}^*$ и $(x,x_0^*)=0$ для всех $x\in\mathrm{M}$. Очевидно, $J_n^*x_0^*=0$ при $n=1,2,\ldots$ ибо для всех $y\in\mathrm{M}$. $J_ny\in\mathrm{M}$ и $(y,J_n^*x_0^*)=(J_ny,x_0^*)=0$. Представим x_0^* в виде $x_0^*=\lim J_n^*x_n^*$. Имеем

$$\|J_n^*x_n^*\|=\|J_n^*x_n^*-J_n^{*2}x_n^*\|\leqslant\|J_n^*\|\cdot\|x_0^*-x_nJ^*x_n\|\leqslant$$
$$\leqslant c\,\|x_0^*-J_n^*x_n^*\|\to 0,\ (n\to\infty).$$

Поэтому $x_0^*=\lim J_n^*x_n^*=0$. Аналогично убеждаемся, что $x_0=0$, если $x_0\in\mathrm{M}$ и $(x_0,x^*)=0$. Убедимся теперь в том, что $\Theta=\Theta(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)\leqslant\leqslant(1-c^{-2})^{1/2}<1$.

Пусть $x\in\mathrm{M}$ и $\|x\|=1$. Представим x в виде $x=\lim x_n$, где $x_n\in\mathrm{M}_n$ и $\|x_n\|=1$. Очевидно, $\varrho(x,\mathrm{M}^*)=\lim\varrho(x_n,\mathrm{M}^*)$. Но так как $\mathrm{M}_n^*\subset\mathrm{M}^*$, то $\varrho(x_n,\mathrm{M}^*)\leqslant\varrho(x_n,\mathrm{M}_n^*)\leqslant\Theta_n$, где $\Theta_n=\Theta(\mathrm{M}_n,\mathrm{M}_n^*)$. Однако, в силу 2.2 и условия $\|J_n\|\leqslant c$, выполняется неравенство $\Theta_n\leqslant(1-c^{-2})^{1/2}$. Поэтому $\varrho(x,\mathrm{M}^*)\leqslant(1-c^{-2})^{1/2}$ и $\Theta<1$.

Так как $(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)=1$, $\Theta(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)<1$, то в силу 2.1 подпространства M и M* определяют единственный идемпотентный оператор J такой, что $J\mathrm{H}=\mathrm{M}$, $J^*\mathrm{H}=\mathrm{M}^*$. При этом, $\|J\|=(1-\Theta^2)^{-1/2}\leqslant c$. Остается проверить, что $J=\lim J_n$. С этой целью заметим, прежде всего, что

$$JJ_n=J_nJ=J_n,\ n=1,2,\ldots \tag{11}$$

Это вытекает из того, что $\mathrm{M}_n\subset\mathrm{M}$ и $\mathrm{M}_n^*\subset\mathrm{M}^*$. Пусть x произвольный вектор. Представим J_x в виде $J_x=\lim\limits_{n\to\infty}J_nx_n$. Принимая во внимание (11), найдем $J_x=\lim\limits_{n\to\infty}J_nx+\lim\limits_{n\to\infty}J_n(J_nx_n-J_x)$. Так как $\|J_n\|<c$, то $\lim\limits_{n\to\infty}J_nJ\ (J_nx_n-J_n)=0$ и $J_x=\lim\limits_{n\to\infty}J_nx$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, Д. П. Мильман. О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах. Сборник трудов института математики АН УССР № 11, Киев, 1948.

2. М. Г. Крейн и М. А. Красносельский. Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов. Успехи матем. наук, т. III, вып. 3 (19), (1947).

3. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман. Теория линейных операторов. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

4. С. С. Банах. Курс функціонального аналізу. «Радянська школа», Київ, 1948.

Я. Б. ЛОПАТИНСКИЙ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В настоящей статье рассматривается статическая задача определения смещений упругого однородного изотропного тела в конечной области с границей, кусочно удовлетворяющей условиям Ляпунова, по заданным на границе смещениям. Для определенности рассматривается плоский случай.

Систему уравнений Лямэ можно представить в матричной записи так:

$$(1-\varkappa)\,\Delta\, \boldsymbol{u}(x)+\partial\partial^{1}\ \boldsymbol{u}(x)=0\,. \tag{1}$$

Здесь $\varkappa=\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, $u(x)=\begin{pmatrix}u_1(x)\\ u_2(x)\end{pmatrix}$ — вектор смещения, $\partial=$ $=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}$, ∂' — соответствующая строка, λ, μ — постоянные Лямэ.

Определяется решение уравнения [1] в конечной области D с границей Γ по заданному смещению в точках границы.

$$\boldsymbol{u}(y)=f(y)\qquad (y\in\Gamma), \tag{2}$$

$f(y)$ — кусочно-непрерывная функция.

Граница Γ будет предполагаться удовлетворяющей условию Ляпунова.

Фредгольм [1] дал следующий метод сведения этой граничной задачи к эквивалентному регулярному интегральному уравнению.

Пусть

$$g(x,\nu)=\frac{(x,\nu)}{\pi}\left\{\frac{1-\varkappa}{|x|^2}E+\frac{2\varkappa}{|x|^4}xx'\right\}; \tag{3}$$

здесь $x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$, x' — соответствующая строка*, $(x,\nu)=x_1\nu_1+x_2\nu_2$, $|x|=+\sqrt{(x,x)}$, E — единичная матрица.

Тогда

$$\boldsymbol{u}(x)=\int_{\Gamma} g(x-z,\ \nu(z))\,\mu(z)\,d_zS \tag{4}$$

* Вообще A' будет обозначать матрицу полученную из A транспортированием и комплексным сопряжением.

($\nu(z)$ есть здесь единичный вектор внутренней нормали в точке $z \in \Gamma$) является решением уравнения (1) в области D, при любой интегрируемой матричной „плотности" $\mu(z)$, заданной на границе Γ; при этом, если $y \in \Gamma$ есть точка, в которой нормаль $\nu(y)$ определена и непрерывна и в которой непрерывна функция μ, то при приближении $x \in D$ по некасательному пути к точке y контура, не являющейся угловой, функция $u(x)$, представленная формулой (4), стремится к пределу $u_+(y)$, равному

$$u_+(y) = \mu(y) + \int_\Gamma g(y - z, \nu(z)) \mu(z) d_z S. \tag{5}$$

Таким образом, решение задачи (1), (2) будет представлено формулой (4), если плотность μ, удовлетворяет интегральному уравнению

$$\mu(y) + \int_\Gamma g(y - z, \nu(z)) \mu(z) d_z S = f(y). \tag{6}$$

Как известно,

$$g(y - z, \nu(z)) = 0\left(\frac{1}{|y - z|^{1-\alpha}}\right). \tag{7}$$

Следовательно, интегральное уравнение (6) регулярно

Это замечание, а также формула скачка (5) справедливы и при любых комплексных значениях параметра $\varkappa$.

Теперь будет рассмотрен вопрос о разрешимости уравнения (6); используемый здесь прием хорошо известен для задачи Дирихле.

Пусть

$$\omega(x) = \frac{1-\varkappa^2}{\pi}\left\{\lg|x| \cdot E - \varkappa \frac{xx'}{|x|^2}\right\}, \tag{8}$$

$$A\left(\nu, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\{\nu_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \varkappa\nu_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \varkappa\nu_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} - \varkappa^2\nu_2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x} +$$
$$+ \left\{\nu_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \varkappa\nu_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} - \varkappa\nu_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \varkappa^2\nu_1\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{9}$$

$$B(u, v) = \frac{\partial v'}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v'}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_2} + \varkappa\frac{\partial v'}{\partial x_1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_1} - \varkappa\frac{\partial v'}{\partial x_2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_2} +$$
$$+ \varkappa\frac{\partial v'}{\partial x_2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \varkappa\frac{\partial v'}{\partial x_1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_2} - \varkappa^2\frac{\partial v'}{\partial x_2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_1} +$$
$$+ \varkappa^2\frac{\partial v'}{\partial x_1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_2}. \tag{10}$$

Без труда проверяются тождества:

$$g(x, \nu) = A\left(\nu, \frac{\partial}{\partial x}\right)\omega(x), \tag{11}$$

$$-\int_\Gamma v'(x) A\left(\nu(x), \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) d_x S = \int_D B(u(x), v(x)) dx +$$

$$+\int \nu'(x)\{(1-\varkappa)\Delta+2\varkappa\,\partial\partial'\}\,u(x)\,dx\,, \tag{12}$$

$$-\int\limits_{\Gamma}\left\{v'(x),\ A\left(\nu(x),\ \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)-\left[A\left(\nu(x),\ \frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]'u(x)\right\}d_xS=$$

$$=\int\limits_{D}\{v'(x)\,[(1-\varkappa)\Delta+2\beta\,\partial\partial']\,u(x)-[((1-\varkappa)\Delta+2\varkappa\,\partial\partial')\,v(x)]'\,u(x)\}\,dx. \tag{13}$$

В формулах (2), (13) $\nu(x)$ обозначает единичный вектор внутренней нормали к границе Γ области D; справедливы эти формулы при обычных предположениях относительно матричных функций $u(x)$, $v(x)$ и области D, обеспечивающих применимость формулы Остроградского.

В частности, из формул (3), (11), (13), при $u(x)=\omega(x-y)$, $y\in D$ получается

$$-2v'(y)=\int\limits_{\Gamma}\left\{v'(x)\,g(x-y,\ \nu(x))-\right.$$

$$\left.-\left[A\left(\nu(x),\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]'\omega(x-y)\right\}d_xS-$$

$$-\int\limits_{D}[((1-\varkappa)\Delta+2\varkappa\,\partial\partial')\,v(x)]'\,\omega(x-y)\,dx. \tag{14}$$

Из формулы (14) при $v(y)=E$,

$$-2E=\int\limits_{\Gamma}g(x-y\,,\ \nu(x))\,d_xS\,.$$

Приближая точку y к границе, получают на основании (5):

$$E-\int g(y-z,\ \nu(z))\,d_zS=0\quad(y\in S) \tag{15}$$

Таким образом, единичная матрица является собственной функцией ядра $g(y-z,\ v(z))$, соответствующей собственному числу -1.

Следовательно, если $\psi'(z)$ есть решение уравнения

$$\psi'(z)+\int\limits_{\Gamma}\psi'(y)\,g(y-z\,,\ \nu(z))\,d_zS=0\,, \tag{16}$$

то

$$\int\psi(z)\,d_zS=0\,. \tag{17}$$

Пусть далее

$$v(x)=\int\omega(x-y)\,\psi(y)\,d_yS\,. \tag{18}$$

Очевидно, $v(x)$ удовлетворяет уравнению (1) при $x\in\bar{\Gamma}$. Применяя к $v(x)$ оператор $A\left(\nu(z),\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, где z некоторая не угловая точка Γ, и приближая x извне к точке z, легко получают, на основании (16),

$$\lim_{x \to z} A\left(\nu(x), \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) = \psi(z) + \int_{\Gamma} g(y - z, \nu(z)) \psi(y) d_y S = 0 .$$

Применяя формулу (12), при $u(x) = v(x)$, в области D_R, ограниченной Γ и кругом C_R достаточно большого радиуса R, находят:

$$-\int_{C_R} v'(x) A\left(\nu(x), \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) d_x = \int_{D_R} B(v(x), v(x)) \partial x. \tag{19}$$

Величины $v(x)$, $\frac{\partial v(x)}{\partial x}$ имеют на C_R на основании формул (8), (16) оценки вида $0\left(\frac{1}{R}\right)$, $0\left(\frac{1}{R^2}\right)$ соответственно.

Таким образом, интеграл в левой части формулы (19) стремится к нулю при R, стремящемся к бесконечности. Формула (19) в пределе принимает вид:

$$\int_{D_\infty} B(v, v) \partial x = 0 . \tag{20}$$

Рассматривая это уравнение, как квадратное уравнение относительно $\varkappa$ (сравнить с (10)), можно легко показать, что при $v(x)$ непостоянном в D_∞, оно не имеет корней в единичном круге.

Таким образом, при $|\varkappa| < 1$ из (20) заключают, что $v(x)$ постоянно в D_∞ и, следовательно, по формуле (18), постоянно и на Γ.

По формуле (12), при $v(x) = u(x)$, примененной на этот раз к области D, легко показать, что задача типа Дирихле для уравнения (1) имеет в области D единственное решение при $|\varkappa| < 1$. Таким образом, $v(x)$ постоянно на всей плоскости.

Принимая теперь к формуле (18) оператор $A\left(\nu(z), \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и приближая x к точке $z \leqslant \Gamma$ извне и изнутри области D, получаем

$$\psi(z) = 0 \qquad (y \in \Gamma).$$

Отсюда вытекает, что при $|\varkappa| < 1$ интегральное уравнение (6) однозначно разрешимо и, следовательно, резольвента этого уравнения является аналитической матричной функцией $\varkappa$ в круге $|\varkappa| < 1$.

Это же имеет тем самым место и для решения $\mu(y)$ уравнения (5) и, по формуле (4), для решения $u(x)$ задачи (1), (2).

Из проведенных рассуждений следует теорема: *При сделанных предположениях относительно области D и граничных значениях $f(x)$, решение задачи* (1), (2) ***разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся при $|\varkappa| < 1$ ряд по степеням $\varkappa$.***

По формуле (4) этот ряд можно неограниченно почленно дифференцировать по x в области D.

Если

$$u(x) = u(x, \varkappa) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \varkappa^\kappa u_\kappa(x),$$

то матрицы $u_\kappa(x)$ определяются условиями:

$$\Delta u_0(x) = 0, \qquad \Delta u_\kappa(x) = \Delta u_{\kappa-1} - 2\partial\partial' u_{\kappa-1},$$

$$u_0(y) = f(y), \qquad u_\kappa(y) = 0 \, (\kappa = 1, 2, \cdots; \quad x \in D, \ y \in \Gamma).$$

Определение $u_\kappa(x)$ сводится, таким образом, к последовательному решению задач Дирихле.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Fredholm, Arkiv for matematik, astronomi och fysik, 2, № 28, (1906) 1—8.

Работа поступила в апреле 1957 г.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

А. И. ВОЛЬПЕРТ

НОРМАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, применение теории сингулярных интегральных уравнений в исследовании граничных задач для эллиптических уравнений с двумя независимыми переменными оказалось чрезвычайно плодотворным. Основные результаты в этом направлении получены И. Н. Векуа (см. [1], [2]). Используя найденные им общие представления решений, И. Н. Векуа свел граничные задачи для определенного класса уравнений и систем уравнений, важного для приложений, к решению эквивалентных сингулярных интегральных уравнений, исследовал вопрос разрешимости указанных граничных задач и получил формулу для вычисления их индекса.

Фундаментальные матрицы для эллиптических систем уравнений, построенные Я. Б. Лопатинским [4], [5], дали возможность дальнейших приложений указанного метода. Некоторым таким приложениям посвящена настоящая работа.

В работе рассматривается граничная задача, состоящая в нахождении решения эллиптической системы уравнений

$$A(z)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + B(z)u + \iint\limits_D R(z,\zeta)\,u(\zeta)\,d\xi\,d\eta = f(z) \tag{1}$$

при условии на границе Γ области D вида

$$a(t)\,u(t) + \int\limits_\Gamma b(t,t_1)\,u(t_1)\,ds_1 = 0 \qquad (t \in \Gamma), \tag{2}$$

где A, B, R — заданные вещественные квадратные матрицы порядка $2r$ $(r \geqslant 1)$, a, b — матрицы, состоящие из r строк и $2r$ столбцов, u — искомый, f — заданные функциональные столбцы; $z(x,y)$, $\zeta(\xi,\eta)$ — точки области D.

Устанавливается условие, при котором как данная, так и сопряженная однородные задачи содержат конечные числа линейно независимых решений и имеет место нормальная разрешимость, состоящая в том, что для разрешимости граничной задачи необходима и достаточна ортогональность правой части (f) ко всем решениям однородной сопряженной задачи. Выводится формула для вычисления индекса рассматриваемой граничной задачи, т. е. разности между числом линейно независимых решений данной и сопряженной однородных задач, которая затем применяется к вычислению индекса задачи Дирихле для эллиптической системы уравнений второго порядка.

В § 1 система (1) приводится к каноническому (в указанном ниже смысле) виду. Приведение к такому виду вызвано следующими соображениями. Рассмотрим вопрос, какой вид должна иметь матрица A, входящая в (1), чтобы имели место следующие утверждения:

1) непрерывной деформацией коэффициентов без нарушения условий эллиптичности, конечности числа линейно независимых решений данной и сопряженной однородных задач и величины индекса можно привести систему (1) к системе, состоящей из систем уравнений Коши-Римана (при $f=0$);

2) к системам (1) с матрицей такого вида может быть сведена линейным неособым преобразованием с гладкими коэффициентами произвольная эллиптическая система (1) с достаточно гладкими коэффициентами.

Оказывается, достаточно взять матрицу вида

$$A(z)=\begin{pmatrix} A^{(1)}(z) & -A^{(2)}(z) \\ A^{(2)}(z) & A^{(1)}(z) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

удовлетворяющую условию: все собственные значения матрицы $A^{(1)}(z)+$ $+ i A^{(2)}(z)$ имеют положительные коэффициенты при мнимых частях.* Под системой уравнений первого порядка канонического вида и понимается система (1), в которой матрица A имеет вид (3). Приведение к каноническому виду оказывается весьма существенным для вычисления индекса граничной задачи и, собственно, с этой целью оно и делается; для получения других результатов настоящей работы оно не необходимо.

В § 2 рассмотрен один специальный случай задачи Коши, в § 3 указан способ приведения граничной задачи к сингулярным интегральным уравнениям с ядром типа Коши. В §§ 4—6 сформулированы и доказаны теоремы о сопряженных граничных задачах. При этом оказалось удобным рассматривать операторы в пространстве C, связанные с этими задачами. При доказательстве указанных теорем используются результаты § 2 и § 3. Для системы, имеющей канонический вид, условие, при котором справедливы теоремы о конечности числа линейно независимых решений данной и сопряженной однородных задач и о нормальной разрешимости, принимает весьма простой вид:

$$\det[a_1(t)+ia_2(t)]\neq 0$$

для всех точек $t\in\Gamma$, где $(a_1, a_2)=a$ (см. [2]). Индекс $\varkappa$ граничной задачи (1), (2) вычисляется по формуле

$$\varkappa=\frac{1}{\pi}[\arg\det(a_1+ia_2)]_\Gamma+r, \tag{4}$$

* Доказательство утверждения 1) для матрицы вида (3) было бы совершенно тривиальным, если бы приведенная ниже формула (4) могла быть получена независимо от него. Однако, формула (4) получена в § 6 как следствие формулы Н. И. Мусхелишвили для индекса системы сингулярных интегральных уравнений и утверждения 1), доказанного для одного специального выбора граничных условий (2).

где $2r$ — число уравнений в системе (1), $[\,]_\Gamma$ — обозначает приращение функции, заключенной в скобки, при обходе Γ в положительном направлении.

В § 7 из (4) получена формула для вычисления индекса граничной задачи для случая системы, не приведенной к каноническому виду. В § 8 полученный результат прилагается к вычислению индекса задачи Дирихле для системы уравнений 2-го порядка. Заметим, что к задаче (1), (2) может быть приведена не только задача Дирихле, но и достаточно общая граничная задача для систем уравнений высшего порядка с двумя независимыми переменными (с этой целью, собственно, и введено интегральное слагаемое в (1) (см. [3]).

1. ПРИВЕДЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Приведение линейной эллиптической системы дифференциальных уравнений первого порядка к виду, который будем называть каноническим, основан на следующей теореме.

Теорема. *Пусть $A(z)$ — вещественная квадратная матрица порядка $2r$, непрерывно дифференцируемая в некоторой ограниченной односвязной замкнутой области $\tilde{D}$ l раз по x и y $(z=x+iy)$ и имеющая при любом $z\in\tilde{D}$ только невещественные собственные значения. Тогда существует квадратная матрица $P(z)$ порядка $2r$, непрерывно дифференцируемая в $\tilde{D}$ l раз по x и y, обратимая при любом $z\in\tilde{D}$ такая, что ее последние r строк комплексно сопряжены с первыми и имеет место равенство*

$$P(z)A(z)P^{-1}(z)=\begin{pmatrix} A_0(z) & 0 \\ 0 & \overline{A_0(z)} \end{pmatrix}^{*}, \qquad (1.1)$$

где $A_0(z)$ — квадратная матрица порядка r, все собственные значения которой при любом $z\in\tilde{D}$ имеют положительные коэффициенты при мнимых частях.

Доказательство. Обозначим через M множество точек комплексной λ — плоскости, на которое отображается область $\tilde{D}$ всеми корнями $\lambda(z)$ уравнения

$$\det\,[A(z)-\lambda(z)]=0^{**}$$

Множество M ограничено и замкнуто. Так как матрица $A(z)$ не имеет вещественных собственных значений, то при достаточно большом R замкнутый контур γ, состоящий из отрезка $[-R,\ R]$ вещественной оси λ — плоскости и полуокружности $|\lambda|=R,\ Im\lambda>0$, содержит внутри себя всю ту часть множества M, которая лежит в полуплоскости $Im\lambda>0$, и находится от M на положительном расстоянии. Рассмотрим матрицу

---

* Здесь в дальнейшем черта над матрицей обозначает переход к комплексно сопряженной матрице; z — как точку плоскости, так и ее аффикс.

** Для простоты записи здесь и в дальнейшем пишется $A-\lambda$ вместо $A-E\lambda$, где E — единичная матрица.

$$X(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}[A(z)-\lambda]^{-1}d\lambda \qquad (z\in\tilde{D}).$$

Очевидно, $X(z)$ имеет непрерывные в $\tilde{D}$ производные по x и y до порядка l.

Покажем, что $X(z)$ удовлетворяет условиям основной теоремы И. Г. Петровского [9] о приведении матриц к каноническому виду. Для этого зафиксируем z и приведем постоянную матрицу $A(z)$ к квазидиагональной (жордановой) форме. Пусть

$$C(z)\,A(z)\,C^{-1}(z)=\tilde{A}(z), \tag{1.2}$$

причем предполагается, что $C(z)$ выбрано так, что

$$\tilde{A}(z)=\begin{pmatrix} N(z) & 0\\ 0 & \overline{N}(z)\end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где $N(z)$ — квадратная матрица порядка r, все собственные значения которой имеют положительные коэффициенты при мнимой части. При таком выборе $C(z)$ (который, очевидно, возможен)

$$X(z)=C^{-1}(z)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}[\tilde{A}(z)-\lambda]^{-1}d\lambda\cdot C(z)=$$

$$=C^{-1}(z)\begin{pmatrix}-E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}C(z), \tag{1.4}$$

где E_r — единичная матрица порядка r. Последнее равенство легко получается непосредственным вычислением входящего в него интеграла. Из (1.4) следует, что элементарные делители матрицы $X(z)-\lambda$ не зависят от $z\in D$ и все первой степени. Поэтому к матрице $X(z)$ применима теорема И. Г. Петровского, на основании которой существует обратимая матрица $\tilde{P}(z)$, непрерывно дифференцируемая в $\tilde{D}$ l раз по x и y, такая, что

$$\tilde{P}(z)\,X(z)\,\tilde{P}^{-1}(z)=\begin{pmatrix}-E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

при всех $z\in\tilde{D}$. Обозначим $P_1(z)$ $(P_2(z))$ матрицу, состоящую из r первых (последних) строк матрицы $\tilde{P}(z)$, так что

$$\tilde{P}(z)=\begin{pmatrix}P_1(z)\\ P_2(z)\end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Покажем, что в качестве матрицы $P(z)$, указанной в формулировке теоремы, можно взять матрицу

$$P(z)=\begin{pmatrix}P_1(z)\\ \overline{P_1(z)}\end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Очевидно, эта матрица непрерывно дифференцируема в $\tilde{D}$ l раз по x и y. Докажем, что она обратима. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что ее строки, которые мы обозначим

$$a_1(z), \ldots, \quad a_r(z), \quad \overline{a_1(z)}, \ldots, \quad \overline{a_r(z)}, \tag{1.8}$$

линейно независимы при любом $z \in \tilde{D}$.

Заметим сначала, что из равенства

$$Re\{X(z)\} = Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}[A(z)-\lambda]^{-1}d\lambda + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R^-}[A(z)-\lambda]^{-1}d\lambda\right\} = Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}[A(z)-\lambda]^{-1}d\lambda\right\},$$

справедливого на основании теоремы Коши для всех достаточно больших R, следует

$$Re\{X(z)\} = \lim_{R\to\infty} Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{C_R}[A(z)-\lambda]^{-1}d\lambda\right\} = -\frac{1}{2}E.$$

Здесь C_R — полуокружность $|\lambda| = R$, $Im\,\lambda > 0$.

Отсюда

$$a_k(z)\,X(z) + a_k(z)\overline{X(z)} = -a_k(z) \qquad (k = 1, \ldots, r).$$

С другой стороны, из (1.5)

$$a_k(z)\,X(z) = -a_k(z) \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{1.9}$$

и, следовательно,

$$\overline{a_k(z)}\,X(z) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r). \tag{1.10}$$

Пусть теперь при некотором $z \in \tilde{D}$ имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k\, a_k(z) + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k\, \overline{a_k(z)} = 0.$$

Умножая его справа на $X(z)$ и з(1 .9) и (1.10) получим

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k\, a_k(z) = 0.$$

Но векторы $a_k(z)$ $(\kappa = 1, \ldots, r)$ линейно независимы, что следует из обратимости матрицы $P(z)$. Поэтому $\beta_k = \gamma_k = 0$ $(\kappa = 1, \ldots, r)$, что и доказывает линейную независимость векторов (1.8) при любом $z \in \tilde{D}$.

Для полного доказательства теоремы остается доказать равенство (1.1).

Обозначим

$$\tilde{C}(z) = C(z)\,\tilde{P}^{-1}(z). \tag{1.11}$$

Тогда из (1.4) и (1.5) следует

$$\tilde{C}(z)\begin{pmatrix}-E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\tilde{C}^{-1}(z)=\begin{pmatrix}-E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица $\tilde{C}(z)$ имеет вид

$$\tilde{C}(z)=\begin{pmatrix}C_1(z) & 0\\ 0 & C_2(z)\end{pmatrix},$$

где $C_1(z)$ и $C_2(z)$ — квадратные матрицы порядка r. Отсюда и из (1.3)

$$\tilde{C}^{-1}(z)\tilde{A}(z)\tilde{C}(z)=\begin{pmatrix}A_0(z) & 0\\ 0 & \tilde{A}_0(z)\end{pmatrix}, \qquad (1.12)$$

где

$$A_0(z)=C_1^{-1}(z)N(z)C_1(z),\ \tilde{A}_0(z)=C_2^{-1}(z)\overline{N(z)}C_2(z),$$

причем, очевидно, все собственные значения матрицы $A_0(z)$ имеют положительные коэффициенты при мнимых частях. Из (1.12), (1.11), (1.2) и (1.6) следует

$$\begin{pmatrix}A_0(z) & 0\\ 0 & \tilde{A}_0(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1(z)\\ P_2(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1(z)\\ P_2(z)\end{pmatrix}A(z),$$

так что

$$A_0(z)P_1(z)=P_1(z)A(z),$$
$$\overline{A_0(z)}\,\overline{P_1(z)}=\overline{P_1(z)}A(z).$$

Отсюда и из (1.7) следует (1.1). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь эллиптическую систему уравнений

$$A(z)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+B(z)u+\iint\limits_D R(z,\zeta)u(\zeta)\,d\xi\,d\eta=f(z), \qquad (1.13)$$

где $A(z)$, $B(z)$, $R(z,\zeta)$ — вещественные квадратные матрицы порядка $2r$, определенные при $z=x+iy\in\tilde{D}$, $\zeta=\xi+i\eta\in D\subseteq\tilde{D}$, при чем $A(z)$ имеет непрерывные по x и y производные в $\tilde{D}$ до порядка $l\geqslant 1$. Пусть $P(z)$ — матрица, построенная по $A(z)$ так, как это сделано в теореме. Тогда $P^{-1}(z)$ на основании (1.7) имеет вид

$$P^{-1}(z)=\left(P^{(1)}(z)-iP^{(2)}(z),\,P^{(1)}(z)+iP^{(2)}(z)\right), \qquad (1.14)$$

где $P^{(1)}(z)$, $P^{(2)}(z)$ — вещественные матрицы, состоящие из $2r$ строк и r столбцов.

Обозначим

$$P_*(z)=(P^{(1)}(z),P^{(2)}(z))=\frac{1}{2}P^{-1}(z)\begin{pmatrix}E_r & iE_r\\ E_r & -iE_r\end{pmatrix}. \qquad (1.15)$$

Очевидно, $P_*(z)$ — обратимая при всех $z\in\tilde{D}$ вещественная матрица, имеющая непрерывные по x и y производные до порядка l в области $\tilde{D}$. Из (1.1) следует, что

$$P_*^{-1}(z)\,A(z)\,P_*(z)=\begin{pmatrix} A^{(1)}(z) & -A^{(2)}(z) \\ A^{(2)}(z) & A^{(1)}(z)\end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

где $A^{(1)}(z)+i\,A^{(2)}(z)=A_0(z)$.

Сделаем в системе (1.13) преобразование

$$u(z)=P_*(z)\,u_*(z). \tag{1.17}$$

Получим

$$A_*(z)\frac{\partial u_*}{\partial x}-\frac{\partial u_*}{\partial y}+B_*(z)\,u_*+\iint\limits_D R_*(z,\zeta)\,u_*(z)\,d\xi\,d\eta=f_*(z), \tag{1.18}$$

где

$$A_*(z)=P_*^{-1}(z)\,A(z)\,P_*(z),$$

$$B_*=P_*^{-1}A\frac{\partial P_*}{\partial x}-P_*^{-1}\frac{\partial P_*}{\partial y}+P_*^{-1}BP_*,$$

$$R_*(z,\zeta)=P_*^{-1}(z)\,R(z,\zeta)\,P_*(\zeta),$$

$$f_*(z)=P_*^{-1}(z)f(z).$$

Таким образом, доказано, что эллиптическая система уравнений (1.13) приводится гладким неособым линейным преобразованием к каноническому виду. Поэтому в дальнейшем (§§ 2—6) ограничимся рассмотрением эллиптических систем уравнений первого порядка, имеющих канонический вид.

2. ЗАДАЧА КОШИ

Пусть D — конечная односвязная область с гладкой в смысле Гельдера границей Γ. Рассматривается эллиптический дифференциальный оператор

$$Lu=A(z)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+B(z)\,u+\iint\limits_D R(z,\zeta)\,u(\zeta)\,d\xi\,d\eta, \tag{2.1}$$

где A, B, R — вещественные квадратные матрицы порядка $2r$, u — столбец, состоящий из $2r$ элементов

$$z=x+iy, \qquad \zeta=\xi+i\eta.$$

Предполагается, что матрица $A(z)$ имеет первые непрерывные в смысле Гельдера производные по x и y в некоторой области $\widetilde{D}\supset D+\Gamma$; $B(z)$ — непрерывна в смысле Гельдера в $\widetilde{D}$;

$$R(z,\zeta)=\frac{\widetilde{R}(z,\zeta)}{|z-\zeta|^{\alpha}}, \qquad (0\leqslant\alpha<2).$$

где $\widetilde{R}(z,\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных z и ζ в $\widetilde{D}$.

Наконец, предполагается, что система $Lu=f$ имеет канонический вид в смысле § 1. Будет рассматриваться только тот случай задачи Коши, когда условия заданы на всем контуре Γ, а решение ищется во всей области. Для дальнейшего задачу Коши удобнее сформулировать для оператора

$$Mv = -\frac{\partial A'(z)v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + B'(z)v + \iint\limits_D R'(\zeta, z)v(\zeta)\,d\xi\,d\eta, \qquad (2.2)$$

сопряженного с (2.1) в смысле Лагранжа. Обозначим через K класс функциональных столбцов, имеющих первые непрерывные производные в D, непрерывных в $D+\Gamma$ и удовлетворяющих условию Гельдера на Γ. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти функциональный столбец v класса K, удовлетворяющий системе

$$Mv=0$$

в области D и условию

$$v|_\Gamma = g,$$

где g — заданный на Γ функциональный столбец, непрерывный в смысле Гельдера. Необходимые условия разрешимости задачи 1 непосредственно следуют из формулы Грина

$$\iint\limits_D [(Mv)'u - v'Lu]\,dx\,dy = \int\limits_\Gamma v'(z)\,\sigma(z)\,u(z)\,ds, \qquad (2.3)$$

где

$$\sigma(z) = A(z)\cos(nx) - \cos(ny), \qquad (2.4)$$

(nx), (ny) — углы внутренней нормали с осями x и y соответственно. Очевидно, для разрешимости задачи 1 необходимо, чтобы

$$\int\limits_\Gamma g'(z)\,\sigma(z)\,u(z)\,ds = 0$$

для всех решений u класса K системы

$$Lu=0.$$

Путем сведения задачи 1 к интегральным уравнениям Фредгольма будет показано, что это условие является также и достаточным.

Для этого надо будет рассмотреть интегральные операторы, ядрами которых являются фундаментальные матрицы для системы с постоянными коэффициентами.

Такие матрицы для общего случая (без ограничения на число измерений и порядок дифференцирования) были построены Я. Б. Лопатинским [4]. Укажем, в частности, вид этой матрицы в рассматриваемом случае. Пусть τ — некоторая фиксированная точка области $\tilde{D}$. Тогда матрица

$$\psi_0(\tau, \zeta - z) = \frac{1}{2\pi} j\,[(\xi - x) + A(\tau)(\eta - y)]^{-1}, \qquad (2.5)$$

где

$$J=\begin{pmatrix}0 & -E_r\\ E_r & 0\end{pmatrix},\ z=x+iy,\ \zeta=\xi+i\eta, \tag{2.6}$$

E_r — единичная матрица порядка r, является фундаментальной матрицей системы

$$A(\tau)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{2.7}$$

Она обладает следующими свойствами:

1. При $z\neq\zeta$ матрица (2.5) удовлетворяет системе (2.7).

2. Для любого столбца $f(z)$, удовлетворяющего условию Гельдера в некоторой окрестности точки z, имеет место равенство

$$f(z)=\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{C_\rho}\psi_0(\tau,\zeta-z)\,[A(\tau)\cos(n\xi)-\cos(n\eta)]f(\zeta)\,ds, \tag{2.8}$$

где C_ρ — окружность с центром в точке z радиуса ϱ, n — внутренняя нормаль к ней.

Рассмотрим теперь интеграл

$$u(z)=\iint\limits_D\varphi_0(\zeta,z)\,\alpha(\zeta)\,d\xi\,d\eta \qquad (\zeta=\xi+i\eta), \tag{2.9}$$

где

$$\varphi_0(\zeta,z)=\psi_0(z,\zeta-z), \tag{2.10}$$

$\alpha(\zeta)$ — функциональный столбец, состоящий из $2r$ элементов. Как показано Я. Б. Лопатинским [5] в общем случае, при наличии у столбца $\alpha(\zeta)$ непрерывных первых производных в D $u(z)$ также имеет первые непрерывные производные в D, и имеет место равенство

$$Lu(z)=\alpha(z)+\iint\limits_D q(\zeta,z)\,\alpha(\zeta)\,d\xi\,d\eta, \tag{2.11}$$

где

$$\begin{gathered}q(\zeta,z)=L\varphi_0(\zeta,z)=-\frac{1}{2\pi}J\,[(\xi-x)+A(z)(\eta-y)]^{-1}\times\\ \times\left[A(z)\frac{\partial A(z)}{\partial x}-\frac{\partial A(z)}{\partial y}\right][(\xi-x)+A(z)(\eta-y)]^{-1}(\eta-y)+\\ +\frac{1}{2\pi}B(z)\,J\,[(\xi-x)+A(z)(\eta-y)]^{-1}+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D R(z,\zeta_1)\,J\,[(\xi-\xi_1)+\\ +A(\zeta_1)(\eta-\eta_1)]^{-1}d\xi_1\,d\eta_1\,(\zeta_1=\xi_1+i\eta_1).\end{gathered} \tag{2.12}$$

Если $\alpha(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера в $D+\Gamma$, то к интегралу (2.9) применяются результаты С. Г. Михлина [7] о дифференцировании интегралов со слабой особенностью, и утверждение о существовании непрерывных первых производных в D у $u(z)$ и равенство (2.11) остаются справедливыми.

Отсюда, в частности, следует, что если интегральное уравнение Фредгольма*

$$\alpha(z)+\iint\limits_{D} q(\zeta, z)\,\alpha(\zeta)\,d\xi\,d\eta=f(z) \tag{2.13}$$

разрешимо для данного $f(z)$ в класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера в $D+\Gamma$, то уравнение

$$Lu=f \tag{2.14}$$

разрешимо в класс функций u, удовлетворяющих условию Гельдера в $D+\Gamma$ и имеющих первые непрерывные производные в D. Обратное, вообще говоря, неверно. Покажем, как можно дополнить ядро интеграла (2.9) до некоторого ядра $K(\zeta, z)$ так, чтобы полученное указанным выше путем интегральное уравнение было разрешимо при тех же частях f, при которых разрешимо уравнение (2.14). Обозначим через H линейное многообразие функциональных столбцов, состоящих из $2r$ элементов, которые являются функциями, удовлетворяющими условию Гельдера в $D+\Gamma$.

Пусть F_1 — линейное многообразие, состоящее из тех $f\in H$, для которых разрешимо уравнение (2.13) в H; F — линейное многообразие, состоящее из тех $f\in H$, для которых разрешимо уравнение (2.14) в классе функций $u\in H$, имеющих непрерывные производные в D. Очевидно, $F_1\subseteq F$ и H разлагается в прямую сумму

$$H=F_1\dotplus H_1,$$

где H_1 — конечномерное линейное многообразие решений из H однородного уравнения, союзного с (2.13) (заметим, что каждое непрерывное решение этого уравнения принадлежит H). Поэтому F может быть представлено в виде

$$F=F_1\dotplus G, \tag{2.15}$$

где $G=F\cap H_1$. Если $G=0$, то $F=F_1$ и полагаем $K(\zeta, z)=\varphi_0(\zeta, z)$. В противном случае обозначим $g_1,\ldots,g_n$ — базис G, и пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — линейно независимые решения из H однородного уравнения, соответствующего (2.13). Существование n таких решений следует из того, что линейное многообразие непрерывных решений однородного уравнения соответствующего (2.13), принадлежит H и имеет размерность, равную размерности H_1. Так как $G\subseteq F$, то существуют функции $u_j\in H$, имеющие непрерывные первые производные в D и удовлетворяющие уравнению.

$$Lu_j=g_j \qquad (j=1,\ldots,n).$$

Пусть, наконец, χ_j — функциональные столбцы, непрерывно дифференцируемые в $D+\Gamma$ и удовлетворяющие условию

* Систему уравнений, записанную в матричной форме в виде одного уравнения, будем и в дальнейшем называть просто «уравнение» вместо «система уравнений». Функциональные столбцы там, где это не вызовет неясностей, будем называть просто функциями.

$$(\chi_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

причем под (u, v) здесь и в дальнейшем понимается:

$$(u, v) = \iint_D u'(z)\, v(z)\, dx\, dy,$$

u, v — функциональные столбцы, состоящие из $2r$ элементов, $'$ означает транспонирование.

Тогда упомянутое выше дополнение ядра интеграла (2.9) производится так:

$$K(\zeta, z) = \varphi_0(\zeta, z) + \sum_{j=1}^{n} u_j(z)\, \chi_j'(\zeta). \tag{2.16}$$

Пусть теперь

$$u(z) = \iint_D K(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi\, d\eta,$$

где $\alpha \in H$. Тогда

$$Lu(z) = \alpha(z) + \iint_D Q(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi\, d\eta,$$

где

$$Q(\zeta, z) = q(\zeta, z) + \sum_{j=1}^{n} g_j(z)\, \chi_j'(\zeta).$$

Покажем, что для разрешимости уравнения

$$Lu = f \qquad (f \in H)$$

в классе функций $u \in H$, имеющих непрерывные производные в D, необходимо и достаточно, чтобы было разрешимо в H уравнение

$$T\alpha \equiv \alpha(z) + \iint_D Q(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi\, d\eta = f(z). \tag{2.17}$$

Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть $f \in F$. На основании (2.15)

$$f = f_1 + \sum_{j=1}^{n} c_j g_j \qquad (f_1 \in F_1).$$

Пусть $\alpha_0 \in H$ — решение уравнения (2.13) при правой части f_1. Тогда $\alpha = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \alpha_j$, где $\tilde{c}_j = c_j - (\chi_j, \alpha_0)$, есть решение уравнения (2.17). Действительно,

$$Ta = f_1 + \sum_{j=1}^{n} g_j\Big(\chi_j, \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \alpha_j\Big) = f_1 + \sum_{j=1}^{n} g_j(\chi_j, \alpha_0) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j g_j = f.$$

Теперь может быть доказана теорема о разрешимости задачи 1.

Теорема 1. *Для разрешимости задачи 1 необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{\Gamma} g'(z)\, \sigma(z)\, u(z)\, ds = 0 \qquad (2.18)$$

для всех решений и класса K уравнения

$$Lu = 0.$$

Доказательство. Доказательства требует только достаточность. Рассмотрим функцию

$$\chi(z) = \int_{\Gamma} K'(z, \zeta)\, \sigma'(\zeta)\, g(\zeta)\, d_{\zeta}s, \qquad (2.19)$$

где $K(z, \zeta)$ определено равенством (2.16), $\sigma(\zeta)$ — равенством (2.4), $'$ означает транспонирование. Покажем, что если $g(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ, то $\chi(z)$ имеет первые непрерывные производные в D по x и y и непрерывно продолжима на Γ. Действительно,

$$\chi(z) = I(z) + \sum_{j=1}^{n} \chi_j(z) \int_{\Gamma} u_j'(\zeta)\, \sigma'(\zeta)\, g(\zeta)\, d_{\zeta}s,$$

где

$$I(z) = \int_{\Gamma} \varphi_0'(z, \zeta)\, \sigma'(\zeta)\, g(\zeta)\, d_{\zeta}s.$$

Так как $\chi_j(z)$ $(j = 1, \ldots, n)$ имеют непрерывные производные в $D + \Gamma$, то остается рассмотреть $I(z)$. Существование непрерывных в D первых производных по x и y функции $I(z)$ очевидно.

Пусть теперь t — произвольная точка Γ и $z \to t$ $(z \in D)$. Обозначим через z' точку пересечения прямой, параллельной нормали к Γ в точке t и проходящей через z, с кривой Γ. Тогда

$$I(z) = \int_{\Gamma} \varphi_0'(z, \zeta)\, \sigma'(\zeta)\,[g(\zeta) - g(z')]\, d_{\zeta}s + \int_{\Gamma} \varphi_0'(z, \zeta)\, \sigma'(\zeta)\, d_{\zeta}s \cdot g(z'). \qquad (2.20)$$

Первый интеграл равномерно сходится. Для преобразования второго интеграла применим формулу Грина (2.3) к области $D\varrho$, полученной из D вырезанием достаточно малого круга $|z - \zeta| \leqslant \varrho$, матрицам $v = E$, $u = \varphi_0(z, \zeta)$ и операторам

$$L_0 u = A(z)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad M_0 v = -\frac{\partial A'(z)\, v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

полученным из (2.1) и (2.2) при $B = 0$ и $R = 0$.

Получим

$$\iint\limits_{D_\rho} \left[-\frac{\partial A(\zeta)}{\partial \xi} \varphi_0(z, \zeta) - q_0(z, \zeta) \right] d\xi\, d\eta =$$

$$= \int\limits_{\Gamma} \sigma(\zeta) \varphi_0(z, \zeta)\, d_\zeta s - \int\limits_{C_\rho} \sigma(\zeta) \varphi_0(z, \zeta)\, d_\zeta s, \tag{2.21}$$

где C_ρ — то же, что в (2.8),

$$q_0(z, \zeta) = L_0 \varphi_0(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} J[(x - \xi + A(\zeta)(y - \eta)]^{-1} \times$$

$$\times \left[A(\zeta) \frac{\partial A(\zeta)}{\partial \xi} - \frac{\partial A(\zeta)}{\partial \eta} \right] [(x - \xi) + A(\zeta)(y - \eta)]^{-1} (y - \eta).$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\rho \to 0} \int\limits_{C_\rho} \sigma(\zeta) \varphi_0(z, \zeta)\, d_\zeta s = \frac{1}{2\pi} \lim_{\rho \to 0} \int\limits_{C_\rho} [A(\zeta) \cos(n\xi) - \cos(n\eta)] \times$$

$$\times J[(x - \xi) + A(\zeta)(y - \eta)]^{-1}\, d_\zeta s =$$

$$= \frac{1}{2\pi} J \lim_{\rho \to 0} \int\limits_{C_\rho} [A(z) \cos(n\xi) - \cos(n\eta)] [(x - \xi) + A(z)(y - \eta)]^{-1} d_\zeta s = -E.$$

Последнее равенство следует из (2.8).

Переходя в (2.21) к пределу при $\varrho \to 0$ и транспонируя, получим

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi_0'(z, \zeta) \sigma'(\zeta)\, d_\zeta s = \iint\limits_{D} \left[-\varphi_0'(z, \zeta) \frac{\partial A'(\zeta)}{\partial \xi} - q_0'(z, \zeta) \right] d\xi\, d\eta - E.$$

Отсюда и из (2.20) следует, что предельное значение $I(z)$ при $z \to t$ существует и равно

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi_0'(t, \zeta) \sigma'(\zeta) [g(\zeta) - g(t)]\, d_\zeta s + \iint\limits_{D} \left[-\varphi_0'(t, \zeta) \frac{\partial A'(\zeta)}{\partial \xi} - \right.$$

$$\left. - q_0'(t, \zeta) \right] d\xi d\eta \cdot g(t) - g(t).$$

Если под значением $I(t)$ $(t \in \Gamma)$ понимать это выражение, то $I(z)$ оказывается непрерывной в $D + \Gamma$. Теперь очевидным образом определяется значение $\chi(z)$ на Γ так, что $\chi(z)$ становится непрерывной в $D + \Gamma$ функцией.

Пусть теперь непрерывная в смысле Гельдера на Γ функция $g(z)$ удовлетворяет условию (2.18), $\chi(z)$ — определено указанным выше образом. Покажем, что уравнение

$$v(z) + \iint\limits_{D} Q'(z, \zeta)\, v(\zeta)\, d\xi\, d\eta = -\chi(z) \tag{2.22}$$

разрешимо в классе непрерывных функций и каждое его непрерывное решение v является решением задачи I.

Для доказательства разрешимости уравнения (2.22) в классе непрерывных функций достаточно, очевидно, доказать, что

$$(\chi, \alpha) = 0, \tag{2.23}$$

каково бы ни было непрерывное решение уравнения

$$T\alpha = 0$$

(см. [2.17]). Так как каждое непрерывное решение α этого уравнения удовлетворяет условию Гельдера в $D + \Gamma$, то функция

$$u(z) = \iint_D K(\zeta, z)\,\alpha(\zeta)\,d\xi d\eta$$

является решением класса K уравнения $Lu = 0$. Поэтому из условия (2.18) и из равенства

$$\int_\Gamma g'(z)\,\sigma(z)\,u(z)\,ds = (\chi, \alpha)$$

следует (2.23), что и доказывает существование непрерывного в $D + \Gamma$ решения $v(z)$ уравнения (2.22). Покажем, что $v(z)$ имеет непрерывные в D первые производные по x и y.

Так как второе слагаемое в левой части равенства (2.22) удовлетворяет условию Гельдера в $D + \Gamma$, а $\chi(z)$ имеет непрерывные в D первые производные по x и y, то $v(z)$ удовлетворяет условию Гельдера в каждой замкнутой подобласти области D.

Для доказательства существования непрерывных в D производных по x и y функции $v(z)$ достаточно доказать это для интеграла, входящего в (2.22). Имеем

$$\iint_D Q'(z, \zeta)\,v(\zeta)\,d\xi\,\partial\eta = \sum_{j=1}^{n} \chi_j(z) \iint_D g_j'(\zeta)\,v(\zeta)\,d\xi d\eta +$$

$$+ \iint_D q_1(z, \zeta)\,v(\zeta)\,d\xi\,d\eta + \frac{1}{2\pi}\iint_D [(x - \xi_1) + A'(\zeta_1)\,(y - \eta_1)]^{-1} j'\,d\xi_1\,d\eta_1 \times$$

$$\times \iint_D R'(\zeta, \zeta_1)\,v(\zeta)\,d\xi\,d\eta \qquad (\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1), \tag{2.24}$$

где

$$q_1(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi}(y - \eta)\,[(x - \xi) + A'(\zeta)(y - \eta)]^{-1} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial A'(\zeta)}{\partial \xi} A'(\zeta) - \frac{\partial A'(\zeta)}{\partial \eta}\right] [(x - \xi) + A'(\zeta)(y - \eta)]^{-1} j' +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}[(x - \xi) + A'(\zeta)(y - \eta)]^{-1} j'\,B'(\zeta).$$

Первое слагаемое в правой части (2.24) имеет, очевидно, первые непрерывные производные по x и y в D. Рассмотрим второе слагаемое. Пусть D_1 — произвольная область (с гладкой границей Γ_1), лежащая вместе с границей в области D.

Тогда

$$\iint_D q_1(z, \zeta)\, v(\zeta)\, d\xi d\eta = \iint_{D_1} q_1(z, \zeta)\, v(\zeta)\, d\xi d\eta + \iint_{D-D_1} q_1(z, \zeta)\, v(\zeta)\, d\xi d\eta. \tag{2.25}$$

Второй интеграл справа имеет непрерывные производные по x и y в D_1. Так как $v(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера $D_1 + \Gamma_1$, то применяя к первому интегралу справа в (2.25) рассуждения, аналогичные проведенным на стр. 91 — 93 в книге С. Г. Михлина [7], заключаем, что этот интеграл имеет непрерывные производные по x и y в D_1. Ввиду указанного произвола в выборе D_1 отсюда следует существование непрерывных производных по x и y в D интеграла, стоящего слева в (2.25). Наконец, так как внутренний интеграл, входящий в третье слагаемое правой части равенства (2.24) удовлетворяет условию Гельдера в $D + \Gamma$, то и третье слагаемое справа в (2.24) имеет непрерывные производные по x и y в D. Таким образом, существование непрерывных производных $v(z)$ по x и y в D доказано.

Пусть $h(z)$ — произвольный функциональный столбец, имеющий непрерывные в смысле Гельдера первые производные по x и y в $D + \Gamma$. Тогда $Lh \in H$ и поэтому на основании утверждения, приведенного выше, уравнение

$$T\alpha = Lh \qquad (\alpha \in H) \tag{2.26}$$

разрешимо. Положим

$$u(z) = \iint_D K(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi d\eta, \tag{2.27}$$

где α — решение уравнения (2.26). Тогда $L(h - u) = 0$ и на основании (2.18)

$$\int_\Gamma g'(z)\, \sigma(z)\, [h(z - u(z)]\, ds = 0.$$

Поэтому на основании (2.27), (2.19), (2.22) и (2.26)

$$\int_\Gamma g'(z)\, \sigma(z)\, h(z)\, ds = \int_\Gamma g'(z)\, \sigma(z)\, u(z)\, ds = (\chi, \alpha) = -(v, T\alpha) = -(v, Lh). \tag{2.28}$$

Полагая, в частности, h равным нулю в граничной полоске, будем иметь

$$(v, Lh) = 0.$$

Отсюда и из формулы Грина (2.3), примененной к v и h, получим

$$(Mv, h) = 0.$$

Так как последнее равенство верно для любого функционального столбца h, имеющего непрерывные в смысле Гельдера в D первые производные и обращающегося в нуль в граничной полоске, то из него следует, что

$$Mv = 0$$

в D. Применяя снова формулу (2.3) к v и произвольному функциональному столбцу h, имеющему непрерывные в смысле Гельдера производные в $D + \Gamma$, получим

$$\int\limits_{\Gamma} v'(z)\, \sigma(z)\, h(z)\, ds = -(v, Lh).$$

Отсюда и из (2.28) следует

$$\int\limits_{\Gamma} [g'(z) - v'(z)]\, \sigma(z)\, h(z)\, ds = 0.$$

Учитывая, что рассматриваемое множество функций h плотно в пространстве $C(\Gamma)$ непрерывных на Γ функций и что матрица $\sigma(z)$ обратима вследствие условия эллиптичности, заключаем, что

$$v|_{\Gamma} = g.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь однородную задачу 1 ($g = 0$). Легко показать на примере, построенном путем соответствующего подбора интегрального слагаемого в (2.2), что эта задача может иметь нетривиальные решения. Пусть v — решение этой задачи, α — произвольная функция из H. Тогда, применяя формулу Грина (2.3) к v и функции

$$u(z) = \iint\limits_{D} K(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi d\eta,$$

получим

$$(v, T\alpha) = 0.$$

Поэтому v есть решение уравнения

$$v(z) + \iint\limits_{D} Q'(z, \zeta)\, v(\zeta)\, d\xi d\eta = 0. \tag{2.29}$$

Обратно, так как при $g = 0$ уравнение (2.22) принимает вид уравнения (2.29), то каждое непрерывное решение уравнения (2.29) является решением однородной задачи 1. Итак, линейное многообразие решений однородной задачи 1 совпадает с линейным многообразием непрерывных решений уравнения (2.29). Отсюда, в частности, следует, что однородная задача 1 может иметь только конечное число линейно независимых решений. Доказана теорема 2, формулированная ниже.

Теорема 2. *Для разрешимости уравнения*

$$Lu=f \qquad (f\in H)$$

в классе функций $u\in H$, *имеющих непрерывные производные по* x *и* y *в* D, *необходимо и достаточно, чтобы правая часть* f *была ортогональна ко всем решениям* v *однородной задачи 1:*

$$(v,\ f)=0.$$

3. ПРИВЕДЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Будет рассматриваться следующая граничная задача.

Задача II. Найти функциональный столбец $u(z)$ класса K, удовлетворяющий системе

$$Lu=0 \tag{3.1}$$

в D и граничному условию

$$\Lambda u\equiv a(t)\,u(t)+\int\limits_{\Gamma} b(t,t_1)\,u(t_1)\,ds_1=f(t) \qquad (t\in\Gamma). \tag{3.2}$$

Здесь под Lu и D понимается то же, что в § 2 (см. (2.1)); $a(t)$, $b(t,t_1)$ — вещественные матрицы, содержащие r строк и $2r$ столбцов, причем $a(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ

$$b(t,t_1)=\frac{\tilde b(t,t_1)}{|t-t_1|^{\lambda}} \qquad (0\leqslant\lambda<1), \tag{3.3}$$

где $\tilde b(t,t_1)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных t, t_1 на Γ; ds_1 — элемент дуги в точке $t_1\in\Gamma$; $f(t)$ — заданный функциональный столбец, удовлетворяющий условию Гельдера на Γ.

Начнем с построения ядра интегрального представления решений системы (3.1), при помощи которого задача II будет сведена к интегральным уравнениям. Для этого понадобятся некоторые предварительные рассмотрения. Пусть D_1—произвольная односвязная область с гладкой границей Γ_1 такая, что $D+\Gamma\subset D_1$, $D_1+\Gamma_1\subset\tilde D$. Обозначим через $H(D_1)$ — множество всех функциональных столбцов, удовлетворяющих условию Гельдера в $D_1+\Gamma_1$: $H_0(D_1)$ — множество всех функциональных столбцов из $H(D_1)$, имеющих первые непрерывные производные в D_1.

Пусть, далее, $F(D_1)$ — множество всех функциональных столбцов $f\in H(D_1)$, для которых разрешимо уравнение

$$Lu=f \qquad (u\in H_0(D_1)).$$

Обозначим, наконец, через $V(D_1)$ линейное многообразие всех функциональных столбцов v, определенных на всей плоскости, равных нулю вне $D_1+\Gamma_1$, удовлетворяющих условию Гельдера в $D_1+\Gamma_1$ и условию

$$\iint\limits_{D_1} v'f\,dx\,dy=0 \tag{3.4}$$

для всех $f\in F(D_1)$. Укажем некоторые свойства линейного многообразия $V(D_1)$.

1. $V(D_1)$ конечномерно.

Действительно, пусть

$$u(z)=\iint\limits_{D_1}\varphi_0(\zeta, z)\,\alpha(\zeta)\,d\xi d\eta \qquad (z\in D_1),$$

где $\varphi_0(\zeta, z)$ определено равенством (2.10), $\alpha(\zeta)\in H(D_1)$. Тогда $u\in H_0(D_1)$ и

$$Lu=\alpha(z)+\iint\limits_{D_1}q(\zeta, z)\,\alpha(\zeta)\,d\xi d\eta\equiv T_1\alpha\in F(D_1),$$

где $q(\zeta, z)$ определено равенством (2.12).

Пусть v — произвольная функция из $V(D_1)$.

Тогда

$$\iint\limits_{D_1}v'\,T_1\,\alpha\,dx\,dy=0.$$

Так как это равенство верно для всех $\alpha\in H(D_1)$, то

$$v(z)+\iint\limits_{D_1}q'(z, \zeta)\,v(\zeta)\,d\xi d\eta=0, \tag{3.5}$$

откуда и следует утверждение.

2. Каждая функция $v\in V(D_1)$ обращается в нуль на Γ_1 и, следовательно, удовлетворяет условию Гельдера на всей плоскости.

Действительно, пусть $\zeta\in\bar{D}_1+\Gamma_1$ и c — произвольный постоянный столбец высоты $2r$. Тогда $u(z)=\varphi_0(\zeta, z)\,c\in H_0(D_1)$ и $Lu=q(\zeta, z)\,c\in F(D_1)$. Таким образом:

$$\iint\limits_{D_1}v'(z)\,q(\zeta, z)\,dx\,dy\cdot c=0.$$

Так как это верно для произвольного c, то

$$\iint\limits_{D_1}v'(z)\,q(\zeta, z)\,dx\,dy=0.$$

Переходя здесь к пределу при $\zeta\to t\in\Gamma_1$, получим

$$\iint\limits_{D_1}q'(t, \zeta)\,v(\zeta)\,d\xi d\eta=0. \tag{3.6}$$

С другой стороны, переходя в (3.5) к пределу при $z'\to t$, получим

$$v(t)+\iint\limits_{D_1}q'(t, \zeta)\,v(\zeta)\,d\xi d\eta=0.$$

Отсюда и из (3.6) следует, что $v(t)=0$, что и требовалось доказать.

3. Если D_1 и D_2 — две области рассматриваемого вида и $D_2 \subseteq D_1$, то $v(D_2) \subseteq v(D_1)$.

Действительно, пусть $v \in V(D_2)$. Тогда v обращается в нуль вне $D_1+\Gamma_1$ и на основании предыдущего удовлетворяет условию Гельдера $D_1+\Gamma_1$. Если $f \in F(D_1)$, то $f \in F(D_2)$ и, следовательно,

$$\iint\limits_{D_1} v' f\,dx\,dy = \iint\limits_{D_2} v' f\,dx\,dy = 0, \text{ т. е. } v \in V(D_1).$$

Из этих свойств вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Существует односвязная область D_1 с гладкой границей Γ_1 такая, что $D+\Gamma \subset D_1$, $D_1+\Gamma_1 \subseteq \tilde{D}$ и что для любой функции $v \in V(D_1)$ выполняется условие $v(z)=0$ для всех $z \in D_1 - D$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для любой области D_1 рассматриваемого вида существует функция $v \in V(D_1)$ и точка $z_1 \in D_1 - D$, такие, что $v(z_1) \neq 0$. Ввиду непрерывности v без ограничения общности можно считать, что $z_1 \,\bar{\in}\, \Gamma$. Построим теперь цепочку областей следующим образом. Зафиксируем одну из рассматриваемых областей D_1 и выбранную указанным образом точку $z_1 \in D_1 - (D+\Gamma)$. В области $D_1 - (D+\Gamma)$ построим замкнутый гладкий контур Γ_2 так, чтобы он проходил через точку z_1 и являлся границей некоторой односвязной области D_2, содержащей область $D+\Gamma$. Обозначим m_k размерность линейного многообразия $V(D_k)$ $(\kappa=1,\ 2)$. На основании свойства 3 $m_2 \leqslant m_1$. Но знак равенства здесь невозможен, так как $V(D_1)$ содержит функцию, отличную от нуля на Γ_2 и, следовательно, не принадлежащую $V(D_2)$.

Итак,

$$m_1 > m_2 > 0.$$

Аналогично, приняв область D_2 за исходную, построим область D_3 так, что размерность m_3 многообразия $V(D_3)$ удовлетворяет неравенству

$$m_2 > m_3 > 0.$$

Продолжая так далее, получим бесконечную последовательность областей D_k $(\kappa=1,\ 2,\ 3,\ldots)$ и бесконечную последовательность целых положительных чисел m_k, равных размерностям $V(D_k)$, для которых имеют место неравенства

$$m_1 > m_2 > \ldots > m_k > \ldots,$$

что, очевидно, невозможно. Лемма доказана.

В области D_1, указанной в лемме, и будет строиться ядро интегрального представления решений системы (3.1). Построение этого ядра совпадает по методу с построением фундаментальной матрицы в работе Я. Б. Лопатинского [4].

Проведем построение подобное тому, как это сделано выше, рассматривая вместо области D в интеграле (2.9) область D_1, указанную в лемме. Тогда получим матрицу вида

$$K_1(\zeta, z) = \varphi_0(\zeta, z) + \sum_{j=1}^{n_1} u_j(z)\,\chi_j'(\zeta) \qquad (z, \zeta \in D_1), \tag{3.7}$$

где $u_j \in H_0(D_1)$, $Lu_j = g_j \in H(D_1)$, χ_j — функциональные столбцы, непрерывно дифференцируемые $D_1 + \Gamma_1$. Она обладает следующими свойствами:

1. Если $\alpha \in H(D_1)$ и

$$u(z) = \iint\limits_{D_1} K_1(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi d\eta \qquad (z \in D_1), \tag{3.8}$$

то $u \in H_0(D_1)$ и

2. Если $\alpha \in H(D_1)$ и u определено равенством (3.8), то

$$Lu(z) = \alpha(z) + \iint\limits_{D_1} Q_1(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi d\eta,$$

где

$$Q_1(\zeta, z) = q(\zeta, z) + \sum_{j=1}^{n_1} g_j(z)\, \chi_j'(\zeta), \tag{3.9}$$

$q(\zeta, z)$ определено равенством (2.12).

3. Для существования решения $u \in H_0(D_1)$ уравнения

$$Lu = f \qquad (f \in H(D_1)) \tag{3.10}$$

необходимо и достаточно, чтобы было разрешимо в $H(D_1)$ уравнение

$$\alpha(z) + \iint\limits_{D_1} Q_1(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi d\eta = f(z). \tag{3.11}$$

Л е м м а 2. *Все непрерывные в $D_1 + \Gamma_1$ решения $v(z)$ однородного уравнения*

$$v(z) + \iint\limits_{D_1} Q_1'(z, \zeta)\, v(\zeta)\, d\xi d\eta = 0, \tag{3.12}$$

союзного с (3.11), *удовлетворяют условию Гельдера в $D_1 + \Gamma_1$ и обращаются в нуль в области $D_1 - D$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что ядро $Q_1(\zeta, z)$ имеет вид

$$Q_1(\zeta, z) = \frac{\widetilde{Q}_1(\zeta, z)}{|\zeta - z|^{\lambda_1}} \; (\zeta, z \in D_1 + \Gamma_1), \tag{3.13}$$

где $\widetilde{Q}_1(\zeta, z)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных ζ, $z \in D_1 + \Gamma_1$, $\lambda_1 > 1$ и может быть взято сколь угодно близким к единице.

Отсюда непосредственно, следует, что непрерывное решение v уравнения (3.12) удовлетворяет условию Гельдера в $D_1 + \Gamma_1$. Далее, вследствии того, что v ортогонально ко всем f, для которых разрешимо уравнение (3.11), а, следовательно, и (3.10), то условие (3.4) выполняется. Доопределив v, считая его равным нулю вне $D_1 + \Gamma_1$, получим, что $v \in V(D_1)$. Поэтому на основании леммы 1 $v(z)$ обращается в нуль в $D_1 - D$. Лемма доказана. Пусть

$$v_1, \ldots, v_k \text{ —} \tag{3.14}$$

— полная система линейно независимых непрерывных решений уравнения (3.12), которую мы будем считать ортонормированной.

Пусть, далее $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — полная система линейно независимых непрерывных решений однородного уравнения (3.11) ($f=0$). Введем новое ядро

$$Q_2(\zeta, z) = Q_1(\zeta, z) + \sum_{j=1}^{k} v_j(z)\,\alpha_j'(\zeta) \qquad (z, \zeta \in D_1 + \Gamma_1). \tag{3.15}$$

Очевидно, уравнение

$$\alpha(z) + \iint_{D_1} Q_2(\zeta, z)\,\alpha(\zeta)\,d\xi d\eta = 0$$

не имеет отличных от нуля непрерывных решений. Далее, ядро $Q_2(\zeta, z)$ имеет вид

$$Q_2(\zeta, z) = \frac{\tilde{Q}_2(\zeta, z)}{|\zeta - z|^{\lambda_1}} (\zeta, z \in D_1 + \Gamma_1), \tag{3.16}$$

где $\tilde{Q}_2(\zeta, z)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных $\zeta, z \in D_1 + \Gamma_1$; λ_1 то же, что в (3.13). Отсюда и из известных результатов теории Фредгольма следует, что существует решение $\psi(z, \zeta)$ уравнения

$$\psi(z, \zeta) + \iint_{D_1} Q_2(\zeta_1, z)\,\psi(\zeta_1, \zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1 =$$

$$= -Q_1(\zeta, z - \sum_{j=1}^{k} v_j(z)\,v_j'(\zeta) \qquad (\zeta, z \in D_1) \tag{3.17}$$

вида

$$\psi(z, \zeta) = \frac{\tilde{\psi}(z, \zeta)}{|z - \zeta|^{\lambda_1}} (z, \zeta \in D_1 + \Gamma_1), \tag{3.18}$$

где $\tilde{\psi}(z, \zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных z, ζ в $D_1 + \Gamma_1$. При этом используются оценки резольвенты. Из них и из обоих уравнений резольвенты следует, что резольвента представима в виде, подобном (3.16), откуда и получается (3.18).

Покажем, что матрица $\psi(z, \zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi(z, \zeta) + \iint_{D_1} Q_1(\zeta_1, z)\,\psi(\zeta_1, \zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1 =$$

$$= -Q_1(\zeta, z) - \sum_{j=1}^{k} v_j(z)\,v_j'(\zeta) \qquad (\zeta, z \in D_1). \tag{3.19}$$

Для этого на основании (3.15), очевидно, достаточно доказать, что

$$\iint\limits_{D_1} \alpha_i'(\zeta_1)\,\psi(\zeta_1,\zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1 = 0 \qquad (j=1,\ldots,k;\ \zeta\in D_1).$$

Так как функции (3.14) удовлетворяют уравнению (3.12), то

$$\iint\limits_{D_1} v_i'(z)\Big[\,Q_1(\zeta,z)+\sum_{j=1}^{k} v_j(z)\,v_j'(\zeta)\Big]\,dxdy=0$$

$(i=1,2,\ldots,k)$. Отсюда и из (3.17) следует, что

$$0=\iint\limits_{D_1} v_i'(z)\Big[\,\psi(z,\zeta)+\iint\limits_{D_1} Q_2(\zeta_1,z)\,\psi(\zeta_1,\zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1\Big]\,dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D_1}\Big[\,v_i'(z)+\iint\limits_{D_1} v_i'(\zeta_1)\,Q_1(z,\zeta_1)\,d\xi_1 d\eta_1\Big]\,\psi(z,\zeta)\,dx\,dy+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\iint\limits_{D_1} v_i'(z)\,v_j(z)\,dxdy\iint\limits_{D_1} \alpha_j'(\zeta_1)\,\psi(\zeta_1,\zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1=$$

$$=\iint\limits_{D_1}\alpha_i'(\zeta_1)\,\psi(\zeta_1,\zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1 \qquad (i=1,\ldots,k),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь матрицу

$$\varphi(\zeta,z)=K_1(\zeta,z)+\iint\limits_{D_1} K_1(\zeta_1,z)\,\psi(\zeta_1,\zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1 \tag{3.20}$$

$(z,\zeta\in D_1+\Gamma_1)$, где матрица $K_1(\zeta,z)$ определена равенством (3.7), $\psi(z,\zeta)$ — решение (3.18) уравнения (3.17). Она обладает следующими свойствами:

1.
$$\varphi(\zeta,z)=\frac{\tilde{\varphi}(\zeta,z)}{|\xi-z|^{\lambda}}\ (\zeta,z\in D_1+\Gamma_1), \tag{3.21}$$

где $\tilde{\varphi}(\zeta,z)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных ζ, $z\in D_1+\Gamma_1$, $\lambda>1$ и может быть взято сколь угодно близким к 1.

Действительно, из вида матрицы $K_1(\zeta,z)$ непосредственно следует, что

$$K_1(\zeta,z)=\frac{\tilde{K}_1(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{\lambda}}, \tag{3.22}$$

где $\tilde{K}_1(\zeta,z)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных ζ, $z\in D_1+\Gamma_1$, $\lambda>1$ и может быть взято сколь угодно близким к единице. Отсюда и из (3.18) следует (3.21).

2. При $\zeta \neq z$ $(\zeta, z \in D_1)$ матрица $\varphi(\zeta, z)$ имеет непрерывную производную по x и y.

Действительно, для первого слагаемого в правой части (3.20) это очевидно. Второе слагаемое запишем в виде

$$\iint\limits_{D_1} \varphi_0(\zeta_1, z)\, \psi(\zeta_1, \zeta)\, d\xi_1\, d\eta_1 + \sum_{j=1}^{n_1} u_j(z) \iint\limits_{D_1} \chi_j'(\zeta_1)\, \psi(\zeta_1, \zeta)\, d\xi_1\, d\eta_1.$$

К первому слагаемому здесь применимы результаты С. Г. Михлина [7] о дифференцировании интегралов со слабой особенностью, во втором слагаемом $u_j(z)$ $(j=1, \ldots, n_1)$ имеют непрерывные производные в D_1.

3. При $\zeta \neq z$ $(\zeta,\ z \in D_1)$ имеет место равенство

$$L\,\varphi(\zeta, z) \equiv A(z) \frac{\partial \varphi(\zeta, z)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(\zeta, z)}{\partial y} + B(z)\, \varphi(\zeta, z) +$$

$$+ \iint\limits_{D} R(z, \zeta_1)\, \varphi(\zeta, \zeta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1 = - \sum_{j=1}^{k} v_j(z)\, v_j'(\zeta), \tag{3.23}$$

где v_j $(j=1, \ldots, k)$ — функциональные столбцы (3.14). В частности, при $\zeta \in D_1 - D$, $z \in D_1$, $\zeta \neq z$

$$L\varphi(\zeta, z) = 0. \tag{3.24}$$

Для доказательства заметим сначала, что на основании равенств (3.7), (3.9) и (2.12)

$$LK_1(\zeta_1, z) = Q_1(\zeta, z).$$

Поэтому (см. стр. 36—37)

$$L\,\varphi(\zeta, z) = Q_1(\zeta, z) + \psi(z, \zeta) +$$

$$+ \iint\limits_{D_1} Q_1(\zeta_1, z)\, \psi(\zeta_1, \zeta)\, d\xi_1\, d\eta_1 = - \sum_{j=1}^{k} v_j(z)\, v_j'(\zeta).$$

Последнее равенство следует из (3.19).

Далее, поскольку на основании леммы 2 столбцы (3.14) обращаются в нуль в $D_1 - D$, то равенство (3.24) является непосредственным следствием равенства (3.23).

Заметим, что если интегральное уравнение (3.12) не имеет отличных от нуля непрерывных решений, то вторые слагаемые в правых частях (3.15) и (3.17) нужно считать нулями. При этом (3.19) просто совпадает с (3.17), и равенство (3.24) имеет место во всей области D_1.

Приведение задачи II к интегральным уравнениям основано на следующей теореме.

Теорема. *Если функциональный столбец $v(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ, то функция*

$$u(z) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(\zeta, z)\, \sigma(\zeta)\, v(\zeta)\, d_\zeta s \quad (z \in D) \tag{3.25}$$

имеет первые непрерывные производные по x и y в D, удовлетворяет уравнению

$$Lu = 0 \tag{3.26}$$

и непрерывно продолжима на Γ, причем имеет место формула

$$u^+(t) = \frac{1}{2} v(t) + \int_\Gamma \varphi(\zeta, t)\, \sigma(\zeta)\, v(\zeta)\, d_\zeta s \qquad (t \in \Gamma), \tag{3.27}$$

где $u^+(t)$ предельное значение $u(z)$ при $z \to t \in \Gamma$, интеграл в (3.27) понимается в смысле главного значения, $\sigma(\zeta)$ определено равенством (2.4).

Доказательство. Существование непрерывных производных функции $u(z)$ по x и y в D непосредственно следует из свойства 2 матрицы $\varphi(\zeta, z)$. Докажем непрерывную продолжимость $u(z)$ на Γ и равенство (3.27). Для этого запишем равенство (3.25) в виде

$$u(z) = U_0(z) + U_1(z) \qquad (z \in D), \tag{3.28}$$

где

$$U_0(z) = \int_\Gamma \varphi_0(\zeta, z)\, \sigma(\zeta)\, v(\zeta)\, d_\zeta s,$$

$$U_1(z) = \sum_{j=1}^{n_1} u_j(z) \int_\Gamma \chi_j'(\zeta)\, \sigma(\zeta)\, v(\zeta)\, d_\zeta s + \int_\Gamma \varphi_1(\zeta, z)\, \sigma(\zeta)\, v(\zeta)\, d_\zeta s,$$

$$\varphi_1(\zeta, z) = \iint_{D_1} K_1(\zeta_1, z)\, \psi(\zeta_1, \zeta)\, d\xi_1\, d\eta_1. \tag{3.29}$$

Из (3.22) и (3.18) следует, что

$$\varphi_1(\zeta, z) = \frac{\tilde{\varphi}_1(\zeta, z)}{|\zeta - z|^{\lambda_0}}, \tag{3.30}$$

где $\tilde{\varphi}_1(\zeta, z)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных ζ, $z \in D_1 + \Gamma_1$, $\lambda_0 < 1$.

Так как, далее, $u_j(z) \in H(D_1)$ $(j = 1, \ldots, n_1)$, то

$$U_1^+(t) = \sum_{j=1}^{n_1} u_j(t) \int_\Gamma \chi_j'(\zeta)\, \sigma(\zeta)\, v(\zeta)\, d_\zeta s +$$

$$+ \int_\Gamma \varphi_1(\zeta, t)\, \sigma(\zeta)\, v(\zeta)\, d_\zeta s \qquad (t \in \Gamma). \tag{3.31}$$

Остается рассмотреть $U_0(z)$. Получим сначала некоторые вспомогательные формулы. Пусть D_0 — область с кусочно-гладкой границей Γ_0, причем $D_0+\Gamma_0 \subset \tilde{D}$; u_0, v_0 — произвольные прямоугольные матрицы, состоящие из $2r$ строк, имеющие непрерывные производные в D_0 и непрерывные в $D_0+\Gamma_0$. Пусть, далее,

$$L_0 u_0 = A(z)\frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y},$$

$$M_0 v_0 = -\frac{\partial A'(z) v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y},$$

где матрица $A(z)$ та же, что и в (2.1). Тогда имеет место следующая формула Грина

$$\iint\limits_{D_0} [(M_0 v_0)' u_0 - v_0' L_0 u_0]\, dx dy = \int\limits_{\Gamma_0} v_0'(z)\, \sigma(z)\, u_0(z)\, ds, \qquad (3.32)$$

где $\sigma(z)$ — определено равенством (2.4).

Применяя эту формулу к области D_0 без кружка $|z-\zeta| \leqslant \varepsilon$ $(z \in D_0)$ и матрицам $v_0(\zeta) = \varphi_0'(\zeta, z)$, $u_0(\zeta) = E$ (единичная матрица), а затем переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$E = \int\limits_{\Gamma_0} \varphi_0(\zeta, z)\, \sigma(\zeta)\, d_\zeta s - \iint\limits_{D_0} p(\zeta, z)\, d\xi d\eta \qquad (z \in D_0), \qquad (3.33)$$

где

$$p(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi} j\, [(\xi - x) + A(z)(\eta - y)]^{-2} [A(\zeta) - A(z)] -$$
$$- \frac{1}{2\pi} j\, [(\xi - x) + A(z)(\eta - y)]^{-1} \frac{\partial A(\zeta)}{\partial \xi}.$$

Применяя, далее, формулу (3.32) к матрицам $v_0(\zeta) = \varphi_0'(\zeta, z)$, $u_0(\zeta) = E$ при $z \,\bar{\in}\, D_0 + \Gamma_0$, получим

$$\int\limits_{\Gamma_0} \varphi_0(\zeta, z)\, \sigma(\zeta)\, d_\zeta s = \iint\limits_{D_0} p(\zeta, z)\, d\xi d\eta \qquad (z \,\bar{\in}\, D_0 + \Gamma_0). \qquad (3.34)$$

Пусть теперь t — произвольная точка контура Γ. Проведем окружность с центром в точке t радиуса ρ столь малого, чтобы окружность пересекала контур Γ только в двух точках. Обозначим D_ρ область, состоящую из всех точек области D, лежащих вне проведенной окружности; Γ_ρ — ту часть контура Γ, которая лежит вне окружности; C_ρ — ту часть окружности, которая лежит в D.

Применяя форму (3.34) к области D_ρ, получим

$$\int\limits_{\Gamma_\rho} \varphi_0(\zeta, t)\, \sigma(\zeta)\, d_\zeta s + \int\limits_{C_\rho} \varphi_0(\zeta, t)\, \sigma(\zeta)\, d_\zeta s = \iint\limits_{D_\rho} p(\zeta, t)\, d\xi d\eta.$$

Отсюда и из равенства

$$\lim_{\rho \to 0} \int\limits_{C_\rho} \varphi_0(\zeta, t)\, \sigma(\zeta)\, d_\zeta s = -\frac{1}{2} E$$

(см. [4]) следует существование главного значения интеграла $\int\limits_{\Gamma}\varphi_0(\zeta, t)$ $\sigma(\zeta)\,d_\zeta s$ и равенство

$$\int\limits_{\Gamma}\varphi_0(\zeta, t)\,\sigma(\zeta)\,d_\zeta s = \frac{1}{2}E + \iint\limits_{D} p(\zeta, t)\,d\xi d\eta. \tag{3.35}$$

Вернемся теперь к рассмотрению функции $U_0(z)$. Пусть z — точка области D, лежащая в некоторой, достаточно малой окрестности точки t. Пусть, далее, z' — точка пересечения прямой, параллельной нормали к Γ в точке t и проходящей через z, с кривой Γ. Тогда

$$U_0(z) = \int\limits_{\Gamma}\varphi_0(\zeta, z)\,\sigma(\zeta)\,[\nu(\zeta) - \nu(z')]\,d_\zeta s + \int\limits_{\Gamma}\varphi_0(\zeta, z)\,\sigma(\zeta)\,d_\zeta s\cdot\nu(z').$$

Отсюда и из формулы (3.33), примененной к области D, получим

$$U_0(z) = \int\limits_{\Gamma}\varphi_0(\zeta, z)\,\sigma(\zeta)\,[\nu(\zeta) - \nu(z')]\,d_\zeta s + \\ + \nu(z') + \iint\limits_{D} p(\zeta, z)\,d\xi d\eta\cdot\nu(z').$$

Ввиду равномерной сходимости первого интеграла справа отсюда следует, что $U_0^+(t)$ существует, причем

$$U_0^+(t) = \int\limits_{\Gamma}\varphi_0(\zeta, t)\,\sigma(\zeta)\,[\nu(\zeta) - \nu(t)]\,d_\zeta s + \\ + \nu(t) + \iint\limits_{D} p(\zeta, t)\,d\xi d\eta\cdot\nu(t). \tag{3.36}$$

Заметим, что криволинейный интеграл, входящий сюда, существует в обычном смысле. Так как, кроме того, существует интеграл, стоящий слева в (3.35), в смысле главного значения, то существует и главное значение интеграла

$$\int\limits_{\Gamma}\varphi_0(\zeta, t)\,\sigma(\zeta)\,\nu(\zeta)\,d_\zeta s. \tag{3.37}$$

Поэтому из (3.36) и (3.35) следует

$$U_0^+(t) = \frac{1}{2}\nu(t) + \int\limits_{\Gamma}\varphi_0(\zeta, t)\,\sigma(\zeta)\,\nu(\zeta)\,d_\zeta s, \tag{3.38}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Таким образом, доказано, что каждое слагаемое, входящее в правую часть (3.28), непрерывно продолжимо на Γ.

Из (3.38) и (3.31) следует (3.27), причем существование главного значения, входящего в (3.27) интеграла, следует из существования главного значения интеграла (3.37).

Наконец, равенство (3.26) непосредственно следует из равенства (3.24), справедливого, как было указано, при $\zeta \in \Gamma$. Теорема доказана.

Заметим, что при $\zeta, z \in \Gamma$ матрица

$$\omega(\zeta, z) = \varphi(\zeta, z)(\zeta - z)$$

удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных $\zeta, z \in \Gamma$.

Действительно, представим $\omega(\zeta, z)$ в виде

$$\omega(\zeta, z) = \varphi_0(\zeta, z)(\zeta - z) + \sum_{j=1}^{n_1} u_j(z)\chi_j'(\zeta)(\zeta - z) + \varphi_1(\zeta, z)(\zeta - z), \quad (3.39)$$

где $\varphi_1(\zeta, z)$ определено равенством (3.29)

Так как $u_j(z), \chi_j(\zeta) \in H(D_1)$ $(j = 1, \ldots, n_1)$, а $\varphi_1(\zeta, z)$ представляется в виде (3.30), то для двух последних слагаемых справа в (3.39) утверждение очевидно. Далее

$$\varphi_0(\zeta, z)(\zeta - z) = \frac{1}{2\pi} J\,[\cos\Theta + A(z)\sin\Theta]^{-1} e^{i\Theta}, \quad (3.40)$$

где $e^{i\Theta} = \dfrac{\zeta - z}{|\zeta - z|}$. Из условия эллиптичности следует существование такого числа m, что

$$|\det[\cos\Theta + A(z)\sin\Theta]| > m$$

при любых Θ и $z \in \Gamma$. Отсюда, учитывая, что Γ предполагается гладким в смысле Гельдера контуром, получим, что матрица (3.40) удовлетворяет условию Гельдера по z на каждой из дуг $\zeta\zeta_1$ и $\zeta\zeta_2$ кривой Γ, лежащих по разные стороны от точки ζ [8]. В точке же ζ матрица (3.40), очевидно, непрерывна. Отсюда уже легко получить, что она удовлетворяет условию Гельдера по z на Γ с постоянными, не зависящими от ζ. Аналогичный результат получается и для ζ с оценкой, не зависящей от z, откуда и следует утверждение.

Подставляя

$$\varphi(\zeta, t) = \frac{\omega(\zeta, t)}{\zeta - t} \quad (3.41)$$

в интеграл, входящий в равенство (3.27), заключаем ([8], § 20), что этот интеграл, а следовательно, и $u^+(t)$, удовлетворяет условию Гельдера на Γ.

Таким образом, доказано, что функция $u(z)$, определенная равенством (3.25) в D и равенством (3.27) на Γ, является решением класса K уравнения (3.26). (Определение класса K см. стр. 35).

В дальнейшем, задавая функцию u интегралом вида (3.25), мы всегда будем предполагать, не оговаривая этого специально, что u продолжено на Γ по формуле (3.27), и в этом смысле понимать, что интеграл (3.25) является решением класса K уравнения (3.26).

Будем искать решение задачи II в виде

$$u(z)=\int_{\Gamma} M(\zeta, z)\,\mu(\zeta)\,d_{\zeta}s, \tag{3.42}$$

где

$$M(\zeta, z)=\varphi(\zeta, z)\,\sigma(\zeta)\,\beta(\zeta). \tag{3.43}$$

Здесь $\beta(\zeta)$ матрица вида

$$\beta(\zeta)=\begin{pmatrix}\beta_1(\zeta)\\ \beta_2(\zeta)\end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

где $\beta_1(\zeta)$, $\beta_2(\zeta)$ — вещественные квадратные матрицы порядка r, удовлетворяющие условию Гельдера на Γ и условию

$$\det(\beta_1(\zeta)+i\beta_2(\zeta)\neq 0 \tag{3.45}$$

при всех $\zeta\in\Gamma$. В остальном $\beta(\zeta)$ может выбираться произвольно.* $\mu(\zeta)$ — подлежащий определению функциональный столбец из r элементов, удовлетворяющий условию Гельдера на Γ.

Подставляя (3.42) в граничное условие (3.2), на основании (3.27) получим

$$\frac{1}{2}\,a(t)\,\beta(t)\,\mu(t)+\int_{\Gamma} N(\zeta, t)\,\mu(\zeta)\,d_{\zeta}s=f(t)\,(t\in\Gamma), \tag{3.46}$$

где

$$N(\zeta, t)=a(t)\,M(\zeta, t)+\frac{1}{2}\,b(t, \zeta)\,\beta(\zeta)+$$

$$+\int_{\Gamma} b(t, t_1)\,M(\zeta, t_1)\,ds_1 \qquad (t, \zeta\in\Gamma), \tag{3.47}$$

ds_1 — элемент дуги в точке t_1.

Так как в равенстве (3.41) $\omega(\zeta, t)$ удовлетворяет условию Гельдера по $\zeta, t\in\Gamma$, то из (3.43), (3.3) и (3.47) следует, что $N(\zeta, t)$ может быть представлено в виде

$$N(\zeta, t)=\frac{\tilde{N}(\zeta, t)\,\zeta'(s)}{\pi i(\zeta-t)},$$

где $\tilde{N}(\zeta, t)$ удовлетворяет условию Гельдера по переменным $\zeta, t\in\Gamma$.

* Этот произвол в выборе β можно использовать, чтобы получать представления решений вида (3.42), обладающие нужными свойствами. Например, можно β выбрать так, чтобы получаемые ниже интегральные уравнения были уравнениями Фредгольма (см. (3.52)). Для дальнейшего, однако, наряду с таким выбором β существенной оказывается возможность выбора ядра (3.43), не зависящего от граничных условий. Тогда можно считать для определенности, что

$$\beta=\begin{pmatrix}E\\ 0\end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица.

Уравнение (3.46) теперь записывается в виде

$$\frac{1}{2}a(t)\beta(t)\mu(t)+\frac{1}{\pi i}\int\frac{\tilde{N}(\zeta,t)\mu(\zeta)d\zeta}{\zeta-t}=f(t). \tag{3.48}$$

Найдем основные матрицы полученного сингулярного интегрального уравнения ([8], § 130). Для этого вычислим

$$\tilde{N}(t,t)=\lim_{\zeta\to t}[\pi i(\zeta-t)\bar{\zeta}'(s)N(\zeta,t)].$$

Обозначая Θ — угол касательной к Γ в точке t с осью абсцисс, найдем после простых преобразований

$$\tilde{N}(t,t)=\frac{i}{2}a(t)J[\cos\Theta+A(t)\sin\Theta]^{-1}\sigma(t)\beta(t).$$

Но

$$\sigma(t)=-A(t)\sin\Theta-\cos\Theta.$$

Поэтому

$$\tilde{N}(t,t)=-\frac{i}{2}a(t)J\beta(t).$$

Представим матрицу $a(t)$ в виде

$$a(t)=(a_1(t),a_2(t)),$$

где $a_1(t)$, $a_2(t)$ — квадратные матрицы порядка r. Отсюда, из (2,6) и (3.44) следует

$$\tilde{N}(t,t)=-\frac{i}{2}\{a_2(t)\beta_1(t)-a_1(t)\beta_2(t)\}.$$

Таким образом, основные матрицы уравнения (3.48) имеют вид

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}a(t)\beta(t)+\tilde{N}(t,t)=\frac{1}{2}[a_1(t)-ia_2(t)][\beta_1(t)+i\beta_2(t)]\\ \frac{1}{2}a(t)\beta(t)-\tilde{N}(t,t)=\frac{1}{2}[a_1(t)+ia_2(t)][\beta_1(t)-i\beta_2(t)].\end{gathered} \tag{3.49}$$

Всюду в дальнейшем предполагается выполненным следующее условие:

$$\det[a_1(t)+ia_2(t)]\neq 0 \tag{3.50}$$

при всех $t\in\Gamma$.

При выполнении этого условия (см. [3.45]) (3.48) является уравнением нормального типа. Индекс этого уравнения, вычисленный по формуле Н. И. Мусхелишвили [8], равен

$$\varkappa=\frac{1}{\pi}[\arg\det(a_1+ia_2)]_\Gamma+\frac{1}{\pi}[\arg\det(\beta_1-i\beta_2)]_\Gamma. \tag{3.51}$$

Из (3.49) следует, что если β, входящее в (3.44), выбрать, например, следующим образом

$$\beta = \begin{pmatrix} Re\,(a_1 - ia_2)^{-1} \\ Im\,(a_1 - ia_2)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{3.52}$$

то (3.46) оказывается уравнением Фредгольма. В общей постановке вопрос о приведении граничных задач к уравнениям Фредгольма был изучен Я. Б. Лопатинским в работе [6], в которой получены условия приведения граничных задач для эллиптических систем уравнений в многомерном случае к уравнениям Фредгольма и указан способ самого такого приведения.

(Продолжение статьи будет опубликовано в следующем выпуске сборника).

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М—Л, 1946.
2. Векуа И. Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек. Матем. сборник, т. 31, № 2, 1952.
3. Вольперт А. И. Граничные задачи для эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений на плоскости. Диссертация, Львов, 1954.
4. Лопатинский Я. Б. Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений. Укр. матем. журнал, т. III, № 1, 1951.
5. Лопатинский Я. Б. Фундаментальные решения системы дифференциальных уравнений эллиптического типа. Укр. матем. журнал, т. III, № 3, 1951.
6. Лопатинский Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Укр. матем. журнал, т. V, № 2, 1953.
7. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М—Л, 1952.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М—Л, 1946.
9. Петровский И. Г. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. Бюллетень МГУ, т. I, Математика и механика, вып. 7, 1938.

Работа поступила в марте 1957 г.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

И. Ц. ГОХБЕРГ и М. Г. КРЕЙН

О ПАРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ И ЕГО ТРАНСПОНИРОВАННОМ I

(Сообщение I)

В настоящей статье исследуется интегральное уравнение вида

$$\begin{aligned} \varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\,\varphi(s)\,ds &= f(t) \qquad (-\infty<t<0) \\ \varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\,\varphi(s)\,ds &= f(t) \qquad (0<t<\infty), \end{aligned} \tag{1}$$

где $k_1(t)$ и $k_2(t)$ любые функции из пространства $L=L_1(-\infty,\infty)$.

Парное интегральное уравнение (1) можно еще записать в виде одного уравнения

$$\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k_{\pi}(t,s)\,\varphi(s)\,ds=f(t) \qquad (-\infty<t<\infty), \tag{1}$$

где ядро $k_{\pi}(t,s)$ определяется равенствами

$$k_{\pi}(t,s)=\begin{cases} k(t-s) & (-\infty<t<0,\ \ -\infty<s<\infty) \\ k_2(t-s) & (0<t<\infty,\ \ -\infty<s<\infty). \end{cases}$$

В достаточно общей постановке интегральное уравнение (1), по-видимому, впервые было рассмотрено И. М. Рапопортом [1], который обнаружил, что задача отыскания решения уравнения (1) может быть сведена к решению некоторой задачи Римана-Гильберта на прямой. Тем самым была впервые получена некоторая процедура построения решения уравнения (1) в достаточно общем случае.

Однако, не говоря о том, что эта процедура построения решения отнюдь не оказалась наиболее простой, И. М. Рапопорту не удалось, отправляясь от нее, дать полное исследование интегрального уравнения (1) (не были получены в явном виде условия разрешимости уравнения (1), не была выяснена структура резольвенты уравнения (1), роль транспонирования уравнения и др.).

В известной мере это объясняется тем, что И. М. Рапопорт рассматривал уравнения (1) в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ (т. е. от правой части $f(t)$ и решения $\varphi(t)$ требовалась принадлежность к пространству

L_2) в предположении, что функции $k_{1,2}(t)$ принадлежат пространству L. При такой общей постановке И. М. Рапопорт пришел к проблеме Римана-Гильберта на прямой, которая, как им же отмечено, не была еще изучена (ввиду принадлежности коэффициентов к слишком широкому классу функций, не удовлетворяющих, вообще говоря, условию Гельдера).

Вместе с тем, следуя иному пути, удается дать полный анализ интегрального уравнения (!) не только в классе L_2, но и в ряде других классов: L_p ($p \geqslant 1$) M, C, и др., что и составляет задачу первой части этой статьи.

В основу этой работы положены методы, которые были развиты М. Г. Крейном в применении к интегральному уравнению Винера-Хопфа

$$g(t) - \int_0^\infty k(t-s)\,g(s)\,ds = h(t) \qquad (0 < t < \infty) \tag{0.1}$$

и которые изложены в его статье [2], где можно найти также краткий исторический обзор исследований уравнения (0.1).

Как и следовало ожидать, теория интегрального уравнения (!) оказывается тесно связанной с теорией транспонированного уравнения

$$\psi(t) - \int_{-\infty}^\infty k_\tau(s, t)\,\psi(s)\,ds = f(t), \tag{!τ}$$

которое в более развернутом виде может быть записано и так

$$\psi(t) - \int_{-\infty}^0 k_1(s-t)\,\psi(s)\,ds - \int_0^\infty k_2(s-t)\,\psi(s)\,ds = f(t). \tag{!τ}$$

Отметим, что как уравнение (!), так и уравнение (!τ) рассматривались в классе L_2 Ю. И. Черским [3], [4] — в предположении, что преобразования Фурье $K_1(\lambda)$ и $K_2(\lambda)$ функций $k_1(t)$ и $k_2(t)$ удовлетворяют условиям Гельдера на сомкнутой вещественной оси. Этот автор получил ряд существенных дополнений к исследованиям И. М. Рапопорта, которые однако полностью покрываются более общими и точными результатами настоящего сообщения.

Укажем также на то, что уравнения (!) и (!) изучались еще Ф. Д. Гаховым и Ю. И. Черским [5], [6] при специальных предположениях относительно характера убывания или возрастания функций $k_1(t)$ и $k_2(t)$ при $t \to \pm\infty$ и соответствующих предположениях относительно поведения при $t \to \pm\infty$ функций ψ, φ, f. Эти исследования к нашему первому сообщению отношения не имеют.

Во втором сообщении на уравнения (!) и (!τ) будут перенесены результаты В. А. Фока [7] и М. Г. Крейна [2], относящиеся к уравнению Винера-Хопфа (0.1) с «экспоненциально убывающим» ядром (когда при некотором $h>0$: $exp\,(h|t|)\,k\,(t) \in L$). Тем самым будет развита теория интегрального уравнения (!τ) в той постановке, которая встречается в задачах на исследование хода плотности моноэнергетических нейтронов в двух полупространствах, разделенных плоской границей (см., например, у Г. Ф. Батя и Д. А. Зарецкого). В этой части работы мы укажем также на ряд возможных усовершенствований исследований Ф. Д. Гахова и Ю. И. Черского, вытекающих из наших результатов.

Заметим, наконец, что недавняя работа авторов [8] позволяет полностью обобщить (во всяком случае в его экзистенциальной части) на-стоящее исследование на случай, когда в уравнениях (!) и (!τ) «ядра» $\kappa_1(t)$ и $\kappa_2(t)$ суть некоторые квадратные матрицы-функции n-го порядка с элементами из L, а, ψ, φ и f суть соответственно n-мерные вектор-функции.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

1. Рассмотрение парного интегрального уравнения (!) тесно связано с исследованием уравнения типа Винера-Хопфа (0.1). Подробная теория последнего, как уже отмечалось, изложена в статье [2]. В связи с тем, что в дальнейшем нам придется опираться на ряд результатов этой статьи, кратко изложим их.

Через L будем обозначать пространство всех комплекснозначных измеримых и суммируемых функций $f(t)$ $(-\infty<t<\infty)$, для которых конечен интеграл

$$\|f\|_L=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt,$$

принимаемый за норму в пространстве L.

Через $L_+^{(p)}$ $(p\geqslant 1)$ обозначается пространство L_p $(0,\infty)$ комплексно-значных функций $f(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$, суммируемых в p-ой степени. Как известно, сопряженным к пространству $L_+=L_+^{(1)}$ является пространство M_+ ограниченных комплекснозначных функций $f(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$ с определением нормы

$$\|f\|_M=\sup_{0<t<\infty}\operatorname{ess}|f(t)|.$$

Через M_+^c и M_+^u обозначаются подпространства из M_+, состоящие соответственно из всех непрерывных и равномерно непрерывных функций. Наконец, через C_+ обозначается подпространство M_+^c, состоящее из всех функций, для которых существует предел

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t),$$

и через C_+^0 $(\subset C_+)$ — подпространство всех функций, для которых этот предел равен нулю: $f(\infty)=0$.

В дальнейшем E_+ будет означать одно из пространств

$$L_+^{(p)}\,(p\geqslant 1),\quad M_+,\quad M_+^c,\quad M_+^u,\quad C_+,\quad C_+^0.$$

Для упрощения изложения будем далее полагать, что функция $f(t)$, определенная на всей вещественной оси $t(-\infty<t<\infty)$, принадлежит пространству E_+, если на положительной полуоси $(0\leqslant t<\infty)$ функция $f(t)\in E_+$, а на отрицательной полуоси $(-\infty<t<0)$ функция $f(t)$ тождественно равна нулю.

2. Через R обозначим кольцо (см. [2], [9]) всех функций $\Phi(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ вида

$$\Phi(\lambda)=c+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{i\lambda t}\,dt,$$

где c постоянная, а $\varphi(t)$ произвольная функция из L. Очевидно, что все функции $\Phi(\lambda)\in R$ являются непрерывными на сомкнутой вещественной оси и $\Phi(\pm\infty)=c$. Через $R_\pm$ будем обозначать подкольца кольца R, образованные, соответственно, всеми функциями $\Phi(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ вида

$$\Phi(\lambda)=c+\int_0^\infty \varphi(\pm t)\,e^{\pm i\lambda t}\,dt \qquad (\varphi\in L). \tag{1.1}$$

Очевидно, если функция $\Phi\in R_+$ (R_-), то формулой (1.1) эта функция может быть определена для всех комплексных чисел λ из верхней (нижней) полуплоскости; при таком определении функция $\Phi(\lambda)$ становится непрерывной в замкнутой верхней (нижней) полуплоскости и голоморфной внутри верхней (нижней) полуплоскости $Im\lambda\geqslant 0$ $(Im\lambda\leqslant 0)$. Введем оператор $\mathbf{P}_+$, проектирующий кольцо R в кольцо R_+ по следующему правилу

$$\mathbf{P}_+\left(c+\int_{-\infty}^\infty \varphi(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\right)=c+\int_0^\infty \varphi(t)\,e^{i\lambda t}\,dt \qquad (\varphi\in L).$$

Легко видеть, что аналитически проектор $\mathbf{P}_+$ может быть определен формулой

$$\mathbf{P}_+(\Phi(\lambda))=\Phi(\infty)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \frac{\Phi(\mu)-\Phi(\infty)}{\mu-\lambda}\,d\mu \qquad (Im\,\lambda>0).$$

Существенную роль в исследовании парного интегрального уравнения (!) играет проблема *факторизации* функций из R, которая заключается в представлении функции $G(\lambda)\in R$ в виде произведения

$$G(\lambda)=G_+(\lambda)\,G_-(\lambda) \qquad (-\infty<\lambda<\infty), \tag{1.2}$$

где G_+ (G_-) является непрерывной функцией в замкнутой верхней (нижней) полуплоскости и голоморфной внутри верхней (нижней) полуплоскости. Факторизация (1.2) называется *канонической*, если каждый из множителей $G_\pm(\lambda)$ отличен от нуля в своей полуплоскости, и *правильной*, если хотя бы один из сомножителей $G_\pm(\lambda)$ отличен от нуля в своей полуплоскости.

Пусть функция $k(t)\in L$ обладает следующим свойством

$$1-K(\lambda)\neq 0 \qquad (-\infty<\lambda<\infty), \tag{1.3}$$

где

$$K(\lambda)=\int_{-\infty}^\infty k(t)\,e^{i\lambda t}\,dt.$$

Тогда, согласно теореме Винера (см. [2], [9]), наряду с функцией $1-K(\lambda)$ функция $[1-K(\lambda)]^{-1}$ также принадлежит кольцу R. Обозначим через ν индекс функции $[1-K(\lambda)]^{-1}$, т. е.

$$\nu=-\operatorname{ind}\,[1-K(\lambda)]=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d_\lambda \arg\,[1-K(\lambda)].$$

Нас будет интересовать задача факторизации функции $[1-K(\lambda)]^{-1}$, которая подробно разобрана в цитированной статье [2].

При факторизации функции $[1-K(\lambda)]^{-1}$ естественно нормировать множители $G_{\pm}(\lambda)$ условием

$$G_{+}(\infty)=1\,.$$

При выполнении условия (1.3) функция $[1-K(\lambda)]^{-1}$ всегда допускает правильную факторизацию:

$$[1-K(\lambda)]^{-1}=G_{+}(\lambda)\,G_{-}(\lambda) \qquad (-\infty<\lambda<\infty)\,, \tag{1.4}$$

причем множители $G_{\pm}(\lambda)$ принадлежат соответственно кольцам $\mathrm{R}_{\pm}$.

При $\nu\neq 0$ правильная факторизация (1.4) не единственна. Если $\nu>0$, то функция $G_{+}(\lambda)\neq 0$ $(Im\,\lambda\geqslant 0)$, а если $\nu<0$, то функция $G_{-}(\lambda)\neq 0$ $(Im\,\lambda\leqslant 0)$.

При $\nu=0$ правильная факторизация (1.4) является единственной и превращается в каноническую.

3. Функция $k\in L$ порождает в любом пространстве E_{+} линейный ограниченный оператор

$$\mathrm{K}\,g(t)=\int_0^{\infty}k(t-s)\,g(s)\,ds \qquad (0<t<\infty),$$

причем

$$\|\mathbf{K}\|_{E+}\leqslant\|k\|_{L}\,.$$

При выполнении условия (1.3) будем называть, следуя [2], индексом уравнения (0.1) число

$$\nu=-\operatorname{ind}(1-K(\lambda))\,.$$

Если $\nu=0$, то при любой правой части $h(t)\in E_{+}$ уравнение (0.1) имеет единственное решение $g(t)\in E_{+}$, причем это решение определяется по формуле

$$g(t)=h(t)+\int_0^{\infty}\gamma(t,s)\,h(s)\,ds \qquad (0<t<\infty)\,, \tag{1.5}$$

где

$$\gamma(t,s)=\gamma_1(t-s)+\gamma_2(s-t)+\int_0^{\min(t,s)}\gamma_1(t-u)\,\gamma_2(s-u)\,du\,,$$

а функции $\gamma_j(t)$ $(-\infty<t<\infty;\ j=1,2)$ принадлежат пространству L_{+} и определяются равенствами

$$1+\int_0^{\infty}\gamma_1(t)\,e^{i\lambda t}\,dt=\exp\Big(-\int_0^{\infty}l(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\Big)$$

$$1+\int_0^{\infty}\gamma_2(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt=\exp\Big(-\int_{-\infty}^{0}l(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\Big),$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty}l(t)\,e^{i\lambda t}\,dt=\ln(1-K(\lambda))\,.$$

Если положить

$$G_{+}(\lambda)=1+\int_0^{\infty}\gamma_1(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\,, \qquad G_{-}(\lambda)=1+\int_0^{\infty}\gamma_2(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\,, \tag{1.6}$$

то равенство (1.4), очевидно, будет выполняться. Оно будет представлять собой каноническую факторизацию функции $[1-K(\lambda)]^{-1}$. Этим свойством могут быть определены функции $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$.

Множители $G_\pm(\lambda)$ могут быть найдены по формулам:

$$\ln G_+(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1-K(\mu))}{\mu-\lambda}\,d\mu \qquad (Im\,\lambda>0)$$

$$\ln G_-(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1-K(\mu))}{\mu-\lambda}\,d\mu \qquad (Im\,\lambda<0).$$

4. Прежде чем сформулировать свойства уравнения (0.1) при $\nu>0$, введем, следуя [2], понятие *D_+-цепочки* функций.

Упорядоченная система функций $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{\nu-1}$ из пространства L_+ называется *D_+-цепочкой*, если:

1) все функции χ_j $(j=0,1,\ldots,\nu-1)$ абсолютно непрерывны,

2) $\chi_{j+1}(t)=\frac{d}{dt}\chi_j(t)$, $\chi_j(0)=0$ $(j=0,1,\ldots,\nu-2)$,

3) $\chi_{\nu-1}(0)=1$, $\frac{d}{dt}\chi_{\nu-1}\in L_+$.

Условия 1), 2), 3) эквивалентны следующим

$$\chi_j(t)=\int_0^t\chi_{j+1}(s)\,ds \qquad (j=0,1,\ldots,\nu-2),\ \chi_{\nu-1}(t)=1+\int_0^t\chi_\nu(s)\,ds,$$

где $\chi_\nu(t)$ некоторая функция из L_+.

Преобразования Лапласа функций D_+-цепочки, очевидно, связаны соотношением

$$X_{j+1}(\lambda)=-i\lambda X_j(\lambda) \qquad (j=0,1,2,\ldots,\nu-2).$$

Из последнего соотношения, в частности, получается линейная независимость функций D_+-цепочки.

Отметим еще, что функции D_+-цепочки принадлежат всем пространствам E_+.

При $\nu>0$ уравнение (0.1) имеет решение в E_+ при любой правой части $h(t)\in E_+$; одно из решений можно найти по формуле (1.5), где функции $\gamma_j(t)\in L_+$ $(j=1,2)$ определяются равенствами (1.6), в которых $G_\pm(\lambda)$ суть множители какой-либо правильной факторизации функции $[1-K(\lambda)]^{-1}$.

Однородное уравнение

$$\chi(t)-\int_0^\infty k(t-s)\chi(s)\,ds=0 \qquad (0<t<\infty) \tag{1.7}$$

в этом случае имеет в любом пространстве E_+ точно ν линейно независимых решений. Множество всех решений этого уравнения не зависит от выбора пространства E_+ и имеет базис, составляющий D_+-цепочку.

5. Если $\nu<0$, то однородное уравнение (1.7) имеет в каждом из пространств E_+ единственное нулевое решение. Неоднородное уравнение

(0.1) разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть $h(t) \in E_+$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty h(t)\,\omega(t)\,dt = 0, \tag{1.8}$$

где $\omega(t) \in E_+$ любое решение транспонированного однородного уравнения

$$\omega(t) - \int_0^\infty k(s-t)\,\omega(s)\,ds = 0.$$

При выполнении условий (1.8) решение уравнения (0.1) получается по формуле (1 5), где функции $G_\pm(\lambda)$ осуществляют правильную факторизацию (1.4) функции $[1-K(\lambda)]^{-1}$.

Из сказанного, в частности, следует, что все ζ, для которых

$$\zeta - K(\lambda) \neq 0 \qquad (-\infty < \lambda < \infty) \text{ и } \nu_\zeta = -\operatorname{ind}(\zeta - K(\lambda)) \neq 0,$$

суть точки спектра оператора **K** (эти точки спектра являются Φ-точками* с d-характеристикой вида $(\nu_\zeta, 0)$ или $(0, |\nu_\zeta|)$.

Оказывается, кроме указанных точек, спектр оператора **K** состоит еще из всех точек кривой $\zeta = K(\lambda)$ $(-\infty \leqslant \lambda < \infty)$.

Последние уже не являются ни Φ-точками и ни $\Phi_\pm$-точками оператора **K**.

2. ПАРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО ТРАНСПОНИРОВАННОЕ

1. В дальнейшем E будет обозначать пространство всех комплекснозначных функций $f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, обладающих тем свойством, что функции $f(t)$ и $f(-t)$ $(0 < t < \infty)$ принадлежат пространству E_+.

В зависимости от того, является ли пространство E пространством $L^{(p)} = L_p(-\infty, \infty)$ или подпространством пространства $M(-\infty, \infty)$ норма в E определяется одним из равенств

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \qquad \|f\|_M = \sup_{-\infty < t < \infty} \operatorname{ess} |f(t)|.$$

Пусть $k_1(t)$ и $k_2(t)$ — две функции из L. Равенством

$$\mathbf{K}_\pi \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_\pi(t, s)\,\varphi(s)\,ds, \tag{2.1}$$

---

* Мы применяем здесь терминологию, принятую нами в статье [10]. Напомним необходимые определения из [10]. Линейный ограниченный оператор, A, действующий в банаховом пространстве B, называется *нормально разрешимым*, если условие $l(y) = 0$, где $l \in B^\tau$ произвольное решение однородного уравнения $A^\tau l = 0$, является необходимым и достаточным условием для разрешимости уравнения $Ax = y$. Здесь B^τ означает пространство, сопряженное к B, а A^τ — оператор, сопряженный (транспонированный) к A.

Обозначим через α_ζ и β_ζ размерности подпространств решений соответственно уравнений $(A - \zeta I)x = 0$, $(A - \zeta I)^\tau l = 0$. Число ζ называется Φ-*точкой* оператора A, если оператор $A - \zeta I$ нормально разрешим и числа α_ζ, β_ζ конечны. Если оператор $A - \zeta I$ нормально разрешим и только одно из чисел α_ζ, β_ζ конечно, то ζ называется $\Phi_\pm$-*точкой* (в зависимости от того, какое из чисел конечно). Пара чисел $(\alpha_\zeta, \beta_\zeta)$ называется *d-характеристикой* оператора A в точке ζ. Множество всех Φ-точек оператора A называется его Φ-*множеством*.

где

$$k_\pi(t\,.\,s) = \begin{cases} k_1(t-s) & (-\infty < t < 0;\quad -\infty < s < \infty) \\ k_2(t-s) & (0 < t < \infty;\quad -\infty < s < \infty), \end{cases} \tag{2.2}$$

определяется линейный ограниченный оператор, действующий в любом пространстве E, причем

$$\|\mathbf{K}_\pi\|_E \leqslant \|k_1\|_L + \|k_2\|_L\,. \tag{2.3}$$

Следует отметить, что во всех пространствах E, за исключением пространств $L^{(p)}(p > 1)$, сходимость интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_j(t-s)\,\varphi(s)\,ds \qquad (j = 1,2) \tag{2.4}$$

понимается в обычном смысле. В пространстве $L^{(p)}(p > 1)$ интеграл (2.4) надо понимать как предел в смысле метрики $L^{(p)}$ интеграла

$$\int_{-N}^{N} k_j(t-s)\,\varphi(s)\,ds \qquad (j = 1,2)$$

при N, стремящемся к бесконечности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_j(t-s)\,\varphi(s)\,ds = \operatorname*{l\cdot i\cdot m}_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} k_j(t-s)\,\varphi(s)\,ds\,.$$

Сопряженным или, точнее, транспонированным оператором к оператору $\mathbf{K}_\pi$, рассматриваемому в пространстве L, будет оператор

$$\mathbf{K}_\pi^\tau \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} k_\pi(s,\,t)\,\varphi(s)\,ds\,,$$

рассматриваемый в M. Более подробно он записывается следующим образом

$$\mathbf{K}_\pi^\tau \varphi = \int_{-\infty}^{0} k_1(s-t)\,\varphi(s)\,ds + \int_{0}^{\infty} k_2(s-t)\,\varphi(s)\,ds\,. \tag{2.5}$$

Оператор $\mathbf{K}_\pi^\tau$ является линейным ограниченным оператором не только в пространстве M, но и в любом пространстве E, причем для нормы оператора $\mathbf{K}_\pi^\tau$ также справедлива оценка (2.3).

Если рассматривать оператор $\mathbf{K}_\pi^\tau$ в пространстве L, то транспонированным к нему оператором будет оператор $\mathbf{K}_\pi$.

Таким образом, парное интегральное уравнение (!) и интегральное уравнение

$$\psi(t) - \int_{-\infty}^{0} k_1(s-t)\,\psi(s)\,ds - \int_{0}^{\infty} k_2(s-t)\,\psi(s)\,ds = f(t) \tag{!$^\tau$}$$

являются взаимно транспонированными.

Исследование парного уравнения (!) и его транспонированного уравнения (!$^\tau$) удобно вести параллельно с интегральным уравнением Винера-Хопфа

$$g(t) - \int_{0}^{\infty} k(t-s)\,g(s)\,ds = h(t) \quad (0 < t < \infty;\quad g,\,h \in E_+) \tag{2.6}$$

со специально подобранным ядром $k(t-s)$.

Прежде чем указать выражение для $k(t)$, наложим на функции $k_j(t)$ $(j=1,2)$, кроме ограничения $k_j(t) \in L$ $(j=1,2)$, еще одно естественное ограничение:

$$1-K_j(\lambda)=1-\int_{-\infty}^{\infty} k_j(t)\, e^{i\lambda t}\, dt \neq 0 \quad (-\infty<\lambda<\infty;\ j=1,2). \qquad (2.7)$$

Тогда на основании известной теоремы Н. Винера [2, § 1] функция $[1-K_1(\lambda)]^{-1}[K_2(\lambda)-K_1(\lambda)]$ будет преобразованием Фурье некоторой функции из L, которую и обозначим через $k(t)$, так что:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, e^{i\lambda t}\, dt=[1-K_1(\lambda)]^{-1}[K_2(\lambda)-K_1(\lambda)]. \qquad (2.8)$$

Число

$$\nu=-\operatorname{in}(1-K(\lambda))=-\operatorname{ind}\left(\frac{1-K_2(\lambda)}{1-K_1(\lambda)}\right), \qquad (2.9)$$

являющееся индексом уравнения (2.6), назовем *индексом уравнения* (!). Естественность этого определения будет выяснена ниже.

Такой же индекс будем приписывать уравнению

$$\varphi(t)-\int_{-\infty}^{0} k_1(t-s)\,\varphi(s)\, ds-\int_{0}^{\infty} k_2(t-s)\,\varphi(s)\, ds=f(t).$$

Следовательно, если парное интегральное уравнение (!) имеет индекс ν, то транспонированное уравнение ($!^{\tau}$) будет иметь индекс $\nu^{\tau}=-\nu$.

2. Пусть $a(t,s)$ $(-\infty<t,s<\infty)$ некоторое ядро, порождающее в пространстве E линейный ограниченный оператор

$$\mathbf{A}\varphi=\int_{-\infty}^{\infty} a(t,s)\,\varphi(s)\, ds.$$

Будем говорить, что ядро $b(t,s)$ $(-\infty<t,s<\infty)$ является *правой резольвентой* ядра $a(t,s)$, если $b(t,s)$ порождает в E линейный ограниченный оператор

$$\mathbf{B}\varphi=\int_{-\infty}^{\infty} b(t,s)\,\varphi(s)\, ds$$

и для любой функции $f(t)\in E$ функция

$$g(t)=f(t)+\int_{-\infty}^{\infty} b(t,s) f(s)\, ds \qquad (2.10)$$

является одним из решений уравнения

$$g(t)-\int_{-\infty}^{\infty} a(t,s)\, g(s)\, ds=f(t). \qquad (2.11)$$

Аналогично ядро $b(t,s)$ будем называть *левой резольвентой* ядра $a(t,s)$, если ядро $a(t,s)$ является правой резольвентой ядра $b(t,s)$.

Иначе говоря, ядро $b(t,s)$ будет левой резольвентой ядра $a(t,s)$, если всякий раз, когда для некоторого $f\in E$ уравнение (2.11) разрешимо, его решение $g\in E$ будет единственным и будет определяться по формуле (2.10). Отметим еще, что если ядро $b(t, s)$ является одновременно левой и правой резольвентой ядра $a(t, s)$, то оно представляет собой полную резольвенту ядра $a(t, s)$ и, следовательно, $\mathbf{I} + \mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

3. ПАРНОЕ И ТРАНСПОНИРОВАННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ИНДЕКСОМ, РАВНЫМ НУЛЮ

Начнем с исследования парного интегрального уравнения (!) в пространстве L при условии $\nu = 0$.

Предположим сначала, что парное уравнение имеет решение $\varphi \in L$. Введем функции

$$b_+(t) = -f(t) + \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)\,ds \quad (0 < t < \infty);$$

$$b_+(t) = 0 \quad (-\infty < t < 0)$$

$$b_-(t) = -f(t) + \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)\,ds \quad (-\infty < t < 0);$$

$$b_-(t) = 0 \quad (0 < t < \infty).$$

Тогда функция $\varphi(t)$ будет решением следующей системы двух уравнений

$$\begin{cases} \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t) + b_+(t) \\ \varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)\,ds = f(t) + b_-(t) \end{cases} \quad (-\infty < t < \infty).$$

Применяя к этим двум равенствам преобразования Фурье, получим

$$\begin{aligned} (1 - K_1(\lambda))\,\Phi(\lambda) &= F(\lambda) + B_+(\lambda) \\ (1 - K_2(\lambda))\,\Phi(\lambda) &= F(\lambda) + B_-(\lambda), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где функции Φ, F, $B_\pm$ являются преобразованиями Фурье соответственно функций φ, f и $b_\pm$, причем $B_\pm \in R_\pm$.

Таким образом, решение Φ системы (3.1) получается по формуле

$$\Phi = \frac{F + B_+}{1 - K_1} = \frac{F + B_-}{1 - K_2}. \tag{3.2}$$

Согласно (2.8) и (3.2), функции $B_\pm$ удовлетворяют уравнению

$$(1 - K)B_+ - B_- = KF. \tag{3.3}$$

При наложенных ограничениях функция $[1 - K(\lambda)]^{-1}$ допускает каноническую факторизацию [2, § 2]

$$[1 - K(\lambda)]^{-1} = G_+(\lambda)\,G_-(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Следовательно, уравнение (3.3) можно записать в виде

$$G_+^{-1} B_+ - G_- B_- = G_- KF.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства проектор $\mathbf{P}_+$ (см. § 1, п. 2), получаем

$$G_+^{-1} B_+ = \mathbf{P}_+ (G_- KF),$$

ибо $G_- B_- \in R_-$ и $B_-(\infty) = 0$. Стало быть

$$B_+ = G_+ \mathbf{P}_+ (G_- KF).$$

Таким образом, если парное интегральное уравнение (!) имеет решение в L, то это решение единственно и его преобразование Фурье выражается через известные функции следующим образом:

$$\Phi = [1 - K_1]^{-1} \cdot [F + G_+ \mathbf{P}_+ (G_- KF)]. \tag{3.4}$$

Обратно, пусть $f(t)$ любая функция из L и Φ определяется по формуле (3.4). Обозначая тогда функцию $G_+ \mathbf{P}_+ (G_- KF)$ $(\in R_+)$ через B_+, получим

$$(1 - K_1)\, \Phi = F + B_+.$$

Рассматривая функции Φ и B_+ как преобразования Фурье функций $\varphi(t) \in L$ и $b_+(t) \in L_+$, устанавливаем, что функция φ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\, \varphi(s)\, ds = f(t) + b_+(t) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Принимая во внимание, что функция $b_+(t)$ обращается в нуль при всех отрицательных значениях t, найдем

$$\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\, \varphi(s)\, ds = f(t) \qquad (-\infty < t < -0).$$

Далее, из равенства

$$B_+ = G_+ \mathbf{P}_+ (G_- KF)$$

получаем, что разность

$$G_-^{-1} G_+^{-1} B_+ - KF$$

является некоторой функцией из R_-, обращающейся в нуль на бесконечности. Обозначим ее через B_-; тогда

$$(1 - K)\, B_+ = KF + B_-,$$

или

$$(1 - K_2)(B_+ + F) = (1 - K_1)(B_- + F).$$

Следовательно,

$$(1 - K_2)\, \Phi = F + B_-.$$

Последнее означает, что функция $\varphi \in L$ и удовлетворяет также второму уравнению

$$\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty}k_2(t-s)\varphi(s)\,ds=f(t)\qquad(0\leqslant t<\infty).$$

Таким образом, при любой правой части $f\in L$ уравнение (!) имеет единственное решение, преобразование Фурье которого определяется по формуле (3.4).

Из (3.4) следует. что преобразование Фурье решения парного интегрального уравнения (!) можно также представить в виде

$$\Phi=(1-K_1)^{-1}(F+H),$$

где $H(\lambda)$ преобразование Фурье функции $h(t)\in L_+$, являющейся решением уравнения

$$h(t)-\int_0^{\infty}k(t-s)h(s)\,ds=\int_{-\infty}^{\infty}k(t-s)f(s)\,ds\qquad(0<t<\infty)$$

и обращающейся в нуль при $t<0$.

Таким образом, решение φ парного интегрального уравнения (!) в рассматриваемом случае представляется в виде

$$\varphi(t)=f(t)+h(t)+\int_{-\infty}^{\infty}k_{-1}(t-s)f(s)\,ds+\int_0^{\infty}k_{-1}(t-s)h(s)\,ds,$$

где $k_{-1}(t)$ является функцией из пространства L, преобразование Фурье которой определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty}k_{-1}(t)e^{i\lambda t}\,dt=-K_1(\lambda)[1-K_1(\lambda)]^{-1}.$$

Обозначая через $\gamma(t,s)$ резольвенту ядра $k(t-s)$ в E_+, получаем окончательную формулу:

$$\varphi(t)=f(t)+\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_\pi(t,s)f(s)\,ds, \tag{3.5}$$

где

$$\gamma_\pi(t,s)=k(t-s)+k_{-1}(t-s)+\int_0^{\infty}k_{-1}(t-r)k(r-s)\,dr+$$

$$+\int_0^{\infty}\gamma(t,r)k(r-s)\,dr+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}k_{-1}(t-r)\gamma(r,u)k(u-s)\,du\,dr. \tag{3.6}$$

Легко установить, что для всех s $(-\infty<s<\infty)$ и почти для всех t $(-\infty<t<\infty)$ выполняются следующие равенства

$$\gamma_\pi(t,s)-\int_{-\infty}^{\infty}k_\pi(t,r)\gamma_\pi(r,s)\,dr=k_\pi(t,s)$$

$$\gamma_\pi(t,s)-\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_\pi(t;r)k_\pi(r,s)\,dr=k_\pi(t,s).$$

Ядро $\gamma_\pi(t,s)$ состоит из суммы и композиции ядер, каждое из которых порождает линейный ограниченный оператор не только в пространстве L, но и в любом пространстве E. Следовательно, ядро $\gamma_\pi(t, s)$ порождает в любом пространстве E линейный ограниченный оператор

$$\Gamma_\pi \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\pi(t, s) \varphi(s)\, ds.$$

Равенства (3.7) означают, что в любом пространстве E оператор $I - K_\pi$ имеет ограниченный обратный, совпадающий с оператором $I + \Gamma_\pi$:

$$(I - K_\pi)^{-1} = I + \Gamma_\pi.$$

Таким образом, $\gamma_\pi(t, s)$ является резольвентой ядра $k_\pi(t, s)$ в любом пространстве E.

Мы пришли к следующей теореме:

Теорема 1. *Если функции $k_j(t) \in L$ $(j = 1,2)$ удовлетворяют условию* (2.7) *и индекс парного интегрального уравнения равен нулю* $(\nu = 0)$, *то при любой правой части $f \in E$ уравнение* (!) *имеет одно и только одно решение $\varphi \in E$. Это решение получается по формуле* (3.5) *и, следовательно, ядро $\gamma_\pi(t, s)$, определяемое равенством* (3.6), *является резольвентой парного ядра $k_\pi(t, s)$.*

Заметим, что условие $\nu = 0$ будет всегда выполнено, когда $k_j(t)$ $(j = 1,2)$ четные функции, ибо в этом случае также и $K_j(\lambda)$ $(j = 1,2)$ четные функции.

Такое же замечание можно сделать в отношении случая, когда $k_j(t)$ $(j = 1,2)$ эрмитовы функции, т. е. $k_j(-t) = \overline{k_j(t)}$ $(j = 1,2)$.

Принимая во внимание, что уравнение ($!^\tau$) является транспонированным к парному уравнению (!), и учитывая свойства ядра $\gamma_\pi(t, s)$, легко вывести следующую теорему.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то при любой правой части $f \in E$ транспонированное уравнение* ($!^\tau$) *имеет одно и только одно решение $\psi \in E$. Это решение получается по формуле*

$$\psi(t) = f(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\pi(s, t) f(s)\, ds. \tag{3.8}$$

Справедливость теоремы 2, как уже отмечено, следует из свойства ядра $\gamma_\pi(t, s)$ и теоремы 1. Для дальнейшего существенно, что теорему 2 можно доказать, не прибегая к теореме 1; это доказательство можно провести аналогично и теми же средствами, что и доказательство теоремы 1. Приведем вкратце схему этого доказательства, ограничиваясь случаем $E = L$.

Допуская, что функции φ и f принадлежат пространству L, и применяя к обеим частям уравнения ($!^\tau$) преобразование Фурье, получим, что уравнение ($!^\tau$) эквивалентно следующему

$$(1 - K_2(-\lambda)) \Psi_+(\lambda) + (1 - K_1(-\lambda)) \Psi_-(\lambda) = F(\lambda), \tag{3.9}$$

где

$$\Psi_+(\lambda) = \int_0^{\infty} \psi(t) e^{i\lambda t}\, dt, \qquad \Psi_-(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} \psi(t) e^{i\lambda t}\, dt.$$

Для решения уравнения (3.9) перепишем его в виде

$$[1-K(-\lambda)]\,\Psi_+(\lambda)+\Psi_-(\lambda)=[1-K_1(-\lambda)]^{-1}\cdot F(\lambda). \qquad (3.10)$$

Принимая во внимание, что при условиях теоремы 2 функция $[1-K(\lambda)]^{-1}$ допускает каноническую факторизацию

$$[1-K(-\lambda)]^{-1}=G_+(-\lambda)\,G_-(-\lambda)=G_+^{\tau}(\lambda)\,G_-^{\tau}(\lambda),$$

где

$$G_+^{\tau}(\lambda)=G_-(-\lambda), \qquad G_-^{\tau}(\gamma)=G_+(-\lambda),$$

получаем

$$\left(G_+^{\tau}\right)^{-1}\Psi_+ + G_-^{\tau}\Psi_- = [1-K_1(-\lambda)]^{-1}\,G_-^{\tau}F.$$

Применяя к последнему равенству проекторы $\mathbf{P}_+$, найдем Ψ_+. После этого из (3.10) находим, что при любой правой части $f\in L$ преобразование Фурье $\Psi=\Psi_+ + \Psi_-$ решения ψ уравнения (!$^\tau$) имеет вид:

$$\Psi(\lambda)=[1-K_1(-\lambda)]^{-1}F+K(-\lambda)\,G_+^{\tau}\,\mathbf{P}_+[G_-^{\tau}(1-K_1(-\lambda))^{-1}F].$$

Окончательно решение уравнения (!$^\tau$) определяется по формуле:

$$\psi(t)=f(t)+\int_{-\infty}^{\infty}\gamma_\pi^{\tau}(t,s)\,f(s)\,ds \qquad (-\infty<t<\infty), \qquad (3.11)$$

где, как легко видеть, $\gamma_\pi^{\tau}(t,s)=\gamma_\pi(s,t)$.

В заключение этого параграфа отметим, что, как следует из доказанных теорем, каждое из однородных уравнений

$$\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty}k_\pi(t,s)\,\varphi(s)\,ds=0 \qquad (-\infty<t<\infty) \qquad (+)$$

и

$$\psi(t)-\int_{-\infty}^{\infty}k_\pi(s,t)\,\psi(s)\,ds=0 \qquad (-\infty<t<\infty) \qquad (+^{\tau})$$

в случае $\nu=0$ имеет в любом из пространств E единственное нулевое решение.

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ИНДЕКСОМ

1. Нам осталось немного добавить к рассуждениям предыдущего параграфа, чтобы установить следующее предложение.

Теорема 3. *Если функции $k_j(t)\in L$ ($j=1,2$) удовлетворяют условию* (2.7) *и индекс парного интегрального уравнения* (!) *положителен* ($\nu>0$), *то при любой правой части $f\in E$ функция $\varphi(t)\in E$, определяемая формулой* (3.5), *является одним из решений уравнения* (!). *Следовательно, ядро $\gamma_\pi(t,s)$, определяемое равенством* (3.6), *является правой резольвентой парного ядра $k_\pi(t,s)$.*

Доказательство. При соблюдении условий теоремы функция $[1-K(\lambda)]^{-1}$ допускает правильную факторизацию (1.4), при которой множители $G_{\pm}(\lambda)$ принадлежат соответственно кольцам $R_{\pm}$ и $G_{+}(\lambda) \neq 0$ $(Im\,\lambda \geqslant 0)$.

Легко устанавливается, что для любой функции $f \in L$ функция $\Phi(\lambda) \in R$, определенная формулой (3.4), является преобразованием Фурье некоторого решения $\varphi \in L$ парного уравнения (!).

Следовательно, формулой (3.5), где функции $\gamma_{1,2}(t) \in L_{+}$ задаются равенствами (1.6), определяется некоторое решение уравнения (!). Как и в случае $\nu=0$ легко убедиться, что последнее утверждение сохраняет силу при замене пространства L любым пространством E.

Таким образом, при $\nu>0$ ядро $\gamma_{\pi}(t, s)$ является правой резольвентой ядра $k_{\pi}(t, s)$.

Анализируя аналогичным образом второе доказательство теоремы 2, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 4. *Если функции* $k_j(t) \in L$ $(j=1,2)$ *удовлетворяют условию* (2.7) *и индекс интегрального уравнения* ($!^{\tau}$) *положителен* $(\nu^{\tau}=-\nu>0)$, *то при любой правой части* $f \in E$ *функция* $\psi \in E$, *определяемая формулой* (3.11), *является одним из решений уравнения* ($!^{\tau}$). *Следовательно, ядро* $\gamma^{\tau}_{\pi}(t, s)=\gamma_{\pi}(s, t)$, *определяемое равенством* (3.6), *является правой резольвентой ядра* $k^{\tau}_{\pi}(t, s)=k_{\pi}(s, t)$.

2. Перейдем к исследованию однородного парного интегрального уравнения (+) или, что одно и то же, уравнения:

$$\begin{cases} \varphi(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)\,ds=0 & (-\infty<t<0) \\ \varphi(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)\,ds=0 & (0<t<\infty) \end{cases} \tag{+}$$

в пространстве E.

Исследование уравнения (+) облегчается установлением связи между его решениями и решениями однородного уравнения Винера-Хопфа

$$\chi(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\chi(s)\,ds=0 \qquad (0<t<\infty). \tag{4.1}$$

Пусть $\chi \in E_{+}$ произвольное решение уравнения (4.1'); тогда функция

$$\varphi(t)=\chi(t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\chi(s)\,ds \tag{4.2}$$

принадлежит пространству E и является решением уравнения (+). В самом деле:

$$\varphi(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_j(t-s)\varphi(s)\,ds=\chi(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty} l_j(t-s)\chi(s)\,ds \qquad (j=1,2),$$

где

$$l_j(t)=-k_1(t)+k_j(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_j(t-s)k_{-1}(s)\,ds \qquad (j=1,2).$$

Последнее и означает, что функция $\varphi(t)$ является решением однородного уравнения $(+)$, ибо легко видеть, что

$$l_1(t)=0\,,\ \text{а}\ l_2(t)=k(t)\qquad (-\infty<t<\infty)\,.$$

Аналогично проверяется и обратное предложение: если функция $\varphi\in E$ является решением уравнения $(+)$, то функция

$$\chi(t)=\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty}k_1(t-s)\,\varphi(s)\,ds$$

принадлежит пространству E_+ и является решением однородного уравнения (4.1).

Из установленной связи между решениями уравнений (4.1) и $(+)$ непосредственно следует, что уравнение $(+)$ имеет во всех пространствах E одни и те же решения. В случае, когда индекс ν уравнения $(+)$ положителен, решения уравнения $(+)$ составляют ν-мерное подпространство.

Аналогичное положение имеет место для однородного транспонированного уравнения:

$$\psi(t)-\int_{-\infty}^{0}k_1(s-t)\,\psi(s)\,ds-\int_{0}^{\infty}k_2(s-t)\,\psi(s)\,ds=0. \tag{$+^\tau$}$$

Если функция $\omega(t)\in E_+$ является решением однородного уравнения

$$\omega(t)-\int_0^{\infty}k(s-t)\,\omega(s)\,ds=0, \tag{4.3}$$

то функция $\psi(t)$, определяемая равенством

$$\psi(t)=\int_0^{\infty}k(s-t)\,\omega(s)\,ds, \tag{4.4}$$

или, что одно и то же, равенством

$$\psi(t)=\begin{cases}\omega(t) & (0<t<\infty)\\ \int_0^{\infty}k(s-t)\,\omega(s)\,ds & (-\infty<t<0),\end{cases}$$

принадлежит пространству E и является решением уравнения $(+\tau)$. Действительно, подставляя функцию $\psi(t)$, заданную равенством (4.4), в левую часть уравнения $(+\ )$, получаем

$$\psi(t)-\int_{-\infty}^{0}k_1(s-t)\,\psi(s)\,ds-\int_0^{\infty}k_2(s-t)\,\psi(s)\,ds=\psi(t)-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}k_1(s-t)\,\psi(s)\,ds-\int_{-\infty}^{\infty}[k_2(s-t)-k_1(s-t)]\,\omega(s)\,ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}m(s-t)\,\omega(s)\,ds,$$

где

$$m(t)=k(t)+k_1(t)-k_2(t)-\int_{-\infty}^{\infty}k_1(t-s)\,k(s)\,ds\,.$$

Применяя преобразование Фурье к функции $m(t)$ и учитывая равенство (2.8), находим, что $m(t)=0$.

Без труда можно доказать и обратное предложение, а именно: если функция $\psi(t) \in E$ является решением уравнения $(+^{\tau})$, то функция $\omega(t)=\psi(t)$ $(0<t<\infty)$ представляет собой решение уравнения (4.3).

Для более детального исследования линеалов решений уравнений $(+)$ и $(+^{\tau})$ в E введем следующие определения.

Упорядоченную систему функций $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{\nu-1} (\in L)$ будем называть *D^{τ}-цепочкой*, если:

$$\psi_j(t)=\int_{-\infty}^{t} \psi_{j+1}(s)\,ds \qquad (j=0,1,2, \ldots, \nu-1),$$

где $\psi_{\nu}(t)$ — некоторая функция из L.

Функции D^{τ}-цепочки линейно независимы, ибо их преобразования Фурье связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$\Phi_{j+1}(\lambda)=-i\lambda\,\Phi_j(\lambda) \qquad (j=0,1, \ldots, \nu-2). \tag{4.5}$$

Упорядоченную систему функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1} (\in L)$ будем называть *D-цепочкой*, если:

1) функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-2}$ абсолютно непрерывны, а функция $\varphi_{\nu-1}$ становится абсолютно непрерывной по вычитании из нее функции $\eta(t)=(1+\operatorname{sign} t)/2$.

$$2)\quad \varphi_{j+1}=\frac{d}{dt}\varphi_j \qquad (j=0,1, \ldots, \nu-2), \qquad \frac{d}{dt}(\varphi_{\nu-1}-\eta) \in L.$$

Очевидно, условия 1) и 2) могут быть заменены следующими:

$$\varphi_j(t)=\int_{-\infty}^{t} \varphi_{j-1}(s)\,ds \quad (j=0,1, \ldots, \nu-2),$$

$$\varphi_{\nu-1}(t)=\eta(t)+\int_{-\infty}^{t} \varphi_{\nu}(s)\,ds,$$

где $\varphi_{\nu}(t)$ — некоторая функция из L.

Для функций D-цепочки также справедливы соотношения (4.5), в силу которых эти функции линейно независимы.

Между D-цепочками обоих родов и D_+-цепочками (см. § 1, пункт 4) функций имеется следующая связь: *если система функций $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{\nu-1}$ образует D_+-цепочку, а $k_0(t)$ произвольная функция из L, то система функций*

$$\psi_j(t)=\int_{0}^{\infty} k_0(t-s)\,\chi_j(s)\,ds \qquad (j=0,1, \ldots, \nu-1) \tag{4.6}$$

образует D^{τ}-цепочку, а система функций

$$\varphi_j(t)=\chi_j(t)+\int_{0}^{\infty} k_0(t-s)\,\chi_j(s)\,ds \qquad (j=0,1, \ldots, \nu-1) \tag{4.7}$$

D-цепочку.

В самом деле, из (4.6) следует:

$$\int_{-\infty}^{t}\psi_{j+1}(s)ds=\int_{0}^{\infty}l(t-s)\chi_{j+1}(s)\,ds=$$

$$=\int_{0}^{\infty}k_0(t-s)\,\chi_j(s)\,ds=\psi_j(s)\qquad (j=0,1,\dots,\nu-2),$$

где

$$l(t)=\int_{-\infty}^{t}k_0(s)\,ds\,.$$

Обозначая через $\chi_\nu\in L_+$ функцию, для которой имеет равенство

$$\chi_{\nu-1}(t)=\eta(t)+\int_{0}^{t}\chi_\nu(s)\,ds,$$

и через $\psi_\nu\in L$ функцию

$$\psi_\nu(t)=\int_{0}^{\infty}k_0(t-s)\,\chi_\nu(s)\,ds+k_0(t)\,,$$

получим

$$\int_{-\infty}^{t}\psi_\nu(s)\,ds=\int_{0}^{\infty}l(t-s)\,\chi_\nu(s)\,ds+\int_{-\infty}^{t}k_0(s)\,ds=$$

$$=\int_{0}^{\infty}k_0(t-s)\,\chi_{\nu-1}(s)\,ds=\psi_{\nu-1}(t)\,.$$

Таким образом, система функций (4.6) образует $D^{\cdot}$-цепочку.

Для доказательства того, что система (4.7) образует D-цепочку остается заметить, что

$$\varphi_j=\psi_j+\chi_j\qquad (j=0,1,\dots,\nu-1),$$

а следовательно,

$$\int_{-\infty}^{t}\varphi_{j+1}(s)\,ds=\int_{-\infty}^{t}\psi_{j+1}(s)ds+\int_{-\infty}^{t}\chi_{j+1}(s)\,ds=\psi_j+\chi_j=\varphi_j(t)$$

$$(j=0,1,\dots,\nu-2)$$

и

$$\int_{-\infty}^{t}[\psi_\nu(s)+\chi_\nu(s)]ds=\psi_{\nu-1}(t)+\chi_{\nu-1}(t)-\eta(t)=\varphi_{\nu-1}(t)-\eta(t)\,.$$

Объединяя все сказанное выше и учитывая сформулированные ранее свойства решений уравнения (1.7), приходим к следующим предложениям.

Теорема 5. *Если выполняются условия теоремы 3, то парное однородное уравнение* $(^{+})$ *во всех пространствах* E *имеет одни и те же решения. Эти решения образуют* ν*-мерное подпространство, имеющее своим базисом некоторую* D*-цепочку.*

Добавим также, что D-цепочка, о которой идет речь в теореме, может быть получена из соответствующей D_+-цепочки решений уравнения (4.1) по формуле (4.2).

Теорема 6. *Если выполняются условия теоремы 4, то однородное уравнение* $(+^\tau)$ *имеет во всех пространствах* E *одни и те же решения. Эти решения образуют* ν^τ*-мерное подпространство, имеющее своим базисом некоторую* D^τ*-цепочку.*

Упомянутая D^τ-цепочка получается из соответствующей D-цепочки решений уравнения (4.3) по формуле (4.4).

5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ИНДЕКСОМ

Рассмотрим парное однородное интегральное уравнение $(+)$ с отрицательным индексом $(\nu<0)$, по-прежнему считая, что для функций $k_j(t) \in L$ $(j=1,2)$ выполняются условия (2.7).

На основании связи, установленной между решениями уравнения $(+)$ и уравнения (4.1) (см. § 4, п. 2), заключаем, что однородное уравнение $(+)$ в рассматриваемом случае имеет единственное нулевое решение в любом пространстве E. Следовательно, если неоднородное уравнение (!) разрешимо при некоторой правой части $f \in E$, то это решение единственно.

Аналогичные соображения приводят нас к таким же результатам относительно уравнения $(+)$ в случае, когда его индекс ν^τ отрицателен.

Теорема 7. *Если функции* $k_j(t) \in L$ $(j=1,2)$ *обладают свойством* (2.7) *и индекс уравнения* (!) *отрицателен* $(\nu<0)$, *то для разрешимости парного уравнения* (!) *в* E *необходимо и достаточно, чтобы функция* $f \in E$ *удовлетворяла условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\psi(t)\,dt = 0, \tag{5.1}$$

где $\psi(t)$ *любое решение уравнения* $(+^\tau)$. *При выполнении условия* (5.1) *решение уравнения* (!) *единственно и получается по формуле* (3.5). *Следовательно, ядро* $\gamma_\pi(t,s)$, *определяемое равенством* (3.6), *является левой резольвентой парного ядра* $k_\pi(t,s)$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве E уравнение, транспонированное к уравнению (!):

$$g - K_\pi^\tau\, g = f,$$

где по-прежнему

$$K_\pi^\tau\, g = \int_{-\infty}^{\infty} k_\pi(s,t)\, g(s)\, ds.$$

Согласно условиям теоремы, индекс ν^τ $(=-\nu)$ уравнения $(!^\tau)$ положителен; следовательно, для уравнения $(!^\tau)$ выполняются условия применимости теоремы 4. Это означает, что ядро $k_\pi^\tau(t,s)$ имеет правую резольвенту $\gamma_\pi^\tau(t,s) = \gamma_\pi(s,t)$.

Определим оператор $\mathbf{\Gamma}^{\tau}$ в пространстве E следующим равенством

$$\mathbf{\Gamma}^{\tau} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\pi}(s, t) f(s)\, ds\,.$$

Очевидно, функция

$$g = f + \mathbf{\Gamma}^{\tau} f \qquad (\in E)$$

является решением уравнения ($!^{\tau}$) при любой правой части $f \in E$.

Рассмотрим уравнение

$$g - \mathbf{K}^{\tau}_{\pi}\, g = \left(I - \mathbf{K}^{\tau}_{\pi}\right) f,$$

решениями которого являются функции

$$g_1 = f \text{ и } g_2 = (I + \mathbf{\Gamma}^{\tau}) \left(I - \mathbf{K}^{\tau}_{\pi}\right) f.$$

Разность $g_2 - g_1$ является некоторым решением однородного уравнения ($+^{\tau}$). Согласно теореме 6 уравнение ($+^{\tau}$) имеет ровно $|\nu|$ линейно независимых решений. Обозначая эти решения через ψ_1, $\psi_2, \ldots, \psi_{\nu}$, получаем

$$g_2 - g_1 = \sum_{j=1}^{|\nu|} c_j \psi_j$$

или

$$(I + \mathbf{\Gamma}^{\tau}) \left(I - \mathbf{K}^{\tau}_{\pi}\right) f = f + \sum_{j=1}^{|\nu|} c_j(f) \psi_j \qquad (f \in E)\,. \tag{5.2}$$

Обозначим через $\mathbf{C}$ линейный конечномерный оператор $(I + \mathbf{\Gamma}^{\tau})\left(I - \mathbf{K}^{\tau}_{\pi}\right) - I$. Выберем в пересечении всех пространств E какие-либо функции $\omega_j'(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, |\nu|)$ так, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega'_j(t)\, \psi_k(t)\, dt = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, |\nu|)\,.$$

Умножая обе части равенства (5.2) на $\omega'_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, |\nu|)$ и интегрируя их в пределах от $-\infty$ до ∞, получим

$$c_j(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{C} f)(t)\, \omega'_j(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \omega_j(t)\, dt,$$

где

$$\omega_j(t) = \mathbf{C}^{\tau} \omega'_j = [(I - \mathbf{K}_{\pi})(I + \mathbf{\Gamma}) - I]\, \omega'_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, |\nu|).$$

Очевидно, все функции ω_j $(j = 1, 2, \ldots, |\nu|)$ принадлежат пересечению всех пространств E.

Таким образом, оператор $\mathbf{C}$ определяется в любом пространстве E равенством

$$\mathbf{C} f=\sum_{j=1}^{|\nu|} \psi_j(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \omega_j(s)\, ds .$$

Это означает, что для оператора $\mathbf{C}^{\tau}$ справедливо равенство

$$\mathbf{C}^{\tau} f=\sum_{j=1}^{|\nu|} \omega_j(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \psi_j(s)\, ds .$$

Сопоставляя различные представления оператора $\mathbf{C}^{\tau}$, получаем, что для любой функции $f \in \mathrm{E}$ имеет место равенство

$$(I-\mathbf{K}_{\pi})(I+\Gamma^{\tau}) f=f+\sum_{j=1}^{|\nu|} \omega_j(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \psi_j(s)\, ds .$$

Стало быть, условие (5.1) является достаточным условием для разрешимости уравнения (!). Необходимость условия (5.1) очевидна. Кроме того, из сказанного выше следует, что ядро $\gamma_{\pi}(t, s)$ является левой резольвентой уравнения (!) и имеет вид (3.6).

Таким же методом можно доказать следующую теорему.

Теорема 8. *Если функции $k_j(t) \in L$ $(j=1,2)$ обладают свойством* (2.7) *и индекс уравнения* (!$^{\tau}$) *отрицателен* $(\nu^{\tau}=-\nu<0)$, *то для разрешимости уравнения* (!$^{\tau}$) *в E, необходимо и достаточно, чтобы функция $f \in E$ удовлетворяла условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t)\, dt=0, \tag{5.3}$$

где $\varphi(t)$ любое решение уравнения (+). *При выполнении условия* (5.3) *решение уравнения* (!$^{\tau}$) *единственно и получается по формуле* (3.11). *Ядро $\gamma_{\pi}^{\tau}(t, s)=\gamma_{\pi}(s, t)$, определяемое равенством* (3.6) *является левой резольвентой ядра $k_{\pi}^{\tau}(t, s)=k_{\pi}(s, t)$.*

6. СПЕКТР ОПЕРАТОРА $\mathbf{K}_{\pi}$

Прежде всего заметим, что из доказанных теорем следует принадлежность спектру оператора $\mathbf{K}_{\pi}$ всех комплексных чисел ζ, для которых

$$\zeta-K_1(\lambda) \neq 0, \qquad \zeta-K_2(\lambda) \neq 0 \qquad (-\infty<\lambda<\infty) \tag{6.1}$$

и

$$\nu_{\zeta}=-\operatorname{ind} \frac{\zeta-K_2(\lambda)}{\zeta-K_1(\lambda)} \neq 0 . \tag{6.2}$$

Точки спектра ζ, обладающие свойствами (6.1) и (6.2), по доказанному, являются Φ-точками оператора $\mathbf{K}_{\pi}$. В этих точках d-характеристика оператора $\mathbf{K}_{\pi}$ имеет вид ν_{ζ}, 0 или $(0, |\nu_{\zeta}|)$ в зависимости от того, является ли индекс ν_ζ положительным или отрицательным. Остается подвергнуть исследованию точки кривых

$$\zeta = K_1(\lambda) \text{ и } \zeta = K_2(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Воспользовавшись некоторыми соображениями, уже применявшимися нами в [9, § 10], покажем, что точки кривых $\zeta = K_j(\lambda)$ $(j = 1,2)$ не только не являются регулярными точками оператора $\mathbf{K}_\pi$, но, более того, не являются ни Φ-точками ни $\Phi_\pm$-точками оператора $\mathbf{K}_\pi$.

Рассмотрим пространство E_+^{II}, состоящее из двухмерных вектор-функций $\mathrm{f}(t) = \{f_1(t), f_2(t)\}$ $(0 < t < \infty)$ с координатами $f_j(t) \in E_+$ $(j = 1,2)$, с нормой

$$\|\mathrm{f}\| = \|f_1\|_E + \|f_2\|_E.$$

Пространство E_+^{II} эквивалентно пространству E в силу следующего изоморфизма: всякому $f \in E$ сопоставляется $\mathrm{f} \in E_+^{\text{II}}$ по правилу:

$$f_1(t) = f(-t), \qquad f_2(t) = f(t) \qquad (0 < t < \infty).$$

Ввиду этой эквивалентности оператор $\mathbf{K}_\pi$ можно понимать как оператор, действующий в E_+^{II}; при этом, если

$$\mathrm{f} = \mathbf{K}_\pi \mathrm{g} \qquad (\mathrm{f}, \mathrm{g} \in E_+^{\text{II}}),$$

то

$$\begin{cases} f_1(t) = \int_0^\infty k_1(s-t)\, g_1(s)\, ds + \int_0^\infty k_1(t+s)\, g_2(s)\, ds \\ f_2(t) = \int_0^\infty k_2(t+s)\, g_1(s)\, ds + \int_0^\infty k_2(t-s)\, g_2(s)\, ds \end{cases}$$

или в сокращенной записи:

$$f_1 = \mathbf{K}_{11} g_1 + \mathbf{K}_{12} g_2$$

$$f_2 = \mathbf{K}_{21} g_1 + \mathbf{K}_{22} g_2.$$

Таким образом

$$\mathbf{K}_\pi = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix}.$$

Параллельно с оператором $\mathbf{K}_\pi$ рассмотрим операторы D и $\mathbf{T}$, определяемые равенствами

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы $\mathbf{K}_{12}$ и $\mathbf{K}_{21}$, действующие в пространстве E_+, являются вполне непрерывными операторами. Это утверждение доказано в [8, § 10, пункт 3] для случая $E_+ = L_+$; оно легко обобщается на случай любого E_+. Следовательно, оператор T вполне непрерывен.

Из сказанного следует [8, § 4, § 8], что как Φ-множества, так и $\Phi_{\pm}$-множества операторов $\mathbf{K}_\pi$ и D совпадают. Оператор D распадается в прямую сумму двух операторов $\mathbf{K}_{11}$ и $\mathbf{K}_{22}$, каждый из которых действует в пространстве, эквивалентном пространству E_+. Стало быть, $\Phi_{\pm}$-множество оператора D представляет собой пересечение $\Phi_{\pm}$-множеств операторов $\mathbf{K}_{11}$ и $\mathbf{K}_{22}$.

Как известно (см. [2]), $\Phi_{\pm}$-множества оператора $\mathbf{K}_{jj}$ $(j=1,2)$ совпадают с его Φ-множеством, которое содержит все точки плоскости, за исключением точки ноль и точек кривых $\zeta=K_j(\lambda)$ $(j=1,2)$.

Следовательно, $\Phi_{\pm}$-множества оператора $\mathbf{K}_\pi$ совпадают с его Φ-множеством, а последнее состоит из всех точек плоскости, за исключением точек кривых $\zeta=K_j(\lambda)$ $(j=1,2)$ и точки ноль.

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема 9. *Спектр оператора K_π в пространстве E состоит из замыкания S_ζ* множества всех точек ζ кривых*

$$\zeta=K_1(\lambda),\qquad \zeta=K_2(\lambda)\qquad (-\infty<\lambda<\infty) \tag{6.3}$$

и открытого множества S_0 всех точек $\zeta\in S_\zeta$, для которых $\nu_\zeta\neq 0$ (т. е. выполняется условие (6.2)). S_0 является Φ-множеством оператора $\mathbf{K}_\pi$, а точки $\zeta\in S_\zeta$ не являются ни Φ-, ни $\Phi_{\pm}$-точками оператора $\mathbf{K}_\pi$.

Теорема сохраняет силу при замене оператора $\mathbf{K}_\pi$ его транспонированным $\mathbf{K}_\pi^\tau$.

7. ЗАМЕЧАНИЕ О ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГАХ УРАВНЕНИЙ (I) И (I')

Дискретным аналогом парного интегрального уравнения является бесконечная система уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k}^{(1)}\xi_k=\eta_j & (j=-1,-2,\cdots) \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k}^{(2)}\xi_k=\eta_j & (j=0,1,2,\ldots). \end{cases} \tag{7.1}$$

Подобно тому, как вся теория интегральных уравнений (0.1) переносится [2, 10] на систему линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{j-k}\xi_k=\eta_j \qquad (j=0,1,2,\ldots),$$

при этом как доказательства теорем, так и их формулировки в известном смысле упрощаются, теория систем уравнений (7.1) и соответствующих транспонированных систем

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_{k-j}^{(1)}\xi_k+\sum_{k=0}^{\infty} a_{k-j}^{(2)}\xi_k=\eta_j \qquad (j=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

* Замыкание S_ζ очевидно, получается присоединением к множеству точек кривых (6.3) одной точки $\zeta=0$.

может быть построена путем соответствующего перенесения изложенных результатов относительно парного интегрального уравнения (!) и его транспонированного (!ᵀ), при этом теория принимает более простой вид.

При таком перенесении роль условий $\kappa_{1,2}(t) \in L$ будут играть условия

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} |a_{\kappa}^{(p)}| < \infty \qquad (p = 1,2).$$

Роль пространств E, E_+ будут играть соответствующие пространства последовательностей (E) и (E_+) (относительно последних см. [2, § 6]). Роль условий (2.7) будут играть условия

$$a_p(e^{i\varphi}) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} a_{\kappa}^{(p)} e^{\kappa i \varphi} \neq 0 \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi; \quad p = 1,2),$$

а роль индекса ν — число, равное поделенному на 2π приращению аргумента функции $a_2(\zeta)/a_1(\zeta)$, когда ζ пробегает единичную окружность в положительном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Рапопорт. О некоторых «парных» интегральных и интегродифференциальных уравнениях. Сборник трудов института математики АН УССР, № 12, 1949, стр. 102—118.

2. М. Г. Крейн. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, т. XIII, вып. 5, 1958.

3. Ю. И. Черский. О некоторых особых интегральных уравнениях. Ученые записки Казанского Госуниверситета, т. 113, кн. 10, 1953, 43—55.

4. Ю. И. Черский. Интегральные уравнения типа свертки. Автореферат диссертации. Тбилиси, 1956.

5. Ф. Д. Гахов и Ю. И. Черский. Особые интегральные уравнения типа свертки и площадная задача типа задачи Римана. Ученые записки Казанского Госуниверситета, т. 114, кн. 8, 1954, 21—33.

6. Ф. Д. Гахов и Ю. И. Черский. Особые интегральные уравнения типа свертки. Известия Акад. наук СССР, т. 20, № 1, 1956, 33—52.

7. В. А. Фок. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Математический сборник, т. 4(56), № 1—2, 1944, 3—50.

8. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. УМН, т. XIII, вып. 2(80), 1958, 3—72.

9. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилов. Нормированные континуальные кольца. Успехи математических наук, т. I, вып. 2, 1946, 48—146.

10. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. Успехи математических наук, т. 12, вып. 2, 1957.

11. І. М. Рапопорт. Про один клас безконечних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Доповіді Акад. наук УРСР. Відділ фізико-математичних та хімічних наук. № 3, 1948, 6—10.

Работа поступила в июне 1957 г.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

Т. Я ЗАГОРСКИЙ

К ТЕОРИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. Настоящая статья представляет собой продолжение статей [1, 2, 3, 4], посвященных смешанной задаче для параболических систем, и содержит построение решения параболической системы с производными различных порядков и с переменными коэффициентами при младших производных, зависящими от пространственных координат $x_1, \ldots, x_n$ и от t.

Кроме того, здесь рассматриваются граничные условия с переменными коэффициентами и исследуются вопросы единственности.

Предполагается, что уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u$$

параболично, т. е. λ_κ корни характеристического уравнения

$$\det A(\alpha, \lambda) = \det(A(\alpha) - \lambda E) = 0$$

подчинены условию

$$\operatorname{Re} \lambda \leqslant -\delta |\alpha|^S, \qquad \delta > 0.$$

Здесь $A(\alpha)$ — результат замещения символа $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ в матрице $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, определяемой ниже, числом $i\alpha$; $u = (u_1, \ldots, u_N)$ — столбцевая функциональная матрица.

В статье используются следующие обозначения:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\sum_{\kappa_1 + \ldots + \kappa_n = S} a_{ij}^{\kappa_1, \ldots, \kappa_n} \frac{\partial^S}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}}\right)_{i, j=1}^{i, j=N};$$

$$L\left(x; t; \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\sum_{\kappa_1 + \ldots + \kappa_n \leqslant S-1} l_{ij}^{\kappa_1, \ldots, \kappa_n}(x, t) \frac{\partial^{\kappa_1 + \ldots + \kappa_n}}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}}\right)_{i j=1}^{i j=N};$$

s — целое положительное четное число, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мерной области V, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Область v есть конечная область, ограниченная выпуклой замкнутой поверхностью S типа Ляпунова. В некоторых случаях v обозначает также полупространство $x_n > 0$;

$a_{ij}^{\kappa_1,\dots,\kappa_n}$ — некоторые постоянные числа; $l_{ij}^{\kappa_1,\dots,\kappa_n}(x,\ t)$ — непрерывные функции в замкнутой области $\bar{v}$, $0 \leqslant t \leqslant T$;

$$B_2\left(y,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)=\left(\sum_{\kappa_1+\dots+\kappa_n=s_i} b_{ij}^{\kappa_1,\dots,\kappa_n}(y)\frac{\partial^{s_i}}{\partial x_1^{\kappa_1}\dots\partial x_n^{\kappa_n}}\right)_{i,j=1}^{i=\frac{SN}{2};\ j=N}.$$

Здесь $b_{ij}^{\kappa_1\dots\kappa_n}(y)$ — некоторые непрерывные функции точки y, заданные на поверхности S, ограничивающей объем v; s_i — целое положительное число, причем $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots s_{\frac{SN}{2}} < s$.

2. В этом пункте будет рассмотрена смешанная задача, описываемая системой

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u, \qquad x \in v \tag{1}$$

и условиями

$$\lim_{x\to y\in S} B_2\left(y,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)u=f(y\,;t). \tag{2}$$

$$u|_{t=0}=0. \tag{3}$$

В работе [2] было построено решение смешанной задачи, описываемой системой (1), условием (3) и граничным условием

$$\lim_{x\to y\in S} B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u=f(y\,;t) \tag{4}$$

$f(y,\ t)$ — непрерывная функция $y \in S$ и t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Коэффициенты матрицы $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, обозначаемые через $b_{ij}^{\kappa_1,\dots,\kappa_n}$ считались постоянными и порядок производных в ней одинаковым и равным $s_1 < s$.

Решение задачи (1), (3), (4) легко обобщается для случая коэффициентов $b_{ij}^{\kappa_1,\dots,\kappa_n}(y)$, непрерывно зависящих от точки $y \in S$. Будем обозначать матрицу, которая получается из $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ при этом условии, символом $B_1\left(y,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Рассмотрим вопрос о решении системы (1) при начальном условии (3) и граничном условии

$$\lim_{x\to y\in S} B_1\left(y,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)u=f(y,\ t). \tag{5}$$

В работе [2] решение задачи (1), (3), (4) разыскивалось в виде

$$u=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^t d\tau\int_{(S)} G^{\nu_y}(x-y;\ t-\tau)\,\varphi(y,\ \tau)\,d_yS,$$

где $G^{\nu_y}(x-y\,;\,t-\tau)$ есть функция Грина смешанной задачи для полупространства, ограниченного плоскостью, касательной к поверхности S с орт-нормалью ν_y, направленной в сторону объема V. Устанавливается формула скачка этого „потенциала" в виде

$$\lim_{x\to y\in S} B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)=B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)|_{x=y\in S}+\varphi(y,t). \tag{6}$$

Используя формулу скачка и граничное условие, получаем интегральное уравнение для определения неизвестной функции $\varphi(y,t)$ в виде

$$\varphi(z,t)+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{(S)} B_1\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)G^{\nu_y}(z-y\,;\,t-\tau)\,\varphi(y,\tau)\,d_yS=f(z,t). \tag{7}$$

Разрешимость интегрального уравнения (7) доказывается с помощью оценки для функции $B_1\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)G^{\nu_y}(z-y\,;\,t-\tau)$, записываемой в виде неравенства

$$\left|B_1\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)G^{\nu_y}(z-y;\,t-\tau)\right|\angle\frac{C_1e^{-C_2|z_{T_y}-y|^{\frac{S}{S-1}}(t-\tau)^{-\frac{1}{S-1}}}|z-z_{T_y}|}{(t-\tau)^{\frac{S+n}{S}}}. \tag{8}$$

Здесь z_{T_y} есть проекция точки z на касательную к S плоскость в точке $y\in S$.

Решение задачи (1), (3), (5) также будем искать в форме

$$u=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_S G^{\nu_y}(x-y;\,t-\tau)\,\varphi(y;\tau)\,d_yS. \tag{9}$$

Здесь $G^{\nu_y}(x-y\,;\,t-\tau)$ есть функция Грина смешанной задачи для полупространства, ограниченного касательной к S плоскостью T_y в точке $y\in S$ с граничным условием

$$\lim_{|x-x_{T_y}|\to 0} B_1\left(\nu,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)=f_1(x_{T_y},t);$$

x_{T_y} есть проекция точки x на плоскость T_y.

Последняя смешанная задача для полупространства характеризуется граничной матрицей $B_1\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ с постоянными коэффициентами $b_{ij}^{\kappa_1,\dots,\kappa_n}(y)$, т. к. $b_{ij}^{\kappa_1,\dots,\kappa_n}(y)$ в любой точке плоскости T_y равны своему значению в точке касания $y\in S$. Поэтому для функции u, определенной (9), сохраняются все свойства, изученные в [2], а именно: имеет место формула скачка

$$\lim_{x \to z \in S} B_1\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = B_1\left(y, \frac{\partial}{\partial z}\right) u(z, t) + \varphi(z, t) \tag{10}$$

и для определения функции $\varphi(z, t)$ получается уравнение

$$\varphi(z, t) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(S)} B_1\left(y, \frac{\partial}{\partial z}\right) G^{\nu y}(z-y; t-\tau)\, \varphi(y, \tau)\, d_y S = f(z, t). \tag{11}$$

Оценка (8) принимает вид

$$\left| B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial z}\right) G^{\nu y}(z-y; t-\tau) \right| \leqslant \frac{C_1(y)\, e^{-c_2 |z_{T_y} - y|^{\frac{S}{S-1}} (t-\tau)^{-\frac{1}{S-1}}} |z - z_{T_y}|}{(t-\tau)^{\frac{S+n}{S}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3 e^{-C_2 |z_{T_y} - y|^{\frac{S}{S-1}} (t-\tau)^{-\frac{1}{S-1}}} |z - z_{T_y}|}{(t-\tau)^{\frac{S+n}{S}}}, \quad C_3 = \text{const}.$$

Здесь $C_3 \geqslant C_1(y)$, т. к. $B_1\left(y, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ непрерывно по y на замкнутом множестве S. Следовательно, доказательство разрешимости уравнения (7) сохраняет силу и для (11).

В работе [4] было указано, что интегральное уравнение (7) разрешимо и при замене матрицы B_1 матрицей $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ с различными порядками производных в различных строках, если наложить дополнительное ограничение на функцию $f(y, t)$, а именно: принять, что

$$f(y, 0) = 0.$$

Очевидно, при выполнении этого условия будет разрешима и задача (1), (2), (3).

3. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу. Требуется найти решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u + f(x, t) \tag{12}$$

для

$$x \in V \text{ и } 0 \leqslant t \leqslant T$$

при условиях

$$u|_{t=0} = \psi(x)^* \tag{13}$$

и

$$\lim_{x \to y \in S} B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \varphi(y, t). \tag{14}$$

* Функции $f(x, t)$ и $\psi(x)$ предполагаются непрерывными при $x \in v$ и $0 \leqslant t \leqslant T$ и непрерывно дифференцируемыми до порядка s по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Предполагается согласованность начальных и граничных условий, т. е.

$$\lim_{x \to y \in S} B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = \varphi(y, 0), \tag{15}$$

и выполнение условия регуляризуемости (разрешимости) (см. [1], [2]) в каждой точке поверхности S. Функцию u будем искать в виде суммы

$$u = u_1 + u_2,$$

где u_1 есть решение задачи Коши для системы (12) при начальном условии (13), т. е.

$$u_1 = \int_{(V)} \Gamma(x-\xi, t)\psi(\xi)\,d\xi + \int_0^t d\tau \int_{(V)} \Gamma(x-\xi; t-\tau) f(\xi; \tau)\,d\xi. \tag{16}$$

Здесь функция $\Gamma(x-\xi; t-\tau)$ есть так называемая функция Грина задачи Коши, построенная И. Г. Петровским [5]; u_2 определяется как решение системы

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u_2 \tag{17}$$

при условиях

$$u_2\Big|_{t=0} = 0; \lim_{x \to y \in S} B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_2 = \varphi(y, t) - B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_1(x, t)\Big|_{x=y \in S}. \tag{18}$$

Последнее можно осуществить, используя результаты работы [3], [4] и п. 1 настоящей статьи, в соответствии с чем полагаем

$$u_2 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(S)} G^{\nu_y}(x-y; t-\tau)\mu(y, \tau)\,d_y S, \tag{19}$$

где $G^{\nu_y}(x-y; t-\tau)$ — функция Грина смешанной задачи для полупространства, ограниченного плоскостью с ортнормалью ν_y, касательной к поверхности S в точке y; $\mu(y; \tau)$ — столбцевая матрица высоты $\frac{sN}{2}$ с элементом, непрерывным в области $\bar{V}$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, определяемая как решение системы

$$\mu(z; t) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(S)} B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) G^{\nu_y}(x-y; t-\tau)\big|_{x=z \in S}\, \mu(y, \tau)\,d_y S -$$

$$- B_2\left(z, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_1(x, t)\big|_{x=z \in S} + \varphi(z, t). \tag{20}$$

Разрешимость этого уравнения для рассматриваемого класса поверхностей была доказана в работе [3], [4].

Решение смешанной задачи (12), (13), (14) запишется в виде

$$u = \int\limits_{(V)} \Gamma(x-\xi;\, t)\,\psi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{(V)} \Gamma(x-\xi;\, t-\tau) f(\xi;\tau)\,d\xi +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{(S)} G^{\nu y}(x-y;\, t-\tau)\,\mu(y;\tau)\,d_y S, \tag{21}$$

где $\mu(y, \tau)$ определяется из системы (20).

4. В этом пункте займемся решением системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u + L\left(x,\, t,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + f(x,t) \tag{22}$$

в области V при условиях

$$u|_{t=0} = 0;\ \lim_{x \to y \in S} B_2\left(y,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = 0. \tag{23}$$

Используя (20) и (21), можно записать смешанную задачу (22), (23) в виде системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$u(x,\, t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{(V)} \Gamma(x-\xi;\, t-\tau)\, L\left((\xi,\, \tau,\, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(\xi,\, \tau)\,d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{(V)} \Gamma(x-\xi;\, t-\tau) f(\xi,\, \tau)\,d\xi +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{(S)} G^{\nu y}(x-y;\, t-\tau)\,\mu(y,\, \tau)\,d_y S; \tag{24}$$

$$\mu(z,\, t) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{(S)} B_2\left(y,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) G^{\nu y}(x-y;\, t-\tau)|_{x=z\in S}\, \mu(y,\, \tau)\,d_y S -$$

$$- \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{(V)} B_2\left(y,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Gamma(x-\xi;\, t-\tau)|_{x=z\in S}\, L\left(\xi,\, \tau,\, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(\xi,\, \tau)\,d\xi -$$

$$- \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{(V)} B_2\left(y,\, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Gamma(x-\xi;\, t-\tau)|_{x=z\in S} f(\xi,\, \tau)\,d\xi. \tag{25}$$

Здесь $G^{\nu y}(x-y;\ t-$ — функция Грина смешанной задачи для полупространства, ограниченного плоскостью, касательной к S в точке y, для системы (1) при условиях (2) и (3).

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$\int_0^t d\tau \int_{(V)} \Gamma(x-\xi; t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi = \varphi(x, t);$$

$$B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) G^{\nu_y}(x-y; t-\tau) = K(x, y, t, \tau);$$

$$B_2\left(z, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Gamma(x-\xi; t-\tau) = Q(z, x, \xi, t, \tau);$$

$$\int_0^t d\tau \int_{(V)} B_2\left(z, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Gamma(x-\xi; t-\tau)|_{x=z\in S} f(\xi, \tau)\, d\xi = \psi(z, t).$$

Введем также понятие модуля матрицы A.

Модулем матрицы A будем называть и обозначать $|A|$ матрицу, составленную из модулей, т. е.

$$|A| = (|A_{ij}|).$$

Далее матричное неравенство $A \leqslant B$ означает, что существует n^2 неравенств между соответствующими элементами $A_{ij} \leqslant B_{ij}$. Очевидно, имеет место соотношение

$$|AB| \leqslant |A||B|.$$

Систему (24), (25) можно записать в виде:

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{(V)} \Gamma(x-\xi; t-\tau) L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(\xi, \tau)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(S)} G^{\nu_y}(x-y; t-\tau) \mu(y, \tau)\, d_y S + \varphi(x, t); \tag{26}$$

$$\mu(z; t) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(S)} K(z, y, t, \tau) \mu(y, \tau)\, d_y S -$$

$$- \int_0^t d\tau \int_{(V)} Q(z, z, \xi, t, \tau) L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(\xi, \tau)\, d\xi - \psi(z, t) \tag{27}$$

Систему (26), (27) будем решать методом последовательных приближений. Положим $u_0 = \varphi(x; t)$; $\mu_0 = \psi(z, t)$ и будем далее вычислять u_k и μ_k при помощи рекуррентных соотношений

$$u_k(x; t) = \int_0^t dt \int_{(V)} \Gamma(x-\xi; t-\tau) L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u_{k-1}(\xi, \tau)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(S)} G^{\nu_y}(x-y; t-\tau) \mu_{k-1}(y, \tau)\, d_y S + \varphi(x; t); \tag{28}$$

$$\mu_k(z, t) = \int_0^t d\tau \int_{(S)} K(z, y; t, \tau)\, \mu(y; \tau)\, d_y S -$$

$$- \int_0^t d\tau \int_{(V)} Q(z, z, \xi, t, \tau)\, L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(\xi, \tau)\, d\xi + \psi(z, t). \tag{29}$$

Обозначим:

$$u_k - u_{k-1} = v_k; \quad \mu_k - \mu_{k-1} = \lambda_k; \quad u_0 = v_0; \quad \lambda_0 = \mu_0.$$

Необходимо доказать равномерную сходимость рядов

$$\sum_{k=\partial}^{\infty} v_k, \quad \sum_{k=\partial}^{\infty} D^{s-1} v_k, \quad \sum_{k=\partial}^{\infty} \lambda_k.$$

D^{s-1} — символ дифференцирования порядка $s-1$ по некоторой последовательности аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Очевидно, имеют место соотношения:

$$v_k = \int_0^t d\tau \int_{(V)} \Gamma(x-\xi; t-\tau)\, L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v_{k-1}(\xi, \tau)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(S)} G^{\nu_y}(x-y; t-\tau)\, \lambda_k(y, \tau)\, d_y S; \tag{28'}$$

$$\lambda_k = \int_0^t d\tau \int_{(S)} K(z, y; t, \tau)\, \lambda_{k-1}(y, \tau)\, d_y S -$$

$$- \int_0^t d\tau \int_{(V)} Q(z, z, \xi, t, \tau)\, L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v_{k-1}(\xi, \tau)\, d\xi. \tag{29'}$$

Перейдем теперь к оценке v_k, λ_k, $D^{s-1} v_k$.
Пусть

$$\sup\{|v_0|, \ |D^{s-1} v_0|; \ |\lambda_0|, \ |l_{ij}^{k_1, \ldots, k_n}(x, t)|\} = M;$$

$$x \in \bar{V}; \qquad 0 \leqslant t \leqslant T; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

Очевидно,

$$\left| L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u_0(\xi, \tau) \right| \leqslant M^2 NE$$

и, следовательно,

$$|v_1(x, t)| \leqslant \int_0^t d\tau \int_{(V)} |\Gamma(x-\xi; t-\tau)|\, d\xi\, M^2 NE +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{(S)} |G^{\nu y}(x-y;\, t-\tau)|\, d_y SME;$$

$$|D^{s-1} v_1(x,t)| \leqslant \int_0^t d\tau \int_{(V)} |D^{s-1}\Gamma(x-\xi;\, t-\tau)|\, d\xi M^2 NE +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{(S)} |D^{s-1} G^{\nu y}(x-y;\, t-\tau)|\, d_y SME;$$

$$|\lambda_1| \leqslant \int_0^t d\tau \int_{(S)} |K(t, y;\, t, \tau)|\, d_y SME +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{(V)} |Q(z, z, \xi, t, \tau)|\, d\xi\, M^2 NE.$$

Матрицы

$$\int_0^t d\tau \int_{(V)} |\Gamma(x-\xi;\, t-\tau)|\, d\xi; \quad \int_0^t d\tau \int_{(V)} |D^{s-1}\Gamma(x-\xi,\, t-\tau)|\, d\xi;$$

$$\int_0^t d\tau \int_{(S)} |G^{\nu y}(x-y;\, t-\tau)\, d_y S; \quad \int_0^t d\tau \int_{(S)} |K(z, y, t, \tau)|\, d_y S;$$

$$\int_0^t d\tau \int_{(V)} |Q(z, z, \xi, t, \tau)|\, d\xi$$

могут быть мажорированы одной матрицей с положительными, непрерывными, монотонно возрастающими элементами, зависящими от t и обращающимися в нуль вместе с t. Такую матрицу обозначим символом $\Phi(t)$. Теперь можно написать:

$$\sup\{|v_1|;\ |D^{s-1} v_1|;\ |\lambda_1|\} \leqslant \Phi(t)(M^2 N + M)E.$$

$$x \in v;\quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Используя эти оценки, легко найдем

$$|v_2(x,t)| \leqslant \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(x-\xi;\, t-\tau)| \left| L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v_1 \right| d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{(V)} |G^{\nu y}(x-\xi;\, t-\tau)|\, |\lambda_1|\, d_y S \leqslant \Phi^2(t)(M^2 N + M)^2 E.$$

Также получаем:

$$|D^{s-1}v_2| \leqslant \Phi^2(t)(M^2N+M)^2E; \qquad |\lambda_2| \leqslant \Phi^2(t)(M^2N+M)^2E.$$

Легко доказать, что

$$\sup\{|v^{(k)}|, \quad |D^{s-1}v_k|, \quad |\lambda^{(k)}|\} \leqslant \Phi^k(t)(M^2N+M)^kE.$$
$$x \in \bar{v} \cdot 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Очевидно, взяв достаточно малое t, найдем

$$\Phi(t_1)(M^2N+M) < 1.$$

Таким образом, в полосе $0 \leqslant t \leqslant t_1$ последовательные приближения, сходятся абсолютно и равномерно, что и доказывает существование и единственность решения нашей задачи в полосе

$$0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Можно повторить решение задачи, исходя из начальных данных при $t=t_1$, и получить решение в интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Продолжая так же, можно построить решение в некоторой полосе $0 \leqslant t \leqslant T_1 \leqslant T$.

5. Теоремы единственности. В настоящем пункте выясним вопрос единственности решений смешанных задач для параболических систем. Отметим одно существенное обстоятельство построенной выше теории смешанной задачи. Как в задаче для полупространства [1], так и в задаче для конечной области [2] предполагалось, что предельный переход изнутри области к ограничивающей поверхности совершается по внутренней нормали к этой поверхности в некоторой ее точке. Естественно, возникает вопрос, каков будет предел решения при предельном переходе, совершающемся по любому некасательному пути, целиком лежащему внутри рассматриваемой области; не будет ли предельное значение решения зависеть от выбранного пути подхода к предельной точке. Отрицательный ответ на этот вопрос, подтверждающий независимость предельного значения от некасательного пути, дается следующей теоремой.

Решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u \tag{30}$$

при условиях

$$u|_{t=0} = 0; \qquad \lim_{x \to y \in S} B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x;t) = f_1(y;t)$$

не зависит от пути, по которому точка x изнутри области стремится к точке $y \in S$, если только x не выходит при этом из области V, двигаясь по любому некасательному к S пути.

Под S здесь подразумевается либо замкнутая выпуклая поверхность типа Ляпунова, либо плоскость $x_n=0$, ограничивающая полупространство $x_n>0$.

Доказательство начнем со смешанной задачи для полупространства $x_n>0$.

Пусть требуется решить систему (30) при условиях

$$u|_{t=0}=0; \qquad \lim_{x\to y\in S(x_n=0)} B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x;t)=f_1(y,t).$$

Стремление x к y предполагается по произвольному некасательному пути, лежащему внутри полупространства $x_n>0$.

Рассмотрим разность

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)-f_1(y;t).$$

Очевидно, имеет место неравенство

$$\left|B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)-f_1(y,t)\right|\leqslant\left|B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)-f_1(x',t)\right|+$$

$$+|f_1(x',t)-f_1(y;t)|.$$

Здесь $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$.

Оценим

$$\left|B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x;t)-f_1(x',t)\right|,$$

для чего представим $f_1(x',t)$ в виде

$$f_1(x',t)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi'\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(x'-\xi')\alpha'}d\alpha'\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}dp\int_{C^+}B(\alpha)A^{-1}(\alpha,p)(E\alpha_nE\ldots$$

$$\ldots\alpha_n^{\frac{s}{2}-1}E)\,d\alpha_n R^{-1}(\alpha',p)\int_0^{\infty}e^{-p\tau}f(\xi',\tau)\,d\tau,$$

что возможно в силу условий, наложенных на функцию $f_1(x',t)$.

Теперь

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n i}\int_0^t d\tau\int_{-\infty}^{\infty}e^{i((x'-\xi')\alpha')}d\alpha'\int_{-\infty}^{\infty}d\xi'\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{p(t-\tau)}dp\int_{C^+}e^{i\alpha_n x_n}B(\alpha)A^{-1}(\alpha_1 p)\times$$

$$\times(E\alpha_nE\ldots\alpha_n^{\frac{s}{2}-1}E)\,d\alpha_nR^{-1}(\alpha',p)f_1(\xi',\tau).$$

В силу абсолютной сходимости при $x_n>0$ можно написать

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x;t)=\frac{1}{(2\pi)^n i}\int_{-\infty}^{\infty}d\xi'\int_{-\infty}^{\infty}e^{i((x'-\xi')\alpha')}d\alpha'\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}e^{pt}dp\int_{C^+}e^{i\alpha_nx_n}B(\alpha)\times$$

$$\times A^{-1}(\alpha_1 p)(E\alpha_n E\ldots \alpha_n^{\frac{s}{2}-1}E)\,d\alpha_n R^{-1}(\alpha', p)\int\limits_0^\infty e^{-p\tau} f(\xi', \tau)\,d\tau\,.$$

и, следовательно,

$$\left| B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) - f_1(x', t)\right| = \frac{1}{(2\pi)^n}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi' \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i((x'-\xi')\alpha')}\,d\alpha' \times\right.$$

$$\times \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}\,dp \int\limits_{C^+}\left(e^{i\alpha_n x_n} - 1\right) B(\alpha)\,A^{-1}(\alpha; p)\,(E\,\alpha_n E\ldots \alpha_n^{\frac{s}{2}-1}E)\,d\alpha_n \times$$

$$\left.\times R^{-1}(\alpha', p)\int\limits_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\xi', \tau)\,d\tau\right| =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi' \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i((x'-\xi')\alpha'}\,d\alpha' \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt}\,dp \int\limits_0^{x_n} d\,\xi_n \int\limits_{C^+} e^{i\alpha_n\xi_n} i\alpha_n B(\alpha)\,A^{-1}(\alpha; p) \times\right.$$

$$\left.\times (E\alpha_n E\ldots \alpha_n^{\frac{s}{2}-1}E)\,d\alpha_n R^{-1}(\alpha', p)\int\limits_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\xi', \tau)\,d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_0^{x_n} d\xi_n' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-C_2|x'-\xi'|^{\frac{s}{s-1}} t^{-\frac{1}{s-1}}}\, A_1(\xi')\,d\xi'}{t^{\frac{n+s-1}{s}}\left(1 + \dfrac{\xi_n}{t^{\frac{1}{s}}}\right)^{n+s-1}} \leqslant C_3 x_n\,.$$

В данном случае использована оценка функции Грина смешанной задачи для полупространства и условия

$$|f_1(\xi', \tau)| \leqslant A_1(\xi')\,e^{\sigma t}; \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_1(\xi')\,d\xi' < \infty \quad \sigma > 0$$

(см. [3]).

C_3 здесь не зависит от x.

Теперь, очевидно, что если x стремится к $y \in S$ по любому некасательному пути внутри полупространства $x_n > 0$, то в силу непрерывности $f_1(y, x)$ на плоскости $x_n = 0$ разность $|f(x', t - f(v, t)|$ по абсолютной величине станет в конце концов сколь угодно малой. Такой же станет и разность $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) - f(x_1, t)$.

Но это означает, что при стремлении x к $y \in S$ по произвольному некасательному пути при $x_n > 0$, $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)$ стремится к $f_1(y,t)$

Перейдем теперь к рассмотрению смешанной задачи для области V, ограниченной выпуклой замкнутой поверхностью типа Ляпунова.

Решение задачи разыскивается в виде

$$u = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(V)} G^{\nu_y}(x-y; t-\tau)\, \mu(y, \tau)\, d_y S, \tag{31}$$

где $G^{\nu_y}(x-y; t-\tau)$ — матрица Грина смешанной задачи для полупространства, ограниченного плоскостью, касательной к S в точке y с ортнормалью ν_y. По построению эта функция удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию $u|_{t=0}=0$.

Требуется так подобрать непрерывную функцию $\mu(y, \tau)$, чтобы выполнялось краевое условие

$$\lim_{x \to y \in S} B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f(y, t). \tag{31'}$$

На основе решения смешанной задачи для полупространства была доказана теорема о поведении интеграла (31) при подходе внутренней точки $x \in v$ к граничной точке $y \in S$ по нормали ν_y; при этом получилось равенство

$$\lim_{x \to y \in S} B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x; t) = B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)|_{x=y \in S} + \mu(y, t). \tag{32}$$

Использование равенства (32) и краевого условия (31′) приводит к интегральному уравнению для определения функции $\mu(y, t)$. Теорема, доказанная в этом разделе, делает очевидным, что соотношение (32) имеет место не только при подходе к $y \in S$ по нормали ν_y, но и по любому некасательному пути, не выходящему из области v, а это означает, что теорема справедлива и во второй своей части, т. е. для конечной области, ограниченной поверхностью S.

Перейдем теперь к установлению теорем единственности решений некоторых смешанных задач для параболических систем. Сначала рассмотрим смешанную задачу для полупространства $x_n>0$ системы (1) с краевым условием

$$\lim_{x_n \to 0} B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f(x', t)$$

при начальном условии $u|_{t=0}=0$. Считается также выполненным условие регуляризуемости [1]. Класс функций K, в котором будет доказана единственность решения, описывается следующим образом. К классу K относятся все функции $u(x_1, \ldots, x_n, t)$, имеющие непрерывные производные по любой последовательности переменных $x_1, \ldots, x_n$ до порядка S включительно и по t первого порядка, подчиненные условию

$$\left|\frac{\partial^{\kappa_1 \ldots \kappa_n} u(x, t)}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}}\right| \leqslant M(x')\, M_1(x_n)\, e^{\sigma t}; \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \leqslant M(x')\, M_1(x_n)\, e^{\sigma t} \tag{33}$$

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_n \leqslant s,$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(x')\,dx' < \infty; \quad \int_{0}^{\infty} M(x_n)\,dx_n < \infty; \quad \sigma > 0.$$

Пусть функция $u \in K$ удовлетворяет системе

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u \tag{34}$$

и условиям

$$u|_{t=0} = 0; \qquad \lim_{x_n \to 0} B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0. \tag{35}$$

Обе части системы (34) умножим на $e^{-i(\xi'\alpha')}$ и проинтегрируем по всему пространству $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Это дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi'\alpha')} \frac{\partial u}{\partial t}\,d\xi' = \int_{0}^{\infty} e^{-i(\xi'\alpha')} A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(\xi, \tau)\,d\xi'.$$

В силу условий (33) законно изменение порядка дифференцирования и интегрирования, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi'\alpha')} \frac{\partial u}{\partial t}\,d\xi' = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi'\alpha')} u\,d\xi' = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}.$$

Рассмотрим теперь

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi'\alpha')} \frac{\partial^{\kappa} u(\xi' x_n, t)}{\partial x_1^{\kappa_1} \cdots \partial x_n^{\kappa_n}}.$$

Интегрированием по частям получаем

$$I = (-i)^{\kappa-\kappa_n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi'\alpha')} \alpha_1^{\kappa_1} \ldots \alpha_{n-1}^{\kappa_{n-1}} \frac{\partial^{\kappa_n} u}{\partial x_n^{\kappa_n}}\,d\xi'.$$

Здесь также можно изменить порядок дифференцирования и интегрирования, т. е. написать

$$I = (-i)^{\kappa-\kappa_n} \alpha_1^{\kappa_1} \ldots \alpha_{n-1}^{\kappa_{n-1}} \frac{\partial^{\kappa_n}}{\partial x_n^{\kappa_n}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi'\alpha')} u\,d\xi' = (-i)^{\kappa-\kappa_n} \alpha_{n-1}^{\kappa_{n-1}} \cdots \alpha_{n-\kappa}^{\kappa_{n-1}} \frac{\partial^{\kappa_n} \tilde{u}}{\partial x_n^{\kappa_n}}.$$

Следовательно, применение преобразования Фурье к системе (34) и условиям (35) дает

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = A\left(\alpha' \frac{d}{\partial x_n}\right)\tilde{u}, \quad \tilde{u}|_{t=0} = 0, \quad \lim B\left(\alpha', \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\tilde{u} = 0 \tag{36}$$

Преобразование Лапласа, примененное к (36), приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$p\tilde{u} = A\left(\alpha', \frac{d}{dx_n}\right)\tilde{u} \tag{37}$$

с граничным условием

$$\lim_{x_n \to 0} B\left(\alpha', \frac{d}{dx_n}\right)\tilde{u} = 0. \tag{38}$$

Общее решение системы (37) можно записать с помощью контурного интеграла в виде

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi i}\int_B e^{i\alpha_n x_n} A^{-1}(\alpha, p)(C_0 + \alpha_n C_1 + \ldots + \alpha_n^{s-1} C_{s-1})\, d\alpha_n.$$

Здесь $C_0, \ldots, C_{s-1}$ суть столбцы произвольных параметров высоты N, (C) есть контур в комплексной плоскости α_n, внутри которого находятся все корни характеристического уравнения

$$\det(pE - A(\alpha', d_n)) = \det A(\alpha, p) = 0. \tag{39}$$

Из условий (33) следует, что $u \to 0$ при $x_n \to \infty$ и потому, вместо контура C нужно взять контур C^+, внутри которого находится $\frac{sN}{2}$ корней (39), у которых $Im\alpha_n^{(k)} > 0$. Итак,

$$\bar{u} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} e^{i\alpha_n x_n} A^{-1}(\alpha, p)(C_0 + \alpha_n C_1 + \ldots + \alpha_n^{s-1} C_{s-1})\, d\alpha_n.$$

Здесь уже будет лишь $\frac{sN}{2}$ независимых произвольных параметров.

Применим теперь граничное условие (38). Это даст

$$\int_{C^+} B(\alpha) A^{-1}(\alpha, p)(E\alpha_n E \ldots \alpha_n^{s-1} E)\, d\alpha_n \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{\frac{sN}{2}} \end{pmatrix} = 0.$$

Учитывая условия регуляризуемости (ранг матрицы в правой части равняется $\frac{sN}{2}$), находим, что $C_1 = 0, \ldots, C_{\frac{sN}{2}} = 0$, т. е. $u = 0$, что и требовалось.

Теорема единственности для смешанной задачи, в конечной области ограниченной выпуклой замкнутой поверхностью типа Ляпунова, формулируется следующим образом.

Пусть рассматривается смешанная задача для параболической системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u \tag{40}$$

в области $v \cup S$ с начальным условием

$$u|_{t=0} = 0 \tag{41}$$

и граничным

$$\lim B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0. \tag{42}$$

Предполагается выполнение условия регуляризуемости для задачи (40) (41) (42), т. е. что в каждой точке $y \in S$ ранг матрицы

$$\int_{C+} B_2(y, \lambda v_y + \mu) A^{-1}(\lambda v_y + \mu)(E \lambda E \ldots \lambda^{s-1}E)\, d\lambda \quad \text{равен } \frac{sN}{2}.$$

Кроме того, предполагается выполнение следующих двух условий: а) сопряженный граничный оператор $B^*\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ представляет собой линейный дифференциальный оператор с производным порядка не выше $s-1$ и с коэффициентами, непрерывно зависящими от точки $y \in S$; и б) для сопряженной краевой задачи выполняется условие регуляризуемости, т. е. ранг матрицы

$$\int_{C+} B_2^*(h, \lambda r_y A^{*-1}(\lambda v_y + \mu)(E \lambda E \ldots \lambda^{s-1}E)\, d\lambda .$$

равняется $\frac{sN}{2}$. Среди функций, имеющих непрерывные производные по любой последовательности аргументов $x_1, \ldots, x_n$, до порядка s включительно и непрерывную первую производную по t, не существует иного, кроме тождественного нуля, решения смешанной задачи (40), (41), (42).

Рассмотрим два вектора $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $W = (W_1, \ldots, W_n)$ высоты N, непрерывные в области $x \in v$ и при $0 \leqslant t \leqslant T$, и пусть $Q[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и Q^* — обозначение оператора, сопряженного к Q, т. е. Q^* получается из Q транспонированием и заменой каждого элемента его сопряженным по Лагранжу. Используя формулу Остроградского, можно написать

$$\int_0^t d\tau \int_{(V)} \{WQ[u] - (Q^*[W^*]u\}\, \partial x = \int_0^t d\tau \int_{(S)} \Omega[u, W]\, dS +$$

$$+ \int_{(V)} Wu dx - \int_{(V)\tau=t} Wu \partial x .$$

Здесь $\Omega[u, v]$ есть билинейная форма относительно u и W их производных $x_1, \ldots, x_n$ до порядка $s-1$.

Пусть u есть решение системы (40) в области v, удовлетворяющее условиям (41) и (42). В противоречии с теоремой допустим, что $u_1 > 0$ в некоторой окрестности σ точки $x \in v$;

Пусть W есть решение сопряженной задачи, т. е. решение системы

$$\frac{\partial W}{\partial t} = A^* \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) W$$

при условиях

$$W_1 |_{\tau=t\,(i=2,3,\ldots,N)} = 0, \quad W_1 |_{\tau=t} = W^0.$$

Здесь W_0 есть непрерывная функция, равная нулю вне окрестности σ и положительная внутри σ.

При этих значениях u и W из формулы Остроградского следует, что

$$\int\limits_{(\sigma)\,\tau=t} W_1 u_1 d\xi = 0\,.$$

Но это противоречит принятым предположениям, и, следовательно, теорема единственности может считаться доказанной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Загорский Т. Я. Укр. математ. журнал № 3, 1957.
2. Загорский Т. Я. Научные записки Львовск. политехн. ин-та. Серия физ.-мат. вып. 2, 1956.
3. Загорский Т. Я. Доклады АН СССР, т. 106, № 1, 1956, т. III.
4. Загорский Т. Я. Доклады АН СССР, т. 117, № 3, 1957.
5. Петровский И. Г. Бюллетень МГУ, секция А, т. I, вып. 7. 1938.

Работа поступила в апреле 1957 г.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАТРИЦ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Настоящая статья, являющаяся продолжением нашей работы [8], посвящена дальнейшему детальному изучению фундаментальных матриц решений линейных параболических систем (§ 1), их применения к рассмотрению поведения решений параболических систем в окрестности изолированной особой точки (§ 2), а также исследованию разрешимости задачи Коши для нелинейных и квазилинейных параболических систем (§ 3). Некоторые из приведенных здесь результатов были доложены автором на 3 Всесоюзном математическом съезде (11). Определения и обозначения те же, что и в работе [8].

1. О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАТРИЦАХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Фундаментальным матрицам решений (ф. м. р.) линейных параболических систем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) u \equiv P_0\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) u + P_1\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) u \qquad (1,1)$$

посвящена работа [8]. Целью настоящего параграфа является построение ф. м. р. при весьма малых ограничениях на коэффициенты системы (1,1) и их более детальное изучение, необходимое для дальнейшего их использования.

1. Начнем с установления теоремы о ф. м. р. системы (1,1) в случае, когда коэффициенты заданы в полосе $\Pi_1\{-\infty < x_s < \infty, s = 1,2,\ldots,n; 0 \leqslant t \leqslant T\}$.

Т е о р е м а 1. Если выполнены условия:

1. Коэффициенты $P\left(t, x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ непрерывны по t, при этом непрерывность по t коэффициентов в $P_0\left(t, x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ равномерна по $x_1,\ldots,x_n$ из π_1 2) коэффициенты $P\left(t, x, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ ограничены и удовлетворяют условию Гельдера по $x_1,\ldots, x_n$ с показателем α, $0 < \alpha \leqslant 1$ (непрерывны в смысле Гельдера), то у системы (1,1) существует ф. м. р. $Z(t, \tau, x, \xi)$, удовлетворяющая неравенствам:

$$\left| \underset{|m|=0,1,\ldots,2b}{D_x^m Z(t,\tau,x,\xi)} \right| \leqslant C_m (t-\tau)^{-\frac{n+m}{2b}} \exp\left\{ -c \sum_{s=1}^{n} |x_s-\xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}} \right\} \tag{1,2}$$

$$\left| \underset{|m|=0,1,\ldots,2b}{D_x^m Z(t,\tau,x+h,\xi) - D_x^m Z(t,\tau,x,\xi)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_m^* (t-\tau)^{-\frac{n+m+\alpha}{2b}} |h|^{\gamma} e^{-c^* \sum\limits_{s=1}^{n} |x_s-\xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}}; \tag{1,3}$$

$$|D_x^{2b} Z(t,\tau,x+h,\xi) - D_x^{2b} Z(t,\tau,x,\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant C_{2b}^* (t-\tau)^{-\frac{n+m+\gamma}{2b}} |h|^{\gamma} e^{-c^* \sum\limits_{s=1}^{n} |x_s-\xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}}; \tag{1,4}$$

$\dfrac{|h|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}} \leqslant a$ (1,4), *a — произвольное положительное число, C_m, c — положительные постоянные, зависящие лишь от T, C_m^*, c^* — от T и a, γ — любое положительное число $< \alpha$.*

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную параболическую систему $\dfrac{\partial u}{\partial t} = P_0\left(t, y; \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}\right) u$; обозначим ее матрицу Грина через $G_0(t,\tau,x-\xi,y)$. Используя метод Э. Э. Леви, будем отыскивать $Z(t,\tau,x,\xi)$ в виде

$$Z(t,\tau,x,\xi) = (G_0 t,\tau,x-\xi,\xi) + \int_0^t d\beta \int G_0(t,\beta,x-y,y)\,\varphi(\beta,\tau,y,\xi)\,dy. \tag{1,5}$$

Подберем матрицу $\varphi(t,\tau,x,\xi)$ так, чтобы $Z(t,\tau,x,\xi)$ как функция x и t была при $t > \tau$ решением системы (1,1). При этом будем предполагать, что для $\varphi(t,\tau,x,\xi)$ справедливы оценки

$$|\varphi(t,\tau,x,\xi)| \leqslant C(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \exp\left\{ -c \sum_{s=1}^{n} |x_s-\xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}} \right\}; \tag{1,6$_1$}$$

$$|\varphi(t,\tau,x+h,\xi) - \varphi(t,\tau,x,\xi)| \leqslant C|h|^{\alpha_1} (t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha_2}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{ -c \sum_{s=1}^{n} |x_s-\xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}} \right\}; \tag{1,6$_2$}$$

$\alpha_1 < \alpha$, $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$, неравенство (1,6$_2$) выполнено в предположении

(1,4). (Эти априорные ограничения будут потом доказаны). Применяя оператор $\frac{\partial}{\partial t} - P\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ к $Z(t, \tau, x, \xi)$, получим относительно $\varphi(t, \tau, x, \xi)$ интегральное уравнение

$$\varphi(t, \tau, x, \xi) = K(t, \tau, x, \xi) + \int_{\tau}^{t} d\beta \int K(t, \beta, x, y)\varphi(\beta, \tau, y, \xi)\,dy, \tag{1,7}$$

где

$$K(t, \tau, x, \xi) = \left\{ P\left((t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\right\} G_0(t, \tau, x-\xi, \xi) =$$

$$= \left\{P_0\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) - P_0\left(t, \xi; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) + P_1\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} G_0(t, \tau, x-\xi, \xi).$$

В силу оценок для матрицы Грина [8] и условий теоремы

$$|K(t, \tau, x, \xi)| \leqslant A_1 (t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \exp\left\{-c\sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}; \tag{1,8}$$

$$\varphi(t, \tau, x, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t, \tau, x, \xi); \qquad K_1(t, \tau, x, \xi) = K(t, \tau, x, \xi);$$

$$K_m(t, \tau, x, \xi) = \int_{\tau}^{t} d\beta \int K(t, \beta, x, y) K_{m-1}(\beta, \tau, y, \xi)\,dy. \tag{1,9}$$

Сходимость ряда устанавливается так же, как сходимость ряда (2,22) [8] с помощью леммы 3 [8]. При этом для $\varphi(t, \tau, x, \xi)$ получается оценка

$$|\varphi(t, \tau, x, \xi)| \leqslant A^0 (t-\tau)^{\frac{\alpha-n-2b}{2b}} \exp\left\{-c^*\sum_{s=1}^{x} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}\right\}. \tag{1,10}$$

Переходим к установлению справедливости для $\varphi(t, \tau, x, \xi)$ оценки (1,6)

$$|K(t, \tau, x+h, \xi) - K(t, \tau, x, \xi)| \leqslant |[P_0\left(t, x+h; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) -$$

$$- P_0\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Big] G_0(t, \tau, x+h-\xi, \xi)| + |\Big[P_0\left(t, \xi; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) -$$

$$- P_0\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Big] G_0(t, \tau, x+h-\xi, \xi) - \Big[P_0\left(t, \xi; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) -$$

$$-P_0\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\Bigg]G_0(t, \tau, x-\xi, \xi)\Big| + \Big|P_1\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)[G_0(t, \tau, x+h-\xi, \xi)-$$

$$-G_0(t, \tau, x-\xi, \xi)]\Big| \leqslant B_1\left(\frac{|h|^\alpha}{(t-\tau)^{\frac{n+2b}{2b}}} e^{-c\frac{|x+h-\xi|^q}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{|x-\xi|\,\alpha\,|h|}{(t-\tau)^{\frac{n+2b+1}{2b}}} e^{-c\frac{|x+\theta_1 h-\xi|^q}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}}} + \frac{|h|}{(t-\tau)^{\frac{n+2b}{2b}}} e^{-c\frac{|x+\theta_2 h-\xi|^q}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}}}\right). \quad (1,11)$$

Рассмотрим два случая: 1) $|x-\xi| \geqslant 2|h|$; 2) $|x-\xi| < 2|h|$. В первом случае, используя неравенство $|x-\xi+\Theta h|^q \geqslant \frac{|x-\xi|^q}{2^q}$; $-1 \leqslant \Theta \leqslant 1$; условие Гельдера и оценки матрицы Грина, получим

$$|K(t, \tau, x, +h, \xi) - K(t, \tau, x, \xi)| \leqslant B_2 |h|^{\alpha_1} (t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha_2}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-b_2 \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \quad (1,12)$$

α_1 — любое положительное число $< \alpha$; $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$. Во втором случае оценка (1,12) следует из оценки (1,11) в предположении (1,4).

$$|\varphi(t, \tau, x, \xi) - \varphi(t, \tau, x+h_1\xi)| \leqslant |K(t, \tau, x+h, \xi) - K(t, \tau, x, \xi)| +$$

$$+ \int_\tau^t d\beta \int |K(t, \beta, x+h, y) - K(t, \beta, x, y)|\,|\varphi|\,dy.$$

Оценим второе слагаемое

$$\int_\tau^t d\beta \int |K(t, \beta, x+h, y) - K(t, \beta, x, y)|\,|\varphi(\beta, \tau, y, \xi)|\,dy =$$

$$= \int_\tau^t d\beta \int\limits_{|x-y| \geqslant 2|h|} + \int_\tau^t d\beta \int\limits_{|x-y| < 2|h|} = I_1 + I_2;$$

$$I_1 \leqslant B_2 A^0 |h|^{\alpha_1} \int_\tau^t (t-\beta)^{\frac{\alpha_2-2b}{2b}} (\beta-\tau)^{\frac{\alpha-2b}{2b}} d\beta \prod_{s=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b_3 f(y_s)} \frac{dy_s}{[(t-\beta)(\beta-\tau)]^{\frac{1}{2b}}} \leqslant$$

$$\leqslant B_3 |h|^{\alpha_1} (t-\tau)^{\frac{\alpha+\alpha_2-n-2b}{2b}} \exp\left\{-b_4 \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \quad (1,12_1)$$

Переходим к оценке I_2

$$I_2 \leqslant \int_\tau^t d\beta \int_{|x-y|<2|h|} K(t, \beta, x, y)\,|\,|\varphi(\beta, \tau, y, \xi)|\,dy +$$

$$+\int_\tau^t d\beta \int_{|x-y|<|2|h|} |K(t, \beta, x+h, y)|\,|\varphi(\beta, \tau, y, \xi)|\,dy = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}.$$

Так как оба написанных выше интеграла оцениваются одинаково, приведем подробные оценки $I_2^{(1)}$. При этом мы будем постоянно пользоваться леммой 3 [8]

$$I_2^{(1)} \leqslant A^0 A_0 \int_\tau^t [(t-\beta)(\beta-\tau)]^{\frac{1-2b}{2b}} d\beta \int_{|x_1-y_1|\leqslant 2|h|} e^{-c^* f(y_1)} \frac{dy_1}{[(t-\beta)(\beta-\tau)]^{\frac{1}{2b}}} \times$$

$$\times \prod_{s=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^* f(y_s)} \frac{dy_s}{[(t-\beta)(\beta-\tau)]^{\frac{1}{2b}}} \leqslant B_4 (t-\tau)^{\frac{1-n}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-b_5 \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\} \int_\tau^t \frac{d\beta}{[(t-\beta)(\beta-\tau)]^{\frac{2b-\alpha}{2b}}} \times$$

$$\times \int_{|x_1-y_1|\leqslant 2|h|} e^{-b_6 f(y_1)} \frac{dy_1}{[(t-\beta)(\beta-\tau)]^{\frac{1}{2b}}}; \qquad (1,12_2)$$

$b_6 = c^* - b_5$. Разобьем последний интеграл на два, интегрируя в первом от τ до $t_1 = \tau + \dfrac{t-\tau}{2}$, второй от t_1 до t, приведем оценку первого

$$I_3 = \int_\tau^{t_1} d\beta \int\limits_{\substack{|x_1-y_1|<2|h| \\ |y_1-\xi_1|\geqslant(\beta-\tau)^{\frac{\gamma}{2b}} 2|h|}} + \int_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\substack{|x_1-y_1|<2|h| \\ |y_1-\xi_1|<(\beta-\tau)^{\frac{\gamma}{2b}} 2|h|}} =$$

$$= I_3^{(1)} + I_3^{(2)}, \quad 0 < \gamma < \alpha;$$

$$I_3^{(1)} = \int_\tau^{t_1} d\beta \int\limits_{\substack{|x_1-y_1|<2|h| \\ |y_1-\xi_1|\geqslant(\beta-\tau)^{\frac{\gamma}{2b}} 2|h|}} \exp\left\{-b_6\left(\frac{|x_1-y_1|^q}{(t-\beta)^{\frac{1}{2b-1}}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{|y_1-\xi_1|^q}{(\beta-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}}\right)\right\} \frac{dy_1}{[(t-\beta)(\beta-\tau)]^{\frac{2b+1-\alpha}{2b}}} \leqslant 2^{\frac{2b+1+\alpha}{2b}}\, 2|h|\,(t-\tau)^{-\frac{2b+1-\alpha}{2b}} \times$$

$$\times \int_{\tau}^{t_1} (\beta-\tau)^{\frac{\alpha-2b-1}{2b}} \exp\left\{-b_6 2^q |h|^q (\beta-\tau)^{-\frac{1-\gamma}{2b-1}}\right\} d\beta.$$

В последнем интеграле введем новую переменную $z = \frac{|h|}{(\beta-\tau)^{\frac{1-\gamma}{2b}}}$, тогда получим

$$I_3^{(1)} \leqslant B_5 (t-\tau)^{\frac{\alpha-2b-1}{2b}} |h|^{\frac{\alpha-\gamma}{1-\gamma}} \int\limits_{\frac{2^{\frac{1-\gamma}{2b}}|h|}{(t-\tau)^{\frac{1-\gamma}{2b}}}} e^{-2^q b_6 z^q} z^{\frac{\gamma-\alpha}{1-\gamma}} dz.$$

Оценим последний интеграл

$$\int\limits_{\frac{c|h|}{(t-\tau)^{\frac{1-\gamma}{2b}}}}^{\infty} e^{-bz^q} z^{\frac{\gamma-\alpha}{1-\gamma}} dz \leqslant \int\limits_{\frac{c|h|}{(t-\tau)^{\frac{1-\gamma}{2b}}}}^{1} z^{\frac{\gamma-\alpha}{1-\gamma}} dz +$$

$$+ \int_1^{\infty} e^{-bz^q} dz \leqslant B_6 |h|^{\frac{1-\alpha}{1-\gamma}} (t-\tau)^{\frac{\alpha-1}{2b}} + B_7 \leqslant B_8.$$

Таким образом,

$$I_3^{(1)} \leqslant B_8 |h|^{\frac{1-\alpha}{1-\gamma}} (t-\tau)^{-\frac{2b+1-\alpha}{2b}}. \qquad (1,12_3)$$

Оценим

$$I_3^{(2)} \leqslant \frac{2^{\frac{2b+1-\alpha}{2b}}}{(t-\tau)^{\frac{2b+1-\alpha}{2b}}} \int_{\tau}^{t_1} (\beta-\tau)^{\frac{\alpha-2b-1}{2b}} d\beta \int\limits_{|y_1-\xi_1|<(\beta-\tau)^{\frac{\gamma}{2b}} 2|h|} e^{-b_6 |y_1-\xi_1|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}} dy_1.$$

Введем новую переменную $z = \frac{y_1-\xi_1}{|h|(\beta-\tau)^{\frac{\gamma}{2b}}}$, тогда получим

$$I_3^{(2)} \leqslant B_{10} |h| (t-\tau)^{-\frac{2b+1-\alpha}{2b}} \int_{\tau}^{t_1} (\beta-\tau)^{\frac{\alpha+\gamma-2b-1}{2b}} d\beta \int\limits_{|z|<2} \times$$

$$\times \exp\left\{-b_6\left(\frac{z\,|h|}{(\beta-\tau)^{\frac{1-\gamma}{2b}}}\right)^q\right\}dz \leqslant B_{11}\,|h|^{1-\gamma_1}(t-\tau)^{-\frac{2b+1-\alpha}{2b}}\times$$

$$\times\int\limits_\tau^{t_1}(\beta-\tau)^{\frac{\alpha+\gamma+\gamma_1(1-\gamma)-2b-1}{2b}}d\beta\int\limits_{|z|<2}\frac{dz}{z^{\gamma_1}}\leqslant B_{12}\,|h|^{1-\gamma_1}(t-\tau)^{\frac{-2b-2+2\alpha+\gamma_1}{2b}}\quad 1-\alpha<\gamma_1<1$$

Отсюда, используя, что $\gamma_1-1>-\alpha$, получаем

$$I_3^{(2)}\leqslant B_{12}\,|h|^{1-\gamma_1}(t-\tau)^{-\frac{2b+1-\alpha}{2b}}. \qquad (1{,}12_4)$$

Из неравенств $(1{,}12_{0,\,1,\,2,\,3,\,4})$ найдем

$$|\varphi(t,\tau,x+h,\xi)\,(-\varphi(t,\tau,x,\xi)|\leqslant C\,|h|^{\alpha_1}(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha_2}{2b}}\times$$

$$\times\exp\left\{-b\sum_{s=1}^n|x_s-\xi_s|^q(t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}, \qquad (1{,}13)$$

α_1 — любое положительное число $<\alpha$; $\alpha_2=\alpha-\alpha_1$; $b>0$; $C>0$; $\dfrac{h}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}}\leqslant a$.

Таким образом, установлено, что $\varphi(t,\tau,x,\xi)$ удовлетворяет всем априорным ограничениям и, следовательно, $Z(t,\tau,x,\xi)$, определенная формулой (1,5), где $\varphi(t,\tau,x,\xi)$ найдем по формулам (1,9), (1,10), действительно является фундаментальной матрицей решений параболической системы (1,1). Остается установить, что для $Z(t,\tau,x,\xi)$ справедливы оценки (1,2), (1,3).

Так как удовлетворение этим неравенствам первых слагаемых в (1,5) очевидно, следует оценить лишь „довесок". Сделаем это, используя оценки матрицы Грина и оценки (1,10), (1,13):

$$W(t,\tau,x,\xi)=\int\limits_\tau^t d\beta\int G_0(t,\beta,x-y,y)\,\varphi(\beta,\tau,y,\xi)\,dy; \qquad (1{,}14)$$

$$|D_x^m W(t,\tau,x,\xi)|\leqslant C_m'\int\limits_\tau^t(t-\beta)^{\frac{m}{2b}}(\beta-\tau)^{\frac{\alpha-2b}{2b}}d\beta\prod_{s=1}^n\int e^{-c'f(y_s)}\times$$

$m=0,1,\ldots,2b-1$

$$\times\frac{dy_s}{[(t-\beta)(\beta-\tau)]^{\frac{1}{2b}}}\leqslant C_m\,(t-\tau)^{-\frac{m+n-\alpha}{2b}}\times$$

$$\times\exp\left\{-C_m\sum_{s=1}^n|x_s-\xi_s|^q(t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}, \qquad (1{,}15_m)$$

$$D_x^{2b} W(t,\tau,x,\xi) = \int_\tau^{t_1} d\beta \int D_x^{2b} G_0(t,\beta,x-y,y)\,\varphi(\beta,\tau,y,\xi)\,dy +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int D_x^{2b} G_0 \{\varphi(\beta,\tau,y,\xi) - \varphi(\beta,\tau,x,\xi)\}\,dy +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int (D_x^{2b} G_0(t,\beta,x-y,y) -$$

$$- D_x^{1^{2b}} G_0(t,\beta,x-y,x))\,\varphi(\beta,\tau,x,\xi)\,dy = I_1 + I_2 + I_3 .$$

($D_x^{1^{2b}}$ означает, что дифференцирование по x производится только по третьему аргументу). Оценим I_1

$$|I_1| \leqslant C_{2b}^{(1)}(t-\tau)^{\frac{\alpha-2b-n}{2b}} \exp\left\{-c_{2b}\sum_{c=1}^{n} |x_s-\xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \quad (1,16_1)$$

Оценим I_3:

$$|I_3| \leqslant C_{2b}^{1}\int_{t_1}^{t} d\beta \int \frac{|x-y|^\alpha}{(t-\beta)^{\frac{n+2b}{2b}}} e^{-c\sum\limits_{s=1}^{n} f(y_s)} \frac{dy}{(\beta-\tau)^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{2b}^{(2)}(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} e^{-c_{2b}\sum\limits_{s} |x_s-\xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}}; \quad (1,16_2)$$

$$I_2 = \int_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\frac{|x-y|}{(\beta-\tau)^{\frac{1}{2b}}} \leqslant a} + \int_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{\frac{|x-y|}{(\beta-\tau)^{\frac{1}{2b}}} > a} = I_2^{(1)} + I_2^{(2)}$$

Используя (1,13), оценим $I_2^{(1)}$ так же, как был оценен I_3

$$|I_2^{(1)}| \leqslant C_{2b}^{(3)}(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \exp\left\{-c_{2b}\sum_{s=1}^{n} |x_s-\xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \quad (1,16_3)$$

Оценим $I_2^{(2)}$

$$|I_2^{(2)}| \leqslant C_{2b}^{(4)}(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \exp\left\{-c_{2b}\sum_{s=1}^{n} |x_s-\xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\} \times$$

$$\times \int_{t_1}^{t} \exp\left\{-c^*\left[\frac{t-\tau}{t-\beta}\right]^{\frac{1}{2b-1}}\right\} \frac{d\beta}{t-\beta}.$$

Если теперь в последнем интеграле сделать замену переменных

$$\left(\frac{t-\tau}{t-\beta}\right)^{\frac{1}{2b}}=z, \tag{1,17}$$

то он будет равен $2b\int\limits_{2^{\frac{1}{2b}}}^{\infty} e^{-cz^q}\frac{dz}{z}$, поэтому

$$|I_2^{(2)}|\leqslant C_{2b}^{(5)}(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}}\exp\left\{-c_{2b}\sum_{s=1}^{n}|x_s-\xi_s|^q(t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \tag{1,16}$$

Из оценок $(1,16_{1,2,3,4})$ следует

$$|D_x^{2b}W(t,\tau,x,\xi)|\leqslant C_{2b}(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}}\exp\left\{-c_{2b}\sum_{S=1}^{n}|x_S-\xi_S|^q(t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \tag{1,15}$$

Оценки (1,15) показывают, что главной частью матрицы по „порядку особенности" является матрица Грина $G_0(t,\tau,x-\xi,\xi)$. Из (1,15) следуют оценки (1,2), а из последних — оценки (1,3). Оценки (1,4) устанавливаются сочетанием методики, с помощью которой оценивались матрицы $\varphi(t,\tau,x,\xi)$ и $D_x^{2b}Z(t,\tau,x,\xi)$. Кратко изложим их получение. Достаточно оценить

$$I=\left|\int\limits_{\tau}^{t}d\beta\int[D_x^{2b}G_0(t,\beta,x+h-y,y)-D_x^{2b}G_0(t,\beta,x-y,y)]\times\right.$$

$$\left.\times\varphi(\beta,\tau,y,\xi)\,dy\right|\leqslant\left|\int\limits_{\tau}^{t_1}\right|+\left|\int\limits_{t_1}^{t}\right|=I_{t_1}+I_t.$$

Оценки I_{t_1} ничем не отличаются от оценок разности $|\varphi(t,\tau,x+h,\xi)-\varphi(t,\tau,x,\xi)|$ (оценки $(1,12_{1,2,3,4})$) и дают

$$|I_{t_1}|\leqslant C_1|h|^{\alpha_1}(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha_2}{2b}}\exp\left\{-b\sum_{s=1}^{n}|x_s-\xi_s|^q(t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\};$$

$$\alpha_1<\alpha;\qquad \alpha_2=\alpha-\alpha_1. \tag{1,18$_1$}$$

Переходим к оценке I_t; представим его в виде

$$I_t=\left|\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int[D_x'^{2b}G_0(t,\beta,x+h-y,x)-D_x'^{2b}G_0(t,\beta,x-y,x)]\times\right.$$

$$\times [\varphi(\beta, \tau, y, \xi) - \varphi(\beta, \tau, x, \xi)]\, dy + \int_{t_1}^{t} d\beta \int \Phi(t, \beta, x, y)\, \varphi(\beta, \tau, y, \xi)\, dy\, |;$$

$$\Phi(t, \beta, x, y) = D_x^{2b} G_0(t, \beta, x, + h - y, y) - D_x^{2b} G_0(t, \beta, x - y, y) +$$
$$+ D_x'^{2b} G_0(t, \beta, x + h - y, x) - D_x'^{2b} G_0(t, \beta, x - y, x).$$

Разобьем первый интеграл на 4 слагаемых следующим образом:

$$I_t^{(1)} \left\{ \begin{matrix} |x - y|(\beta - \tau)^{-\frac{1}{2b}} > a \\ |x - y| > 2|h| \end{matrix} \right\}; \qquad I_t^{(2)} \left\{ \begin{matrix} |x - y|(\beta - \tau)^{-\frac{1}{2b}} > a \\ |x - y| \leqslant 2|h| \end{matrix} \right\};$$

$$I_t^{(3)} \left\{ \begin{matrix} |x - y|(\beta - \tau)^{-\frac{1}{2b}} \leqslant a \\ |x - y| > 2|h| \end{matrix} \right\}; \qquad I_t^{(4)} \left\{ \begin{matrix} |x - y|(\beta - \tau)^{-\frac{1}{2b}} \leqslant a \\ |x - y| \leqslant 2|h| \end{matrix} \right\}.$$

Оценим каждый из интегралов $I_t^{(\kappa)}$

$$|I_t^{(1)}| \leqslant C_1 |h|^{\alpha} (t - \tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \exp\left\{ -c_1 \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t - \tau)^{-\frac{1}{2b-1}} \right\} \times$$
$$\times \int_{t_1}^{t} \exp\left\{ -c \left(\frac{t - \tau}{t - \beta} \right) \right\}.$$

Делая в последнем интеграле замену переменных (1,17), получим

$$|I_t^{(1)}| \leqslant C_1^{*} |h|^{\alpha} (t - \tau)^{-\frac{n+2b}{2b}} \exp\left\{ -c_1 \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t - \tau)^{-\frac{1}{2b-1}} \right\}. \quad (1,18_2)$$

Переходим к оценке $I_t^{(2)}$

$$|I_t^{(2)}| < C_2 (t - \tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}} \exp\left\{ -c_2 \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t - \tau)^{-\frac{1}{2b-1}} \right\} \times$$

$$\times \int_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{|x-y| \leqslant 2|h|;\ |x-y|(\beta-\tau)^{-\frac{1}{2b}} \leqslant a} e^{-d_2 \sum\limits_{s=1}^{n} |x_s - y_s|^q (t-\beta)^{-\frac{1}{2b-1}}} \times$$

$$\times \frac{dy}{(t - \beta)^{\frac{n+2b}{2b}}}$$

Воспользовавшись тем, что в последнем интеграле

$$\left[\left(\frac{\beta - \tau}{t - \beta} \right)^{\frac{1}{2b}} \right]^{\alpha} \exp\left\{ -d_3 |x - y|^q (t - \beta)^{-\frac{1}{2b-1}} \right\} \leqslant \text{const},$$

получим

$$|I_t^{(2)}| \leqslant C_2^*(t-\tau)^{-\frac{n+2b}{2b}} \int_{t_1}^{t} d\beta \int \exp\left\{-d_4 \sum_{s=1}^{n} |x_s - y_s|^q (t-\beta)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\} \times$$

$$\times \frac{dy}{(t-\beta)^{\frac{n+2b-\alpha}{2b}}} \exp\left\{-c_2 \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}.$$

Последний интеграл оценивается так же, как I_8 получение оценок (1, $12_{3,4}$); при этом находим

$$|I_t^{(2)}| \leqslant C_2^{**} |h|^{\alpha_1} (t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha_2}{2b}} \exp\left\{-c_2 \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\} \quad (1,18_3)$$

В $I_t^{(2)}$ оба аргумента находятся в условиях применимости неравенства Гельдера, поэтому получим

$$|I_t^{(3)}| \leqslant C_8 \int_{t_1}^{t} d\beta \int \frac{|h|^{\gamma} |x-y|^{\alpha_1}}{(t-\beta)^{\frac{n+2b+\alpha}{2b}}} \exp\left\{-d_5 \sum_{s=1}^{n} |x_s - y_s|^q (t-\beta)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\} \times$$

$$\times (t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha_2}{2b}} e^{-c_3 \frac{\Sigma |x_s - \xi_s|^q}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}}} \leqslant C_8^* |h|^{\gamma} \exp \times$$

$$\times \left\{-c_3 \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\} (t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha_2}{2b}} \int_{t_1}^{t} \frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2b+\gamma-\alpha_1}{2b}}} =$$

$$= C_8^{**} |h|^{\gamma} (t-\tau)^{-\frac{n+2b}{2b}} \exp\left\{-c_8 \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}; \quad (1,18_4)$$

$$0 < \gamma < \alpha_1 < \alpha; \ \alpha_2 = \alpha - \alpha_1.$$

Оценивая так же, как $I^2_{(t)}$, получим

$$|I_t^{(4)}| \leqslant C_4 (t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha_2}{2b}} |h|^{\gamma} \exp\left\{-c_4 \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\beta)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \quad (1,18_5)$$

Переходим к оценке

$$I^* = \int_{t_1}^{t} d\beta \int |\Phi(t, \beta, x, y)| \, |\varphi(\beta, \tau, y, \xi)| \, dy.$$

Заметим, что если $|x-y|>2|h|$, то

$$|\Phi(t,\beta,x,y)|\leqslant\frac{c_5|h|^{\gamma}}{(t-\beta)^{\frac{n+2b+\gamma}{2b}}}\times e^{-c_5\sum\limits_{s=1}^{n}|x_s-y_s|^q(t-\beta)^{-\frac{1}{2b-1}}}$$

с другой стороны, используя непрерывность в смысле Гельдера матриц $G_0(t,\beta,x-y,y)$ по четвертому аргументу, можно записать

$$|\Phi(t,\beta,x,y)|\leqslant\frac{|x-y|^{\alpha}}{(t-\beta)^{\frac{n+2b}{2b}}}\left\{c_6 e^{-c_6^*|x+h-y|^q(t-\beta)^{-\frac{1}{2b-1}}}+\right.$$

$$\left.+C_7 e^{-c_7^*|x-y|^q(t-\beta)^{-\frac{1}{2b-1}}}\right\}. \qquad (1{,}19_1)$$

Из приведенных оценок следует, что для $|x-y|>2|h|$ справедлива оценка

$$|\Phi(t,\beta,x,y)|\leqslant C_8\frac{(x-y)^{\alpha\delta_1}|h|^{\gamma\delta_2}}{(t-\beta)^{\frac{n+2b+\gamma\delta_2}{2b}}}e^{-c_8|x-y|^q(t-\beta)^{-\frac{1}{2b-1}}}. \qquad (1{,}19_2)$$

Используя $(1{,}19_{1,2})$, оценим

$$I^*=\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{|x-y|>2|h|}+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_{|x-y|\leqslant 2|h|}=I_1^*+I_2^*.$$

В силу $(1{,}19_{1,2})$, используя, как обычно, лемму 3 [6а], получим

$$|I_1^*|\leqslant C_9\exp\left\{-c_9\sum_{s=1}^{n}|x_s-\xi_s|^q(t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}(t-\tau)^{-\frac{n}{2b}}|h|^{\gamma\delta_1}\times$$

$$\times\int\limits_{\tau}^{t}\frac{d\beta}{(t-\beta)^{\frac{2b+\gamma\delta_2-\alpha\delta_1}{2b}}(\beta-\tau)^{\frac{2b-\alpha}{2b}}}=C_{10}(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}}|h|^{\gamma\delta_1}\times$$

$$\times\exp\left\{-c_9\sum_{s=1}^{n}|x_s-\xi_s|^q(t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}; \qquad (1{,}20_1)$$

$\gamma\delta_2<\alpha\delta_1$; если выбрать $\delta_1>\delta_2$, то γ любое $<\alpha$.

Используя (1,19), получим

$$|\Gamma_2^*| \leqslant C_{11}\int_\tau^t d\beta \int\limits_{|x-y|<2|h|}\left[\exp\left\{-c_{10}\left(\sum_{s=1}^n |x_s-y_s|^q (t-\beta)^{-\frac{1}{2b-1}}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{s=1}^n |y_s-\xi_s|^q(\beta-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right)\right\}+\exp\left\{-c_{10}\sum_{s=1}^n\left(|x_s+h_s-y_s|^q\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times(t-\beta)^{-\frac{1}{2b-1}}+|y_s-\xi_s|^q(\beta-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right)\right\}\right][(t-\beta)(\beta-\tau)]^{-\frac{n+2b-\alpha}{2b}}dy.$$

Последний интеграл нами уже оценен $(1,12_{2,3,4})$. В силу оценок $(1,18_{1,2,3,4,5})$ и (1,20) получаем

$$|D_x^{2b}Z(t,\tau,x+h,\xi)-D_x^{2b}Z(t,\tau,x,\xi)|\leqslant C'_{2b}(t-\tau)^{-\frac{n+2b+\gamma}{2b}}|h|^\gamma\times$$

$$\times\exp\left\{-c'_{2b}\sum_{s=1}^n|x_s-\xi_s|^q(t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\},$$

где γ — любая положительная постоянная $<\alpha$. Теорема 1 полностью доказана.

Замечание 1. Если в дополнение к условию 1 теоремы 1 выполнено условие 3)(и коэффициенты системы (1,1) имеют j ограниченных, непрерывных согласно Гельдеру производных по $x_1,\ldots,x_n$, то $Z'(t,\tau,x,\xi)$ как функция τ и ξ, является ф. м. р. системы, сопряженной к (1,1). Отметим, что в таких предположениях ф. м. р. исходной и сопряженной систем для случая $b=1$ были построены Л. Н. Слободецким [7] (мы же в работе [8], строя ф. м. р. для любого b, требовали наличия $j+1$ непрерывных и ограниченных производных).

Замечание 2. Если предполагать выполненными условия 1) и 4) и коэффициенты (1,1) имеют r непрерывных в смысле Гельдера и ограниченных производных по $x_1,\ldots,x_n$, то $Z(t,\tau,x,\xi)$ будет иметь $2b+r$ непрерывных производных по $x_1,\ldots,x_n$ при $t>\tau$, удовлетворяющих оценкам

$$|D^mZ(t,\tau,x,\xi)|\leqslant C_m(t-\tau)^{-\frac{n+m}{2b}}\exp\left\{-c_m\sum_{s=1}^m|x_s-\xi_s|^q(t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}.$$

Если же коэффициенты имеют $j+r$ ограниченных непрерывных в смысле Гельдера производных, то $Z(t,\tau,x,\xi)$ имеет $2b+r$ производных по $\xi_1,\ldots,\xi_n$. Исходя из этого, можно сформулировать предложения о смешанном дифференцировании по $x_1,\ldots,x_n$; $\xi_1,\ldots,\xi_n$, t, τ.

2. Пункт 2 посвящен изучению ф. м. р. в предположении, что коэффициенты системы (1,1) заданы в конечном цилиндре $G\{0\leqslant t\leqslant T, x\in V\}$, V — некоторая допустимая область n-мерного пространства $x_1,\ldots,x_n$, через Γ обозначим границу области V.

Будем предполагать, что выполнено условие 1), коэффициенты системы (1,1) определены в цилиндре G, непрерывны в нём по t и непрерывны в смысле Гельдера по $x_1, \ldots, x_n$ с показателем $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда у системы (1,1) в каждом цилиндре $G_1 \subset G$ ($G_1 \{0 \leqslant t \leqslant T,\ x \in V_1\}$; $\bar{V}_1 \subset V$) существует фундаментальная матрица решений $G(t, \tau, x, \xi)$, удовлетворяющая оценкам:

$$\underset{|m|=0,1,\ldots,2b}{|D_x^m G(t, \tau, x, \xi)|} \leqslant C_m (t-\tau)^{-\frac{n+m}{2b}} \exp\left\{-c_m \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}; \tag{1,21}$$

$$\underset{|m|=0,1,\ldots,2b-1}{|D_x^m G(t, \tau, x+h, \xi) - D_x^m G(t, \tau, x, \xi)|} \leqslant C_m^* |h|^\alpha (t-\tau)^{-\frac{n+m+\alpha}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-c_m \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\};$$

$$|D_x^{2b} G(t, \tau, x+h, \xi) - D_x^{2b} G(t, \tau, x, \xi)| \leqslant C_{2b}^* |h|^\gamma (t-\tau)^{-\frac{n+2b+\gamma}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-c_{2b} \sum |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}; \tag{1,22}$$

$\dfrac{|h|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b}}} \leqslant a$ (1,4), C_m, c_m, зависят от G_1; C_m^*, c_m^* — от G_1 и a.
$0 < \gamma < \alpha$

$G(t, \tau, x, \xi)$ будем искать в виде:

$$G(t, \tau, x, \xi) = G_0(t, \tau, x-\xi, \xi) + \int_\tau^t d\beta \int_V G_0(t, \beta, x-y, y)\,\varphi(\beta, \tau, y, \xi)\,dy; \tag{1,23}$$

$$\varphi(t, \tau, x, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(t, \tau, x, \xi); \quad K_m(t, \tau, x, \xi) =$$

$$= \int_\tau^t d\beta \int K_1(t, \beta, x, y) K_{m-1}(\beta, \tau, y, \xi)\,dy;$$

$$K_1(t, \tau, x, \xi) = \left\{P\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\right\} G_0(t, \tau, x-\xi, \xi).$$

Утверждение доказывается так же, как теорема 1, при этом используется то, что интегралы по области V мажорируются соответствующими интегралами по всему пространству. Требует дополнительного замечания лишь следующее обстоятельство. При изучении производной порядка $2b$ от $Z\ (t, \tau, x, \xi)$ мы при доказательстве теоремы 1 пользовались тем, что $\int G_0\ (t, \tau, x-\xi, x)\ d\xi = E$. Так как в (1,23) стоит интеграл, распространённый только на конечную область, то эта методика требует изменения. Заметим, что

$$\int\limits_V G_0(t, \tau, x-y, x)dy = \int\limits_{E_n} G_0(t, \tau, x-y, x)\,dy -$$

$$- \int\limits_{E_n - V} G_0(t, \tau, x-y, x)\,dy = E - \int\limits_{E_n - V} G_0(t, \tau, x-y, x)\,dy,$$

поэтому

$$\int\limits_V D'^m_x G_0(t, \beta, x-y, x)\,dy = - \int\limits_{E_n - V} D'^m_x G_0(t, \beta, x-y, x)\,dy, \qquad (1,24)$$

тогда

$$\int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_V D^{2b}_x G_0(t, \beta, x-y, y)\,\varphi(\beta, \tau, y, \xi)\,dy =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_V D'^{2b}_x G_0(t, \beta, x-y, x)\,[\varphi(\beta, \tau, y, \xi) - \varphi(\beta, \tau, x, \xi)]\,dy +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_V [D^{2b}_x G_0(t, \beta, x-y, y) - D'^{2b}_x G_0(t, \beta, x-y, x)]\,\varphi(\beta, \tau, y, \xi)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_V D'^{2b} G_0(t, \beta, x-y, x)\,\varphi(\beta, \tau, y, \xi)\,dy.$$

Первые два интеграла оцениваются обычным образом, а третий в силу (1,24) можно записать в виде

$$- \int\limits_{t_1}^{t} d\beta \int\limits_{E_n - V} D'^{2b}_x G_0(t, \beta, x-y, x)\,\varphi(\beta, \tau, y, \xi)\,dy.$$

Если предполагать, что $x \in V_1$, $\bar{V}_1 \subset V$, то очевидна сходимость последнего интеграла и справедливость для него нужной оценки.

Оценка для разности $2b$ производных от $G(t, \tau, x, \xi)$ устанавливается с помощью такого же приема.

Для установления теоремы, переносящей гладкость с коэффициентов системы (1,1) на фундаментальные матрицы решений, установим следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть* $M(t, \tau, x, \xi)$ *имеет при* $t > \tau$ r *непрерывных производных по* $x_1, \ldots, x_n$; $\xi_1, \ldots, \xi_n$, *а* $N(t, \tau, x, \xi)$ — r *непрерывных производных по* $x_1, \ldots, x_n$ *в* G *удовлетворяющих оценкам*

$$\underset{|s|=0,1,\ldots,r;\,\beta>0}{|D_x^s M(t,\tau,x,\xi)|} \leqslant C_s(t-\tau)^{-\frac{n+2b-\beta+|s|}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-c_s \sum_{e=1}^{n} |x_e - y_e|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}; \qquad (1,25)$$

предполагается, что $M_e = \left(\frac{\partial}{\partial x_{e_1}} + \frac{\partial}{\partial \xi_{e_1}}\right) \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_{e_\kappa}} + \frac{\partial}{\partial \xi_{e_\kappa}}\right)$ (1,26) *также обладает свойствами матрицы* M $(|s| = 0,1,\ldots, r - |\kappa|)$.

Тогда матрица

$$I(t,\tau,x,\xi) = \int_\tau^t d\beta \int_V M(t,\beta,x,y) N(\beta,\tau,y,\xi)\,dy \qquad (1,27)$$

имеет r *непрерывных производных в любой области* G_1, $\overline{G_1} \subset G$, *которые определяются формулой*

$$D_x^m I(t,\tau,x,\xi) = \int_\tau^{t_1} d\beta \int_V D_x^m M(t,\beta,x,y) N(\beta,\tau,y,\xi)\,dy +$$

$$+ \int_{t_1}^t d\beta \int_V \sum_{i_\kappa = 0,\, e_\kappa} M_{i_1\ldots i_m}(t,\beta,x,y) \frac{\partial^m N(\beta,\tau,y,\xi)}{\partial y_{e_1 - i_1} \ldots \partial y_{e_m - i_m}}\,dy +$$

$$+ \int_{t_1}^t d\beta \int_\Gamma \sum_{\kappa=1}^m \sum_{i_\kappa = 0,\, e_\kappa} \frac{\partial^{m-\kappa-1} M_{i_1\ldots i_{\kappa+1}}}{\partial x_{e_{\kappa+1}} \ldots \partial x_{e_m}} \frac{\partial^{\kappa+1} N(\beta,\tau,y,\xi)}{\partial y_{e_1 - i_1} \ldots \partial y_{e_{\kappa-1} - i_{\kappa+1}}} \times$$

$$\times \cos(n, y_{e_\kappa})\,ds. \qquad (1,28)$$

При этом имеют место оценки

$$\underset{|s|=0,1,\ldots,r}{|D^s I(t,\tau,x,\xi)|} \leqslant C_m^*(t-\tau)^{-\frac{n+2b-2\beta+|s|}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-c_s^* \sum_{e=1}^{n} |x_e - \xi_e|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \qquad (1,29)$$

Доказательство. Проинтегрируем равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_{e_\kappa}} M(t,\beta,x,y) + \frac{\partial}{\partial y_{e_\kappa}} M(t,\beta,x,y) = M_{e_\kappa}(t,\beta,x,y) \qquad (1,30)$$

по x_{e_κ} от x'_{e_κ} до x_{e_κ} и полученное соотношение умножим справа на $N(\beta,\tau,y,\xi)$, а затем проинтегрируем по области V

$$\int\limits_V M(t,\beta,x,y)N(\beta,\tau,y,\xi)\,dy=\int\limits_{x'_{e_\kappa}}^{x_{e_\kappa}}dx_{e_\kappa}\int\limits_V M_{e_\kappa}(t,\beta,x,y)N(\beta,\tau,y,\xi)\,dy+$$

$$+\int\limits_V M(t,\beta,x',y)N(\beta,\tau,y,\xi)\,dy+\int\limits_{x'_{e_\kappa}}^{x_{e_\kappa}}dx_{e_\kappa}\int\limits_V M(t,\beta,x,y)\frac{\partial}{\partial y_{e_\kappa}}N(\beta,\tau,y,\xi)dy-$$

$$-\int\limits_{x'_{e_\kappa}}^{x_{e_\kappa}}dx_{e_\kappa}\int\limits_\Gamma M(t,\beta,x,y)N(\beta,\tau,y,\xi)\cos(n,y_{e_\kappa})\,dS.$$

Дифференцируя последнее равенство по x_{e_κ} и интегрируя полученное выражение от τ до t по β, найдем

$$\frac{\partial I}{\partial x_{e_\kappa}}=\int\limits_\tau^{t_1}d\beta\int\limits_V\frac{\partial}{\partial x_{e_\kappa}}M(t,\beta,x,y)N(\beta,\tau,y,\xi)\,dy+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_V M_{e_\kappa}(t,\beta,x,y)N(\beta,\tau,y,\xi)\,dy+$$

$$+\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_V M(t,\beta,x,y)\frac{\partial}{\partial y_{e_\kappa}}N(\beta,\tau,y,\xi)\,dy-$$

$$-\int\limits_{t_1}^{t}d\beta\int\limits_\Gamma M(t,\beta,x,y)N(\beta,\tau,y,\xi)\cos(n,y_{e_\kappa})\,dS.$$

Проводя доказательство по индукции, получим (1,28). Из (1,28) оценки (1,29) следуют с помощью оценок (1,25) очевидным образом для $(x,t)\in G_1$; $\overline{G}_1\subset G$.

Замечание 1. Если предполагать в лемме 1 дифференцируемость $N(\beta,\tau,y,\xi)$, N_e (определенное формулой (1,26) по x и ξ, то будет справедливо аналогичное утверждение относительно дифференцируемости матрицы $I\ (t,\tau,x,\xi)$ по ξ.

Переходим к изучению дифференциальных свойств фундаментальных матриц решений. Предположим, что выполнено условие 1) коэффициенты системы (1,1) имеют r непрерывных производных в цилиндре $\overline{G}$, удовлетворяющих условию Гельдера по $x_1,\ldots,x_n$.

Из формулы (1,23) видно, что изучения требует второе слагаемое, так как на первое непосредственно переносятся дифференциальные свойства коэффициентов, а именно: $G_0(t,\tau,x-\xi,\xi)$ является целой функцией третьего аргумента, имеет r производных по четвертому аргументу ξ, удовлетворяющих условию Гельдера. Продифференцируем второе слагаемое в (1,23) $2b-1$ раз по $x_1 x_2, \ldots, x_n$, тогда получим интеграл

$$\int_\tau^t d\beta \int D_x^{2b-1} G_0(t, \beta, x-y, y)\, \varphi(\beta, \tau, y, \xi)\, dy. \qquad (1,31)$$

Докажем, используя лемму 1, что последний интеграл имеет производную по $x_1, \ldots, x_n$, r производных по $\xi_1, \ldots, \xi_n$, при этом $r+1$ производная по $x_1, x_2 \ldots, x_n$ удовлетворяют условию Гельдера по $x_1, \ldots, x_n$ в любой области Ω_1, $\overline{\Omega} \subset G$. Справедливость условий леммы для первого сомножителя в (1,31) очевидна, установим их для второго. В силу формулы (1,23) для этого следует изучить свойства повторных ядер $K_m(t, \tau\ x, \xi)$. Ясно, что $K_1\ (t, \tau, x, \xi)$ (формула (1,26) удовлетворяет условиям леммы и замечанию к ней $(\beta=\alpha)$.

Пусть $K_m(t, \tau, x, \xi)$ удовлетворяет условиям леммы и замечанию к ней, тогда на основании леммы 1 $(\beta = m\alpha)$

$$\frac{\partial}{\partial x_{e_\kappa}} K_{m+1}(t, \tau, x, \xi) = \int_\tau^{t_1} d\beta \int_V \frac{\partial}{\partial x_{e_\kappa}} K(t, \beta, x, y)\, K_m(\beta, \tau, y, \xi)\, dy +$$

$$+ \int_{t_1}^t d\beta \int_V K_{e_\kappa}(t, \beta, x, y)\, K_m(\beta, \tau, y, \xi)\, dy +$$

$$+ \int_{t_1}^t d\beta \int_V K(t, \beta, x, y) \frac{\partial}{\partial y_\kappa} K_m(\beta, \tau, y, \xi)\, dy -$$

$$- \int_{t_1}^t d\beta \int_\Gamma K(t, \beta, x, y)\, K_m(\beta, \tau, y, \xi) \cos(n, y_{e_\kappa})\, dS. \qquad (1,32)$$

В силу замечания к лемме 1

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{e_\kappa}} K_{m+1}(t, \tau, x, \xi) = \int_\tau^{t_1} d\beta \int_V \frac{\partial}{\partial y_{e_\kappa}} K(t, \beta, x, y)\, K_m(\beta, \tau, y, \xi)\, dy +$$

$$+ \int_\tau^{t_1} d\beta \int_V K(t, \beta, x, y)\, K_{m e_\kappa}(\beta, \tau, y, \xi)\, dy +$$

$$+ \int_{t_1}^t d\beta \int_V K(t, \beta, x, y) \frac{\partial}{\partial \xi_\kappa} K_m(\beta, \tau, y, \xi)\, dy -$$

$$- \int_\tau^{t_1} d\beta \int_\Gamma K(t, \beta, x, y)\, K_m(\beta, \tau, y, \xi) \cos(n, y_{e_\kappa})\, dS. \qquad (1,32)$$

Складывая $(1,32_1)$ и $(1,32_2)$, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{e_\kappa}}+\frac{\partial}{\partial \xi_{e_\kappa}}\right)K_{m+1}(t,\tau,x,\xi)=\int_\tau^t d\beta\int_V K_{e_\kappa}(t,\beta,x,y)K_m(\beta,\tau,y,\xi)\,dy+$$

$$+\int_\tau^t d\beta\int_V K(t,\beta,x,y)K_{me_\kappa}(\beta,\tau,y,\xi)\,dy-$$

$$-\int_\tau^t d\beta\int_\Gamma K(t,\beta,x,y)K(\beta,\tau,y,\xi)\cos(n,\nu_{e_\kappa})\,dS. \qquad (1,33)$$

Аналогично устанавливается формула для многократного применения оператора $\left(\frac{\partial}{\partial x_{e_\kappa}}+\frac{\partial}{\partial \xi_{e_\kappa}}\right)$ и для производных от матриц K_{me_k}. Из последней формулы следуют оценки K_{me_k}, если x и ξ изменяются в цилиндре V_1; $\overline{V}_1\subset V$.

$$\underset{|e|=0,1,\ldots,r;\ \kappa=0,1,\ldots,r-|e|}{|D_x^\kappa K_{ml}(t,\tau,x,\xi)|}\leqslant C_{me}(t-\tau)^{-\frac{n+2b+|\kappa|-m\alpha}{2b}}\times$$

$$\times\exp\left\{-c^*\sum_{s=1}^n|x_s-\xi_s|^q(t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \qquad (1,34)$$

Аналогично оцениваются производные по ξ. Заметим, что формула (1,33) дает правило применения суммарного оператора $\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \xi}$, весьма важно во многих дальнейших приложениях, что эта суммарная операция не повышает «порядок особенности» повторных ядер.

Переходим к изучению дифференциальных свойств матрицы $\varphi(t,\tau,x,\xi)$, для чего представим ее в виде

$$\varphi(t,\tau,x,\xi)=\sum_{s=1}^{2q}K_s(t,\tau,x,\xi)+\sum_{s=2q+1}^{\infty}K_s(t,\tau,x,\xi). \qquad (1,35)$$

Для $s\geqslant 2q+1$ можно записать

$$K_s(t,\tau,x,\xi)=\int_\tau^t d\beta\int_V K_q(t,\beta,x,y)K_{s-q}(\beta,\tau,y,\xi)\,dy=$$

$$=\int_\tau^t d\beta\int_V K_q(t,\beta,x,y)\left\{\int_\tau^\beta d\gamma\int_V K_{s-2q}(\beta,\gamma,y,z)K_q(\gamma,\tau,z,\xi)\,dz\right\}dy.$$

Поэтому, используя равномерную сходимость ряда (1,35), его можно записать в виде

$$\varphi(t, \tau, x, \xi) = \sum_{s=1}^{2q} K_s(t, \tau, x, \xi) + \int_\tau^t d\beta \int_V K_q(t, \beta, x, y) \times$$
$$\times \left\{ \int_\tau^\beta d\gamma \int_V \varphi(\beta, \gamma, y, z) K_q(\gamma, \tau, z, \xi)\, dz \right\} dy. \qquad (1,36)$$

Пусть $q > \frac{n+2b+r}{\alpha}$, установим, что $\varphi(t, \tau, x, \xi)$ также удовлетворяет условиям леммы 1. Первое слагаемое в (1,36) удовлетворяет условиям леммы по доказанному, а второе в силу сделанного о q предположения допускает r-кратное дифференцирование по x и ξ под знаком интеграла. В силу этих же соображений суммарное дифференцирование $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \xi}$ не повышает порядок особенности $\varphi(t, \tau, x, \xi)$. Но тогда, в силу леммы 1, интеграл (1,31) допускает r-кратное дифференцирование по $x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n$; остается показать, что у (1,31) существуют $r+1$ производные по x, удовлетворяющие условию Гельдера. Покажем, во-первых, что $\varphi(t, \tau, x, \xi)$ имеет r производных, удовлетворяющих условию Гельдера. Для этого используем представление

$$\varphi(t, \tau, x, \xi) = K(t, \tau, x, \xi) + \int_\tau^t d\beta \int K(t, \beta, x, y) \varphi(\beta, \tau, y, \xi)\, dy. \quad (1,37)$$

Установление того, что $K(t, \tau, x, \xi)$ и ее производные удовлетворяют условию Гельдера, не отличается от доказательства, проведенного в случае полосы (оценка (1,11)). Дифференцирование по x и ξ второго слагаемого в (1,37) проводится на основании леммы по формуле (1,28), при этом получаются интегралы от произведения двух матриц, у которых первая, имея нужные оценки, удовлетворяет условию Гельдера, а вторая имеет нужные оценки. Таким образом, получаются интегралы, аналогичные оцененным в случае полосы (оценки $(1,12_1)$, $(1,12_2)$). Повторяя оценки пункта 1, получим, что $\varphi(t, \tau, x, \xi)$ вместе со своими производными порядка r по x и ξ удовлетворяет условию Гельдера. Отметим также, что таким же путем устанавливается справедливость условия Гельдера для

$$\varphi_e(t, \tau, x, \xi) = \left(\frac{\partial}{\partial x_{e_1}} + \frac{\partial}{\partial \xi_{e_1}}\right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_{e_k}} + \frac{\partial}{\partial \xi_{e_k}}\right) \varphi(t, \tau, x, \xi).$$

После r-кратного дифференцирования (1,31) с помощью леммы 1 получим интегралы, допускающие еще однократное дифференцирование по x в силу того, что $\varphi_e(t, \tau, x, \xi)$ вместе с производными по x и ξ до порядка $r-|e|$ удовлетворяет условию Гельдера. Оценки полученных таким образом производных проводятся так же, как оценки производных порядка $2b$ в пункте 1 (оценки (1,18, 19, 20)) с учетом замечания первого пункта настоящего параграфа.

Замечание 2. В выше проведенных построениях, в предположении 1), определенная формулой (1,23) фундаментальная матрица решений $G(t, \tau, x, \xi)$ имела $2b+r$ производных по x и r производных по ξ. Покажем, как получить фундаментальную матрицу решений, имеющую ту же гладкость по параметрической переменной ξ, при меньших предположениях о гладкости коэффициентов оператора $P_1\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Будем предполагать: 1) коэффициенты оператора $P_0\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ удовлетворяют условию 1) $r \geqslant 2b$, коэффициенты $P_1\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ имеют $r-2b+j$ непрерывных производных в G, удовлетворяющих условию Гельдера ($j = j_1 + j_2 + \cdots + j_n$ — порядок производной, при которой стоит соответствующий коэффициент). Утверждается, что тогда можно построить ф. м. р. системы (1,1), имеющую r непрерывных производных (при $t > \tau$) по x и ξ.

Для доказательства этого поступим следующим образом. Пусть $G_0(t, \tau, x, \xi)$ — ф. м. р. системы $\frac{\partial u}{\partial t} = P_0\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)u$, тогда требуемую ф. м. р. будем отыскивать в виде

$$\omega(t, \tau, x, \xi) = G_0(t, \tau, x, \xi) + \int_\tau^t d\beta \int_V G_0(t, \beta, x, y) \times$$

$$\times P_1\left(\beta, y; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\omega(\beta, \tau, y, \xi)\,dy\,; \tag{1,34}$$

$$\omega(t, \tau, x, \xi) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \omega_\kappa(t, \tau, x, \xi); \quad \omega_0(t, \tau, x, \xi) = G_0(t, \tau, x, \xi);$$

$$\omega_\kappa = \int_\tau^t d\beta \int_V G_0 P_1 \omega_{\kappa-1} dy\,. \tag{1,35}$$

Установление сходимости ряда (1,35), получение для него нужных оценок ничем не отличается от ранее приведенных рассуждений. Очевидно, что $\omega_k(t, \tau, x, \xi)$ можно r раз дифференцировать по x; дифференцируемость по ξ следует из представления

$$\omega_\kappa(t, \tau, x, \xi) = \int_\tau^{t_1} d\beta \int_V \left\{P_1'(G_0'(t, \beta, x, y)\right\}^1 \omega_{\kappa-1}(\beta, \tau; y, \xi)\,dy +$$

$$+ \int_\tau^{t_1} d\beta \int_\Gamma \sum_{\kappa=1}^{n} B^\kappa[G_0, \omega_{\kappa-1}]\cos(n, y_\kappa)\,dS +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\beta \int G_0(t, \beta, x, y) P_1\left(\beta, y; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)\omega_{\kappa-1}(\beta, \tau, y, \xi)\,dy\,. \tag{1,36}$$

В (1,36) первое слагаемое можно под знаком интеграла дифференцировать по x, дифференцирование по ξ производится на основании замечания к лемме 1, второе дифференцируемо по x и ξ, если $x \in V_1$; $\xi \in V_1$, $\bar{V}_1 \subset V$, третье слагаемое дифференцируется по x в силу леммы 1, а по ξ — непосредственно. Как и в случае изучения $\varphi(t, \tau, x, \xi)$, достаточно установить гладкость конечного числа матриц $\omega_\kappa(t, \tau, x, \xi)$, ибо, начиная с некоторого κ, можно будет требуемые дифференцирования по x проводить под знаком интеграла в (2,28).

Если предполагать, что 2) коэффициенты системы (1,1) имеют $j+r$ непрерывных производных в цилиндре G, удовлетворяющих условию Гельдера по $x_1, \ldots, x_n$, то можно построить ф. м. р. по аргументам τ, ξ системы, сопряженной к (1,1) $G^*(t, \tau, x, \xi)$, определенной формулами:

$$G^*(t, \tau, x, \xi) = G_0'(t, \tau, x-\xi, x) + \int_\tau^t d\beta \int_V G_0'(\beta, \tau, y-\xi, y)\, \psi(t, \beta, x, y)\, dy; \tag{1,37}$$

$$\psi(t, \tau, x, \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m^*(t, \tau, x, \xi); \quad K_1^*(t, \tau, x, \xi) =$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + P'\left(\tau, \xi; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\right] G_0'(t, \tau, x-\xi, x);$$

$$K_m^*(t, \tau, x, \xi) = \int_\tau^t d\beta \int_V K_1^*(\beta, \tau, y, \xi)\, K_m^*(t, \beta, x, y)\, dy. \tag{1,38}$$

В силу проведенного выше доказательства $G^*(t, \tau, x, \xi)$ имеет $2b+r$ производных по ξ и τ производных по x. Если же строить ф. м. р. $\omega^*(t, \tau, x, \xi)$ с помощью приема, изложенного в замечании 2, то в предположении выполнимости условия 2) $\omega^*(t, \tau, x, \xi)$ будет иметь $2b+r$ производных по x и ξ. Полученные выше результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. *Если выполнено условие* 1), *то у системы* (1,1) *существует ф. м. р.* $G(t, \tau, x, \xi)$, *определенная формулой* (1,23) *и имеющая* $2b+r$ *производных по* x, r *производных по* ξ; *если выполнено условие* 1''), *то существует ф. м. р.* $\omega(t, \tau, x, \xi)$ *определенная формулами* (1,34), (1,35), *имеющая* r *производных по* x *и* ξ. *Если же выполнено условие* 2), *то у системы, сопряженной к* (1,1), *существует ф. м. р.* $\omega^*(t, \tau, x, \xi)$, *имеющая* $2b+r$ *производных по* x *и* ξ *при* $t > \tau$. *Все эти производные непрерывны в смысле Гельдера по* x *и* ξ *при* $t > \tau$ *и удовлетворяют оценкам*

$$|D_x^{m_1} D_\xi^{m_2} G(t, \tau, x, \xi)| \leqslant C_{m_1 m_2} (t-\tau)^{-\frac{n+m_1+m_2}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-c_{m_1 m_2} \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \tag{1,39}$$

Принимая во внимание, что ф. м. р. удовлетворяют системе (1,1) или сопряженной к ней, можно формулировать предложения о дифференцируемости ф. м. р. по t, τ, смешанном дифференцировании по $x_1, \ldots, x_n$; $\xi_1, \ldots, \xi_n, t, \tau$. Ограничимся формулировкой нужного нам в дальнейшем.

Следствие 1. Если производные порядка m по t $(m=0,1,\ldots,q)$ от коэффициентов системы (1,1) можно дифференцировать по $x_1, \ldots, x_n$ $(q-m)2b+\Delta j+p$ раз ($\Delta=0$ при $m \neq 0$, $\Delta=1$ при $m=0$), то $\omega^*(t, \tau, x, \xi)$ имеет смешанные производные $\frac{\partial^m}{\partial \tau^m} D_\xi^s \omega^*(t, \tau, x, \xi)(m = 0, 1, \ldots, q+1;\ s=0,1,\ldots, p+(q-m)2b+\Delta_1 2b;\ \Delta_1=0$ при $m<q+1,\ \Delta_1=1$ при $m=q+1)$.

Замечание. Все проведенные выше построения справедливы и для бесконечных областей, если дополнительно предполагать ограниченность всех входящих в условия производных, а также равномерность непрерывности коэффициентов $P_0\left(t, x; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)$ по t относительно x. Отметим, что при этом останутся справедливыми оценки (1,39).

2. О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ В ОКРЕСТНОСТИ ИЗОЛИРОВАННОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

Хорошо известно поведение гармонической функции в окрестности изолированной особой точки (см., например, [6, стр. 163—167]. Аналогичный результат для решений весьма общих линейных эллиптических систем получил Я. Б. Лопатинский в [5]. В основе получения этих результатов лежало сравнение решения эллиптической системы с точечной особенностью типа полюса конечного порядка с линейной комбинацией производных от фундаментальной матрицы решений системы, сопряженной к исходной.

Исследование ф. м. р. линейных параболических систем, проведенное в 1 показывает, что они являются решениями параболических систем с точечной особенностью (если аргументы считать вещественными) типа существенно особой точки. Однако при попытке описать поведение решений параболических систем с точечной особенностью типа существенно особой точки непосредственное сравнение решения с фундаментальным решением вряд ли может дать результат. Игравшая роль в эллиптическом случае основная количественная характеристика — порядок полюса — здесь отсутствует. Однако достаточно проинтегрировать ф. м. р. по времени, чтобы интеграл от нее [8, стр. 73], (свойство 2) имел полюсную особенность. Поэтому в основу изучения поведения решений параболической системы в окрестности изолированной особой точки мы положили их интегральную характеристику. Отметим также, что при проведении доказательства нам вместо обычных тейлоровских разложений, в которых все переменные равноправны, понадобились разложения, где члены, в которые входят степени $t-\tau$ имеют «вес» $2b$ по отношению к степеням $x_s - \xi_s$.

1. Определение. [4]. Функция $\varphi(x)$, определенная в некоторой конечной области V n-мерного пространства $x_1, \ldots, x_n$, принадлежит функциональному множеству $K_p^{x_0}$; $K_{p-0}^{x_0} = \sum_{b<p} K_q^{x_0}$, если она **непрерывна при $x \neq x_0$; $x_0 \in V$ и выражение**

1) $|\varphi(x)||x-x_0|^p$; $p>0$; 2) $\dfrac{|\varphi(x)|}{\ln|x-x_0|}$; $p=0$; 3) $|\varphi(x)|$; $p<0$

ограничено.

Т е о р е м а 4. *Пусть $u(x, t)$ — регулярное решение системы (1,1) в цилиндре $G\{x\in V,\ t_1\leqslant t\leqslant t_2\}$ за исключением точки (x_0, t_0), обладающее свойством*

$$\int_{t_1}^{t_2}|t-t_0|^e\,|D_x^\nu u(x, t)|\,dt\in K_{N-2b+n-2e+|\nu|-0}; \qquad (2,1)$$

$|\nu|=0,1,\ldots,2b-1$; $e=0,1,\ldots,r$; $r=\left[\dfrac{N}{2b}\right]$ *при* $\dfrac{N}{2b}$ *целом,* $r=\left[\dfrac{N}{2b}\right]+1$ *при* $\dfrac{N}{2b}$ *дробном. Предполагается, что коэффициенты системы (1,1) удовлетворяют условиям следствия 1 теоремы* 2 $(p=0,\ q=r+1)$.

Тогда имеет место представление

$$u(x, t)=\begin{cases}\sum\limits_{|q|\leqslant N-1}D_{x_0}^q\omega^{*\prime}(t, t_0, x, x_0)\,a_q(x_0, t_0)+u^*(x, t), & t<t_0\\ u^*(x, t)\end{cases} \qquad (2,2)$$

где $u^*(x, t)$ — регулярная в G функция.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Изолируем точку (x_0, t_0) цилиндром $Z_\rho\{\xi\in V_\rho,\ t_1\leqslant\tau\leqslant t\}$ и воспользуемся формулой;

$$u(x, t)=\int_{t_1}^{t}d\tau\int_{\Gamma}\sum_{\kappa=1}^{n}B^\kappa[\omega^{*\prime}(t, \tau, x, \xi), u(\xi, \tau)]\,\nu_\kappa dS+$$

$$+\int_V\omega^{*\prime}(t, t_1, x, \xi)\,u(\xi, t_1)\,d\xi-I_\rho; \qquad (2,3)$$

$$I_\rho=\int_{t_1}^{t}d\tau\int_{\gamma_\rho}\sum_{\kappa=1}^{n}B^\kappa[\omega^{*\prime}(t, \tau, x, \xi), u(\xi, \tau)]\,\nu_\kappa dS+$$

$$+\int_{V_\rho}\omega^{*\prime}(t, t_1, x, \xi)\,u(\xi, t_1)\,d\xi.$$

Воспользуемся тем, что $\omega^*(t, \tau, x, \xi)$ как функция от τ и ξ удовлетворяет системе

$$-\frac{\partial v}{\partial\tau}=P'\left(\tau, \xi; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)v. \qquad (2,4)$$

Запишем систему (2,4) в виде

$$-\frac{\partial v}{\partial\tau}=P_{2b0\ldots0}(\tau, \xi)\frac{\partial^{2b}v}{\partial\xi_1^{2b}}+P_1\left(\tau, \xi; \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)v. \qquad (2,4')$$

В силу параболичности матрица $P_{2b0,\ldots,0}(\tau, \xi)$ имеет $|\det P_{2b0,\ldots,0}(\tau, \xi)|\geqslant\delta_1>0$. Действительно, из условия параболичности, полагая в нем $\sigma_1=1$, $\sigma_2=\ldots=\sigma_n=0$, получаем, что уравнение $\det\ \{P_{2b0\ldots0}(\tau, \xi)-$

$-\lambda E|=0$ имеет корни с $R\lambda<-\delta$. Это возможно только в том случае, когда выполнено написанное выше условие. Разрешая уравнение (2,4) относительно $\frac{\partial^{2b}v}{\partial\xi_1^{2b}}$, получим систему уравнений

$$\frac{\partial^{2b}v}{\partial\xi_1^{2b}}=P_2\left(\tau,\ \xi;\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)v-P^{-1}_{2b0,\ldots,0}\frac{\partial v}{\partial\tau}. \tag{2,4''}$$

Будем вначале предполагать, что коэффициенты системы (2,4) — аналитические функции τ, ξ в окрестности точки $(x_0,\ t_0)$, тогда этим же свойством будут обладать и коэффициенты системы (2,4″).

Используя теорему С. В. Ковалевской [2], построим решения ω_{m_0m} системы (2,4″) по следующим начальным данным

$$\left.\frac{\partial^{\kappa}\omega_{m_0m}}{\partial\xi_1^{\kappa}}\right|_{\xi_1=x^0_1}=\frac{(\tau-t_0)^{m_0}(\xi_2-x_2^0)^{m_2}\ldots(\ _n-x_n^0)^{m_n}}{m_0!\ m_2!\cdots m_n!}\delta_{m_1\kappa}. \tag{2,5}$$

$$\kappa=0,1,\ldots,2b-1;\quad 0\leqslant m_1\leqslant 2b-1$$

Очевидно, что ω_{m_0m} удовлетворяет такому условию

$$\left.\frac{\partial^{\kappa_0+\kappa_1+\ldots+\kappa_n}\omega_{m_0m_1\ldots m_n}}{\partial t^{\kappa_0}\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}}\right|_{\substack{t=t_0\\ \xi=x_0}}=\delta^{(m,\kappa)};\quad \delta^{(m,\kappa)}=\begin{cases}0 & m\neq\kappa\\ 1 & m=\kappa\end{cases} \tag{2,6}$$

$$m=(m_0,\ m_1\ldots,m_n);\quad \kappa=(\kappa_0,\ \kappa_1,\ldots,\kappa_n)$$

Пусть $v(\tau,\ \xi)$ — некоторое достаточно гладкое решение системы (2,4) с аналитическими коэффициентами, представим его в виде:

$$v(\tau,\ \xi)=\sum_{\kappa_0=0}^{N-1}\frac{(\tau-t_0)^{\kappa_0}}{\kappa_0!}\left.\frac{\partial^{\kappa_0}v}{\partial\tau^{\kappa_0}}\right|_{\tau=t_0}+\frac{(\tau-t_0)^r}{r!}\overline{\frac{\partial^r v}{\partial\tau^r}} \tag{2,7}$$

$$\left.\frac{\partial^{\kappa_0}v}{\partial\tau^{\kappa_0}}\right|_{\tau=t_0}=\sum_{|\kappa|+2b\kappa_0\leqslant N-1}\frac{(\xi-x_0)^{\kappa}}{\kappa!}D_\xi^\kappa\left.\frac{\partial^{\kappa_0}v}{\partial\tau^{\kappa_0}}\right|_{\substack{\tau=t_0\\ \xi=x_0}}+R_{(v,\ N)};$$

$$|\kappa|=\kappa_1+\ldots+\kappa_n$$

$$\frac{(\xi-x_0)^{\kappa}}{\kappa!}=\frac{(\xi_1-x_1^0)^{\kappa_1}\cdots(\xi_n-x_n^0)^{\kappa_n}}{\kappa_1!\cdots\kappa_n!}. \tag{2,8}$$

Таким образом,

$$v(\tau,\ \xi)=\sum_{|\kappa|+2b\kappa_0\leqslant N-1}\frac{(\tau-t_0)^{\kappa_0}(\xi-x_0)^{\kappa}}{\kappa_0!\ \kappa!}\frac{\partial^{\kappa_0}}{\partial\tau^{\kappa_0}}D_\xi^\kappa v\Bigg|_{\substack{\tau=t_0\\ \xi=x_0}}+R_{(v,\ N)}; \tag{2,9}$$

$$R_{(N,\ v)}=\sum_{\kappa_0=0}^{r-1}\frac{(\tau-t_0)^{\kappa_0}}{\kappa_0!}\sum_{|\kappa|+2b\kappa_0=N}\frac{(\xi-x_0)^{\kappa}}{\kappa!}\overline{\frac{\partial^{\kappa_0}}{\partial\tau^{\kappa_0}}D_\xi^\kappa v}+\frac{(\tau-t_0)^r}{r!}\overline{\frac{\partial^r v}{\partial\tau^r}}$$

$$|R_{(N,\ v)}|\leqslant C\left\{\sum_{|\kappa|+2b\kappa_0=N}|\tau-t_0|^{\kappa_0}|\xi-x_0|^{|\kappa|}+|\tau-t_0|^r\right\}. \tag{2,10}$$

Вставим теперь вместо $\frac{\partial^{2b} v}{\partial \xi_1^{2b}}$ ее значение, определенное формулой (2,4), и соберем коэффициенты, стоящие при $\frac{\partial^{\kappa_0}}{\partial \tau^{\kappa_0}} D_\xi^\kappa v \Big|_{(x_0,\ t_0)}$, тогда получим

$$v(\tau, \xi) = \sum_{|\kappa| + 2b\kappa_0 < N-1;\ \kappa_1 \leq 2b-1} Q_{\kappa_0 \kappa}(\tau, \xi; x_0, t_0) \frac{\partial^{\kappa_0}}{\partial \tau^{\kappa_0}} D_\xi^\kappa v \Big|_{(x_0,\ t_0)} + R_{(N,\ v)}^{(0)} \tag{2,11}$$

Для производных от v запишем аналогичное представление

$$D_\xi^m v(\tau, \xi) = \sum_{|\kappa| + 2b\kappa_0 < N-1;\ \kappa_1 \leq 2b-1} D_\xi^m Q_{\kappa_0 \kappa}(\tau, \xi; x_0, t_0) \frac{\partial^{\kappa_0}}{\partial \tau^{\kappa_0}} D_\xi^\kappa v \Big|_{(x_0,\ t_0)} + R_{(N,\ v)}^{(m)} \tag{2,12$_m$}$$

$$m = 0, 1, \ldots, 2b-1$$

$$\left| R_{(N,\ v)}^{(m)} \right| C \left(\sum_{|\kappa| + 2b\kappa_0 = N} |\tau - t_0|^{\kappa_0} |\xi - x_0|^{|\kappa| - |m|} + |\tau - t_0|^r \right). \tag{2,13$_m$}$$

Используем формулу (2,11) для решения системы (2,4″) $\omega_{m_0 m}$, тогда в силу условия (2,6)

$$\omega_{m_0 m}(\tau, \xi; x_0, t_0) = Q_{m_0 m}(\tau, \xi, x_0, t_0) + R_{(N,\ \omega_{m_0 m})}^{(0)}. \tag{2,14}$$

Находя отсюда $Q_{m_0 m}$ и вставляя в (11), получим

$$v(\tau, \xi) = \sum_{\substack{|\kappa| + 2b\kappa_0 < N-1 \\ 0 < \kappa_1 < 2b-1}} \omega_{\kappa_0 \kappa}(\tau, \xi; x_0, t_0) \frac{\partial^{\kappa_0}}{\partial \tau^{\kappa_0}} D_\xi^\kappa v \Big|_{(x_0,\ t_0)} + \tilde{R}_{(N,\ v)}^{(0)}, \tag{2,15}$$

где для $R_{(N,\ v)}^{(0)}$ справедливы оценки (2,10). Для производных те же рассуждения с использованием представления (2,12) дают

$$D_\xi^m v(\tau, \xi) = \sum_{|\kappa| + 2t\kappa_0 < N-1;\ 0 < \kappa_1 < 2b-1} D_\xi^m \omega_{\kappa_0 \kappa}(\tau, \xi; x_0, t_0) \frac{\partial^{\kappa_0}}{\partial \tau^{\kappa_0}} D^\kappa v \Big|_{(x_0,\ t_0)} + \tilde{R}_{(N,\ v)}^{(m)}. \tag{2,15$_m$}$$

Отметим, что $\omega_{m_0 m}(\tau, \xi; x_0, t_0)$ — решения системы (2,4).

Воспользуемся нашими рассуждениями для установления представления типа (2,15) в неаналитическом случае. Предполагая выполненными условия теоремы, запишем

$$-\frac{\partial v}{\partial \tau} = P'\left(\tau, \xi; \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v = S\left(\tau, \xi; x_0, t_0; \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v + (P' - S) v, \tag{2,16}$$

где S — дифференциальный оператор с полиномиальными коэффициентами, полученными с помощью формулы (2,9) (первая сумма в этих формулах). На основании подробно проведенных ранее вычислений коэффициенты оператора $P'—S$ будут удовлетворять неравенству (2,10). Для решений системы $-\frac{\partial v}{\partial \tau}=Sv$ (2,17) справедливы представления $(2,15_{0,m})$.

Записывая формулу (2,11) для решений системы (2,16) и замечая, что $Q_{\kappa_0\kappa}, |\kappa|+2b\kappa_0\leqslant N-1$ для решений систем (2,16) и (2,17) одинаковые (это следует из метода их получения и того, что второе слагаемое при $(\tau, \xi)=(t_0, x_0)$ обращается в нуль вместе со своими производными порядка $|\kappa|+\kappa_0$; $2b\,\kappa_0+|\kappa|\leqslant N-1$), в представлении (2,11) можно вместо $Q_{\kappa_0\kappa}$ вставить $\tilde{\omega}_{\kappa_0\kappa}(\tau, \xi; x_0, t_0)$, являющиеся решениями системы (2,17)

$$D_\xi^m v(\tau, \xi)=\sum_{\substack{|\kappa|+2b\kappa_0\leqslant N-1\\ 0\leqslant\kappa\leqslant 2b-1}} D_\xi^m \tilde{\omega}_{\kappa_0\kappa}(\tau, \xi; x_0, t_0)\left.\frac{\partial^{\kappa_0}}{\partial\tau^{\kappa_0}}D_\xi^\kappa v\right|_{(x_0, t_0)}+R^{(m)}_{(v, N)} \tag{2,17'}$$

Перейдем к изучению I_ρ из формулы (2,3)

$$I_\rho=\int_{t_1}^{t} d\tau\int_{\gamma_\rho}\sum_{j=1}^{n}B^j[\omega^{*\prime}(t, \tau, x, \xi), u(\xi, \tau)]\,\nu_\kappa dS+$$

$$+\int_{V_\rho}\omega^{*\prime}(t, t_1, x, \xi)\,u(\xi, t_1)\,d\xi. \tag{2,18}$$

Применим формулу (2,17) к $\omega^*(t,\tau, x, \xi)$

$$D_\xi^m\omega^*(t, \tau, x, \xi)=\sum_{\substack{|\kappa|+2b\kappa_0\leqslant N-1\\ 0\leqslant\kappa_1\leqslant 2b-1}} D_\xi^m\tilde{\omega}_{\kappa_0\kappa}(\tau, \xi; x_0, t_0)\times$$

$$\times\left.\frac{\partial^{\kappa_0}}{\partial\tau^{\kappa_0}}D_\xi^\kappa\,\omega^*(t, \tau, x, \xi)\right|_{\substack{\tau=t_0\\ \xi=x_0}}+R^{(m)}_{(\omega^*, N)}. \tag{2,19}$$

Вставим (2,19) в (2,18), тогда получим

$$I_\rho=\sum_{\substack{|\kappa|+2b\kappa_0\leqslant N-1\\ 0\leqslant\kappa_1\leqslant 2b-1}}\frac{\partial^{\kappa_0}}{\partial t_0^{\kappa_0}}D_{x_0}^\kappa\,\omega^{*\prime}(t, t_0, x, x_0)\,v_{\kappa_0\kappa}^{(\rho)}(t)+\delta_N^{(\rho)}. \tag{2,20}$$

$$v_{\kappa_0\kappa}^{(\rho)}(t)=\int_{t_1}^{t} d\tau\int_{\gamma_\rho}\sum_{j=1}^{n}B^j[\tilde{\omega}'_{\kappa_0\kappa}(\tau, \xi; x_0, t_0), u(\xi, \tau)]\,\nu_\kappa\,dS+$$

$$+\int_{V_\rho}\tilde{\omega}'_{\kappa_0\kappa}(t_1, \xi, x_0, t_0)\,u(\xi, t_1)\,d\xi. \tag{2,21}$$

Образуем последовательность ϱ_s, $\varrho_{s+1}<\varrho_s$, $\varrho_s\underset{s\to\infty}{\longrightarrow}0$, применим формулу

$$vLu-(L'v')'u=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}B^j[v,u]-\frac{\partial}{\partial\tau}(vu)$$

к матрицам $u=u(\xi,\tau)$; $v=\tilde{\omega}'_{\kappa_0\kappa}(\tau,\xi;x_0,t_0)$ в области $G_{\rho_s}-G_{\rho_{s+m}}$, тогда найдем

$$0=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial\xi_j}B^j[\tilde{\omega}'_{\kappa_0\kappa}(\tau,\xi;x_0,t_0),u(\xi,\tau)]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial\tau}[\tilde{\omega}'_{\kappa_0\kappa}(\tau,\xi;x_0,t_0)u(\xi,\tau)]+[(P'-S)\tilde{\omega}]'u.$$

Используя формулу Остроградского, получим

$$v_{\kappa_0\kappa}^{(\rho_s)}(t)-v_{\kappa_0\kappa}^{(\rho_{s+m})}(t)=\int\limits_{v_{\rho_s}-v_{\rho_{s+m}}}\tilde{\omega}'(t,\xi;x_0,t_0)u(\xi,t)\,d\xi+$$

$$+\int_{t_1}^{t}d\tau\int\limits_{v_{\rho_s}-v_{\rho_{s+m}}}[(P'-S)\omega]'u(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{2,22}$$

Из (2,21)

$$\frac{dv_{\kappa_0\kappa}^{(\rho_s)}}{dt}=\int\limits_{\gamma_{\rho_s}}\sum_{j=1}^{n}B^j[\tilde{\omega}'(t,\xi;x_0,t_0),u(\xi,t)]\,\nu_\kappa\,dS, \tag{2,23}$$

пусть $t_0+\varepsilon\leqslant t\leqslant T$, $\varepsilon>0$; тогда последовательность $v_{\kappa_0\kappa}^{(\rho_s)}$ при $s\to\infty$ равномерно сходится. В силу предположения о t первое слагаемое в (2,22) не превосходит $C(\varepsilon)\varrho_s^n$; оценим второе

$$I_2=\left|\int_{t_1}^{t}d\tau\int\left\{[P'-S]\,\tilde{\omega}\right\}'[u(\xi,\tau)]\,d\xi\right|\leqslant C_1\int_{t_1}^{t}d\tau\int\limits_{v_{\rho_s}-v_{\rho_{s+m}}}\times$$

$$\times\sum_{|\kappa|+2b\kappa_0=N}(|\tau-t_0|^{\kappa_0}|\xi-x_0|^{|\kappa|}+|\tau-t_0|^{r})|u|\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant C_1\int\limits_{v_{\rho_s}-v_{\rho_{s+m}}}d\xi\int_{t_1}^{T}\Bigg(\sum_{|\kappa|+2b\kappa_0=N}|\xi-x_0|^{|\kappa|}|\tau-t_0|^{\kappa_0}|u(\xi,\tau)|+$$

$$+|\tau-t_0|^{\kappa_0}|u(\xi,\tau)|\Bigg)d\xi.$$

Используя условие (2,1) при $q=0$, получим (приводим оценку для $n>2b$, для $n\leqslant 2b$ оценка аналогична)

$$I_2 \leqslant C_1 \int\limits_{v_{\rho_s}} \Bigg(\sum_{|\kappa|+2b\kappa_0=N} |\xi - x_0|^{|\kappa|} |\xi - x_0|^{-N+2b-n+2b\kappa_0+\varepsilon} +$$

$$+ |\xi - x_0|^{-N+2b+n+\left[\frac{N}{2b}\right]2b+2b+\varepsilon} \Bigg) d\xi \leqslant C_3 \varrho_s^{2b}.$$

Из последней оценки и оценки для первого слагаемого из (2,22) следует, что $v_{\kappa_0\kappa}^{(\rho_s)}(t) \rightrightarrows v_{\kappa_0\kappa}(t)$; из (2,23) вытекает, что $\frac{d v_{\kappa_0\kappa}^{(\rho_s)}}{dt} \rightrightarrows 0$ при $t_0 + \varepsilon \leqslant t \leqslant T$. Поэтому $v_{\kappa_0\kappa}^{(\rho_s)} \underset{\rho_s \to 0}{\rightrightarrows} a_{\kappa_0\kappa}(x_0, t_0)$. Докажем, что $\delta_N^{(\rho_s)} \underset{\rho_s \to 0}{\to} 0$

$$\delta_N^{(\rho_s)} = \int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_{\gamma_{\rho_s}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\kappa|+|m|\leqslant 2b-1} A_{m\kappa}^{j} R_{(\omega^*,N)}^{(m)'} D_\xi^{\kappa} u\, v_j dS + \int\limits_{V_{\rho_s}} R_{(\omega^*,N)}^{(0)'} u d\xi.$$

Стремление к нулю второго слагаемого при $\varrho_s \to 0$ очевидно, оценим первое

$$\left| \int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_{\gamma_{\rho_s}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{|m|+|\kappa|<2b-1} A_{m\kappa}^{j} R_{(\omega^*,N)}^{(m)'} D_\xi^{m} u \cdot v_j dS \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1^* \int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_{\gamma_{\rho_s}} \sum_{\substack{|m|+|\kappa|<2b-1 \\ |j|+2bj_0=N}} |\tau - t_0|^{j_0} |\xi - x_0|^{|j|-|m|} |D^\kappa u| dS =$$

$$= C^* \int\limits_{\gamma_{\rho_s}} dS \sum_{\substack{|m|+|\kappa|\leqslant 2b-1 \\ |j|+2bj_0=N}} |\xi - x_0|^{|j|-|m|} \int\limits_{t_1}^{t} |\tau - t_0|^{j_0} |D^\kappa u| d\tau \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \int\limits_{\gamma_{\rho_s}} dS \sum_{\substack{|m|+|\kappa|\leqslant 2b-1 \\ |j|+2bj_0=N}} |\xi - x_0|^{|j|-|m|+N+2b-n+2bj_0-|\kappa|+\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \int\limits_{\gamma_{\rho_s}} |\xi - x_0|^{-n+1+\varepsilon} dS \leqslant C_4 \varrho_s^{\varepsilon} \underset{\varrho_s \to 0}{\to} 0.$$

Теорема таким образом доказана.*

З а м е ч а н и е 1. В случае простейшего параболического уравнения — уравнения теплопроводности — представлению (2,2) можно при-

* Если вместо ф. м. р. $\omega^*(t, \tau, x, \xi)$ брать $Z'(t, \tau, x, \xi)$ или нормальные ф. м. р. из [10], то $u^*(x, t)$ — регулярное решение (1,1).

дать следующую формулировку: с точностью до регулярного распределения температур, температура $u(x, t)$ представляет температуру тепловых «мультиполей» различного порядка, помещенных в точку (x_0, t_0).

Замечание 2. Заметим, что если $u(x, t)$ является регулярным решением системы (1,1) в цилиндре $G\{t_1 \leqslant t \leqslant t_2,\ x \in V\}$ за исключением точки (x_0, t_0) и таким, что

$$\lim_{\rho \to 0} \int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_{\gamma_\rho} \sum_{\kappa=1}^{n} B^{\kappa}_{-}[\omega^{*\prime}(t, \tau, x, \xi), u(\xi, \tau)]\, \nu_\kappa dS = 0, \qquad (2,25)$$

то $u(x, t)$ при $(x, t) \neq (x_0, t_0)$ совпадает с регулярным во всей области G решением $u^*(x, t)$, поэтому, если $u(x, t)$ доопределить в точке (x_0, t_0) равенством $u(x_0, t_0) = u^*(x_0, t_0)$,* то оно превратится в регулярное решение системы (1,1) во всей области G. В частности отсюда следует такая теорема:

Теорема 4 (об устранимой особенности). *Если $u(x, t)$ является регулярным решением системы (1,1) в G за исключением точки (x_0, t_0) и удовлетворяет условию*

$$|x - x_0|^{n-1} \int\limits_{t_1}^{t_2} |D_x^\kappa u(x, t)|\, dt \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0; \quad |\kappa| = 0, 1, \ldots, 2b-1, \qquad (2,26)$$

его можно превратить в регулярное в G решение соответствующим доопределением в точке (x_0, t_0).

Замечание 3. В предыдущих параграфах мы строили ф. м. р. для конечных и бесконечных областей, понимая под ф. м. р. решение при $t > \tau$ системы (1,1), характер особенности которой совпадает с характером особенности первого члена (т. е. матрицы Грина некоторой вспомогательной системы).

Дадим теперь следующее определение ф. м. р.:

Определение. Ф. м. р. параболической системы (1,1) будем называть квадратную матрицу $W(t, \tau, x, \xi)$, являющуюся решением при $(t, x) \neq (\tau, \xi)$ системы (1,1) в области G и такую, что для любой гладкой в G вектор-функции $v(x, t)$ выполняется равенство

$$\lim_{\rho \to 0} \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{\gamma_\rho} \sum_{\kappa=1}^{n} B^{\kappa}[v(x, t), W(t, t_0, x, x_0)]\, \nu_\kappa\, dS_\rho = v(x_0, t_0), \qquad (2,27)$$

γ_ρ — сфера с центром в точке x_0 радиуса ρ.

Теорема 5. *Если $W_1(t, t_0, x, x_0)$, $W_2(t, t_0, x, x_0)$ — две ф.м.р. системы (1,1), то их разность можно превратить в регулярное решение (1,1) доопределением в точке (x_0, t_0).*

Доказательство. Обозначим через $W(t, t_0, x, x_0)$ разность $W_1(t, t_0, x, x_0) - W_2(t, t_0, x, x_0)$. Используя (2,27), в котором $v(x, t) = \omega^*(t_1, t, X, x)$, получим

* При таком доопределении $u(x, t)$ — обобщенное решение (1,1), но, имея нужную гладкость, оно, в силу теоремы 4 [10] является регулярным решением.

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\gamma_\rho} \sum_{\kappa=1}^{n} B^{\kappa}[\omega^{*\prime}(t_1, t, X, x), W(t, t_0, x, x_0)]\, \nu_\kappa dS = 0. \qquad (2,28)$$

Из последнего и замечания 2 следует, что $W(t, t_0, x, x_0)$ имеет устранимую особенность. Теорема доказана.

Замечание 4. Теорема 5 показывает, что ф. м. р. системы (1,1) можно определить как решение с точечной особенностью минимального порядка, при этом порядок особенности понимается в смысле (2,1).

Теорема 5 устанавливает, что главная часть ф. м. р. определяется однозначно. Отметим, что построенные нами выше ф. м. р. удовлетворяют определению замечания 3 и поэтому разнятся между собой на регулярное слагаемое.

Замечание 5. Приведенное выше определение ф. м. р. совпадает с определением элементарного решения, данного Л. Шварцем [7, стр. 137].

Замечание 6. Из представления (2,3) $(I_\rho \equiv 0)$ и теоремы 2 следует теорема.

Теорема 6. *Если выполнено условие 2) (пункт 2, § 1), то всякое регулярное в области G решение системы (1,1) имеет $2b+r$ производных по $x_1, \ldots, x_n$. Если же выполняются условия следствия 1 из теоремы 2, то $u(x, t)$ имеет смешанные производные* $\frac{\partial^m}{\partial t^m} D_x^s u(x, t)$, *($|m| = 0, 1, \ldots, q+1$, $|s| = 0, \ldots, p+(q-m)+\Delta_1 2b$, $\Delta_1 = 0$ при $m < q+1$; $\Delta_1 = 1$ при $m = q+1$).*

3. ЗАДАЧА КОШИ

Настоящий параграф посвящен изучению разрешимости задачи Коши для нелинейных параболических в смысле И. Г. Петровского систем в классе достаточно гладких ограниченных функций. Для этого она сводится к эквивалентной ей задаче Коши для квазилинейной параболической системы, а последняя решается методом последовательных приближений. Для частного класса квазилинейных систем, названных нами «близкими к линейным», дается теорема о корректной разрешимости задачи Коши в классе быстрорастущих функций. Заметим, что при этом факт существования устанавливается при весьма малых ограничениях на коэффициенты.

1. Рассмотрим нелинейную систему

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(t, x, u, \ldots, \frac{\partial^{2b} u}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}}\right), \qquad (3,1)$$

$F\left(t, x, u, \ldots, \frac{\partial^{2b} u}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}}\right)$ — одноколонная матрица, столбцы которой представляют собой функции от вектор-функции u и ее производных до порядка $2b$ по $x_1, \ldots, x_n$.

Определение. Систему (3,1) будем называть параболической в смысле И. Г. Петровского в области $\Pi_2 \{0 \leqslant t \leqslant T, \ \infty < x_s < \infty, s = 1, \ldots, n; |D^m u| \leqslant M, |m| = 0, 1, \ldots, 2b\}$, если корни уравнения

$$\det\left\{\left\|\sum_{\Sigma\kappa_s=2b}\frac{\partial F_i}{\partial\left[\frac{\partial^{2b}u_j}{\partial x_1^{\kappa_1}\dots\partial x_n^{\kappa_n}}\right]}(i\sigma_1)^{\kappa_1}\dots(i\delta_n)^{\kappa_n}\right\|-\lambda E\right\}=0 \tag{3,2}$$

удовлетворяют неравенству $R\lambda < -\delta$ при $(x, t, D^m u)\in\Pi_2$; $|\sigma|=1$. δ — положительная постоянная.

Будем исследовать разрешимость задачи Коши

$$u|_{t=+t_0}=0 \tag{3,3}$$

для системы (3,1).

Во-первых, установим, что если отыскивать решение задачи Коши в классе достаточно гладких ограниченных функций, то решение задачи (3,1), (3,3) может быть сведено к решению задачи Коши для некоторой квазилинейной параболической системы.

Пусть $u(x, t)$ — решение задачи (3,1), (3,3), имеющее $2b+1$ непрерывную производную, при этом $|D^m u|\leqslant M, |m|=0,\dots,2b, Du|_{t=+t_0}=0$; вектор-функция $F(t, x, y_1,\dots,y_e)$ имеет в Π_2 непрерывные производные по $x, y_1,\dots,y_e$.

Продифференцируем (3,1) по x_k, тогда получим

$$\frac{\partial u'_{x_\kappa}}{\partial t}=F'_{x_\kappa}\left(t, x, u,\dots,\frac{\partial^{2b}u}{\partial x_1^{\kappa_1}\dots\partial x_n^{\kappa_n}}\right)+\dots+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{\Sigma\kappa_s=2b}\frac{\partial F}{\partial\left[\frac{\partial^{2b}u}{\partial x_1^{\kappa_1}\dots\partial x_n^{\kappa_n}}\right]}\frac{\partial^{2b}u'_{x_\kappa}}{\partial x_1^{\kappa_1}\dots\partial x_n^{\kappa_n}}. \tag{3,4$_1$}$$

К уравнениям (3,4$_1$) припишем уравнения (3,1), представив их в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=(-1)^{b-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^{2b}u}{\partial x_j^{2b}}+F\left(t, x, u,\dots,\frac{\partial^{2b-1}u}{\partial x_1^{\kappa_1}\dots\partial x_n^{\kappa_n}};\ \frac{\partial^{2b-1}v_s}{\partial x_1^{\kappa_1}\dots\partial x_n^{\kappa_n}}\right)+$$

$$+(-1)^b\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^{2b-1}v_j}{\partial x_j^{2b-1}}. \tag{3,4$_2$}$$

Введем теперь новые функции $v_\kappa=\frac{\partial u}{\partial x_\kappa}$, тогда систему (3,4$_1$), (3,4$_2$) можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=(-1)^{b-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^{2b}u}{\partial x_j^{2b}}+F\left(t, x, u,\dots,\frac{\partial^{2b-1}u}{\partial x_1^{\kappa_1}\dots\partial x_n^{\kappa_n}},\ \frac{\partial^{2b-1}v_s}{\partial x_1^{\kappa_1}\dots\partial x_n^{\kappa_n}}\right)+$$

$$+(-1)^b\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^{2b-1}v_j}{\partial x_j^{2b-1}}; \tag{3,4$'_2$}$$

$$\frac{\partial v_\kappa}{\partial t}=F'_{x_\kappa}\left(t, x, u,\dots,\frac{\partial^{2b-1}v_s}{\partial x_1^{\kappa_1}\dots\partial x_n^{\kappa_n}}\right)+\dots+$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{\Sigma\kappa_s=2b}\frac{\partial F}{\partial\left[\dfrac{\partial^{2b}u_j}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}}\right]}\frac{\partial^{2b}v_\kappa}{\partial x_1^{\kappa_1}\cdots\partial x_n^{\kappa_n}}. \qquad (3,4'_1)$$

Присоединим к $(3,4'_1)$, $(3,4_2)$ условия

$$u\,|_{t=+t_0}=0; \qquad (3,5_1)$$

$$v_\kappa\,|_{t=+t_0}=0. \qquad (3,5_2)$$

Очевидно, что $(3,4'_1)$, $(3,4'_2)$ — квазилинейная параболическая система, содержащая $N(n+1)$ уравнений. Если $u(x,t)$ есть решение задачи (3,1), (3,3), то $\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x_\kappa}\right)$ есть решение задачи $(3,4'_{1,2})$, $(3,5'_{1,2})$.

Изучим возможность обратного перехода; это потребует больших ограничений. Пусть (u, v_κ) $4b$ раз дифференцируемое ограниченное решение задачи (3,5) для системы (3,4), удовлетворяющее условиям $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x_\kappa}\right|_{t=+t_0}=0$, $\left.\dfrac{\partial v_\kappa}{\partial x_j}\right|_{t=+t_0}=0$. $F(t,x,y_1,\ldots,y_e)$ имеет $l=2$ непрерывных и ограниченных производных по $x, y_1, \ldots, y_e$, $\dfrac{\partial F_i}{\partial\left[\dfrac{\partial^{2b}u_j}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}}\right]}$ имеет $2b$ непрерывных в смысле Гельдера x и y ограниченных и непрерывных производных по $x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_e$; при этом их непрерывность по t равномерна по $x_1,\ldots,x_n, y_1,\ldots,y_e$ из Π_2. Тогда $u(x,t)$ есть $4b+1$ раз непрерывно дифференцируемое и ограниченное решение задачи Коши (3,3) для системы (3,1).

Во-первых, устанавливается, что $\dfrac{\partial v_\kappa}{\partial x_p}=\dfrac{\partial v_p}{\partial x_\kappa}$. Для этого κ-тое уравнение в (3,4) дифференцируется по x_p, p-тое — по x_κ, и из первого вычитается второе; тогда относительно разности $\dfrac{\partial v_\kappa}{\partial x_p}-\dfrac{\partial v_p}{\partial x_\kappa}$ получается линейная однородная параболическая система с нужной для применения теоремы единственности решения задачи Коши гладкостью коэффициентов; отсюда в силу того, что $\left.\left(\dfrac{\partial v_\kappa}{\partial x_p}-\dfrac{\partial v_p}{\partial x_\kappa}\right)\right|_{t=+t_0}=0$, из теоремы единственности решения задачи Коши для линейных систем следует $\dfrac{\partial v_\kappa}{\partial x_p}\equiv\dfrac{\partial v_p}{\partial x_\kappa}$. Используя это, докажем, что $v_\kappa=\dfrac{\partial u}{\partial x_\kappa}$. Для этого продифференцируем уравнение $(3,4'_2)$ по x_κ и вычтем его из $(3,4'_1)$, при этом получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\kappa}-v_\kappa\right)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{b-1}\frac{\partial^{2b}}{\partial x_j^{2b}}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\kappa}-v_\kappa\right);\quad \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x_\kappa}-v_\kappa\right)\right|_{t=+t_0}=0,$$

откуда, используя единственность решения задачи Коши для линейных систем, найдем $\dfrac{\partial u}{\partial x_\kappa}\equiv v_\kappa$, вставляя вместо v_κ $\dfrac{\partial u}{\partial x_\kappa}$ в $(3,4'_2)$, получим, что u — решение системы (3,1).

Таким образом, в классе достаточно гладких ограниченных функций задача Коши для нелинейной системы (3,1) сводится к изучению задачи Коши для квазилинейной системы.

Замечание 7. Если $n=1$, достаточно предполагать $l=1$, а условие $\left.\frac{\partial v_\kappa}{\partial x_j}\right|_{t=+t_0}=0$ излишне.

2. Переходим к доказательству теоремы о локальной разрешимости задачи Коши для квазилинейных параболических систем общего вида*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=P_0\left(t, x, u, \ldots, \frac{\partial^{2b-2} u}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}}; \frac{\partial}{\partial x}\right)u+F\left(t, x, u, \ldots, \frac{\partial^{2b-1} u}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}}\right), \tag{3,6}$$

$$u|_{t=+t_0}=0 \tag{3,7}$$

в классе достаточно гладких ограниченных функций (оператор $P_0\left(t, x, y; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ порядка $2b$).

Будем предполагать: 1) Коэффициенты оператора $P_0\left(t, x, y; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ определены в области $Q\{t_0\leqslant t\leqslant T; -\infty<x_s<\infty; s=1, 2, \ldots, n; |y_j|\leqslant M, j=1, 2, \ldots, m)$ непрерывны в Q по t равномерно по x и y из Q, $F(t, x, y)$ — определена и непрерывна по t в Q. 2) Коэффициенты оператора $P_0\left(t, x, y; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и $F(t, x, y)$ имеют в Q $2b$ непрерывных производных по $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$, удовлетворяющих условию Липшица по $y_1, \ldots, y_m$. Параболичность системы (3,6) означает, что корни уравнения $\det\{P_0(t, x, y, i\sigma)-\lambda E\}=0$, $(t, x, y)\in Q$, $|\sigma|=1$ удовлетворяют условию $R\lambda<-\delta$, δ — положительная постоянная.

Задача (3,6), (3,7) может быть решена с помощью матриц $Z(t, \tau, x, \xi)$, построенных в параграфе 1, однако мы изберем несколько иной путь получения решения, быстрее приводящий к результату. Впрочем, методика использования непосредственно фундаментальных матриц будет нами подробно изложена при изучении аналитичности решений нелинейных систем (§ 4).

Определим последовательность функций:

$$\frac{\partial u_\kappa}{\partial t}=P_0\left(t, x, U^{(1)}_{\kappa-1}(x, t); \frac{\partial}{\partial x}\right)u_\kappa+F(t, x, U_{\kappa-1}(x, t)); \tag{3,8}$$

$$u_\kappa|_{t=+t_0}=0; \quad U^{(1)}(x, t)=\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_\kappa}, \ldots, \frac{\partial^{2b-2} u}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}}\right);$$

$$U(x, t)=\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^{2b-1} u}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}}\right);$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}=P_0\left(t, x, 0; \frac{\partial}{\partial x}\right)u_0+F(t, x, 0);$$

* Задача Коши для квазилинейной системы общего вида сводится к эквивалентной задаче (3.6), (3.7) с помощью рассуждений п. 1.

$u_\kappa(x, t)$ будем отыскивать в виде

$$u_\kappa(x, t) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int G_\kappa(t, \tau, x-\xi, \xi)\,[F(\tau, \xi, U_{\kappa-1}(\xi, \tau)) + W_\kappa(\xi, \tau)]\,\partial\xi, \tag{3,9}$$

где $G_\kappa(t, \tau, x-\xi, \xi)$ матрица Грина параболической системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P_0\left(t, \xi, U^{(1)}_{\kappa-1}(\xi, t); \frac{\partial}{\partial x}\right) u \equiv P_\kappa\left(t, \xi; \frac{\partial}{\partial x}\right) u. \tag{3,10}$$

Тогда относительно вектор-функций $W_\kappa(x, t)$ получим интегральное уравнение

$$W_\kappa(x, t) = a_{\kappa-1}(x, t) + \int_{t_0}^{t} d\tau \int K^{(\kappa)}(t, \tau, x, \xi)\, W_\kappa(\tau, \xi)\, d\xi; \tag{3,11}$$

$$a_{\kappa-1}(x, t) = -F(t, x, U_{\kappa-1}(x, t)) + \int_{t_0}^{t} d\tau \int K^{(\kappa)}(t, \tau, x, \xi)\, F(\tau, \xi, U_{\kappa-1}(\xi, \tau))\, d\xi;$$

$$K^{(\kappa)}(t, \tau, x, \xi) = \left\{P_0\left(t, x, U^{(1)}_{\kappa-1}(x, t); \frac{\partial}{\partial x}\right) - P_0\left(t, \xi, U^{(1)}_{\kappa-1}(\xi, t); \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} G_\kappa(t, \tau, x-\xi, \xi).$$

Установим, что если $t-t_0$ достаточно мало, то могут быть последовательно определены вектор-функции $u_k(x, t)$, имеющие $4b-1$ непрерывных производных и удовлетворяющие неравенству $|D^m u_k(x, t)| \leqslant M$. Доказательство будем проводить по индукции. Рассмотрим нулевое приближение

$$u_0(x, t) = \int_{t_0} d\tau \int G_0(t, \tau, x-\xi, \xi)\, F(\tau, \xi, 0)\, d\xi + \int_{t_0}^{t} d\tau \int G_0(t, \tau, x-\xi, \xi)\, W_0(\tau, \xi)\, d\xi; \tag{3,9$_0$}$$

$$W_0(t, x) = a_0(t, x) + \int_{t_0}^{t} d\tau \int K^{(0)}(t, \tau, x, \xi)\, W_0(\tau, \xi)\, d\xi;$$

$$a_0(t, x) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int K^{(0)}(t, \tau, x, \xi)\, F(\tau, \xi, 0)\, d\xi - F(t, x, 0). \tag{3,10$_0$}$$

Заметим, что $K^{(0)}(t, \tau, x, \xi)$ и $a_0(t, x)$ имеют в силу условий 1) и 2) $2b$ непрерывных производных по $x_1, \ldots, x_n$. Интегральное уравнение (3,10) можно решить методом последовательных приближений.

$$W_0^{(0)} = a_0(t, x); \quad W_0^{(S)}(t, x) = \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \quad K^{(0)}(t, \tau, x, \xi)\, W_0^{(s-1)}(\tau, \xi)\, d\xi.$$

Принимая во внимание, что $K_j^{(0)}(t, \tau, x, \xi) = (D_x + D_\xi)^j K^{(0)}(t, \tau, x, \xi)$; $|j| = 0,1, \ldots, 2b$ удовлетворяет тем же оценкам, что и $K^{(0)}(t, \tau, x, \xi)$, можно провести оценку

$$D_x^m W_0^{(s)}(t, x) = \sum_{j=0}^{m} C_m^j \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int (D_x + D_\xi)^{m-j} K^{(0)}(t, \tau, x, \xi) D_\xi^j \times$$
$$\times W_0^{(s-1)}\, d\xi, \; |m| = 0,1, \ldots, 2b, \tag{3,11}$$

так как $|D_x^m a_0(x, t)| \leqslant B_0$, $|m| = 0,1, \ldots, 2b$, а

$$|K_j^{(0)}(t, \tau, x, \xi)| \leqslant C_j (t-\tau)^{-\frac{n+2b-1}{2b}} \exp\left\{-C_i \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \tag{3,12}$$

Точно так же оценивались производные $2b - 1$ порядка в доказательстве теоремы 10. Тогда получим, что $|D_x^m W_0(t, x)| \leqslant B$, $|m| = 0,1, \ldots, 2b$. Отсюда следует, что $u_0(x, t)$, определенное формулой (3,9), имеет $4b - 1$ непрерывных производных. Проведем их оценку

$$D_x^m u_0(x, t) = \sum_{i=0}^{m-2b+1} C_{m-2b+1}^i \int\limits_{t_0} d\tau \int (D_x + D_\xi)^{m-2b+1-i} D_x^{2b-1} G_0(t, \tau, x-\xi, \xi) \times$$
$$\times \{D_\xi^i F(\tau, \xi, 0) + D_\xi^i W_0(\tau; \xi)\}\, d\xi; \tag{3,13}$$

$$|D_x^m u_0(x, t)| \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int C B_2 \exp\left\{-c|x-\xi|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\} \frac{d\xi}{(t-\tau)^{\frac{n+2b-1}{2b}}} \leqslant$$
$$\leqslant B_3 (t - t_0)^{\frac{1}{2b}}, \; |m| = 0,1, \ldots, 4b-1. \tag{3,14}$$

Выберем теперь $\delta_1 = \max(t - t_0)$ так, чтобы $B_3 \delta_1^{\frac{1}{2b}} < M$, тогда получим неравенство

$$|D_x^m u_0(x, t)| \leqslant M; \quad |m| = 0,1, \ldots, 4b - 1. \tag{3,15}$$

Рассмотрим теперь $u_1(x, t)$. Заметим, что для $K_1^{(1)}(t, \tau, x, \xi) =$ $= \left[P_0\left(t, x, U_0^{(1)}(x, t); \dfrac{\partial}{\partial x}\right) - P_0\left(t, \xi; U_0^{(1)}(\xi, t); \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\right] G_1(t, \tau, x-\xi, \xi)$ в силу условий 1), 2), установленных выше свойств $u_0(x, t)$ и того, что $\left|\frac{\partial u_0}{\partial t}\right| < M_1$ справедливы оценки

$$|D_x^{m_1} D_\xi^{m_2} K^{(1)}(t, \tau, x, \xi)| \leqslant C(t-\tau)^{-\frac{n+2b-1+|m_1|+|m_2|}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-c|x-\xi|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}; \tag{3,16}$$

$|m_1|, |m_2| = 0, 1, \ldots, 2b+1$. При этом следует особо подчеркнуть, что в силу сделанных нами предположений постоянные C и c могут быть выбранными зависящими лишь от оценок коэффициентов оператора $P_0\left(t, x, y; \frac{\partial}{\partial x}\right)$, $F(t, x, y)$, их производных и чисел δ и M. Поэтому рассуждения и оценки, проведенные для $u_0(x, t)$, могут быть повторены для $u_1(x, t)$, а также для $u_\kappa(x, t)$ с любым K, при этом постоянная B_3, в силу высказанных соображений, может быть выбрана независимо от κ. Таким образом, установлено, что для $t-t_0 \leqslant \delta_1 < \left(\frac{M}{B_3}\right)^{2b}$ определена последовательность $4b-1$ раз дифференцируемых функций $u_k(x, t)$, удовлетворяющих рекуррентным соотношениям (3,8), (3,9), для которых справедлива оценка

$$|D_x^m u_\kappa(x, t)| \leqslant M; \quad |m| = 0, 1, \ldots, 4b-1. \tag{3,15}$$

3. Перейдем к изучению сходимости последовательности $u_k(x, t)$. Обозначим $\varepsilon_k = \sup\limits_{x;\, t \in [t_0, t_0+\delta_1]} \sum\limits_{l=0}^{4b-2} |D_x^l u_{\kappa-1}(x, t) - D_x^l u_{\kappa-2}(x, t)|$; $G_\kappa(t, \tau, z, \xi) = G_0(t, \tau, z, \xi, U_{\kappa-1}^{(1)}(\xi, \tau))$, тогда в силу условия 2)

$$|D_x^m [P_0^{(\kappa_1 \ldots \kappa_n)}(t, x, U_{\kappa-1}^{(1)}(x, t)) - P_0^{(\kappa_1 \ldots \kappa_n)}(t, x, U_{\kappa-2}^{(1)}(x, t))]| \leqslant B_4 \varepsilon_\kappa \tag{3,16}$$

$$|D_x^m [F(t, x, U_{\kappa-1}(x, t)) - F(t, x, U_2(x, t))]| \leqslant B_4 \varepsilon_\kappa. \quad |m| = 0, 1, \ldots, 2b$$

Из (3,16) получим

$$|D_z^{m_1} D_\xi^{m_2} [G_\kappa(t, \tau, z, \xi) - G_{\kappa-1}(t, \tau, z, \xi)]| \leqslant C\varepsilon_\kappa (t-\tau)^{-\frac{n+m_1}{2b}} \times$$

$$\times \exp\left\{-c|z|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \tag{3,17}$$

Докажем некоторые вспомогательные соотношения.

Лемма 2. *Для $\Delta_\kappa = K^{(\kappa)}(t, \tau, x, \xi) - K^{(\kappa-1)}(t, \tau, x, \xi)$ имеет место представление*

$$\Delta_\kappa = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_j} P_\kappa^j(t, \tau, x, \xi) + Q_\kappa(t, \tau, x, \xi), \tag{3,18}$$

где P^j_κ, Q_κ удовлетворяют неравенствам

$$|D^m_x P^j_\kappa| \leqslant C_1\varepsilon_\kappa (t-\tau)^{-\frac{n+2b-1+m}{2b}} \exp\left\{-c|x-\xi|^q (t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}\right\}$$

$$|m|=0,1,\ldots,2b-1$$

$$|D^m_x Q_\kappa| \leqslant C_2\varepsilon_\kappa (t-\tau)^{-\frac{n+2b-1+m}{2b}} \exp\left\{-c|x-\xi|^q (t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}\right. \quad (3,19)$$

для $P^j_{\kappa s} = (D_x + D_\xi)^j P^j_\kappa (t, \tau, x, \xi)$; $Q_{\kappa s} = (D_x + D_\xi)^s Q_\kappa$ $(|s| = 0,1,\ldots, 2b-1)$ *справедливы оценки* (3,19) $(|m| = 0,1,\ldots, 2b-1-|s|)$,

Доказательство. Преобразуем $\Delta_\kappa \cdot \Delta_\kappa = \left[P_0\left(t, x, U^{(1)}_{\kappa-1}(x,t); \frac{\partial}{\partial x}\right) - P_0\left(t, \xi, U^{(1)}_{\kappa-1}(\xi,\tau); \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] G_0(t, \tau, x-\xi, \xi, U^{(1)}_{\kappa-1}(\xi,\tau)) - \left[P_0\left(t, x, U^{(1)}_{\kappa-2}(x,t); \frac{\partial}{\partial x}\right) - P_0(t, \xi, U^{(1)}_{\kappa-2}(\xi,\tau); \frac{\partial}{\partial x}\right] G_{\kappa-1} = B_\kappa G_\kappa - B_{\kappa-1} G_{\kappa-1} = (B_\kappa - B_{\kappa-1}) G_\kappa + B_{\kappa-1}(G_\kappa - G_{\kappa-1})$.

$B_\kappa - B_{\kappa-1}$ — дифференциальный оператор порядка $2b$ с коэффициентами $\leqslant C_3\varepsilon_\kappa$, $B_{\kappa-1}$ — дифференциальный оператор порядка $2b$, коэффициенты которого $\leqslant C_4(|x-\xi| + |t-\tau|)$. Представим $(B_\kappa - B_{\kappa-1}) G_\kappa$ в виде $(B_\kappa - B_{\kappa-1}) G_\kappa = \sum_{j=1}^n (A^j_\kappa - A^j_{\kappa-1}) \frac{\partial G_\kappa}{\partial x_j}$ и воспользуемся тем, что $\frac{\partial G_\kappa}{\partial x_j} = -\frac{\partial G_\kappa}{\partial \xi'_j} = -\frac{\partial G_\kappa}{\partial \xi_j} + \frac{\partial G_\kappa}{\partial \xi''_j}$, где $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ означает дифференцирование по ξ, входящему в третий аргумент, $\frac{\partial}{\partial \xi''_j}$ — дифференцирование по ξ через остальные аргументы, $\frac{\partial}{\partial \xi_j}$ — полная производная по ξ. Таким образом,

$$(B_\kappa - B_{\kappa-1}) G_\kappa = -\sum_{j=1}^n (A^j_\kappa - A^j_{\kappa-1}) \frac{\partial G_\kappa}{\partial \xi_j} + \sum_{j=1}^n (A^j_\kappa - A^j_{\kappa-1}) \frac{\partial G_\kappa}{\partial \xi''_j} = -$$

$$-\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left[(A^j_\kappa - A^j_{\kappa-1}) G_\kappa\right] + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial A^j_\kappa}{\partial \xi_j} - \frac{\partial A^j_{\kappa-1}}{\partial \xi_j}\right) G_\kappa + \sum_{j=1}^n (A^j_\kappa - A^j_{\kappa-1}) \frac{\partial G_\kappa}{\partial \xi''_j}$$

Введем обозначения

$$P^j_\kappa(t, \tau, x, \xi) = [A^j_\kappa - A^j_{\kappa-1}] G_\kappa;\ Q_\kappa = \sum_{j=1}^n \left\{\left(\frac{\partial A^j{}_\kappa}{\partial \xi_j} - \frac{\partial A^j{}_{\kappa-1}}{\partial \xi_j}\right) G_\kappa + \right.$$

$$\left. + (A^j{}_\kappa - A^j{}_{\kappa-1}) \frac{\partial G_\kappa}{\partial \xi''_j}\right\} + B_{\kappa-1}(G_\kappa - G_{\kappa-1}).$$

Тогда $\Delta_\kappa = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} P^j{}_\kappa + Q_\kappa$. Остается усмотреть справедливость оценок (3,19). Они следуют из таких соображений: $A^j{}_\kappa - A^j{}_{\kappa-1}$ — оператор порядка $2b-1$, коэффициенты которого совпадают с коэффициентами $B_\kappa - B_{\kappa-1}$, поэтому в силу оценок (3,16) и оценок матрицы Грина $P^j{}_\kappa(t, \tau, x, \xi)$ удовлетворяет неравенствам (3,19); такие же оценки получены и для матриц $P^j{}_{\kappa s}$ на основании свойств матрицы Грина и разности $A^j{}_\kappa - A^j{}_{\kappa-1}$ по отношению к операции суммарного дифференцирования; оценки (3,19) следуют для Q_κ из предыдущих соображений и того, что дифференцирование по аргументу ξ'' не повышает порядка особенности матрицы G_κ и оценок (3, 17).

Лемма 3. *Пусть* $I_{i\kappa}(t, x) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int [K^{(\kappa)}(t, \tau, x, \xi) f_{i\kappa}(\tau, \xi) - K^{(\kappa-1)}(t, \tau, x, \xi) f_{i\kappa-1}(\tau, \xi)]\, d\xi$, $f_{i\kappa}(\tau, \xi)$, $f_{i\kappa-1}(\tau, \xi)$ *имеют* $2b$ *производных по* ξ, *для которых справедливы оценки*

$$|D_\xi^m f_{i\kappa}| \leqslant F_i^0 (\tau - t_0)^{\frac{i}{2b}}; \quad |D_\xi^m f_{i\kappa-1}| \leqslant F_i^0 (\tau - t_0)^{\frac{i}{2b}}; \quad |m| = 0, 1, \ldots, 2b, \tag{3,20}$$

$$|D_\xi^m f_{i\kappa}(\tau, \xi) - D_\xi^m f_{i\kappa-1}(\tau, \xi)| \leqslant F_i (\tau - t_0)^{\frac{i}{2b}}; \quad |m| = 0, 1, \ldots, 2b-1.$$

Тогда

$$|D_x^m I_{i\kappa}(x, t)| \leqslant L\, \varepsilon_\kappa \max\{F_i^0, F_i\}\, B\left(\frac{1}{2b}, \frac{i}{2b} + 1\right)(t - t_0)^{\frac{i+1}{2b}}, \quad |m| = 0, 1, \ldots, 2b-1 \tag{3,21}$$

Доказательство.

$$I_{i\kappa}(x, t) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int \Delta_\kappa f_{i\kappa}\, d\xi + \int_{t_0}^{t} d\tau \int K^{(\kappa-1)}(t, \tau, x, \xi)(f_{i\kappa} - f_{i\kappa-1})\, d\xi =$$

$$= \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \xi_j} P^j_\kappa f_{i\kappa}\, d\xi + \int_{t_0}^{t} d\tau \int Q_\kappa f_{i\kappa}\, d\xi +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int K^{(\kappa-1)}(f_{i\kappa} - f_{i\kappa-1})\, d\xi = -\int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_{j=1}^{n} P^j_\kappa \frac{\partial}{\partial \xi_j} f_{i\kappa}\, d\xi +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int Q_\kappa f_{i\kappa}\, d\xi + \int_{t_0}^{t} d\tau \int K^{(\kappa-1)}(f_{i\kappa} - f_{i\kappa-1})\, d\xi.$$

Отсюда

$$D^m I_{i\kappa}(x,t) = \sum_{e=0}^{m} C_m^e \left\{ - \int_{t_0}^{t} d\tau \int \sum_{j=1}^{n} P_{\kappa e}^{j} D_{\xi}^{m-e} \frac{\partial f_{i\kappa}}{\partial \xi_j} d\xi + \right.$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int Q_{\kappa e} D_{\xi}^{m-e} f_{i\kappa}\, d\xi + \int_{t_0}^{t} d\tau \int (D_x + D_{\xi})^e \times ,$$

$$\left. \times K^{(\kappa-1)} D_{\xi}^{m-e} (f_{i\kappa} - f_{i\kappa-1})\, d\xi \right\}.$$

Используя (3,19), (3,20), оценим последнее выражение

$$|D^m I_{i\kappa}(x,t)| \leqslant L \max\{F_i^0, F_i\} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)^{\frac{1-2b}{2b}} (\tau - t_0)^{\frac{i}{2b}} d\tau =$$

$$= L \max\{F_i^0, F_i\}\, B\left(\frac{1}{2}, 1 + \frac{i}{2b}\right) (t - t_0)^{\frac{i+1}{2b}}.$$

Замечание. При доказательстве мы пользовались лишь свойствами ядра, установленными в лемме 2, и оценками матриц $(D_x + D_{\xi})^e K^{(\kappa-1)}(t, \tau, x, \xi)$.

Переходим к оценкам разностей $W_\kappa(x, t) - W_{\kappa-1}(x, t) = \sum_{s=0}^{\infty} (W_\kappa^{(s)} - W_\kappa^{(s-1)})$ и их производных до порядка $2b-1$

$$W_\kappa^{(s)}(x,t) - W_{\kappa-1}^{0}(x,t) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int (K^{(\kappa)} W_\kappa^{(s-1)} - K^{(\kappa-1)} W_{\kappa-1}^{(s-1)})\, d\xi \quad (3,22)$$

Оценим

$$W_\kappa^{(0)}(x,t) - W_{\kappa-1}^{(0)}(x,t) = a_\kappa(t,x) - a_{\kappa-1}(t,x) = F(t, x, U_{\kappa-2}(x,t)) -$$

$$- F(t, x, U_{\kappa-1}(x,t)) + \int_{t_0}^{t} d\tau \int \{K^{(\kappa)} F(\tau, \xi, U_{\kappa-1}(\xi,\tau)) -$$

$$- K^{(\kappa-1)} F(\tau, \xi, U_{\kappa-2}(\xi, \tau))\}\, d\xi.$$

Так как $f_{ok} = F(\tau, \xi, U_{\kappa-1}(\xi, \tau))$ удовлетворяет условиям (3,20), то, применяя лемму 3, получим

$$|D^m W_\kappa^{(0)}(x,t) - D^m W_{\kappa-1}^{(0)}(x,t)| \leqslant L_1 \varepsilon_\kappa \quad (|m| = 0, 1, \ldots, 2b-1).$$

Пусть

$$|D_x^m W_\kappa^{(s)}(x,t) - D_x^m W_{\kappa-1}^{(s)}(x,t)| \leqslant L_1^s \varepsilon_\kappa \prod_{j=1}^{s} B\left(\frac{1}{2b}, 1 + \frac{j-1}{2b}\right)(t - t_0)^{\frac{s}{2b}},$$

$$|m| = 0, 1, \ldots, 2b-1$$

Заметим, что на основании пункта 1 справедлива оценка

$$|D_x^m W_\kappa^{(e)}(x, t)| \leqslant L_1^e \sum_{j=1}^{\infty} B\left(\frac{1}{2b}, 1+\frac{j-1}{2b}\right)(t-t_0)^{\frac{e}{2b}}. \tag{3,23}$$

Тогда, применяя лемму 3 к разности $W_\kappa^{(s+1)}(x, t) - W_{\kappa-1}^{(s+1)}(x, t)$, представленной по формуле (3,22) $(f_{s\kappa} = W_\kappa^{s)})$, получим:

$$|D_x^m W_\kappa^{(s+1)} - D_x^m W_{\kappa-1}^{(s+1)}| \leqslant L_1^{s+1} \varepsilon_\kappa \prod_{i=1}^{s+1} B\left(\frac{1}{2b}, 1+\frac{j-1}{2b}\right)(t-t_0)^{\frac{s+1}{2b}},$$

$$|m| = 0,1,\ldots, 2b-1$$

Таким образом,

$$|D_x^m W_\kappa - D_x^m W_{\kappa-1}| \leqslant \varepsilon_\kappa \sum_{s=0}^{\infty} L_1^s \prod_{j=1}^{s} B\left(\frac{1}{2b}, 1+\frac{j-1}{2b}\right)(t-t_0)^{\frac{s}{2b}} \leqslant C_4 \varepsilon_\kappa \tag{3,24}$$

Перейдем к оценке ε_κ

$$D_x^{2b-1} u_\kappa(x, t) - D_x^{2b-1} u_{\kappa-1}(x,t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t} d\tau \int \left[D_x^{2b-1} G_\kappa(t, \tau, x-\xi, \xi) F(\tau, \xi, U_{\kappa-1}(\xi, \tau)) -\right.$$

$$\left. - D_x^{2b-1} G_{\kappa-1}(t, \tau, x-\xi, \xi) F(\tau, \xi, U_{\kappa-2}(\xi, \tau))\right] d\xi +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int (D_x^{2b-1} G_\kappa W_\kappa - D_x^{2b-1} G_{\kappa-1} W_{\kappa-1}) d\xi. \tag{3,25}$$

Так как для $D_x^{2b-1} G_\kappa$ справедливы утверждения леммы 2, то к интегралам в (3,25) можно применить лемму 3. Тогда получим

$$|D_x^m D_x^{2b-1} u_\kappa - D_x^m D_x^{2b-1} u_{\kappa-1}| \leqslant C_5 \varepsilon_\kappa (t-t_0)^{\frac{1}{2b}}; \; |m| = 0,1,\ldots, 2b-1.$$

Таким образом,

$$\sum_{|m|=0}^{4b-1} |D_x^m (u_\kappa - u_{\kappa-1})| \leqslant C_6 \varepsilon_\kappa (t-t_0)^{\frac{1}{2b}} \leqslant C_6 \varepsilon_\kappa \delta_2 = q\varepsilon_\kappa$$

$$(\delta_2 \leqslant \delta_1; \; C_6 \delta_2 = q < 1),$$

поэтому

$$\varepsilon_{\kappa+1} \leqslant q\varepsilon_\kappa. \tag{3,26}$$

Из (3,26) следует равномерная сходимость последовательности $D^m u_\kappa(x, t)$ $(\kappa = 0, 1, \ldots)$ $|m| = 0, 1, \ldots, 4b-2$. Действительно,

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} |D_x^m (u_\kappa - u_{\kappa-1})| \leqslant \sup_{(x,t)\in Q} \sum_{\kappa=0}^{4b-1} |D_x^m u_0(x, t)| \sum_{\kappa=0}^{\infty} q^\kappa; \; u_{-1} \equiv 0.$$

Таким образом, $D^m{}_x u_\kappa(x, t) \rightrightarrows D^m{}_x u(x, t)$, $|m|=0, 1, \ldots, 4b-2$. Переходя в равенстве (3,8) к пределу при $\kappa \to \infty$, получим, что предельная вектор-функция $u^*(x, t)$ является решением задачи Коши (3,6), (3,7), имеющим непрерывные и ограниченные производные до порядка $4b-2$ в полосе $\{t_0 < t \leqslant t_0 + \delta_2, -\infty < x_s < \infty;\ s = 1,2, \ldots, n\}$.

Замечание 1. Если в коэффициенты оператора P_0 и в F входят производные от вектор-функции $u(x, t)$ до порядка $m \leqslant 2b-2$, то вышеприведенная методика позволяет получить теорему существования решения задачи (3,6), (3,7) в предположениях 1) и 2) $r=m+2$. Если же в условии 2) $r=m+2+p$, то решение задачи Коши для системы (3,6), построенное по вышеприведенной методике, будет иметь $r=m+2+p$ непрерывных и ограниченных производных.

Замечание 2. На основании теоремы единственности решения задачи Коши для линейных систем и леммы Адамара решение задачи Коши для системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P_0\left(t, x, u, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}}; \frac{\partial}{\partial x}\right) u + F\left(t, x, u, \ldots, \frac{\partial^{2b-1} u}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}}\right) \quad (3,27)$$

в классе функций, имеющих $2b+m$ непрерывных по Гельдеру и ограниченных производных, единственно, если коэффициенты P_0 удовлетворяют условиям 1) и 2) $r=2b$, F — условиям 1) и 2) $r=1$ настоящего параграфа. В условии 2) можно вместо условия Липшица требовать выполнения условия Гельдера.

Замечание 3. До сих пор мы рассматривали задачу Коши с нулевыми начальными данными, однако вышеописанная методика позволяет рассмотреть и случай произвольных достаточно гладких ограниченных функций.

Рассмотрим задачу Коши для квазилинейной системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P_0\left(t, x, u, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}}; \frac{\partial}{\partial x}\right) u + F\left(t, x, u, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}}\right), \quad (3,28)$$

$$u|_{t=+t_0} = \varphi(x) \quad (3,29)$$

в предположениях 1) и 2) $r=m+2$, $\varphi(x)$ имеет $r_1=2b+m+1$ непрерывных по Гельдеру ($\alpha=1$) ограниченных производных; в этих предположениях проходят все вышеприведенные построения, позволяющие решить задачу (3,28), (3,29). Если же $r=m+3$, $\varphi(x)$ имеет $r_1=2b+m+1$ непрерывных по Гельдеру ограниченных производных, то решение, построенное по начальным данным $\varphi(x)$, принадлежит классу единственности.

Пусть теперь $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — решения задачи (3,28), (3,29), построенные по начальным вектор-функциям $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ и принадлежащие описанному в замечании 2 классу единственности решения задачи Коши, обозначим через $v=u_1(x, t) - u_2(x, t)$; $v|_{t=+t_0} = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, тогда относительно $v(x, t)$ получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = P_0\left(t, x, U_1; \frac{\partial}{\partial x}\right) v + \left\{P_0\left(t, x, U_1; \frac{\partial}{\partial x}\right) - P_0\left(t, x, U_2; \frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} u_2 + \\ + F(t, x, U_1) - F(t, x, U_2),$$

$$U = \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_\kappa}, \ldots, \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}}\right)$$

Используя представление

$$v(x, t) = \int Z(t, t_0, x, \xi)[\varphi_1(\xi) - \varphi_2(\xi)]\,d\xi +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int Z(t, \tau, x, \xi)\Big\{\Big[P_0\Big(\tau, \xi, U_1(\xi, \tau); \frac{\partial}{\partial \xi}\Big) -$$

$$- P_0\Big(\tau, \xi, U_2(\xi, \tau); \frac{\partial}{\partial \xi}\Big)\Big] u_2(\xi, \tau) + [F(\tau, \xi, U_1) - F(\tau, \xi, U_2)]\Big\}\,d\xi,$$

предполагая, что $|D^{\kappa}(\varphi_1 - \varphi_2)| \leqslant \varepsilon$, $|\kappa| = 0, 1, \ldots, m$, и проводя обычный метод последовательных приближений, получим, что

$$|v(x, t)| \leqslant M_1 \varepsilon, \tag{3,30}$$

где M_1 зависит от M, T, δ и постоянных, ограничивающих нормы F и коэффициентов P_0.

Рассмотрим теперь вопрос о том, каким образом переносится гладкость с коэффициентов и нелинейности в системе (3,28) на решения при $t > t_0$. Пусть в условии 2) $r = m + 3 + p$, утверждается тогда, что каждое решение системы (3,28), имеющее $2b + m + 2$ непрерывных в смысле Гельдера и ограниченных производных по $x_1, \ldots, x_n$ в полосе $[t_0, T]$ имеет при $t > t_0$ $2b + m + p$ производных, ограниченных в каждом сегменте $[t_0 + \delta_1, T]$, $\delta > 0$. Для установления этого заметим, что $u(x, t)$ при $t > t_0$ может быть получена как решение задачи Коши (3,28), (3,29) по начальным функциям $u(x, t_1)$, где $t_1 < t$ выбрано так, чтобы к $u(x, t)$ сходилась последовательность $u_\kappa(x, t)$ (составленная для системы (3,28) по начальным данным $u(x, t_1)$).

Достаточно теперь установить, что последовательность $u_\kappa(x, t)$ равномерно ограничена вместе со своими производными до порядка $2b + m + p + 1$ в полосе $t_1 + \delta_1 \leqslant t \leqslant t_2$; $\delta_1 > 0$. В результате сделанных нами предположений из ранее проведенных рассуждений и оценок следует, что $|D_x^e u_\kappa(x, t)| \leqslant M$; $|e| = 0, 1, \ldots, 2b + m + 1$. Далее по индукции устанавливается, что $|D_x^{2b+m+1+s} u_e| \leqslant M_1 (t - t_1)^{-\frac{s}{2b}}$; $s = 1, \ldots, p$. Для этого используем представление

$$U_\kappa(x, t) = \int_{t_1}^{t} d\tau \int G_0(t, \tau, x - \xi, \xi, U_{\kappa-1}(\xi, \tau))[F(\tau, \xi, U_{\kappa-1}(\xi, \tau)) +$$

$$+ W_\kappa(\xi, \tau)]\,d\xi + \int G_0(t, t_1, x - \xi, \xi, U_{\kappa-1}(\xi, t_1))\,u(\xi, \tau)\,d\xi,$$

$$W_\kappa(x, t) = a_\kappa(x, t) + \int_{t_1}^{t} d\tau \int K^{(\kappa)}(t, \tau, x, \xi)\,W_\kappa(\xi, t_1)\,d\xi.$$

$$a_\kappa(x, t) = \int K^{(\kappa)}(t, t_1, x, \xi)\,u(\xi, t_1)\,d\xi +$$

$$+\int_{t_1}^{t} d\tau \int K^{(\kappa)}(t,\tau,x,\xi) F(\tau,\xi,U_{\kappa-1}(\xi,\tau))\,d\xi\,.$$

$-F(t,x,U_{\kappa-1}(x,t))$), интегралы по τ разбиваются на две части (t_1, t^*) и $(t,^* t)$, в первых можно проводить непосредственное дифференцирование, а во вторых используются формулы суммарного дифференцирования (см. (3,11). Затем, используя оценки матрицы Грина и индуктивное предположение, получают оценки (3,31).

Все изложенное выше сформулируем в виде теоремы.

Теорема 7. *Если выполнены условия* 1) *и* 2) $r=|m|+2\ 0\leqslant|m|\leqslant\leqslant 2b-2$, *а* $\varphi(x)$ *имеет* $r_1=2b+m+1$ *непрерывных в смысле Гельдера, ограниченных производных, то задача Коши* (3,28), (3,29) *имеет решение, ограниченное вместе со своими производными до порядка* $2b+m$; *если же* $r=m+3$; $r_1=2b+m+2\ 0\leqslant m\leqslant 2b-1$, *то решение имеет* $2b+m+1$ *непрерывных и ограниченных производных и, следовательно, единственно (в классе функций, имеющих* $2b+m$ *непрерывных в смысле Гельдера и ограниченных производных). Это решение непрерывно зависит от начальных данных (в смысле, описанном в замечании 3).*

Если же $r=m+3+p$, *то каждое решение системы* (3,28), *имеющее* $2b+m+2$ *непрерывных в смысле Гельдера производных по* $x_1,\ldots,x_n$, *имеет при* $t>t_0$ $2b+m+p$ *непрерывных производных.*

4. Используя связь, установленную между задачами (3,1), (3,3) и $(3,4_1')$, $(3,4_2')$, $(3,5_1)$, $(3,5_2)$, из теоремы 7 следует:

Теорема 8. Если $F(t,x,y_1,\ldots,y_e)$ *имеет* $r_2=2b+3$ *непрерывных и ограниченных производных по* $x_1,\ldots,x_n$, $y_1,\ldots,y_e$, *удовлетворяющих условию Липшица по* $y_1,\ldots,y_e$ *в области* Π_2, *при этом непрерывность по* t $\dfrac{\partial F_i}{\partial\left[\dfrac{\partial^{2b}u_j}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}}\right]}$ *равномерна по* $x_1,\ldots,x_n$; $y_1,\ldots,y_e$ *из* Π_2; $\varphi(x)$ *имеет* $r_3=4b+1$ *непрерывных в смысле Гельдера и ограниченных производных по* x, *то для* $t_0<t\leqslant t_0+\Delta$ *существует решение задачи Коши* $u|_{t=+t_0}=\varphi(x)$ *для системы* (3,1), *имеющее* $r_4=4b+2$ *непрерывных и ограниченных производных по* $x_1,\ldots,x_n$; *единственное в классе функций, имеющих* $4b$ *ограниченных производных, непрерывных в смысле Гельдера. Полученное решение непрерывно зависит от начальных данных в следующем смысле: пусть* $u_1(x,t)$ *и* $u_2(x,t)$ — *решения задачи Коши для системы* (3,1), *построенные по начальным данным* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$, *и пусть* $|D^m(\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\leqslant\varepsilon$; $|m|\,0,1,\ldots,2b$, *тогда* $|u_1,(x,t)-u_2(x,t)|\leqslant\varepsilon M_1$, *где* M_1 *зависит от* M, T, δ *и постоянных, ограничивающих норму* F *и ее производных.*

Если же $r_2=2b+3+p$, *то каждое решение системы* (3,1), *имеющее* $4b+2$ *непрерывных в смысле Гельдера ограниченных производных по* $x_1,\ldots,x_n$ *в полосе* $\Pi_1\{t_0\leqslant t\leqslant T;\ -\infty<x_s<\infty\}$, *имеет* $4b+p+1$ *непрерывных производных по* $x_1,\ldots,x_n$ *при* $t>t_0$.

5. В силу систем, «близких к линейным».

$$\frac{\partial u}{\partial t}=P_0\left(t,x;\frac{\partial}{\partial x}\right)u+F\left(t,x,u,\ldots,\frac{\partial^{2b-1}u}{\partial x_1^{\kappa_1}\ldots\partial x_n^{\kappa_n}}\right), \tag{3,32}$$

$$u|_{t=+t_0}=\varphi(x)\quad (3,33)\,,\qquad |\varphi(x)|\leqslant Ce^{|x|^q}\,j\,q=\frac{2b}{2b-1}\qquad (3,33)$$

имеет место теорема 9,

Теорема 9.* *Если* 1) *коэффициенты* $P_0\left(t, x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ *удовлетворяют условиям* 1), 2) *теоремы* 1 *с* $T = t_0 + \left(\frac{c_0^* - \mu}{\kappa}\right)^{2b-1}$**, $F(t, x, y)$ *определена в полосе* $\Pi_3 \{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T_1, \ -\infty < x_s < \infty;\ j - \infty < y_p < \infty\}$, *непрерывна по* t *и удовлетворяет условиям* $|F(t, x, 0)| \leqslant c_1 e^{\kappa |x|^q}$,

$$|F(t, x+h, y) - F(t, x, y)| \leqslant f(h)(|y| + 1) \qquad (3,34)$$

в каждой конечной по $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_e$ *области* $f(h) > 0$ *не зависит от* x, y; $\int\limits_0^{\eta} \frac{f(h)\,dh}{h} < +\infty$,

$$|F(t, x, y) - F(t, x, z)| \leqslant B \sum_{s=1}^{n} |y_s - Z_s|, \qquad (3,35)$$

то существует решение задачи Коши (3,33) *для системы* (3,32) $u(x, t)$, *определенное в полосе* $\Pi_4 \left\{t_0 < t \leqslant t_0 + \min\left(T_1, \left(\frac{c_0^* - \mu}{\kappa}\right)^{2b-1}\right)\right\}$, $\mu > 0$

и удовлетворяющее оценке $|u(x, t)| \leqslant M_1 e^{\kappa_1 |x|^q}$ (3,36), *которое непрерывно зависит от начальных функций в том смысле, что для решений* $u_1(x, t)$ *и* $u_2(x, t)$ *системы* (3,32), *построенных по начальным данным* $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, *удовлетворяющих* (3,33), *имеет место: если* $|\varphi_1 - \varphi_2| \leqslant \leqslant \delta e^{\kappa |x|^q}$, *то* $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leqslant K\delta e^{\kappa_1 |x|^q}$.

2) *Если же в дополнение выполнено условие* 3) *замечания* 1 *к теореме* 1, *то полученное решение единственно в классе функций* (3,36).

Доказательство. Заметим следующее: если выполнены условия 1), 2) относительно $P_0\left(t, x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и условия теоремы относительно $F(t, x, y)$, то каждое решение системы интегро-дифференциальных уравнений

$$u(x, t) = u^{(0)}(x, t) + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int Z(t, \tau, x, \xi)\, \psi(\tau, \xi, U(\xi, \tau))\, d\xi, \qquad (3,37)$$

где

$$u^{(0)}(x, t) = \int Z(t, t_0, x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int Z(t, \tau, x, \xi)\, F(\tau, \xi, 0)\, d\xi,$$

$$\psi(\tau, \xi, U) = F(\tau, \xi, U) - F(\tau, \xi, 0),$$

---

* Настоящая теорема была получена автором в 1955 г. и доложена на 3 Всесоюзном математическом съезде [11].

** $c_0^* = \min\limits_{\kappa = 0, 1, \ldots, 2b-1} c_\kappa$; c_κ из (1,2).

имеющее $2b$ непрерывных производных по $x_1, \ldots, x_n$ является решением задачи (3,32), (3,33); с другой стороны, если выполнены условия 1), 2), 3) относительно $P_0\left(t, x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ и условия теоремы относительно $F(t, x, y)$, то всякое решение задачи (3,32), (3,33), для которого справедливы оценки

$$|D_x^m u(x,t)| \leqslant M(t-t_0)^{-\frac{m}{2b}} e^{\gamma|x|^q}, \tag{3,38}$$

удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений (3,37). Последнее утверждение следует из единственности решения задачи Коши для параболических систем условия, что $v = \int Z(t, t_0, x, \xi)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int ZF(\tau, \xi, V)d\xi$ в сделанных в теореме предположениях и предположении (3,38) удовлетворяет соотношению $\frac{\partial v}{\partial t} = P_0\left(t, x; \frac{\partial}{\partial x}\right)v + F(t, x, V)$. Поэтому для доказательства существования решения задачи (3,32), (3,33) достаточно показать существование $2b$ раз непрерывно дифференцируемого решения системы интегро-дифференциальных уравнений (3,37); проведем доказательство этого, предполагая выполненными относительно $P_0\left(t, x; \frac{\partial}{\partial x}\right)$ лишь условия 1), 2). Будем отыскивать решение системы (3,37) в виде ряда $U(x,t) = \sum\limits_{\kappa=0}^{\infty} u^{(\kappa)}(x, t)$ (3,39), частичные суммы которого $\sigma^{(\kappa)}(x, t) = \sum\limits_{s=0}^{\kappa} u^{(s)}$ $\sigma^{(0)} = u^{(0)}$ (3,40) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\sigma^{(\kappa)} = \sigma^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int Z(t, \tau, x, \xi)\,\psi\left(\tau, \xi, \sum\nolimits_{\kappa-1}(\xi, \tau)\right) d\xi. \tag{3,41}$$

Используя непрерывность $\varphi(x)$ и ее принадлежность классу (3,33′), и предполагая, что F удовлетворяет условию (3,35), докажем равномерную сходимость ряда (3,39) и рядов, получающихся из (3,39) почленным дифференцированием $2b-1$ раз по $x_1, \ldots, x_n$. Отсюда, переходя в (3,41) к пределу при $\kappa \to \infty$ получим, что $u(x, t)$, определенное формулой (3,39) — решение (3,37). Далее покажем, что построенное решение в предположениях первой части теоремы 1 имеет $2b$ производных по $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Так как

$$u^{(\kappa)}(x, t) = \sigma^{(\kappa)}(x, t) - \sigma^{(\kappa-1)}(x, t) =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int Z(t, \tau, x, \xi)\left[\psi(\tau, \xi, \Sigma_{\kappa-1}) - \psi(\tau, \xi, \Sigma_{\kappa-2})\right] d\xi$$

и в силу предположений

$$|\psi(\tau, \xi, \Sigma_{\kappa-1}) - \psi(\tau, \xi, \Sigma_{\kappa-2})| \leqslant B \sum_{\Sigma m_s < 2b-1} |D_\xi^e u^{(\kappa-1)}(\xi, \tau)|,$$

то

$$|D_x^m u^{(\kappa)}(x, t) \leqslant \int_{t_0}^{t} d\tau \int |D_x^m Z(t, \tau, x, \xi)| B \sum_{\Sigma e_s < 2b-1} |D_\xi^e u^{(\kappa-1)}(\xi, \tau)| d\xi. \quad (3,42)$$

Обозначим

$$\sup_{|m| < 2b-1} |D_\xi^m u^{(\kappa)}(\xi, \tau)| = u_\kappa(\xi, \tau); \ \sup_{|m| < 2b-1} |D_x^m Z| = Z^*(t, \tau, x, \xi). \quad (3,43)$$

Тогда из последнего неравенства следует, что

$$u_\kappa(x, t) \leqslant B_1 \int_{t_0}^{t} d\tau \int Z^*(t, \tau, x, \xi) u_{\kappa-1}(\xi, \tau) d\xi, \quad (3,44)$$

откуда

$$u_\kappa(x, t) \leqslant B_1^\kappa \int_{t_0}^{t} d\tau \int Z_\kappa^*(t, \tau, x, \xi) u_0(\xi, \tau) d\xi, \quad (3,45)$$

где

$$Z_\kappa^*(t, \tau, x, \xi) = \int_{\tau}^{t} d\beta \int Z^*(t, \beta, x, y) Z_{\kappa-1}^*(\beta, \tau, y, \xi) dy.$$

Так как

$$|Z^*(t, \tau, x, \xi)| \leqslant C(t-\tau)^{-\frac{n+2b-1}{2b}} \exp\left\{-c_0^* \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}$$

то для ряда

$$\Phi(t, \tau, x, \xi) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} B_1^\kappa Z_\kappa^*(t, \tau, x, \xi) \quad (3,46)$$

могут быть повторены рассуждения и оценки [6_a], тогда получим

$$\Phi(t, \tau, x, \xi) \leqslant C_1(t-\tau)^{\frac{n+2b-1}{2b}} \exp\left\{-c_1 \sum_{s=1}^{n} |x_s - \xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{1}{2b-1}}\right\}. \quad (3,47)$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда (3,39) вместе с его производными до порядка $2b-1$ по $x_1, \ldots, x_n$, из неравенств (3,39), (3,42) и (3,47) сразу вытекает, что $u(x, t)$ удовлетворяет неравенства (3,38).

Таким образом, существование решения системы интегро-дифференциальных уравнений (3,37), удовлетворяющего неравенствам (3,38), установлено. Для доказательства существования решения задачи Коши осталось лишь показать, что построенное решение системы (3,37) имеет $2b$ непрерывных производных по $x_1, \ldots, x_n$ при $t > t_0$. В силу (3,35) имеем

$$
\begin{aligned}
|D_x^{2b-1}[u(x+h, t)-u(x, t)]| \leqslant \int |D_x^{2b-1}[Z(t, t_0, x, +h, \xi)- \\
-Z(t, t_0, x, \xi)]||\varphi(\xi)| d\xi+\int_{t_0}^{t} d\tau \int |D_x^{2b-1}(Z(t, \tau, x+h, \xi)- \\
-Z(t, \tau, x, \xi))|\left[|F(\tau, \xi, 0)|+B \sum_{|m| \leqslant 2b-1}|D^m u(\xi, \tau)|\right] d\xi
\end{aligned}
\tag{3,48}
$$

Методику получения нужных оценок достаточно пояснить на оценке интеграла

$$
I_m=\int|D_x^{2b-1}(Z(t, \tau, x+h, \xi)-Z(t, \tau, x, \xi))||v_m(\tau, \xi)| d\xi,
$$

где $|v_m(\tau, \xi)|_{|m|=0,1,\ldots,2b-1} \leqslant M'_m(\tau-t_0)^{-\frac{m}{2b}} e^{\kappa|\xi|^q}$, так как интегралы такого вида фигурируют в правой части неравенства (3,48)

$$
I_m=\int_{\Sigma|x_s-\xi_s|>2|h|}+\int_{\Sigma|x_s-\xi_s|<2|h|}=I_m^{(1)}+I_m^{(2)};
$$

$$
\begin{aligned}
I_m^{(1)} \leqslant \int_{\Sigma|x_s-\xi_s|>2|h|} C_0|h|^\alpha(t-\tau)^{-\frac{n+2b-1+\alpha}{2b}} e^{-\frac{c\Sigma|x_s-\xi_s|^q}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}}+\kappa\Sigma|\xi_s|^q} d\xi(\tau-t_0)^{\frac{m}{2b}} \leqslant \\
\leqslant C_1(t-\tau)^{-\frac{2b-1+\alpha}{2b}}(\tau-t_0)^{-\frac{m}{2b}}|h|^\alpha e^{\kappa_1|x|^q},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_m^{(2)} \leqslant \int_{\Sigma|x_s-\xi_s|<2|h|}|D_x^{2b-1} Z(t, \tau, x+h, \xi)||v_m(\tau, \xi)| d\xi+ \\
+\int_{\Sigma|x_s-\xi_s|<2|h|}|D_x^{2b-1} Z(t, \tau, x, \xi)||v_m(\tau, \xi)| d\xi.
\end{aligned}
\tag{3,49}
$$

Два последних интеграла оцениваются совсем аналогично, поэтому проведем оценку для одного из них, например, второго

$$\int\limits_{\Sigma|x_s-\xi_s|<2|h|} |D_x^{2b-1}Z(t,\tau,x,\xi)||v_m(\tau,\xi)|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{\sum\limits_{s=1}^{n}|x_s-\xi_s|<|h|} e^{-c\frac{\sum\limits_s|x_s-\xi_s|^q}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}}+\varkappa\Sigma_s|\xi_s|^q} M_m(t-\tau)^{-\frac{n+2b-1}{2b}}(\tau-t_0)^{-\frac{m}{2b}}\,d\xi =$$

$$=\int\limits_{\sum\limits_{s=1}^{n}|z_s|<2} \frac{C|h|^nM_n}{(t-\tau)^{\frac{n+2b-1}{2b}}} e^{-\frac{c|h|^q\sum\limits_{s=1}^{n}|z_s|^q}{(t-\tau)^{\frac{1}{2b-1}}}+\varkappa\sum\limits_s|x_s-hz_s|^q}\frac{dz}{(\tau-t_0)^{\frac{m}{2b}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_2|h|^\alpha e^{\varkappa_1|x|^q}}{(t-\tau)^{\frac{2b-1+\alpha}{2b}}(\tau-t_0)^{\frac{m}{2b}}}$$

что вместе с неравенством (3,49) дает $I_m\leqslant C^*(t-\tau)^{-\frac{2b-1+\alpha}{2b}}(\tau-t_0)^{-\frac{m}{2b}}\times$ $\times|h|^\alpha e^{\varkappa_1|x|^q}$. Применяя последнее неравенство к (3,48), получим

$$|D_x^{2b-1}u(x,t)-D_x^{2b-1}u(x+h,t)|\leqslant C^{**}|h|^\alpha(t-t_0)^{-\frac{2b-1+\alpha}{2b}}e^{\varkappa_1|x|^q},$$

что и требовалось доказать.

Покажем теперь, что полученное нами решение задачи Коши $u(x, t)$ непрерывно зависит от начальных данных в вышеуказанном смысле. Рассмотрим $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ такие, что $|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\leqslant\varepsilon_1 e^{\varkappa|x|^q}$, пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — соответствующие решения, построенные по этим начальным данным. Обозначим $\varphi(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$ и $u(x, t)=$ $=u_1(x, t)-u_2(x, t)$. Тогда для последовательности частичных сумм, соответствующих $u(x, t)$, получим соотношение

$$|D_x^m\sigma^{(\varkappa)}(x,t)|\leqslant|D_x^m\sigma^{(0)}(x,t)|+\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int|D_x^mZ(t,\tau,x,\xi)|B\sum_{|e|\leqslant 2b-1}|D_\xi^e\sigma^{(\varkappa-1)}|\,d\xi \tag{3,50}$$

Используя введенные обозначения (3,43), найдем при

$$|\sigma^{(\varkappa)}(x,t)|\leqslant|\sigma^{(0)}(x,t)|+B_1\int\limits_{t_0}^{t}d\tau\int Z^*(t,\tau,x,\xi)\,\sigma_{\varkappa-1}(\xi,\tau)\,d\xi\,.$$

Обозначим интегральный оператор с ядром $Z^*(t, \tau, x, \xi)$, который стоит справа, через A, тогда последнее соотношение можно переписать в виде $|\sigma^{(\varkappa)}|\leqslant|\sigma^{(0)}|+B_1A\sigma_{k-1}$, откуда следует, что $|\sigma^{(\varkappa)}|\leqslant|\sigma^{(0)}|+B_1A|\sigma^{(0)}|+$ $+\cdots+B_1^\varkappa A^\varkappa\sigma_0$($A^\varkappa$ — интегральный оператор с ядром $Z^*_\varkappa(t,\tau,x,\xi)$). Это неравенство означает, что

$$|\sigma^{(\kappa)}(x,t)| \leqslant |\sigma^{(0)}(x,t)| + \int_{t_0}^{t} d\tau \int \Psi_{\kappa-1}(t,\tau,x,\xi)\,|\sigma^{(0)}(\xi,\tau)|\,d\xi +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} d\tau \int B_1^{\kappa} Z_{\kappa}^{*}(t,\tau,x,\xi)\,\sigma_0(\tau,\xi)\,d\xi$$

($\psi_{\kappa-1}$ — частичная сумма ряда (3,46), откуда следует наше утверждение, так как

$$|\sigma^{(0)}(x,t)| \leqslant \int |Z(t,t_0,x,\xi)|\,|\varphi_1(\xi)-\varphi_2(\xi)|\,d\xi \leqslant C_1\varepsilon_1 e^{\kappa_1|x|^q},$$

$$\sigma_0(x,t) \leqslant C_1\varepsilon_1 (t-t_0)^{-\frac{2b-1}{2b}} e^{\kappa_1|x|^q}$$

и в силу (3,47) $\Psi_{\kappa-1} \leqslant \Psi \leqslant C(t-\tau)^{-\frac{n+2b-1}{2b}} \exp\left\{-C\sum_{s=1}^{n}|x_s-\xi_s|^q (t-\tau)^{-\frac{2}{2b-1}}\right\}$.

Переходим к доказательству второй части теоремы. Пусть теперь дополнительно выполнено условие 3), тогда для установления единственности решения задачи Коши (3,32), (3,33) в классе функций (3,38) достаточно доказать единственность соответствующего решения системы интегро-дифференциальных уравнений. Пусть, кроме построенного решения $u(x,t)$ в классе функций (3,38), существует еще одно решение $v(x,t)$, тогда

$$u(x,t) - \sigma^{(\kappa)}(x,t) = \int_{t_0}^{t} d\tau \int Z(t,\tau,x,\xi)\,[\Psi(\tau,\xi,V) - \Psi(\tau,\xi,\Sigma_{\kappa-1})]\,d\xi \tag{3,51}$$

где $\sigma^{(\kappa)}(x,t)$ частичные суммы ряда (3,39), откуда следует, что для $\overline{v}^{(\kappa)} = v - \sigma^{(\kappa)}$ имеет место

$$|\overline{v}^{(\kappa)}| \leqslant \int_{t_0}^{t} d\tau \int |Z(t,\tau,x,\xi)|\,B \sum_{|m|\leqslant 2b-1} |D^m \overline{v}^{(\kappa-1)}|\,d\xi \tag{3,52}$$

Из последнего и предыдущих рассуждений относительно u_k следует $\lim\limits_{\kappa\to\infty} \overline{v}^{(\kappa)} = 0$, то есть $\lim\limits_{\kappa\to\infty}[v(x,\xi) - \sigma^{(\kappa)}(x,t)] = 0$, значит, $v(x,t) \equiv u(x,t)$.

Для завершения доказательства теоремы 9 осталось снять дополнительное ограничение (3,38). Покажем, что всякое решение задачи Коши (3,32), (3,33), для которого имеет место неравенство $|u(x,t)| \leqslant$ $\leqslant M_1 e^{\kappa_1|x|^q}$, удовлетворяет неравенствам (3,38). Действительно, рассматривая (3,32) как линейную неоднородную систему, используя результаты для неоднородных линейных параболических систем, найдем

$$u(x, t) = \int Z(t, t_1, x, \xi) u(\xi, t_1) d\xi +$$

$$+ \int_{t_1}^{t} d\tau \int Z(t, \tau, x, \xi) F(\tau, \xi, U(\xi, \tau)) d\xi .$$

Таким образом, для $u(x, t)$ получена система интегро-дифференциальных уравнений, для которой могут быть проведены предыдущие рассуждения, в результате чего получим неравенство $|D_x^m u(x, t)| \leqslant \frac{M^*}{(t-t_1)^{\frac{m}{2b}}} \times$ $\times e^{\kappa_1 |x|^q}$, из которого, в силу справедливости (3,37) для любого $t_1 > t_0$ и независимости M^* от t_1, следует наше утверждение. Таким образом, теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Петровский. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций, Бюлл. МГУ, секция А, I, вып. 7. (1938), 1—72.

2. И. Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными. Гостехиздат, 1953.

3. И. Н. Векуа. Новые методы решения эллиптических уравнений. М., 1948.

4. Я. Б. Лопатинский. Фундаментальные решения системы дифференциальных уравнений эллиптического типа. Укр. матем. журн., т. 3, в. 3, (1951), 290—316.

5. Я. Б. Лопатинский. Поведение решений линейной эллиптической системы в окрестности изолированной особой точки, ДАН СССР, т. 79, № 5 (1951).

6. С. Л. Соболев. Уравнения математической физики. Гостехиздат, 1954.

7. Л. Н. Слободецкий. О задаче Коши для неоднородных параболических систем. ДАН СССР, т. 101, № 5, (1955), 805—808.

8. С. Д. Эйдельман. О фундаментальных решениях параболических систем, Матем. сб. 38/80. (1956), 51—92.

9. С. Д. Эйдельман. Нормальные фундаментальные матрицы решений параболических систем, ДАН СССР, т. 110, № 4, (1956), 523—526.

10. С. Д. Эйдельман. Поведение решений уравнения теплопроводности к окрестности изолированной особой точки. Успехи математич. наук, т. 11, в. 3 (69), (1956), 207—210.

11. С. Д. Эйдельман. О методе фундаментальных решений в теории параболических систем (тезисы), Труды 3 Всесоюзн. математ. съезда, т. I (1956).

12. L. Schwartz. Theorie des distributions, t. I, Paris, 1957.

Работа поступила в марте 1957 г.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

Р. Я. СУНЧЕЛЕЕВ

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА

Изучение инвариантных свойств дифференциальных уравнений относительно групп преобразований дает возможность естественным путем получить методом разделения переменных Фурье некоторые известные результаты, и благодаря этому оказывается возможным явное решение некоторых граничных задач для областей, инвариантных относительно тех же групп преобразований.

«Общее» в некотором смысле представление решений инвариантных систем тесно связано с группой преобразований.

Решение граничной задачи для системы уравнений и области, инвариантных относительно данной группы преобразований, определяет такое «общее» представление решений системы, которое хорошо приспособлено для явного решения данной граничной задачи.

В настоящей статье даются явные решения основных граничных задач теории упругости для бесконечного изотропного цилиндра.

1. «ОБЩЕЕ» ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1) Известно, что система уравнений теории упругости для изотропной однородной среды

$$\begin{pmatrix} 1+\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sigma \end{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \\ 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} = 0 \quad (1)$$

является инвариантной системой относительно всех вращений и всех смещений в пространстве.

Здесь и далее приняты обозначения $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\sigma = \frac{\lambda+\mu}{\mu}$, где λ и μ — упругие постоянные, обозначенные по методу Ляме.

Так как система (1) и бесконечный цилиндр инвариантны относительно группы вращений вокруг оси цилиндра, и смещений вдоль ее, то «общее» представление решения системы (1) определяется этой группой.

Для определенности за ось цилиндра примем ось Ox_3.

2) В дальнейшем для простоты вычислений нам будет необходимо, как систему уравнений (1), так и соответствующие граничные условия подвергать преобразованиям. Определим эти преобразования.

Преобразованием (A) будем называть:

а) замену переменных по формулам

$$\left.\begin{aligned} X &= AY \\ U &= AV \end{aligned}\right\},$$

где

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix};$$

б) умножение слева системы, полученной после такой замены переменных, на матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразованием (B) будем называть:

а) замену переменных по формулам

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= re^{i\varphi} \\ y_2 &= re^{-i\varphi} \\ y_3 &= y_3 \end{aligned}\right\} V = T_\varphi W,$$

где

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

б) умножение слева системы, полученной после такой замены переменных, на матрицу

$$T_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) В системе (1) сделаем преобразование (A). Тогда вместо (1) получим систему:

$$\sum_{i,\,j=1} Q_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} = 0, \tag{2}$$

где

$$Q_{11} = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad Q_{22} = 2\begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad Q_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sigma \end{pmatrix},$$

$$Q_{12} = \begin{pmatrix} \sigma+2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma+2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, Q_{13} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma \\ \sigma & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_{23} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\sigma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix},$$

причем $Q_{ij} = Q_{ji}$.

Систему (2) подвергнем преобразованию (B), тогда вместо (2) получим систему:

$$\frac{1}{4}(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12})\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{1}{4r^2}(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12})\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \right.$$

$$\left. + 2iC_1 \frac{\partial W}{\partial \varphi} - C_1^2 W\right) - \frac{i}{2r}(Q_{11} - Q_{22})\left(iC_1 \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r\, \partial \varphi}\right) +$$

$$+ \frac{i}{2r^2}(Q_{11} - Q_{22})\left(iC_1 W + \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right) - \frac{1}{4r}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})\frac{\partial W}{\partial r} +$$

$$+ (Q_{13} + Q_{23})\frac{\partial^2 W}{\partial r\, \partial y_3} - \frac{i}{r}(Q_{13} - Q_{23})\left(iC_1 \frac{\partial W}{\partial y_3} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial y_3}\right) + Q_{33}\frac{\partial^2 W}{\partial y_3^2} = 0, \tag{3}$$

где

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Так как система инвариантна относительно группы вращений вокруг оси Ox_3 и смещений вдоль той же оси, будем искать решение системы среди функций, инвариантных относительно тех же преобразований.

Положим

$$W(r, \varphi, y_3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3} W^{(k)}(r, \alpha)\, d\alpha. \tag{4}$$

Подставляя значение $W(r, \varphi, y_3)$ из (4) в систему (3), получим обыкновенную систему уравнений

$$\frac{1}{2}Q_{12}\left[\frac{d^2 W^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW^{(k)}}{dr} - \frac{(Ek + C_1)^2}{r^2} W^{(k)}\right] + \frac{1}{4}Q_{11}\left[\frac{d^2 W^{(k)}}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dW^{(k)}}{dr} + \right.$$

$$+\frac{(Ek+C_1)^2}{r^2}W^{(k)}-\frac{2(Ek+C_1)}{r^2}W^{(k)}+\frac{2(Ek+C_1)}{r}\frac{dW^{(k)}}{dr}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{4}Q_{22}\left[\frac{d^2W^{(k)}}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dW^{(k)}}{dr}+\frac{(Ek+C_1)^2}{r^2}W^{(k)}+\frac{2(Ek+C_1)}{r^2}W^{(k)}-\right.$$

$$\left.-\frac{2(Ek+C_1)}{r}\frac{dW^{(k)}}{dr}\right]+iQ_{13}\alpha\left[\frac{dW^{(k)}}{dr}+\frac{(Ek+C_1)}{r}W^{(k)}\right]+$$

$$+iQ_{23}\alpha\left[\frac{dW^{(k)}}{dr}-\frac{(Ek+C_1)}{r}W^{(k)}\right]-\alpha^2Q_{33}W^{(k)}=0, \qquad (5)$$

где

$$(Ek+C_1)=\begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0\\ 0 & k-1 & 0\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}.$$

В развернутой форме эта система может быть записана в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sigma+2}{2}\left[\frac{d^2W_1^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_1^{(k)}}{dr}-\frac{(k+1)^2}{r^2}W_1^{(k)}\right]+\frac{\sigma}{2}\left[\frac{d^2W_2^{(k)}}{dr^2}-\right.\\
&\left.-\frac{(2k-1)}{r}\frac{dW_2^{(k)}}{dr}+\frac{k^2-1}{r^2}W_2^{(k)}\right]+i\alpha\sigma\left[\frac{dW_3^{(k)}}{dr}-\frac{k}{r}W_3^{(k)}\right]-\alpha^2W_1^{(k)}=0\\
&\frac{\sigma+2}{2}\left[\frac{d^2W_2^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_2^{(k)}}{dr}-\frac{(k-1)^2}{r^2}W_2^{(k)}\right]+\frac{\sigma}{2}\left[\frac{d^2W_1^{(k)}}{dr^2}+\frac{(2k+1)}{r}\times\right.\\
&\left.\times\frac{dW_1^{(k)}}{dr}+\frac{k^2-1}{r^2}W_1^{(k)}\right]+i\alpha\sigma\left[\frac{dW_3^{(k)}}{dr}+\frac{k}{r}W_3^{(k)}\right]-\alpha^2W_2^{(k)}=0\\
&\left[\frac{d^2W_3^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_3^{(k)}}{dr}-\frac{k^2}{r^2}W_3^{(k)}\right]+\frac{i\alpha\sigma}{2}\left[\frac{dW_1^{(k)}}{dr}+\frac{(k+1)}{r}W_1^{(k)}\right]+\\
&+\frac{i\alpha\sigma}{2}\left[\frac{dW_2^{(k)}}{dr}-\frac{(k-1)}{r}W_2^{(k)}\right]-(1+\sigma)\alpha^2W_3^{(k)}=0
\end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

В системе (6) можно сделать операторные разложения и записать ее так:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}\right)\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)W_1^{(k)}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}\right)\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)W_1^{(k)}+\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)W_2^{(k)}+2i\alpha W_3^{(k)}\right]=\alpha^2W_1^{(k)}\\
&\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)W_2^{(k)}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)W_1^{(k)}+\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)W_2^{(k)}+2i\alpha W_3^{(k)}\right]=\alpha^2W_2^{(k)}
\end{aligned}\right\} \qquad (6')$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2W_3^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_3^{(k)}}{dr}-\frac{k^2}{r^2}W_3^{(k)}+\frac{\sigma\alpha i}{2}\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)W_1^{(k)}+\right.\\&\left.+\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)W_2^{(k)}+2i\alpha W_3^{(k)}\right]=\alpha^2W_3^{(k)}\end{aligned}\right\}. \quad (6')$$

Обозначим

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)W_1^{(k)}+\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)W_2^{(k)}+2i\alpha W_3^{(k)}=Z. \quad (7)$$

Тогда система (6′) запишется в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}\right)\left[\left(\frac{d}{dr}-\frac{k+1}{r}\right)W_1^{(k)}+\frac{\sigma}{2}Z\right]=\alpha^2W_1^{(k)}\\&\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)\left[\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)W_2^{(k)}+\frac{\sigma}{2}Z\right]=\alpha^2W_2^{(k)}\\&\frac{d^2W_3^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_3^{(k)}}{dr}-\frac{k^2}{r^2}W_3^{(k)}+\frac{\sigma\alpha i}{2}Z=\alpha^2W_3^{(k)}\end{aligned}\right\}. \quad (8)$$

К первому уравнению из (8) применим оператор $\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)$, ко второму — $\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)$, третье уравнение умножим на $2i\alpha$ и сложим полученные равенства, тогда, имея в виду операторное тождество

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)\left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}\right)=\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{k^2}{r^2},$$

найдем

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{k^2}{r^2}\right)\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)W_1^{(k)}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)W_2^{(k)}+2i\alpha W_3^{(k)}+\sigma Z\right]-\sigma\alpha^2Z=\alpha^2Z.$$

Воспользовавшись равенством (7) и сокращая на $(1+\sigma)$, это выражение можно записать так:

$$\frac{d^2Z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dZ}{dr}-\frac{k^2}{r^2}Z=\alpha^2Z.$$

Известно, что решением данного уравнения является функция

$$Z=aI_k(i\alpha r)+bN_k(i\alpha r),$$

где $I_k(i\alpha r)$, $N_k(i\alpha r)$ — соответственно цилиндрические функции первого и второго рода.

Подставим значение Z в (8), тогда для определения функций $W_1^{(k)}$, $W_2^{(k)}$, $W_3^{(k)}$ получим систему уравнений:

$$\frac{d^2W_1^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_1^{(k)}}{dr}-\frac{(k+1)^2}{r^2}W_1^{(k)}-\alpha^2 W_1^{(k)}=$$

$$=\frac{i\alpha\sigma}{2}[a I_{k+1}(i\alpha r)+b N_{k+1}(i\alpha r)],$$

$$\frac{d^2W_2^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_2^{(k)}}{dr}-\frac{(k-1)^2}{r^2}W_2^{(k)}-\alpha^2 W_2^{(k)}=$$

$$=-\frac{i\alpha\sigma}{2}[a I_{k-1}(i\alpha r)+b N_{k-1}(i\alpha r)]$$

$$\frac{d^2W_3^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_3^{(k)}}{dr}-\frac{k^2}{r^2}W_3^{(k)}-\alpha^2 W_3^{(k)}=$$

$$=-\frac{i\alpha\sigma}{2}[a I_k(i\alpha r)+b N_k(i\alpha r).$$

Решениями этих неоднородных уравнений Бесселя являются функции:

$$W_1^{(k)}=c_1^{(k)}(\alpha)\,I_{k+1}(i\alpha r)+c_4^{(k)}(\alpha)\,N_{k+1}(i\alpha r)+$$

$$+\frac{\sigma i}{4\alpha}r\,[a(\alpha)\,I'_{k+1}(i\alpha r)+b(\alpha)\,N'_{k+1}(i\alpha r)],$$

$$W_2^{(k)}=c_2^{(k)}(\alpha)I_{k-1}(i\alpha r)+c_5^{(k)}(\alpha)\,N_{k-1}(i\alpha r)-$$

$$-\frac{\sigma i}{4\alpha}r\,[a(\alpha)\,I'_{k-1}(i\alpha r)+b(\alpha)\,N'_{k-1}(i\alpha r)],$$

$$W_3^{(k)}=c_3^{(k)}(\alpha)\,I_k(i\alpha r)+c_6^{(k)}(\alpha)\,N_k(i\alpha r)-$$

$$-\frac{\sigma i}{4\alpha}r\,[a(\alpha)\,I'_k(i\alpha r)+b(\alpha)\,N'_k(i\alpha r)],$$

где

$$I'_\nu(i\alpha r)=\frac{dI_\nu(i\alpha r)}{dr};\qquad N'_\nu(i\alpha r)=\frac{dN_\nu(i\alpha r)}{dr}.$$

Введем матричное обозначение

$$I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)=\begin{pmatrix} I_{k+1}(i\alpha r) & 0 & 0\\ 0 & I_{k-1}(i\alpha r) & 0\\ 0 & 0 & I_k(i\alpha r)\end{pmatrix}$$

и аналогичное для $N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)$.

Тогда $W^{(k)}$ матрицу-столбец решений можно записать в следующем виде:

$$W^{(k)}=I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\,C_1^{(k)}(\alpha)+N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\,C_2^{(k)}(\alpha)+$$

$$+\frac{\sigma i}{4\alpha} r\left[a(\alpha) I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)+b(\alpha) N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\right]\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Подставляя значение $W^{(k)}$ в равенство (4), получим

$$W(r,\varphi,y_3)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3}\Bigg\{ I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\, C_1^{(k)}(\alpha)+N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\, C_2^{(k)}(\alpha)+$$

$$+\frac{\sigma i}{4\alpha} r\left[a(\alpha) I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)+b(\alpha) N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\right]\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\Bigg\} d\alpha, \tag{9}$$

где

$$C_1^{(k)}(\alpha)=\begin{pmatrix}c_1^{(k)}\\c_2^{(k)}\\c_3^{(k)}\end{pmatrix} \qquad C_2^{(k)}(\alpha)=\begin{pmatrix}c_4^{(k)}\\c_5^{(k)}\\c_6^{(k)}\end{pmatrix}.$$

Между восемью постоянными $C_1^{(k)}(\alpha)$, $C_2^{(k)}(\alpha)$, $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ существуют две связи, определяемые равенством (7):

$$\begin{aligned} c_1^{(k)}-c_2^{(k)}+2c_3^{(k)}&=-\frac{a(\alpha)(\sigma+2)i}{2\alpha},\\ c_4^{(k)}-c_5^{(k)}+2c_6^{(k)}&=-\frac{b(\alpha)(\sigma+2)i}{2\alpha}. \end{aligned} \tag{10}$$

Подставим в (9) значение

$$a(\alpha)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=-\frac{2\alpha}{i(\sigma+2)}\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\-1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1^{(k)}\\c_2^{(k)}\\c_3^{(k)}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{2\alpha}{i(\sigma+2)} D\begin{pmatrix}c_1^{(k)}\\c_2^{(k)}\\c_3^{(k)}\end{pmatrix}$$

$$b(\alpha)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=-\frac{2\alpha}{i(\sigma+2)}\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\-1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_4^{(k)}\\c_5^{(k)}\\c_6^{(k)}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{2\alpha}{i(\sigma+2)} D\begin{pmatrix}c_4^{(k)}\\c_5^{(k)}\\c_6^{(k)}\end{pmatrix},$$

тогда „общее" представление решения системы будет иметь вид

$$W(r,\varphi,y_3)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3}\left\{\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]\times\right.$$

$$\left.\times C_1^{(k)}(\alpha)+\left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]C_2^{(k)}(\alpha)\right\}d\alpha. \quad (9')$$

2. РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА

Граничные задачи будем ставить для системы (3), полученной из (1) путем преобразования (A) и (B).

Очевидно, если задача ставится для системы (1), то граничные условия для системы (6) получаются из граничных условий системы (1) в результате преобразований (A) и (B).

Связь между U и W следующая:

$$U=AT_\varphi W; \qquad W=T_\varphi^{-1}A^{-1}U.$$

1) Найти решение $W(r,\varphi,y_3)$ системы (6), непрерывное и дважды непрерывно дифференцируемое внутри цилиндра $r<h$ и удовлетворяющее на поверхности цилиндра $r=h-0$ краевому условию

$$W(r,\varphi,y_3)\,|_{r=h-0}=f(\varphi,y_3), \quad (11)$$

где $f(\varphi,y_3)$ — дважды непрерывно дифференцируемая матрица-столбец функций.

Функцию $f(\varphi,y_3)$ разложим в ряд по φ и коэффициенты Фурье представим через интеграл Фурье

$$f(\varphi,y_3)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}f^{(k)}(y_3)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}^{(k)}(\alpha)e^{i\alpha y_3}d\alpha.$$

Тогда граничное условие перепишется так:

$$W(r,\varphi,y_3)\,|_{r=h-0}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}^{(k)}(\alpha)\,e^{i\alpha y_3}d\alpha.$$

В „общем" представлении решений (9') $C_2^{(k)}(\alpha)$ положим равным нулю, т. к. $N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)$ при $r=0$ имеет особенность

$$W(r,\varphi,y_3)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3}\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)-\right.$$

$$\left.-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]C_1^{(k)}(\alpha)\,d\alpha. \quad (12)$$

Приравнивая подинтегральные выражения в отдельных гармониках в (11) и в (12) при $r=h$ для определения трех неизвестных

$c_1^{(k)}(\alpha)$, $c_2^{(k)}(\alpha)$, $c_3^{(k)}(\alpha)$ получим три линейных уравнения, записанных в матричной форме так:

$$\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) - \frac{\sigma h}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha h)\, D \right] C_1^{(k)}(\alpha) = \bar{f}^{-(k)}(\alpha). \quad (13)$$

Решение этой системы представится в следующем виде:

$$C_1^{(k)}(\alpha) = \left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) - \frac{\sigma h}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) D \right]^{-1} \bar{f}^{-(k)}(\alpha). \quad (14)$$

Подставив значение $C_1^{(k)}(\alpha)$ из (14) в (12), получим решение поставленной задачи

$$W(r,\varphi,y_3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3} \left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} I^1_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) D \right] \times$$

$$\times \left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) - \frac{\sigma h}{2(\sigma+2)} I^1_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) D \right]^{-1} f^{-(k)}(\alpha)\, d\alpha. \quad (15)$$

2) В этом n° будет дано явное решение внешней краевой задачи для бесконечного цилиндра в следующей постановке.

Найти решение $W(r,\varphi,y_3)$ системы (6), непрерывное и дважды непрерывно дифференцируемое вне цилиндра $r > h$ и удовлетворяющее на поверхности цилиндра $r = h + 0$ краевому условию

$$W(r,\varphi,y_3)\,|_{r=h+0} = f(\varphi, y_3). \quad (16)$$

В этом случае в решении (9') положим $C_1^{(k)}(\alpha)$ равным нулю, т. к. $I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)$ имеет особенность при $r = \infty$

$$W(r,\varphi,y_3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3} \left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) D \right] C_2^{(k)}(\alpha)\, d\alpha.$$

После аналогичных вычислений найдем значение $C_2^{(k)}(\alpha)$

$$C_2^{(k)}(\alpha) = \left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) - \frac{\sigma h}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) D \right]^{-1} \bar{f}^{-(k)}(\alpha). \quad (17)$$

Решение внешней краевой задачи для бесконечного цилиндра следующее:

$$W(r,\varphi,y_3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3} \left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) D \right] \cdot \left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) - \right.$$

$$- \frac{\sigma h}{2(\sigma+2)} N^{1}_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) D \Big]^{-1} \overline{f}^{k}(\alpha)\, d\alpha. \tag{18}$$

Заметим, что матрицы

$$I_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) - \frac{\sigma h}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) D,$$

$$N_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) - \frac{\sigma h}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) D$$

неособенные и, следовательно, обратимы.

3) Рассмотрим решение граничной задачи для полого цилиндра (цилиндрического слоя), когда на внутренней и внешней поверхностях заданы смещения.

Пусть ширина цилиндрического слоя равна $r_2 - r_1 = 2h$.

Дадим решение задачи в следующей постановке.

Найти решение $W(r, \varphi, y_3)$ системы (6), непрерывное и дважды непрерывно дифференцируемое внутри цилиндрического слоя $r_2 - r_1 = 2h$, удовлетворяющее на внутренней поверхности $r = r_1 + 0$ граничному условию:

$$W(r, \varphi, y_3)\,|_{r=r_1+0} = f(\varphi, y_3) \tag{20}$$

и на внешней поверхности $r = r_2 - 0$ граничному условию

$$W(r, \varphi, y_3)\,|_{r=r_2-0} = \psi(\varphi, y_3), \tag{21}$$

где $f(\varphi, y_3)$, $\psi(\varphi, y_3)$ — дважды непрерывно дифференцируемые матрицы-столбцы функций.

Для решения задачи будем исходить из „общего" представления решения (9'). $f(\varphi, y_3)$, $\psi(\varphi, y_3)$ как и в 1), 2) представим соответствующими рядами.

Приравнивая подынтегральные выражения в отдельных гармониках при $r = r_1 + 0$ и $r = r_2 - 0$ в (9') и в разложениях $f(\varphi, y_3)$, $\psi(\varphi, y_3)$, для определения шести неизвестных $C_1^{(k)}(\alpha)$, $C_2^{(k)}(\alpha)$ получим шесть уравнений, записанных в матричной форме:

$$\left.\begin{aligned}
&\Big[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_1) - \frac{\sigma r_1}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_1) D \Big] C_1^{(k)}(\alpha) + \\
&+ \Big[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_1) - \frac{\sigma r_1}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_1) D \Big] C_2^{(k)}(\alpha) = \overline{f}^{(k)}(\alpha) \\
&\Big[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_2) - \frac{\sigma r_2}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_2) D \Big] C_1^{(k)}(\alpha) + \\
&+ \Big[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_2) - \frac{\sigma r_2}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_2) D \Big] C_2^{(k)}(\alpha) = \overline{\psi}^{(k)}(\alpha)
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Введем обозначения:

$$R_1(i\alpha r) = I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) D,$$

$$R_2(i\alpha r) = N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) D.$$

Решение системы (22) представится в следующем виде:

$$C_1^{(k)}(\alpha) = [R_2^{-1}(i\alpha r_1) R_1(i\alpha r_1) - R_2^{-1}(i\alpha r_2) R_1(i\alpha r_2)]^{-1} \times$$
$$\times [R_2^{-1}(i\alpha r_1) \overline{f}^{(k)}(\alpha) - R_2^{-1}(i\alpha r_2) \overline{\psi}^{(k)}(\alpha)]$$
$$C_2^{(k)}(\alpha) = [R_1^{-1}(i\alpha r_1) R_2(i\alpha r_1) - R_1^{-1}(i\alpha r_2) R_2(i\alpha r_2)]^{-1} \times$$
$$\times [R_1^{-1}(i\alpha r_1) \overline{f}^{(k)}(\alpha) - R_1^{-1}(i\alpha r_2) \overline{\psi}^{(k)}(\alpha)].$$

Решение поставленной задачи имеет вид

$$\left.\begin{aligned} W(r,\varphi,y_3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3} \{ R_1(i\alpha r) [R_2^{-1}(i\alpha r_1) R_1(i\alpha r_1) - \\ - R_2^{-1}(i\alpha r_2) R_1(i\alpha r_2)]^{-1} \cdot [R_2^{-1}(i\alpha r_1) \overline{f}^{(k)}(\alpha) - R_2^{-1}(i\alpha r_2) \overline{\psi}^{(k)}(\alpha)] + \\ + R_2(i\alpha r) [R_1^{-1}(i\alpha r_1) R_2(i\alpha r_1) - R_1^{-1}(i\alpha r_2) R_2(i\alpha r_2)] \times \\ \times [R_1^{-1}(i\alpha r_1) \overline{f}^{(k)}(\alpha) - R_1^{-1}(i\alpha r_2) \overline{\psi}^{(k)}(\alpha)] \} \, d\alpha \end{aligned}\right\}. \quad (23)$$

3. РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В этом параграфе будут рассмотрены решения граничных задач для бесконечного цилиндра при заданных напряжениях на границе.

1) Известно, что девять компонент напряжения для изотропного тела могут быть представлены в виде матрицы

$$X = \begin{pmatrix} X_{x_1}^{(1)} & X_{x_2}^{(1)} & X_{x_3}^{(1)} \\ X_{x_1}^{(2)} & X_{x_2}^{(2)} & X_{x_3}^{(2)} \\ X_{x_1}^{(3)} & X_{x_2}^{(3)} & X_{x_3}^{(3)} \end{pmatrix},$$

где

$$X_{x_i}^{(j)} = X_{x_j}^{(i)}.$$

Компоненты напряжения и смещения связаны соотношениями:

$$X_{x_1}^{(1)} = 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right),$$

$$X_{x_2}^{(2)} = 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right),$$

$$X_{x_3}^{(3)} = 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), \quad (24)$$

$$X_{x_3}^{(2)} = X_{x_2}^{(3)} = \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right),$$

$$X_{x_3}^{(1)} = X_{x_1}^{(3)} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right),$$

$$X_{x_2}^{(1)} = X_{x_1}^{(2)} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right),$$

здесь λ и μ имеют прежний смысл.

Направляющие косинусы внешней нормали к поверхности обозначим через $\nu_1 = \cos(nx_1)$, $\nu_2 = \cos(nx_2)$, $\nu_3 = \cos(nx_3)$. Изучим решение задачи, когда граничные условия будут задаваться на поверхности бесконечного цилиндра, поэтому $\nu_3 = 0$, а $\nu_1 = \cos\varphi$, $\nu_2 = \sin\varphi$, где φ — полярный угол.

Граничные условия второй краевой задачи для системы имеют следующий вид:

$$L(u) = X\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{x_1}^{(1)}\nu_1 + X_{x_2}^{(1)}\nu_2 \\ X_{x_1}^{(2)}\nu_1 + X_{x_2}^{(2)}\nu_2 \\ X_{x_1}^{(3)}\nu_1 + X_{x_2}^{(3)}\nu_2 \end{pmatrix}.$$

В развернутой матричной форме это запишется так:

$$L(u) = \begin{pmatrix} (2\mu+\lambda)\nu_1 & \mu\nu_2 & 0 \\ \lambda\nu_2 & \mu\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\nu_1 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} \mu\nu_2 & \lambda\nu_1 & 0 \\ \mu\nu_1 & (2\mu+\lambda)\nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\nu_2 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_2} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda\nu_1 \\ 0 & 0 & \lambda\nu_2 \\ \mu\nu_1 & \mu\nu_2 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x_3}. \tag{25}$$

Равенство (25) подвергнем преобразованию (A), тогда получим:

$$L_1(v) = \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ (\lambda+\mu)e^{-i\varphi} & 2\mu e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \mu e^{i\varphi} \end{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial y_1} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 2\mu e^{-i\varphi} & (\lambda+\mu)e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & (\lambda+\mu)e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \mu e^{-i\varphi} \end{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial y_2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda e^{i\varphi} \\ 0 & 0 & \lambda e^{-i\varphi} \\ \frac{\mu}{2}e^{-i\varphi} & \frac{\mu}{2}e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial v}{\partial y_3}. \tag{26}$$

Равенство (26) подвергнем преобразованию (B) и получим граничное условие для $W(r, \varphi, y_3)$

$$L_2(W) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0 \\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{1}{2r}\begin{pmatrix} \mu-\lambda & -(\lambda+\mu) & 0 \\ -(\lambda+\mu) & (\mu-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}W +$$

$$+\frac{i}{2r}\begin{pmatrix} \mu-\lambda & \lambda+\mu & 0 \\ -(\lambda+\mu) & -(\mu-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial W}{\partial \varphi}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial W}{\partial y_3}. \tag{27}$$

2) Найти решение $W(r, \varphi, y_3)$ системы (6), непрерывное и дважды непрерывно дифференцируемое внутри цилиндра $r<h$ и удовлетворяющее на поверхности цилиндра $r=h-0$ краевому условию

$$L_2(W)|_{r=h-0}=f(\varphi, y_3), \tag{28}$$

где $f(\varphi, y_3)$ — дважды непрерывно дифференцируемая матрица-столбец функций.

Функцию $f(\varphi, y_3)$ разложим в ряд по φ и коэффициенты представим через интеграл Фурье.

Тогда граничное условие (28) перепишется так:

$$L_2(W)|_{r=h-0}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}^{(k)}(\alpha)e^{i\alpha y_3}\,d\alpha. \tag{29}$$

В „общем“ представлении решений (9′) $C_2^{(k)}(\alpha)$ положим равным нулю, т. к. $N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)$ при $r=0$ имеет особенность.

Подставляя в $L_2(W)$ значение $W(r, \varphi, y_3)$ из (9′) при $C_2^{(k)}(\alpha)=0$ и приравнивая подынтегральные выражения в отдельных гармониках, получим

$$\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0 \\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{2r}\begin{pmatrix} (\mu-\lambda) & (\mu+\lambda) & 0 \\ -(\mu+\lambda) & -(\mu-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}(Ek+C_1)+\right.$$

$$\left.+i\alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\}\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right.$$

$$\left.\times I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]_{r=h-0} C_1^{(k)}(\alpha)=\bar{f}^{(k)}(\alpha). \tag{30}$$

Из этого равенства определяем матрицу $C_1^{(k)}(\alpha)$

$$C_1^{(k)}(\alpha)=\left\{\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0 \\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2r}\begin{pmatrix} (\mu-\lambda) & (\mu+\lambda) & 0 \\ -(\mu+\lambda) & -(\mu-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}(Ek+C_1)+i\alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0 \end{pmatrix}\right]\times$$

$$\times\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) D \right]_{|r=h-0} \Bigg\}^{-1} \overline{f}^{(k)}(\alpha) \tag{31}$$

Решение поставленной задачи дается формулой:

$$W(r,\varphi,y_3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3} \left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) D \right] \times$$

$$\times \Bigg\{ \Bigg[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0 \\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} (\mu-\lambda) & (\mu+\lambda) & 0 \\ -(\mu+\lambda) & -(\mu-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times$$

$$\times (Ek+C_1) + i\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0 \end{pmatrix} \Bigg] \Bigg[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} \times$$

$$\times I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) D \Bigg]_{|r=h-0} \Bigg\} \overline{f}^{(k)}(\alpha)\, d\alpha. \tag{32}$$

3) Найти решение $W(r,\varphi,y_3)$ системы (6), непрерывное и дважды непрерывно дифференцируемое вне цилиндра и удовлетворяющее на поверхности цилиндра $r = h + 0$ краевому условию

$$L_2(W)|_{r=h+0} = \psi(\varphi, y_3). \tag{33}$$

В „общем" представлении решений (9') $C_1^{(k)}(\alpha)$ положим равным нулю, т. к. $I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)$ при $r = \infty$ имеет особенность. После вычислений, аналогичных 2), решение поставленной задачи получим в следующем виде:

$$W(r,\varphi,y_3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3} \left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) D \right] \times$$

$$\times \Bigg\{ \Bigg[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0 \\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} (\mu-\lambda) & (\mu+\lambda) & 0 \\ -(\mu+\lambda) & -(\mu-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (Ek+C_1) +$$

$$+ i\alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0 \end{pmatrix} \Bigg] \cdot \Bigg[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} \times$$

$$\left.\left.\times N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]_{|r=h+0}\right\}^{-1}\overline{\psi}^{(k)}(\alpha)\,d\alpha. \tag{34}$$

4) Найти решение $W(r,\varphi,y_3)$ системы (6), непрерывное и дважды непрерывно дифференцируемое внутри цилиндрического слоя $r_2-r_1=2h$, удовлетворяющее на внутренней поверхности $r=r_1+0$ граничному условию

$$L_2(W)|_{r=r_1+0}=f(\varphi,y_3) \tag{35}$$

и на внешней поверхности $r=r_2-0$ граничному условию

$$L_2(W)|_{r=r_2-0}=\psi(\varphi,y_3), \tag{36}$$

$f(\varphi,y_3)$, $\psi(\varphi,y_3)$ — имеют прежний смысл.

Подставим в (35) и (36) значение $W(r,\varphi,y_3)$ из (9′) и, приравнивая подынтегральные выражения в отдельных гармониках при $r=r_1+0$ и $r=r_2-0$ и в разложениях $f(\varphi,y_3)$ и $\psi(\varphi,y_3)$, для определения шести неизвестных $C_1^{(k)}(\alpha)$, $C_2^{(k)}(\alpha)$ получим шесть уравнений, записанных в матричной форме:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0\\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0\\ 0 & 0 & 2\mu\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{2r}\begin{pmatrix}(\mu-\lambda) & (\mu+\lambda) & 0\\ -(\mu+\lambda) & -(\mu-\lambda) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\right.\\
&\left.\times(Ek+C_1)+i\alpha\begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda\\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0\end{pmatrix}\right\}\left\{\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right.\right.\\
&\left.\times I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]C_1^{(k)}(\alpha)+\left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right.\\
&\left.\left.\times N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]C_2^{(k)}(\alpha)\right\}_{|r=r_1+0}=\overline{f}^{(k)}(\alpha)\\
&\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0\\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0\\ 0 & 0 & 2\mu\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{2r}\begin{pmatrix}(\mu-\lambda) & (\mu+\lambda) & 0\\ -(\mu+\lambda) & -(\mu-\lambda) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\right.\\
&\left.\times(Ek+C_1)+i\alpha\begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda\\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0\end{pmatrix}\right\}\left\{\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right.\right.\\
&\left.\times I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]C_1^{(k)}(\alpha)+\left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right.
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$$\left.\left.\times N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]C_2^{(k)}(\alpha)\right\}_{|r=r_2-0} = \bar{\psi}^{(k)}(\alpha). \qquad (37)$$

Определив из (37) $C_1^{(k)}(\alpha)$, $C_2^{(k)}(\alpha)$ и подставив в (9′) их значения, получим решение задачи.

5) Рассмотрим решение задачи для бесконечного полого цилиндра с шириной слоя $r_2 - r_1 = 2h$, когда на внутренней поверхности $r = r_1 + 0$ будут заданы смещения, а на внешней поверхности $r = r_2 - 0$ — напряжения.

Решение задачи дается в следующей математической постановке.

Найти решение $W(r, \varphi, y_3)$ системы (6), непрерывное и дважды непрерывно дифференцируемое внутри цилиндрической полосы $r_2 - r_1 = 2h$, удовлетворяющее на внутренней поверхности $r = r_1 + 0$ граничному условию

$$W(r, \varphi, y_3)|_{r=r_1+0} = f(\varphi, y_3) \qquad (38)$$

и на внешней поверхности $r = r_2 - 0$ граничному условию

$$L_2(W)|_{r=r_2-0} = \psi(\varphi, y_3). \qquad (39)$$

После вычислений, аналогичных предыдущим, для определения шести неизвестных $C_1^{(k)}(\alpha)$, $C_2^{(k)}(\alpha)$ получим шесть алгебраических уравнений, записанных в матричной форме:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_1) - \frac{\sigma r_1}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_1)D\right]C_1^{(k)}(\alpha) + \\
&+\left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_1) - \frac{\sigma r_1}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_1)D\right]C_2^{(k)}(\alpha) = \bar{f}^{(k)}(\alpha) \\
&\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0 \\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{2r}\begin{pmatrix} (\mu-\lambda) & (\mu+\lambda) & 0 \\ -(\mu+\lambda) & -(\mu-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\times\right. \\
&\left.\times(Ek+C_1) + i\alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\}\left\{\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right.\right. \\
&\left.\times I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]C_1^{(k)}(\alpha) + \left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right. \\
&\left.\left.\times N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]C_2^{(k)}(\alpha)\right\}_{|r=r_2-0} = \bar{\psi}^{(k)}(\alpha).
\end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Определив из (40) $C_1^{(k)}(\alpha)$, $C_2^{(k)}(\alpha)$, подставим в (9′) их значения и найдем решение поставленной задачи.

Работа поступила в апреле 1957 г.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

М. Л. РАСУЛОВ

К ВЫЧЕТНОМУ МЕТОДУ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ

В этой статье дается формула (9), представляющая решение смешанных задач типа (1)—(3).

Данная формула удобна в одинаковой степени как для случая, когда спектральная задача (4)—(5) соответствует самосопряженному оператору, так и для случая, когда она не соответствует самосопряженному оператору.

Во втором параграфе приводятся примеры смешанных задач, охватываемых предлагаемым методом.

В третьем пункте параграфа 2 приводится пример, для которого решение соответствующей смешанной задачи путем замены вида (22) может быть сведено к решению задачи, для которой спектральная задача соответствует самосопряженному оператору. Этот пример показывает, что для подобных задач формула (9) позволяет получить решение рассматриваемой смешанной задачи без такого предварительного сведения к самосопряженному случаю.

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ, РАССМАТРИВАЕМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА, КОНТУРНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

Спектральная задача

Пусть X, Y суть пространства Банаха. Рассмотрим смешанную задачу нахождения решения u уравнения

$$\sum_{k=0}^{q} A_k \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = f(t) \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{k=0}^{q} B_k \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k (k = 0, \ldots, q-1), \tag{3}$$

где t — действительное переменное из $[0, T]$, $f(t)$ — при каждом $t \in [0, T]$ принадлежит пространству $X, \varphi_k \in X, u = u(t)$ — искомая функция со значениями из X, A_k — линейные отображения X в X, B_k — линейные отображения пространства X в $У$, причем A_k, B_k перестановочны с оператором дифференцирования по t.

Задачу нахождения решения уравнения

$$\sum_{k=0}^{q} \lambda^k A_k v = -\sum_{k=1}^{q} A_k(\lambda^{k-1}\varphi_0 + \ldots + \varphi_{k-1}) \tag{4}$$

при условии

$$\sum_{k=0}^{q} \lambda^k B_k v = 0 \tag{5}$$

будем называть спектральной задачей, соответствующей задаче (1)—(3).

В дальнейшем через $D(A)$ будет обозначаться область определения оператора A.

Представление формального решения

Пусть задача (4)—(5) определяет оператор R_λ, обладающий свойствами:

1) При $g \in \bigcap_{k=0}^{q} D(A_k R_\lambda) \bigcap_{k=0}^{q} D(B_k R_\lambda)$ имеют место соотношения

$$\sum_{k=0}^{q} \lambda^k A_k R_\lambda g = g, \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{q} \lambda^k B_k R_\lambda g = 0;$$

2) При $h \in \bigcap_{k=0}^{q} D(R_\lambda A_k) \bigcap_{k=0}^{q} D(B_k)$,

$$\sum_{k=0}^{q} \lambda^k B_k h = 0,$$

$$R_\lambda \sum_{k=0}^{q} \lambda^k A_k h = h. \tag{7}$$

3) R_λ есть аналитическая функция по λ на всей комплексной плоскости λ, за исключением некоторого дискретного множества значений, являющихся полюсами R_λ (эти значения составляют дискретную часть спектра) и конечного количества линий, составляющих непрерывную часть спектра.

4) Существует последовательность простых замкнутых расширяющихся контуров Γ_N (отношение mes Γ_N/r_N полагается ограниченным,

где r_N — расстояние ближайшей точки Γ_N от начала координат λ плоскости), не проходящих через полюсы R_λ, таких, что при $\varphi \in \prod_{k=0}^{q} D(R_\lambda A_k)$ имеет место

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{N\to\infty} \int_{\Gamma_N} \lambda^s d_\lambda R_\lambda A_k \varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } s < q-1,\ k \leqslant q-1, \\ \varphi & \text{при } s = q-1,\ k = q, \end{cases} \tag{8}$$

где равенство выполняется в смысле метрики пространства X и интеграл по Γ_N понимается в смысле главного значения по Коши.

На основании предположений 1) — 4) легко убедиться в том, что формальное решение задачи (1) — (3) представляется формулой

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{N\to\infty} \int_{\Gamma_N} e^{\lambda t} R_\lambda \left\{ \sum_{k=1}^{q} A_k(\lambda^{k-1}\varphi_0 + \ldots + \varphi_{k-1}) + \int_0^t e^{-\lambda\tau} f(\tau)\, d\tau \right\} d\lambda. \tag{9}$$

Это значит, что если операторы A_k, B_k можно вдвинуть под знаки предела и интеграла по Γ_N, то функция, определяемая формулой (9), представляет собой решение задачи (1) — (3).

Необходимо отметить, что при отсутствии непрерывной части спектра формулы (8) и (9) можно записать, соответственно, в виде:

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_k \int_{c_k} \lambda^s R_\lambda A_k \varphi\, d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } s < q-1,\ k \leqslant q-1, \\ \varphi & \text{при } s = q-1,\ k = q, \end{cases} \tag{8'}$$

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_k \int_{c_k} e^{\lambda t} R_\lambda \left\{ \sum_{k=0}^{q} A_k(\lambda^{k-1}\varphi_0 + \ldots + \varphi_{k-1}) + \int_0^t e^{-\lambda\tau} f(\tau)\, d\tau \right\} d\lambda, \tag{9'}$$

где c_k — замкнутый контур λ плоскости, содержащий внутри только один полюс λ_k подынтегральной функции, и сумма по k распространяется на все полюсы подынтегральной функции.

В этом случае легко доказывается, что в предположении справедливости формулы (8′), если $B_q = 0$ и если задача (1) — (3) имеет решение, оно представимо формулой (9′).

2. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

Очевидно, обоснование формул (9), (9′) в основном сводится к доказательству, соответственно, формул (8), (8′). Поэтому в данном параграфе приводятся некоторые примеры спектральных задач, для которых эти формулы имеют место.

Случай смешанной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений в одномерной области

Пусть, в частности, (1)—(3) есть смешанная задача для системы линейных дифференциальных уравнений в одномерной области рассматриваемых в гильбертовом пространстве L_2 $[a, b]$ функций с суммируемым квадратом на интервале $[a, b]$.

При этом рассмотрим случай, когда

$$A_k = \sum_{mk+l<p} A_{kl}(x)\frac{d^l}{dx^l},$$

$$B_k = \sum_{l=0}^{p-1}\left\{ P_{kl}\frac{d^l}{dx^l}\Big|_{x=a} + G_{kl}\frac{d^l}{dx^l}\Big|_{x=b}\right\},$$

где

1) m — произвольное натуральное число, такое, что $p = m\cdot q$, $A_{kl}(x)$ — квадратичные матрицы, непрерывные и непрерывно дифференцируемые до 2-го порядка при $mk+l=p$, до 1-го порядка при $mk+l=p-1$, $f(x, t)$, φ_{q-1} непрерывны, $\varphi_k(x)$ $(k=0, \ldots, q-2)$ непрерывно дифференцируемы до порядка p

$$|A_{qp}(x)| \neq 0 \qquad \text{при } a \leqslant x \leqslant b, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

2) Корни $\psi_1(x), \ldots, \psi_{np}(x)$ характеристического уравнения

$$|\Theta^p A_{0p}(x) + \Theta^{p-m} A_{q-1m}(x) + \ldots + \Theta^m A_{1(q-1)m}(x) - E| = 0$$

при $x \in [a, b]$ различны и отличны от нуля, как их аргументы так и аргументы их разностей не зависят от $x \in [a, b]$.

3) P_{kl}, Q_{kl} — постоянные квадратичные матрицы соответствующего размера, такие, что

$$\text{ранг}\left(\sum_{k=0}^{q} P_{k0}\lambda^{mk} \ldots \sum P_{kp-1}\lambda^{mk+p-1} \sum Q_{k0}\lambda^{mk} \ldots \sum Q_{kp-1}\lambda^{mk+p-1}\right) = np.$$

при достаточно больших λ.

4) Если $\Delta(\lambda)$ есть характеристический определитель функции Грина граничной задачи, получаемой из соответствующей спектральной задачи после замены $\lambda^{-l}\dfrac{d^l v}{dx^l} = w_l$, то, пользуясь асимптотическим представлением фундаментальной системы частных решений системы для w, $\Delta(\lambda)$ можно представить в виде

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n \cdot e^{\Sigma\lambda w_i'}\{[M_1]e^{m_1 c\lambda} + \ldots + [M_\sigma]e^{m_\sigma c\lambda}\},$$

где $m_1 < m_2 < \ldots < m_\sigma$, c — некоторое постоянное, $w_i = \int\limits_a^b \psi_i(x)\,dx$, $Re\,\lambda w_i' \geqslant 0$, $[M_i] \to M_i$ при $\lambda \to \infty$, M_i — постоянные, n — некоторое натуральное число.

Предполагается, что $M_1, M_2 \neq 0$. При условиях 1)—4) методом доказательства теорем 7, 8 из [1] подтверждается отсутствие непрерывной части спектра и справедливость соответствующих формул (8′), (9′) для достаточно гладких функций $\varphi_k(x), f(x, t)$.

Случай самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве

Пусть H есть гильбертово пространство, A_0 — самосопряженный оператор, определенный в H $(A_0^* = A_0)$. Пусть $A_0 - \mu E$ (E — единичный оператор) имеет резольвенту R_μ.

Известно, что $(R_\mu f, g)$ для любой пары элементов $f, g \in H$ есть аналитическая функция при всех комплексных значениях μ.

Если C_N есть последовательность расширяющихся прямоугольников, не проходящих через точки дискретной части спектра оператора A_0, с вершинами в точках $-a_N + i\tau$, $a_N + i\tau$, $a_N - i\tau$, $-a_N - i\tau$ $(\lim\limits_{N\to\infty} a_N = +\infty)$, то при любом постоянном $\tau > 0$ согласно полноте спектральной функции $E(\Delta)$ оператора A_0 [2] при $f \in H$ имеет место формула

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{N\to\infty} \int\limits_{C_N} R_\mu f \, d_\mu = E(\Delta\infty) f = f, \tag{10}$$

где (10) выполняется в смысле сильной сходимости операторов.

Полагая в (10) $\mu = \lambda^2$ и принимая во внимание четность $R_{\lambda^2} f$, как функции от λ, получим формулу

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\Gamma_N} R_{\lambda^2} f \cdot \lambda^s \, d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } s=0, \\ f & \text{при } s=1, \end{cases} \tag{11}$$

где Γ_N есть образ контура C_N при отображении $\mu = \lambda^2$.

Примечание. Очевидно, если оператор A_0 порождается граничной задачей для системы уравнений эллиптического типа в ограниченной области, то формула (18′) примет вид (8′) в силу отсутствия непрерывной части спектра.

Случай одной несамосопряженной задачи

Пусть имеем задачу нахождения решения уравнения

$$\Delta u + a_1(x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + a_3(x_3)\frac{\partial u}{\partial x_3} + (a(x) - \lambda^2) u = f(x) \tag{12}$$

в ограниченной области D точек $x = (x_1, x_2, x_3)$ с границей S, удовлетворяющей условиям Ляпунова, при краевом условии

$$u(y) = 0, \quad y \in S. \tag{13}$$

Пусть c_n есть замкнутый контур λ плоскости, окружающий только один полюс λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ функции Грина $G(x, y, \lambda^2)$ задачи (12)—(13).

Задача (12)—(13) при всяком регулярном λ имеет единственное решение $u(x, \lambda)$, определяемое формулой

$$u(x, \lambda) = \int_D G(x, y, \lambda^2) f(y)\, dy. \tag{14}$$

Преобразуем задачу (12)—(13) путем замены

$$u = \varrho(x) \cdot v, \tag{15}$$

где

$$\varrho(x) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_{x_{0i}}^{x_i} a_i(\xi_i)\, d\xi_i},$$

$a_i(\xi_i)$ предполагается достаточно гладкими в параллелепипеде $x_{0i} \leqslant x \leqslant x_{1i}\ (i=1, 2, 3)$, содержащем в себе область D. При замене (15) задача (12)—(13) преобразуется в задачу

$$\Delta v + \left(a(x) - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3} a_i^2(x) - \lambda^2 \right) v = \frac{f(x)}{\varrho(x)}, \tag{16}$$

$$v(y) = 0, \quad y \in S. \tag{17}$$

Обозначим через $G_1(x, y, \lambda^2)$ функцию Грина задачи (16)—(17). Как видно из (15) $G_1(x, y, \lambda^2)$ имеет те же полюсы, что и $G(x, y, \lambda^2)$. Очевидно, согласно (14) и (15) имеем

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_n \int_{C_n} \lambda^s d\lambda \int_D G(x, y, \lambda^2) f(y)\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_n \int_{C_n} \lambda^s d\lambda \cdot \varrho(x) \cdot \int_D G_1(x, y, \lambda^2) \frac{f(y)}{\varrho(y)}\, dy =$$

$$= -\frac{\varrho(x)}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_n \int_{C_n} \lambda^s d\lambda \int_D G_1(x, y, \lambda^2) \frac{f(y)}{\varrho(y)}\, dy, \tag{18}$$

где сумма по n распространена на все полюсы $G(x, y, \lambda^2)$ и, следовательно, сумма в правой части (18) на все полюсы $G_1(x, y, \lambda^2)$.

В силу самосопряженности задачи (16)—(17) согласно формуле (11) при $f(x) \in L_2(D)$ будем иметь

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_n \int_{C_n} \lambda^s d\lambda \int_D G_1(x, y, \lambda^2) \frac{f(y)}{\varrho(y)}\, dy = \begin{cases} 0 & \text{при } s=0, \\ \frac{f(x)}{\rho(x)} & \text{при } s=1. \end{cases}$$

Подстановка этого в (18) дает

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_n \int_{C_N} \lambda^s d\lambda \cdot \int_D G(x, y, \lambda^2) f(y)\, dy = \begin{cases} 0 & \text{при } s=0\,^{*} \\ f(x) & \text{при } s=1. \end{cases}$$

---

* Эта формула справедлива также для первой и второй краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Расулов. Исследование вычетного метода решения некоторых смешанных задач для дифференциальных уравнений, Мат. сб., т. 30 (72), 3 (1952).

2. А. И. Плеснер. Спектральная теория операторов, I, УМН, вып. IX, (1941).

Работа поступила в феврале 1957 г.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

Г. Я. ПОПОВ

ВДАВЛИВАНИЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ШТАМПА В УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

1. Если на граничную плоскость (XOY) упругого полупространства $(z \geqslant 0)$ с упругими характеристиками E, ν действует вертикальная нагрузка интенсивности $p(x, y)$, то соответствующие смещения $w(x, y)$ точек граничной плоскости определяются по формуле:

$$w(x, y) = \frac{\vartheta}{2} \iint\limits_{\Sigma} \frac{p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \tag{1,0}$$

где

$$\vartheta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}.$$

Для частного случая

$$p(x, y) = \varphi(x) \cos \lambda y, \quad -\infty < x, y < \infty,$$
$$\varphi(x) \equiv 0 \text{ при } x < 0.$$

Из (1,0) найдем

$$w(x, y) = w_0(x) \cos \lambda y, -\infty < y, x < \infty, \tag{1,2}$$

где

$$w_0(x) = \vartheta \int\limits_0^{\infty} K_0(\lambda |x - \xi|) \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{1,3}$$

Здесь $K_0(x)$ — функция Макдональда, которую можно найти так:

$$K_0(\lambda a) = \int\limits_0^{\infty} \frac{\cos \tau a\, d\tau}{\sqrt{\lambda^2 + \tau^2}}. \tag{1,4}$$

Нашей задачей является определение напряжений

$$p(x, y) = \varphi(x) \cos \lambda y \quad (x \geqslant 0) \tag{1,5}$$

по контакту штампа, поверхность основания которого задана в виде (1,2) с упругим полупространством по всей полуплоскости $x \geqslant 0$, а также определение вертикальных смещений граничной плоскости (XOY) упругого полупространства $(z \geqslant 0)$ вне зоны контакта:

$$w(x, y) = \frac{1}{\vartheta} \psi(x) \cos \lambda y, \quad (x \leqslant 0). \tag{1,5'}$$

Очевидно, после этого, пользуясь разложением в интеграл Фурье, нетрудно будет получить соответствующие формулы и для более общих случаев.

Поставленная задача сводится к решению уравнения:

$$\int_0^\infty K_0(\lambda |x-\xi|) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad (x \geqslant 0) \tag{1,6}$$

с заданной правой частью $f(x) = w_0(x)/\vartheta, x \geqslant 0$ и к последующему определению функции $\psi(x) = w_0(x), x < 0$ из равенства

$$\psi(x) = \int_0^\infty K_0(\lambda |x-\xi|) \varphi(\xi) d\xi, \quad x < 0. \tag{1,7}$$

Соответствующее интегральное уравнение 2-го рода

$$\varphi(x) + \mu \int_0^\infty K_0(\lambda |x-\xi|) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad x \geqslant 0 \tag{1,8}$$

впервые было решено В. А. Фоком[1] [2] на основе разработанной им общей методики [1] решения интегральных уравнений вида:

$$\varphi(x) + \int_0^\infty k(x-\xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad x \geqslant 0, \tag{1,9}$$

где $k(x)$—четная экспоненциально убывающая $(k(x)) = 0(e^{-a|x|})$ функция.[2]

В частности, обобщая один результат Е. Хопфа, В. А. Фок, показал, что при условии

$$1 + K(w) \neq 0 \quad (-\infty < w < \infty), K(w) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{iwx} dx$$

---

[1] Если бы мы приняли гипотезу, выдвинутую И. Я. Штаерманом, которая заключается в учете микроструктуры поверхности контактируемых тел (см. его монографию [3]), то сформулированная нами выше контактная задача свелась бы к уравнению (1,8).

[2] При значительно более общих предположениях относительно функций $k(x)$ и $f(x)$ теория уравнений (1,9) разработана М. Г. Крейном [5].

решение уравнения (1,9) для специальной правой части $f(x)=e^{i\xi x}$, $Im\,\xi \geqslant 0$ находится по формуле:

$$\Phi(w)=\int_0^{\infty} e^{iwx}\varphi(x)\,dx = i\,\frac{\Psi_1(w)\Psi_1(\xi)}{w+\xi}, \tag{1,10}$$

где $\Psi_1(w)$ определяется из того условия, что она регулярна в верхней полуплоскости, отлична там от нуля, удовлетворяет условию:

$$[1+K(w)]^{-1}=\Psi_1(w)\Psi_1(-w), \quad (-\infty<w<\infty) \tag{1,11}$$

и имеет определенное поведение на бесконечности.

В данной статье будет получено решение уравнения (1,6) путем формального переноса формулы Хопфа — Фока (1,10) на интегральные уравнения 1-го рода с последующей проверкой правильности результата.[1]

2. Решать уравнение (1,6) будем для специальной правой части:

$$f(x)=Ae^{-i\omega x}, \quad x\geqslant 0, \tag{2,0}$$

после чего нетрудно будет получить решение и для более общих случаев. Для определенности мы будем считать, что $Im\omega \geqslant 0$.

Мы можем также считать, что

$$f(x)\equiv 0,\ \varphi(x)\equiv 0 \text{ при } x<0, \quad \psi(x)\equiv 0 \text{ при } x>0 \tag{2,1}$$

Далее, пользуясь соотношением [4, стр. 268]

$$\int_0^{\infty} K_0(\lambda|x|)\cos\alpha x\,dx=\frac{\pi}{2}(\alpha^2+\lambda^2)^{-1/2}, \tag{2,2}$$

находим преобразование Фурье $L(w)$ ядра разбираемого интегрального уравнения (1,6):

$$L(w)=\int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda|x|)\,e^{iwx}dx=\pi(w^2+\lambda^2)^{-1/2} \tag{2,3}$$

Ищем теперь функцию $\Psi(w)$ (ср. формулу (1,11), которая должна удовлетворять соотношению

$$[L(w)]^{-1}=\pi^{-1}\sqrt{w^2+\lambda^2}=\Psi_1(w)\Psi_1(-w). \tag{2,4}$$

---

[1] Попытка найти решение уравнения (1,6) из решения уравнения (1,8), полученного В. А. Фоком, путем соответствующего предельного перехода не привела нас к цели. Метод, примененный нами, помимо своей эффективности, позволил также избавиться от ограничения, накладываемого В. А. Фоком на $f(x)$ ($|f(x)|=0(1)$ при $x\to\infty$). Мы получим решение, предполагая $|f(x)|=0(e^{a|x|})$ при $x\to\infty$, где $a<\lambda$.

Единица в формуле (2,4) отброшена из тех соображений, что (1,11) применяется к интегральному уравнению 1-го рода. От функции $\Psi_1(w)$ требуем, как это делается при решении интегральных уравнений 2-го рода, чтобы она была регулярна в верхней полуплоскости и отлична там от нуля.

Можно убедиться, что такому требованию, а также и соотношению (2,4) удовлетворяет функция

$$\Psi_1(w) = (\pi i)^{-1/2} \sqrt{w + i\lambda}. \tag{2,5}$$

Если предположить, что формула Хопфа—Фока (1,10) остается справедливой и для уравнений 1-го рода и даже при $Im\xi < 0$, то преобразование Фурье искомой функции, учитывая (2,0), (2,10), (2,5), будет:

$$\Phi(w) = \int\limits_0^\infty e^{iwx} \varphi(x)\, dx = \frac{Ai}{\pi} \frac{\sqrt{w+i\lambda}\ \sqrt{\omega - i\lambda}}{w - \omega}. \tag{2,6}$$

Тогда решение интегрального уравнения (1,6) при (2,0) будет найдено путем обращения преобразования Фурье [6, стр. 12]

$$\varphi(x) = \frac{A\sqrt{\omega - i\lambda}}{\pi} \cdot \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{ai-\infty}^{ai+\infty} \frac{\sqrt{w+i\lambda}}{w-\omega} e^{-iwx} dw. \tag{2,7}$$

Теперь докажем, что при условии

$$Im\,\omega < a < \lambda \tag{2,8}$$

функция, взятая в виде (2,7), действительно дает решение уравнения (1,6) при (2,0). Для этого нужно доказать предварительно, что выражение (2,7) имеет смысл, т. е. доказать сходимость фигурирующего там интеграла, что будет сделано ниже.

Там же мы выразим упомянутый интеграл в виде интеграла от элементарных функций. Остается показать теперь, что функция (2,7) действительно удовлетворяет уравнению (1,6) при (2,0). Для этого, учитывая (2,9), вставляем (2,7) в (1,6):

$$\frac{iA}{2\pi^2} \sqrt{\omega - i\lambda} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda|x-\xi|)\, d\xi \int\limits_{ai-\infty}^{ai+\infty} \frac{\sqrt{w+i\lambda}}{w-\omega} e^{iw\xi} dw. \tag{2,10}$$

Поменяв затем порядок интегрирования в выражении (2,10) и сделав замену $x - \xi = t$, получим:

$$\frac{iA\sqrt{\omega - i\lambda}}{2\pi^2} \int\limits_{ai-\infty}^{ai+\infty} \frac{\sqrt{w+i\lambda}}{w-\omega} e^{-iwx} dw \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda|t|)\, e^{itw}\, dt. \tag{2,11}$$

С учетом (2,8) и (2,1) выражение (2,11) перепишется так:

$$\frac{Ai}{2\pi} \sqrt{\omega - \lambda i} \int\limits_{ai-\infty}^{ai+\infty} \frac{e^{-ixw}\ \ dw}{\sqrt{w - \lambda i}\ (w-\omega)} = Ae^{-ix\omega}, \quad x > 0 \tag{2,12}$$

Последнее следует из формулы Коши и леммы Жордана. Равенство (2,12) доказывает, что функция (2,7) действительно является решением (1,6).

Представляет интерес получить выражение для $\psi(x)$ в более простом и удобном виде, чем в (1,7).

Для этого умножим (1,6) на e^{iwx}, проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$ с учетом (1,7) и (2,1):

$$L(w)\,\Phi(w) = A\int\limits_0^{\infty} e^{iwx}\,e^{i\omega x}\,dx + \int\limits_{-\infty}^{0} \psi(x)\,e^{iwx}\,dx.$$

Учитывая (2,3), (2,6), а также равенство

$$\int\limits_0^{-\infty} e^{iwx}\,e^{-i\omega x}\,dx = \frac{Ai}{w-\omega}, \quad Imw > Im\omega,$$

найдем

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \psi(x)\,e^{iwx}\,dx = \frac{Ai}{w-\omega}\left(\sqrt{\frac{\omega-i\lambda}{w-i\lambda}} - 1\right)$$

и путем обращения [6, стр. 12] получим

$$\psi(x) = \frac{Ai}{2\pi}\int\limits_{-b-i\infty}^{-b+i\infty}\left(\sqrt{\frac{\omega-i\lambda}{w-i\lambda}} - 1\right)\frac{1}{w-\omega}\,e^{-iwx}\,dw, \quad b>0. \quad (2,13)$$

3. Займемся преобразованием выражений (2,7) и (2,13).

Для преобразования, например, формулы (2,7) рассмотрим контурный интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\sqrt{z+\lambda i}}{z-\omega}\,e^{-izx}\,dz. \quad (3,0)$$

Контур C показан на рис. 1.

На основании формулы Коши будем иметь:

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{C_{Rn}} + \int\limits_{C'} + \int\limits_{C_{R\wedge}} + \int\limits_{C_i'} + \int\limits_{C_r} + \int\limits_{C_i''}\right)\frac{\sqrt{z+\lambda i}}{z-\omega}\,e^{-izx}\,dz =$$

$$= \sqrt{\omega+\lambda i}\,e^{-i\omega x}, \quad x>0. \quad (3,1)$$

По лемме Жордана при $R\to\infty$ интегралы по контурам C_{Rn} и $C_{R\wedge}$ стремятся к нулю. Непосредственно проверяется, что интеграл по контуру C_r при $r\to 0$ тоже стремится к нулю.

Сумма интегралов вдоль мнимой оси C_i' и C_i'' приводится к интегралу:

$$-\frac{i\sqrt{i}}{\pi}\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{\sqrt{s-\lambda}}{\omega+is}\,e^{-xs}\,ds = -\frac{\sqrt{i}}{\pi}\,e^{-\lambda x}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sqrt{\tau}}{\lambda-\omega i+\tau}\,e^{-\tau x}\,d\tau, \quad x>0.$$

Таким образом, при $R \to \infty$ и $r \to 0$ (3,1) дает:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ai-\infty}^{ai+\infty}\frac{\sqrt{w+\lambda i}}{w-\omega}e^{-iwx}\,dw = \sqrt{\omega+\lambda i}\,e^{-i\omega x} +$$

$$+\frac{\sqrt{i}}{\pi}e^{-\lambda x}\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{\tau}\,e^{-x\tau}}{\lambda-\omega i+\tau}\,d\tau,\quad x>0. \tag{3,2}$$

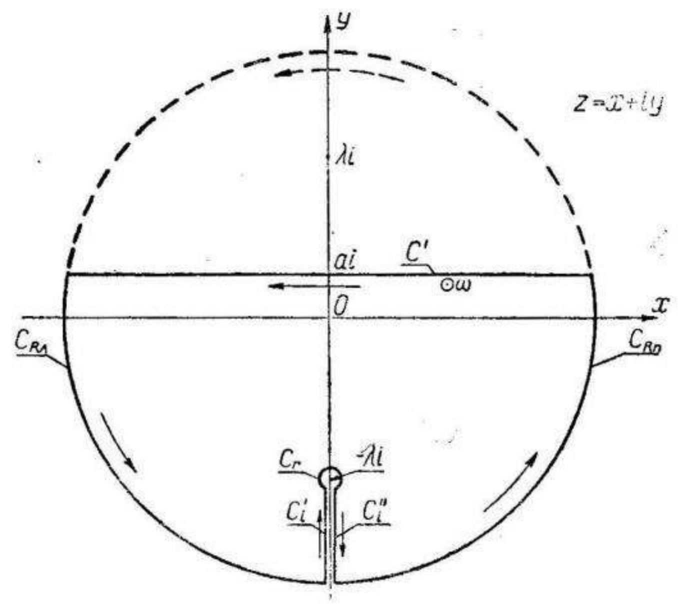

Рис. 1.

Если теперь ввести обозначения:

$$\varkappa = \lambda + \omega i,\quad \bar{\varkappa} = \lambda - \omega i \tag{3,3}$$

и в последнем интегральном члене сделать замену $\tau = \bar{\varkappa}t$, а затем подставить (3,2) в (2,7), мы получим окончательно:

$$\varphi(x) = \frac{A\sqrt{\omega^2+\lambda^2}}{\pi}\left\{e^{-i\omega x} + \frac{e^{-x\lambda}}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\sqrt{t}}{1+t}\,e^{-\bar{\varkappa}xt}\,dt\right\},\quad x \geqslant 0. \tag{3,4}$$

Для преобразования формулы (2,13) нужно рассмотреть такой контурный интеграл:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\left(\sqrt{\frac{\omega-\lambda i}{z-\lambda i}}-1\right)\frac{e^{-ixz}}{z-\omega}\,dz,\quad x<0.$$

Контур C_1 показан на рис. 2.

Повторяя теперь все действия, которые привели от формулы (2,7) к формуле (3,4), из формулы (2,13) получим:

$$\psi(x) = \frac{A}{\pi} e^{-|x|\lambda} \int_0^\infty \frac{e^{-\varkappa|x|t}}{1+t} \frac{dt}{\sqrt{t}}, \quad x \leqslant 0. \tag{3,5}$$

Выделим особенность в (3,4) и избавимся от несобственных интегралов, фигурирующих в формулах (3,5) и (3,4).

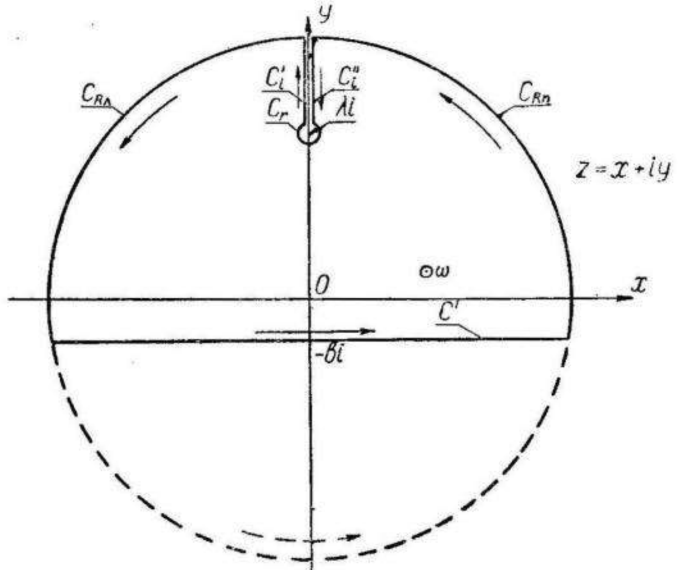

Рис. 2.

Для этого рассмотрим интеграл

$$I(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{1+t} \frac{dt}{\sqrt{t}}. \tag{3,6}$$

Нетрудно видеть, что

$$I'(z) = -\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{1+t} e^{-zt}\, dt. \tag{3,7}$$

Введем в рассмотрение

$$J(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-zt}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}\, z^{-1/2}. \tag{3,8}$$

Тогда

$$I'(z) + J(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \left[\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{\sqrt{t}}{1+t}\right] dt = I(z).$$

И, следовательно,

$$I'(z) - I(z) = -\sqrt{\pi}\, z^{-1/2}. \tag{3,9}$$

Непосредственно подстановкой можно убедиться, что решением уравнения (3,9) будет

$$I(z) = \sqrt{\pi}\, e^z \left(C - \int_0^z z^{-1/2} e^{-z}\, dz \right), \tag{3,10}$$

где C — произвольная постоянная, которую определим следующим образом.

Из (3,6) следует, что

$$I(0) = \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)\sqrt{t}} = \pi. \tag{3,11}$$

Тогда из (3,10) и (3,11) найдем $C = \sqrt{\pi}$.

Таким образом,

$$I(z) = \sqrt{\pi}\, e^z \left(\sqrt{\pi} - \int_0^z z^{-1/2} e^{-z}\, dz \right). \tag{3,12}$$

Пользуясь соотношением [4, стр. 164]

$$\int_0^u \frac{e^{-qx}}{\sqrt{qx}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{q}}\, \Phi(\sqrt{qu}), \tag{3,13}$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности, можем (3,12) переписать и так:

$$I(z) = \pi e^z [1 - \Phi(\sqrt{z})]. \tag{3,14}$$

Из (3,9) и (3,14) следует, что

$$-I'(z) = \sqrt{\pi}\, z^{-1/2} - \pi e^z [1 - \Phi\sqrt{z}]. \tag{3,15}$$

Теперь, пользуясь формулами (3,14), (3,15) и (3,6), (3,7), легко получим из (3,4) и (3,5) решение интегрального уравнения (1,6) в наиболее простом и удобном виде:

$$\varphi(x) = \frac{A\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}}{\pi} [(\pi\varkappa x)^{-1/2} e^{-x\lambda} + e^{-i\omega x} \Phi(\sqrt{x\varkappa})], \quad x \geqslant 0. \tag{3,16}$$

$$\psi(x) = A e^{i\omega|x|} [1 - \Phi\sqrt{(x)\varkappa}], \quad x \leqslant 0. \tag{3,17}$$

Заметим, что из (3,13) и (3,8) следует:

$$\Phi(\infty) = 1, \quad \Phi(0) = 0. \tag{3,18}$$

Итак, подводя итог сказанному в § 1, 2 и 3, можем сформулировать предложение.

Если поверхность основания полубесконечного штампа, вдавливаемого в упругое полупространство, задана формулой

$$w(x, y) = A \cos \lambda y\, e^{-i\omega x}, -\infty < y < \infty, 0 \leqslant x < \infty,$$

то распределение напряжений по поверхности контакта будет определяться по формулам (1,5) и (3,16).

Прогибы граничной плоскости полупространства вне зоны контакта определяются по формулам (1,5') и (3,17).

Можно заметить из (3,18), (3,17), (1,7) и (2,0), что в этом случае прогибы поверхности упругого полупространства $w(x, y)$, $-\infty<x, y<\infty$ являются функцией, непрерывной по x и по y всюду при $-\infty<x, y<\infty$, причем при $x\to-\infty$ функция $w(x, y)\to 0$ равномерна относительно y.

Можно также заметить, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi\varphi(x)}{A\sqrt{\omega^2+\lambda^2}\,e^{-i\omega x}}=1\,.$$

Формулы еще более упрощаются, если поверхность основания полубесконечного штампа задана выражением:

$$w(x, y)=A\cos\lambda x,\quad -\infty<y<\infty,\quad 0\leqslant x<\infty\,.$$

В этом случае

$$\varphi(x)=\frac{A}{\pi}\lambda\{(\pi\lambda x)^{-1/2}e^{-x\lambda}+\Phi(\sqrt{x\lambda})\},\quad x\geqslant 0,\tag{3,19}$$

$$\psi(x)=A[1-\Phi(\sqrt{\lambda|x|})],\quad x\leqslant 0\,.\tag{3,20}$$

Если же

$$w(x, y)=A\cos\lambda y\cos px,\quad -\infty<y<\infty,\quad x\geqslant 0,\tag{3,21}$$

то

$$\varphi(x)=\frac{A}{\pi}\sqrt{p^2+\lambda^2}\left\{\cos px+\frac{e^{-x\lambda}}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sqrt{t}}{1+t}e^{-x\lambda t}\cos pxt\,dt\right\},\ x\geqslant 0,\tag{3,22}$$

$$\psi(x)=\frac{A}{\pi}e^{-|x|\lambda}\int_0^\infty\frac{e^{-|x|\lambda t}}{1+t}\,\frac{\cos pxt}{\sqrt{t}}\,dt,\quad x\leqslant 0.\tag{3,23}$$

В силу линейности интегрального уравнения (1,6), исходя из формул (3,16) и (3,17), или из формул (3,22) (3,23), если это окажется более удобным, можно получить распределение напряжений по контуру и смещения вне контакта для широкого класса полубесконечных штампов. При этом нужно воспользоваться разложением в интеграл Фурье.

Для примера остановимся на штампе с основанием

$$w(x, y)=A\cos\lambda y\,J_0(\mu x),\quad -\infty<y<\infty,\quad x\geqslant 0\,.\tag{3,24}$$

Пользуясь представлением функции Бесселя

$$J_0(\mu x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\mu\frac{\cos px}{\sqrt{\mu^2-p^2}}\,dp.\tag{3,25}$$

Из формул (3,22) и (3,23) найдем

$$\varphi(x)=2A\left\{\int_0^1\left(\frac{\mu^2t^2+\lambda^2}{1-t^2}\right)^{-1/2}\cos\mu t\,x\,dt+\right.$$

$$+\frac{e^{-x\lambda}}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{1+t}J_0(\mu t x)\,dt\Bigg\},\quad x\geqslant 0, \tag{3,26}$$

$$\psi(x)=A\pi e^{-|x|\lambda}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-|x|\lambda t}}{1+t}\,\frac{J_0(\mu t x)}{\sqrt{t}}\,dt,\quad x\leqslant 0. \tag{3,27}$$

Если в этих формулах устремить $\lambda\to 0$, то, очевидно, мы перейдем от пространственной задачи к плоской.

Формулы (3,26) и (3,27) тогда примут следующий вид:

$$\varphi(x)=2A\left\{\mu\int\limits_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\cos\mu t x\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{1+t}J_0(\mu t x)\,dt\right\},\ x\geqslant 0, \tag{3,28}$$

$$\psi(x)=A\pi\int\limits_0^\infty \frac{J_0(\mu t x)}{1+t}\,\frac{dt}{\sqrt{t}},\quad x\leqslant 0. \tag{3,29}$$

Выделим слабо сходящуюся часть интеграла, входящего в (3,28). Для этого рассмотрим сумму

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{1+t}J_0(\mu t x)+\int\limits_0^\infty \frac{J_0(\mu t x)}{(1+t)\sqrt{t}}\,dt=\int\limits_0^\infty \frac{J_0(\mu t x)}{\sqrt{t}}\,dt. \tag{3,30}$$

Последний интеграл известен [4, стр. 259]

$$\int\limits_0^\infty \frac{J_0(\mu t x)}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{\Gamma(^1/_4)}{\Gamma(^3/_4)}\,\frac{1}{\sqrt{2\mu x}}. \tag{3,31}$$

Тогда будем иметь

$$\varphi(x)=2A\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(^1/_4)}{\Gamma(^3/_4)}\,\frac{1}{\sqrt{2\mu x}}+\mu\int\limits_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\cos\mu t x\,dt-\frac{1}{2\pi}\,\psi(x)\right\}. \tag{3,32}$$

Таким образом, формула (3,32) определяет напряжение по контакту при вдавливании в упругую полуплоскость полубесконечного штампа с основанием:

$$w_0(x)=A\,J_0(\mu x),\quad 0\leqslant x<\infty.$$

Формула (3,29) дает вертикальные смещения края полуплоскости вне зоны контакта.

Следовательно, формулы (3,32) и (3,29) доставляют решение интегрального уравнения плоской контактной задачи теории упругости [3]:

$$\int\limits_0^\infty \ln\frac{1}{(x-\xi)}\,\varphi(\xi)\,d\xi=A\,J_0(\mu x),\quad x>0. \tag{3,33}$$

Если правая часть (3,33) — произвольная функция, то решение уравнения (3,33) в этом случае можно получить, разлагая эту функцию в интеграл Фурье—Бесселя.

В заключение автор выражает сердечную признательность М. Г. Крейну[1] за внимание к этой заметке и за те ценные указания, которые он сделал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Мат. сб., т. 14 (56) в 1—2, 1944.
2. Исследования по распространению радиоволн. Сборник 2, 1948.
3. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости, 1949.
4. Рыжик И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов. 1951.
5. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. УМН, вып. 5, 1958.
6. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. 1949.
7. Ватсон Г. Теория Бесселевых функций, ч. I, 1949.
8. Copson E. „On an integral equation arising in the theory of Diffraction" The quar. J. of mathematics, Vol. 17, № 65, 1946.

[1] М. Г. Крейн обратил внимание на работу Копсона [8], в которой решается интегральное уравнение 1-го рода с ядром $H_0^{(2)}(k\,|\,x-\xi\,|)$, где $H_0^{(2)}x$—функция Ганкеля, а k — некоторый комплексный параметр. При чисто мнимом значении параметра k функция $H_0^{(2)}(x)$ переходит в функцию Макдональда. Однако из результатов Копсона непосредственно не следуют результаты настоящей статьи ввиду того, что этот автор рассматривал свое интегральное уравнение при более специальной правой части. Укажем также, что метод, изложенный в настоящей статье, быстрее приводит к цели, нежели метод Копсона, и с успехом может быть применен и к его задаче.

Работа поступила в марте 1957 г.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

М. П. ШЕРЕМЕТЬЕВ, Н. П. ФЛЕЙШМАН

НЕКОТОРЫЕ ИНВАРИАНТЫ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

I. ВЫВОД ИНВАРИАНТОВ

Пусть S — поверхность раздела двух спаянных между собой анизотропных тел из разных материалов, нагруженных произвольно и занимающих соответственно области V_1 и V_2. Выведем некоторые инварианты напряженного состояния этих тел, являющиеся следствием условий спая на S.

Воспользуемся системой криволинейных ортогональных координат [1]:

$$\alpha = f_1(x, y, z), \quad \beta = f_2(x, y, z), \quad \gamma = f_3(x, y, z),$$

в которой при $\beta = \beta_0 = \text{const}$ получаем уравнение поверхности S. Одним из условий спая двух тел на S является условие непрерывности компонентов смещения, а именно:

$$u_\alpha = \text{inv}, \tag{1,1}$$

$$u_\beta = \text{inv}, \tag{1,2}$$

$$u_\gamma = \text{inv}, \tag{1,3}$$

где u_α, u_β, u_γ — проекции вектора смещения на три взаимно ортогональные нормали к поверхностям α, β_0, γ. Здесь и в дальнейшем знак inv означает, что выражение, стоящее слева, не меняется при переходе через S из области V_1 в область V_2.

Введем величины h_1, h_2, h_3 при помощи формул:

$$\begin{aligned} h_1^2 &= \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial z}\right)^2, \\ h_2^2 &= \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)^2, \\ h_3^2 &= \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right)^2. \end{aligned} \tag{1,4}$$

Вообще говоря, h_1, h_2, h_3 являются функциями от α, β, γ инвариантными на S в указанном выше смысле. Инвариантными являются и их производные по α, β, γ.

Помножив формулы (1,1)—(1,3) соответственно на 1, h_2, h_3 и продифференцировав их по α, мы получим:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} = \mathrm{inv}, \tag{1,5}$$

$$\frac{\partial (h_2 u_\beta)}{\partial \alpha} = \mathrm{inv}, \tag{1,6}$$

$$\frac{\partial (h_3 u_\gamma)}{\partial \alpha} = \mathrm{inv}. \tag{1,7}$$

Подобным образом, умножая те же формулы соответственно на h_1, h_2, 1 и дифференцируя их по γ, получим еще три инвариантных величины

$$\frac{\partial (h_1 u_\alpha)}{\partial \gamma} = \mathrm{inv}, \tag{1,8}$$

$$\frac{\partial (h_2 u_\beta)}{\partial \gamma} = \mathrm{inv}, \tag{1,9}$$

$$\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} = \mathrm{inv}. \tag{1,10}$$

Сложим теперь формулы (1,5), (1,2), (1,3), предварительно помножив их соответственно на инвариантные величины h_1, $h_1 h_2 \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial \beta}$, $h_1 h_3 \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial \gamma}$, получим

$$h_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + h_1 h_2 u_\beta \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial \beta} + h_1 h_3 u_\gamma \frac{\partial h_1^{-1}}{\partial \gamma} = \mathrm{inv}. \tag{1,11}$$

Поступая аналогично и используя также другие формулы (1,1)—(1,10), мы получили, кроме того, следующие соотношения:

$$h_3 \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + h_1 h_3 u_\alpha \frac{\partial h_3^{-1}}{\partial \alpha} + h_2 h_3 u_\beta \frac{\partial h_3^{-1}}{\partial \beta} = \mathrm{inv}, \tag{1,12}$$

$$\frac{h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_1 u_\alpha) + \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \alpha} (h_3 u_\gamma) = \mathrm{inv}. \tag{1,13}$$

Добавляя и вычитая от инвариантной величины $2 \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_2 u_\beta)$ одно и то же выражение, найдем, что

$$\left[\frac{h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial \beta} (h_3 u_\gamma) + \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_2 u_\beta) \right] -$$

$$- \left[\frac{h_2}{h_3} \frac{\partial}{\partial \beta} (h_3 u_\gamma) - \frac{h_3}{h_2} \frac{\partial}{\partial \gamma} (h_2 u_\beta) \right] = \mathrm{inv}. \tag{1,14}$$

Подобным образом поступая, мы получим еще одно соотношение

$$\left[\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2 u_\beta)+\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial\beta}(h_1 u_\alpha)\right]+$$
$$+\left[\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2 u_\beta)-\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial\beta}(h_1 u_\alpha)\right]=\mathrm{inv}. \qquad (1,15)$$

Займемся преобразованием вторых квадратных скобок в (1,14) и (1,15). Выражениям, стоящим в этих скобках, можно, очевидно, соответственно придать вид:

$$h_2 h_3\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\gamma}{h_3}\right)-\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u_\beta}{h_2}\right)\right]-2\left(\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\gamma}u_\beta-\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\beta}u_\gamma\right), \qquad (1,16)$$

$$h_1 h_2\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u_\beta}{h_2}\right)-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u_\alpha}{h_1}\right)\right]+2\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\beta}u_\alpha-\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\alpha}u_\beta\right). \qquad (1,17)$$

Первые слагаемые в (1,16) и (1,17) являются компонентами элементарного вращения $2\omega_\alpha$ и $2\omega_\gamma$ [1], а вторые слагаемые — инвариантные выражения, которые могут быть отброшены без нарушения инвариантности (1,14) и (1,15).

Следовательно, формулы (1,14) и (1,15) можно записать в виде

$$\left[\frac{h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial\beta}(h_3 u_\gamma)+\frac{h_3}{h_2}\frac{\partial}{\partial\gamma}(h_2 u_\beta)\right]-2\omega_\alpha=\mathrm{inv},$$
$$\left[\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(h_2 u_\beta)+\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial}{\partial\beta}(h_1 u_\alpha)\right]+2\omega_\gamma=\mathrm{inv}. \qquad (1,18)$$

Принимая во внимание известные формулы для компонентов деформации $e_{\alpha\alpha}, e_{\gamma\gamma}, \ldots, e_{\alpha\beta}$ в ортогональных координатах [1], перепишем выведенные выше инварианты (1,11)—(1,13) и (1,18) в виде

$$e_{\alpha\alpha}=I_1=\mathrm{inv},\quad e_{\alpha\beta}+2\omega_\gamma=I_2=\mathrm{inv},\quad e_{\gamma\gamma}=I_3=\mathrm{inv},$$
$$e_{\beta\gamma}-2\omega_\alpha=I_4=\mathrm{inv},\quad e_{\gamma\alpha}=I_5=\mathrm{inv}. \qquad (1,19)$$

Подставляя в (1,19) вместо компонентов деформации их выражения через компоненты напряжений по формулам обсбщенного закона Гука [2], получим следующие пять инвариантов:

$$I_1=a_{11}\sigma_\alpha+a_{12}\sigma_\beta+a_{13}\sigma_\gamma+a_{14}\tau_{\beta\gamma}+a_{15}\tau_{\gamma\alpha}+a_{16}\tau_{\alpha\beta}=\mathrm{inv},$$
$$I_2=a_{16}\sigma_\alpha+a_{26}\sigma_\beta+a_{36}\sigma_\gamma+a_{46}\tau_{\beta\gamma}+a_{56}\tau_{\gamma\alpha}+a_{66}\tau_{\alpha\beta}+2\omega_\gamma=\mathrm{inv},$$
$$I_3=a_{13}\sigma_\alpha+a_{23}\sigma_\beta+a_{33}\sigma_\gamma+a_{34}\tau_{\beta\gamma}+a_{35}\tau_{\gamma\alpha}+a_{36}\tau_{\alpha\beta}=\mathrm{inv},$$
$$I_4=a_{14}\sigma_\alpha+a_{24}\sigma_\beta+a_{34}\sigma_\gamma+a_{44}\tau_{\beta\gamma}+a_{45}\tau_{\gamma\alpha}+a_{46}\tau_{\alpha\beta}-2\omega_\alpha=\mathrm{inv},$$
$$I_5=a_{15}\sigma_\alpha+a_{25}\sigma_\beta+a_{35}\sigma_\gamma+a_{45}\sigma_{\beta\gamma}+a_{55}\sigma_{\gamma\alpha}+a_{56}\sigma_{\alpha\beta}=\mathrm{inv}, \qquad (1,20)$$

где a_{ik} — упругие постоянные, отнесенные к системе координат α, β, γ. Если спаянные тела изотропны, то инварианты (1,20) принимают вид

$$I_1=\frac{1}{E}\left[\sigma_\alpha-\nu(\sigma_\beta+\sigma_\gamma)\right]=\mathrm{inv},$$

$$
\begin{gathered}
I_2=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{\alpha\beta}+2\omega_\gamma=\mathrm{inv},\\
I_3=\frac{1}{E}[\sigma_\gamma-\nu(\sigma_\alpha+\sigma_\beta)]=\mathrm{inv},\\
I_4=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{\beta\gamma}-2\omega_\alpha=\mathrm{inv},\\
I_5=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{\gamma\alpha}.
\end{gathered}
\tag{1,21}
$$

На границе спая анизотропной среды с абсолютно твердым телом, очевидно, должны выполняться условия

$$
I_1=I_2=I_3=I_4=I_5=0. \tag{1,22}
$$

Кроме указанных выше инвариантов (1,20) на границе спая двух тел имеет место также известная инвариантность нормальных и касательных напряжений, а именно:

$$
I_6=\sigma_\beta=\mathrm{inv},\quad I_7=\tau_{\alpha\beta}=\mathrm{inv},\quad I_8=\tau_{\beta\gamma}=\mathrm{inv}. \tag{1,23}
$$

Таким образом, шесть компонентов напряженного состояния и два компонента элементарного вращения на S связаны восемью условиями (1,20) и (1,23). Другими словами, если эти восемь величин известны в области V_1 на S, то они могут быть легко вычислены и в области V_2 на S при помощи вышеуказанных условий.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи.

2. ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ

Поверхность S есть цилиндрическая поверхность раздела двух призматических тел бесконечной длины, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, нормальную к образующей. Систему криволинейных координат обозначим в этом случае через t, n, z вместо α, β, γ. Ось z направим по образующей поверхности S, ось n — по нормали к S, а ось t — перпендикулярно к первым двум. Если смотреть вдоль оси n, ось t направлена вправо.

Рассматриваемые призматические тела находятся в условиях плоской деформации [3], т. е.

$$
\begin{gathered}
e_{nz}=e_{tz}=e_{zz}=0,\quad \omega_t=0,\quad \tau_{zt}=\tau_{nz}=0,\\
\sigma_z=-\frac{1}{a_{33}}(a_{13}\sigma_t+a_{23}\sigma_n+a_{36}\tau_{nt}).
\end{gathered}
\tag{2,1}
$$

Учитывая (2,1), мы перепишем инварианты (1,20) и (1,23) применительно к плоской деформации (в новых обозначениях):

$$
\begin{gathered}
I_1=\left(a_{11}-\frac{a_{13}^2}{a_{33}}\right)\sigma_t+\left(a_{12}-\frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}}\right)\sigma_n+\left(a_{16}-\frac{a_{13}a_{36}}{a_{33}}\right)\tau_{nt}=\mathrm{inv},\\
I_2=\left(a_{16}-\frac{a_{36}\cdot a_{13}}{a_{33}}\right)\sigma_t+\left(a_{26}-\frac{a_{36}a_{23}}{a_{33}}\right)\sigma_n+\left(a_{66}-\frac{a_{36}^2}{a_{33}}\right)\tau_{nt}+2\omega_z=\mathrm{inv},
\end{gathered}
\tag{2,2}
$$

$$I_6=\sigma_n=\text{inv},\quad I_7=\tau_{nt}=\text{inv}. \tag{2,2}$$

Для изотропных тел формулы (2,2) принимают вид

$$I_1=\frac{1-\nu^2}{E}\left[\sigma_t-\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_n\right]=\text{inv},$$

$$I_2=\frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{nt}+2\omega_z=\text{inv}, \tag{2,3}$$

$$I_6=\sigma_n=\text{inv},\quad I_7=\tau_{nt}=\text{inv}.$$

3. ОБОБЩЕННОЕ ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Две анизотропные пластинки различной толщины и из разных материалов спаяны между собой по цилиндрической поверхности S, нормальной к их общей срединной плоскости, и находятся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния [2].

Введем в рассмотрение средние по толщине составляющие напряжения и смещения ($\bar{\sigma}_z$, $\bar{\sigma}_n$, $\bar{\sigma}_t$, $\bar{\tau}_{nt}$, $\bar{u}_n$, $\bar{u}_t$), отнесенные к той же системе координат t, n, z, что и выше.

Если пренебречь величиной $\bar{\sigma}_z$ по сравнению с $\bar{\sigma}_t$, $\bar{\sigma}_n$ и $\bar{\tau}_{nt}$, можно будет записать инварианты (1,20) и (1,23) для данного случая в виде

$$\left.\begin{aligned}I_1&=a_{11}\bar{\sigma}_t+a_{12}\bar{\sigma}_n+a_{16}\bar{\tau}_{nt}=\text{inv},\\ I_2&=a_{16}\bar{\sigma}_t+a_{26}\bar{\sigma}_n+a_{66}\bar{\tau}_{nt}+2\omega_z=\text{inv},\end{aligned}\right\} \tag{3,1}$$

$$I_6=\bar{\sigma}_n=\text{inv},\quad I_7=\bar{\tau}_{nt}=\text{inv}. \tag{3,2}$$

В частности, для изотропных пластинок получим

$$\left.\begin{aligned}I_1&=\frac{1}{E}(\bar{\sigma}_t-\nu\bar{\sigma}_n)=\text{inv},\\ I_2&=\frac{2(1+\nu)}{E}\bar{\tau}_{nt}+2\omega_z=\text{inv},\end{aligned}\right\} \tag{3,3}$$

$$I_6=\bar{\sigma}_n=\text{inv},\quad I_7=\bar{\tau}_{nt}=\text{inv}. \tag{3,4}$$

Очевидно, что условия (3,1) и (3,3) справедливы также для случая, когда на S пластинки подкреплены тонким ребром жесткости, симметричным относительно срединной плоскости.

4. ИЗГИБ ТОНКОЙ ПЛИТЫ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКОЙ

Две анизотропные тонкие плиты различной жесткости спаяны между собой по цилиндрической поверхности S, нормальной к их общей срединной плоскости и подвергаются изгибу нормальной нагрузкой. Предположим, что плиты имеют в каждой точке одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости [3]. Воспользуемся теми же координатами (t, n, z), что и выше. Ось z направим в сторону ненагруженной внешней поверхности. Известно, что

$$u_t = -z\frac{\partial W}{\partial t}, \quad u_n = -z\frac{\partial W}{\partial n} \tag{4,1}$$

(W — прогиб точек срединной плоскости), а поэтому

$$\begin{gathered} \omega_z = 0, \quad \omega_t = \frac{\partial W}{\partial n}, \\ e_{tz} = e_{nz} = 0. \end{gathered} \tag{4,2}$$

Пренебрегая величиной σ_z по сравнению с σ_t, σ_n и τ_{nt} и принимая во внимание (4,2), перепишем часть инвариантов (1,20) для данного случая в виде:

$$\begin{aligned} I_1 &= e_{tt} = a_{11}\sigma_t + a_{12}\sigma_n + a_{16}\tau_{nt} = \mathrm{inv}, \\ I_2 &= e_{tn} = a_{16}\sigma_t + a_{26}\sigma_n + a_{66}\tau_{nt} = \mathrm{inv}, \\ I_4 &= -2\frac{\partial W}{\partial n} = \mathrm{inv}. \end{aligned} \tag{4,3}$$

Выразим компоненты напряжения в (4,3) через изгибающие и крутящие моменты по формулам

$$\sigma_t = \frac{12M_t}{h^3}\cdot z, \quad \sigma_n = \frac{12M_n}{h^3}\cdot z, \quad \tau_{nt} = \frac{12H_{nt}}{h^3} \tag{4,4}$$

(h — толщина плиты) и сократим первые две формулы (4,3) на инвариантный множитель $12\,z$; получим

$$\begin{aligned} I_1' &= \frac{1}{h^3}\left[a_{11}M_t + a_{12}M_n + a_{16}H_{nt}\right] = \mathrm{inv}, \\ I_2' &= \frac{1}{h^3}\left[a_{16}M_t + a_{26}M_n + a_{66}H_{nt}\right] = \mathrm{inv}, \\ I_4' &= \frac{\partial W}{\partial n} = \mathrm{inv}. \end{aligned} \tag{4,5}$$

Взамен (1,23) к инвариантам (4,5) следует добавить в данном случае известные соотношения

$$I_6' = M_n = \mathrm{inv}, \quad I_{7,8}' = N_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial s} = \mathrm{inv},$$

где N_n — перерезывающая сила в сечении плиты с нормалью n.

Для изотропных плит первые два инварианта (4,5) принимают вид [4, 5]

$$\begin{aligned} I_1' &= \frac{1}{Eh^3}(M_t - \gamma M_n) = \mathrm{inv}, \\ I_2' &= \frac{2(1+\nu)}{Eh^3}H_{nt} = \mathrm{inv}. \end{aligned} \tag{4,6}$$

Если вдоль S рассматриваемые плиты усилены тонким ребром жесткости, расположенным симметрично относительно срединной плоскости (x, y), инварианты (4,5) и (4,6), очевидно, сохраняют силу [5].

В случае подкрепления анизотропной плиты тонким ребром жесткости, легко установить простую зависимость между внутренними моментами, действующими в поперечном сечении ребра и моментами плиты. Действительно, известно (см. [4] или формулы (1,6) и (2,9) работы [6]), что

$$\frac{L_t}{C} - i\frac{L_n}{A} = i\dot{\zeta}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial x} - i\frac{\partial W}{\partial y}\right) = -\frac{i\dot{\zeta}}{z}\frac{d}{dt}(u - iv). \tag{4,7}$$

Здесь $\zeta = x + iy$ — аффикс точки срединной плоскости на S, $\dot{\zeta} = \frac{d\zeta}{dt}$; u, v — компоненты смещения в плите по осям x и y; A и C — жесткости ребра на изгиб и кручение; L_t и L_n — крутящий и изгибающий моменты в сечении ребра.

Выполнив все операции, указанные в правой части (4,7), и умножив обе части этого равенства на i, получим

$$\frac{L_n}{A} + i\frac{L_t}{C} = \frac{1}{z}\left(e_{tt} + \frac{i}{2}e_{tn}\right). \tag{4,8}$$

Выразив здесь компоненты деформации e_{tt} и e_{tn} через моменты (см. 4,3) — (4,5), получим

$$\frac{L_n}{A} + i\frac{L_t}{C} = 12\left(I_1' + \frac{i}{2}I_2'\right). \tag{4,9}$$

В частном случае изотропной плиты формула (4,9) принимает вид [5]

$$\frac{L_n}{A} + i\frac{L_t}{C} = \frac{12}{Eh^3}\left[M_t - \nu M_n + i(1+\nu)H_{tn}\right]. \tag{4,10}$$

Аналогично можно вывести инварианты на границе спая между двумя оболочками или между оболочкой и пластиной и т. п.

Выведенными в настоящей работе инвариантами можно пользоваться при решении задач теории упругости для неоднородных тел, при решении некоторых контактных задач, а также при проверке правильности готовых решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости, гл. V, ОГИЗ, Гостехиздат, 1947.
2. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела, гл. I, ГИТТЛ, 1950.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. Гостехиздат, 1947.
4. Шереметьев М. П. Укр. матем. журнал, т. V, № 1 (1953), стр. 58—79.
5. Флейшман Н. П. Доповіді та повідомлення ЛДУ, вип. 6, ч. II (1955), стор. 92—5.
6. Флейшман Н. П. Наукові записки ЛДУ, серія мех.-матем., т. 44, вып. 8, (1957), стор. 5—16.

Работа поступила 15 мая 1957 г.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

М. И. РОЗОВСКИЙ

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ КАК СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕСС ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВО ВРЕМЕНИ

Процесс деформирования упруго-наследственной среды во времени будем называть сложным, если он не может быть описан с помощью конечного числа параметров, зависящих только от времени.

Это будет иметь место в том случае, когда известное решение соответствующей упруго-мгновенной задачи не может быть представлено в виде суммы произведений координатных множителей на рациональные функции упругих постоянных.

При решении упруго-наследственных задач, соответствующих последнему случаю, можно воспользоваться способом В. Вольтерра [1], развитым Ю. Н. Работновым [2] и основанным на дедуктивном применении принципа Вольтерра, требующим введения специальной трансцендентной функции, зависящей от координат и времени.

В настоящей статье рассматривается задача о продольном изгибе стержня. как при линейной исходной физической зависимости типа Вольтерра, так и нелинейной типа Работнова [3].

Изменение продольного изгиба стержня во времени является, согласно данному выше определению, сложным процессом деформирования.

Символический способ, который будет здесь применен, основан на индуктивном приложении принципа Вольтерра и в отличие от упомянутого выше способа, не требует предварительного введения специальной функции.

Заметим, что рассматриваемая здесь задача и ей подобные могут быть решены также способом двумерных интегральных уравнений.

По эффективности данный и символический методы равноценны.

I. СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНОЙ ИСХОДНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

1. Рассмотрим процесс изменения во времени продольного изгиба прямоугольного стержня длины l, нагруженного в осевом направлении сжимающей силой P.

Основное уравнение изгиба стержня будет

$$B\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \int_0^t \Phi(t, \tau)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}d\tau\right] = M(x, t), \tag{1,1}$$

где $y(x, t)$ — прогиб стержня, $B=EI$, I — наименьший момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести, E — мгновенный модуль упругости, $M(t, x)$ — изгибающий момент, $\Phi(t, \tau)$ — приведенный коэффициент релаксации.

Вывод формулы (1,1) и выражение $\Phi(t, \tau)$ через исходные коэффициенты релаксации Вольтерра приводятся в [4].

Запишем уравнение (1,1) в символической форме

$$\overset{*}{B}\frac{d^2y}{dx^2}=M, \tag{1,2}$$

где $\overset{*}{B}=B(1-\overset{*}{\Phi})$; $\overset{*}{\Phi}\nu$ — интегральный оператор, т. е.

$$\overset{*}{\Phi}\nu=\nu(t)-\int\limits_0^t \Phi(t, \tau)\,\nu(\tau)\,d\tau .$$

Для всех основных случаев: 1) нижний конец стержня зажат, верхний оперт, 2) стержень зажат нижним концом, верхний конец свободен, 3) нижний конец стержня зажат, верхний может перемещаться, но не может поворачиваться, 4) оба конца зажаты, 5) оба конца оперты.

Решение уравнения (1,2) имеет вид

$$y=c_1\cos\overset{*}{q}x+c_2\frac{1}{\overset{*}{q}}\sin\overset{*}{q}x+A_1x+B_1, \tag{1,3}$$

где $\overset{*}{q}=\sqrt{P/\overset{*}{B}}$.

Постоянные c_1, c_2, A_1 и B_1 зависят только от указанных выше видов условий на концах стержня.

Таким образом, основным в задаче является расшифровка символической записи (1,3).

Для определенности рассмотрим, например, первый случай.

Будем иметь

$$y=\frac{Q}{P}\left(l\cos\overset{*}{q}x-\frac{1}{\overset{*}{q}}\sin\overset{*}{q}x+x-l\right), \tag{1,4}$$

где Q — горизонтальная реакция опоры на верхний конец стержня.

Опора может быть вполне жесткой или ее механические свойства будут изменяться во времени. В последнем случае Q является функцией времени.

Модуль упругости E может зависеть от времени, последнее будет иметь место при учете старения материала. Это нисколько не усложнит дальнейшее рассмотрение вопроса. Следует только при этом нижний предел интегрирования — нуль заменить $t_0\neq 0$ — моментом приложения нагрузки, совпадающим с возрастом материала, поскольку ядро уравнения (1,1) позволяет описывать процессы деформирования с учетом старения материала.

Представим (1,4) в следующем виде

$$y=\frac{Q}{P}\left(l\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\overset{*}{q}x)^{2n-2}}{(2n-2)!}-\frac{1}{\overset{*}{q}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\overset{*}{q}x)^{2n-1}}{(2n-1)!}+x-l\right),$$

откуда

$$y=\frac{Q}{P}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\overset{*}{q}x)^{2n}\,[x-(2n+1)\,l]}{(2n+1)!}\,. \tag{1,5}$$

Так как $\overset{*}{q}{}^2=q^2\,(1-\overset{*}{\Phi})^{-1}$, то

$$y=\frac{Q}{P}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(q\,x)^{2n}\,[x-(2n+1)\,l]}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(1-\overset{*}{\Phi})^{n}}\,. \tag{1,6}$$

Разложение

$$\frac{1}{(1-\overset{*}{\Phi})^{n}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n\,(n+1)\ldots(n+m-1)}{m!}\,\overset{*}{\Phi}{}^{m}$$

позволяет переписать (1,6) так

$$y=\frac{Q}{P}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(q\,x)^{2n}\,[x-(2n+1)\,l]}{(2n+1)!}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n\,(n+1)\;.\;.\;.\;(n+m-1)}{m!}\,\overset{*}{\Phi}{}^{m}. \tag{1,7}$$

Введем обозначения

$$F_0=1,$$

$$F_1(t)=\int_0^t\Phi(t,\tau)\,d\tau=\overset{*}{\Phi}\cdot1, \tag{1,8}$$

$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$F_n(t)=\int_0^t\Phi(t,\varepsilon_1)\,d\tau_1\int_0^{\tau_1}\Phi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2\ldots\int_0^{\tau_{n-1}}\Phi(\tau_{n-1},\tau_n)\,d\tau_n=\overset{*}{\Phi}{}^{n}\cdot1.$$

$$\varphi_n(x)=\frac{x^{2n}\,[x-(2n+1)\,l]}{(2n+1)!}\,. \tag{1,9}$$

Пользуясь (1,8) и (1,9) и принимая во внимание, что $q^2={}^{P}/_{B}$, приведем (1,7) к виду

$$y=\frac{Q}{B}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\,q^{2n-2}\,\varphi_n(x)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n\,(n+1)\;.\;.\;.\;(n+m-1)}{m!}\,F_m(t)$$

или

$$y=\frac{Q}{B}\left[\varphi_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m-1}\left(\frac{n}{m}\right)q^{2m}\,\varphi_{m+1}(x)F_{n-m}(t)\right]. \tag{1,10}$$

Легко проверить, что $y(x, t)$, определяемое соотношением (1,10), действительно удовлетворяет уравнению (1,1) при

$$M = -Py - Q(l - x). \tag{1,11}$$

Ряд, фигурирующий в (1,10), сходится абсолютно и равномерно при условии ограниченности ядра уравнения (1,1), что будет доказано в пункте 2.

2. Эта же задача может быть решена также методом приведения к двумерному интегральному уравнению.

Положим

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(x, t). \tag{1,12}$$

Так как $y(0, t) = 0$ и $y'(0, t) = 0$, то из (1,12) следует

$$y = \int_0^x (x - \xi)\, u(\xi)\, d\xi. \tag{1,13}$$

Подставим (1,12) и (1,13) в уравнение (1,1), которое с учетом (1,11) запишется так

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \int_0^t \Phi(t, \tau) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} d\tau - q^2 y + \frac{Q}{B}(l - x),$$

получим двумерное интегральное уравнение

$$u(x, t) = \int_0^t \Phi(t, \tau)\, u(x, \tau)\, d\tau - q^2 \int_0^x (x - \xi)\, u(\xi, t)\, d\xi - \frac{Q}{B}(l - x). \tag{1,14}$$

Решение уравнения (1,14) будем искать в виде ряда

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t). \tag{1,15}$$

Тогда получим рекуррентную формулу

$$u_n(x, t) = -q^2 \int_0^x (x - \xi)\, u_{n-1}(\xi, t)\, d\xi + \int_0^t \Phi(t, \tau)\, u_{n-1}(x, \tau)\, d\tau, \tag{1,16}$$

причем $u_0 = \dfrac{Q(x - l)}{B}$.

Пользуясь обозначениями (1,8) и (1,9), найдем:

$$u_n(x, t) = \frac{Q}{B} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} q^{2m} \varphi_m(x) F_{n-m}(t). \tag{1,17}$$

Покажем теперь, что ряд (1,15) сходится абсолютно и равномерно.

Из (1,9), вернее из первоначального представления для $\varphi_n(x)$ в виде интегралов, являющихся прямым следствием рекуррентной формулы (1,16), получим

$$|\varphi_n(x)| \leqslant l^{n+1}\frac{x^n}{n!}. \tag{1,18}$$

Пусть $|\Phi(t,\tau)| < A$ для всех конечных значений t и τ, где A — некоторая постоянная.

Тогда из (1,8) непосредственно следует

$$|F_n(t)| < \frac{(At)^n}{n!}. \tag{1,19}$$

Пусть $\max\,(q^2, x, t) = z$.

Тогда, принимая во внимание (1,18) и (1,19), получим

$$|u_n(x,t)| < l^{n+1}\frac{z^n}{n!}. \tag{1,20}$$

Таким образом, ряд (1,15) сходится абсолютно и равномерно.

Решение уравнения (1,14) будет

$$u(x,t) = \frac{Q}{B}\left[\varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m-1}\binom{n}{m}q^{2m}\varphi_m(x)F_{n-m}(t)\right]. \tag{1,21}$$

Подставляя (1,21) в (1,13), определим

$$y = \frac{Q}{B}\left[\varphi_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m-1}\binom{n}{m}q^{2m}\varphi_{m+1}(x)F_{n-m}(t)\right]. \tag{1,22}$$

Формула (1,22) полностью совпадает с формулой (1,10).

Полагая в (1,10) $x = l$ и учитывая, что $y(l,t) = 0$ и $q^2 = \frac{P}{B}$, получим уравнение для определения критической силы

$$\varphi_1(l) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\binom{n}{m}\left(\frac{P}{B}\right)^m\varphi_{m+1}(l)F_{n-m}(t) = 0.$$

3. Задача, решенная выше, может быть решена также путем приведения интегро-дифференциального уравнения (1,1) к двумерному интегральному уравнению, отличному от (1,14), причем такого вида, который позволит найти его резольвенту по известному правилу. Однако на этом здесь останавливаться не будем.

2. СЛУЧАЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ИСХОДНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТИПА РАБОТНОВА

1. Если задача существенно нелинейна в смысле Работнова, то интегро-дифференциальное уравнение продольного изгиба стержня будет иметь вид

$$f\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)-\int_0^t \Phi(t,\tau) f\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) d\tau = M(x,t). \qquad (2,1)$$

Формула (2,1) непосредственно вытекает из уравнения Работнова [3]

$$M(x,t)+\int_0^t K(t,\tau) M(x,\tau)\, d\tau = 2bh^2 F\left(\frac{h}{R}\right), \qquad (2,2)$$

$$F(z)=\frac{1}{z^2}\int_0^z \varphi(s)\, ds, \quad \varphi(\varepsilon)=\sigma+\int_0^t K(t,\tau)\sigma(\tau)\, d\tau,$$

b — ширина, $2h$ — высота сечения стержня.

Полагая в (2,2) $\frac{1}{R}\approx\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ и $f\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=2bh^2 F\left(h\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$, получим

$$M+\int_0^t K(t,\tau) M(\tau)\, d\tau = f\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right). \qquad (2,3)$$

Решая (2,3) относительно $M(x,t)$, получим (2,1).

Здесь $\Phi(t,\tau)$ является резольвентной ядра $K(t,\tau)$ — коэффициента последействия.

Пусть

$$M(x,t)=-Py-Q(l-x). \qquad (2,4)$$

Значение величин P, Q и l такое же, как и в § 1.

Полагая в уравнении (2,1) $\partial^2 y/\partial x^2 = u(x,t)$ и учитывая, что

$$y(x,t)=\int_0^x (x-\xi)\, u(\xi,t)\, d\xi, \qquad (2,5)$$

а также принимая во внимание (2,4), получим

$$f(u)-\int_0^t \Phi(t,\tau) f(u)\, d\tau + P\int_0^x (x-\xi)\, u(\xi)\, d\xi + Q(l-x)=0. \qquad (2,6)$$

В дальнейшем будем считать, что $f(u)$ удовлетворяет условию

$$\frac{f(u)}{u}>\frac{df}{du}>0.$$

Поэтому, положив $f(u)=z(x,t)$, получим $u=\varphi(z)$, где $\varphi(\zeta)$ — функция, обратная $f(\zeta)$.

На основании последнего, уравнение (2,6) обращается в следующее

$$z(x,t)-\int_0^t \Phi(t,\tau)\, z(x,\tau)\, d\tau + P\int_0^x (x-\xi)\,\varphi(z)\, d\xi + Q(l-x)=0$$

или

$$z(x, t) = Q(x-l)\left[1 + \int_0^t K(t, \tau)\, d\tau\right] -$$

$$- P\int_0^x (x-\xi)\,\varphi(z)\,d\xi - P\int_0^t K(t, \tau)\,d\tau \int_0^x (x-\xi)\,\varphi(z)\,d\xi, \qquad (2,7)$$

где $K(t, \tau)$ — резольвента ядра $\Phi(t, \tau)$.

В символической форме уравнение (2,7) может быть записано следующим образом

$$z = (1 + \overset{*}{K})\left[Q(x-l) - P\int_0^x (x-\xi)\,\varphi(z)\,d\xi\right],$$

где оператор

$$\overset{*}{K}W = \int_0^t K(t, \tau)\, W(\tau)\, d\tau. \qquad (2,8)$$

Уравнение (2,8) по отношению к $z(x, t)$ является интегральным, поскольку $(1 + \overset{*}{K})$ рассматривается пока как постоянный множитель.

Нелинейное интегральное уравнение (2,8) может быть решено методом последовательных приближений.

Будем иметь

$$z_n(x, t) = (1 + \overset{*}{K})\left[Q(x-l) - P\int_0^x (x-\xi)\,\varphi(z_{n-1})\,d\xi\right], \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

причем $z_0 = (1 + \overset{*}{K})\, Q(x-l)$.

Заметим, что при фактическом нахождении написанных выше последовательных приближений последовательные действия временного оператора сводятся к определению обыкновенных квадратур.

Последнее объясняется структурой нулевого приближения

$$z_0(x, t) = Q(x-l)\,[1 + F(t)],$$

где

$$F(t) = \int_0^t K(t, \tau)\, d\tau.$$

Так, например, первое приближение будет

$$z_1(x, t) = z_0(x, t) -$$

$$- P\int_0^x (x-\xi)\left\{\varphi[z_0(\xi, t)] + \int_0^t K(t, \tau)\,\varphi[z_0(\xi, \tau)]\,d\tau\right\} d\xi.$$

Если предположить, что

$$\varphi\{Q(x-l)[1 + F(t)]\} = \chi\Theta, \qquad (2,9)$$

где $\chi = \chi[Q(x-l)]$, $\Theta = \Theta[1+F(t)]$, то первое приближение примет вид

$$z_1(x, t) = \chi\Theta - P\chi_1(1+\Theta_1), \tag{2,10}$$

$$\chi_1 = \int_0^x (x-\xi)\chi[Q(\xi - l)]\,d\xi, \quad \Theta_1 = \int_0^t K(t,\tau)\Theta[1+F(\tau)]\,d\tau.$$

Такое представление $z_1(x, t)$ возможно, например, при $\varphi(\zeta) = a\zeta^\alpha$.

Если принять, что: 1) $A = \lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t K(t,\tau)d\tau$, в частности, при $K(t,\tau) = K(t-\tau)$, $A = \int_0^\infty K(s)\,ds$, 2) $L = \max\left|\frac{df}{dz}\right|$ в интервале $(0, l)$, а также учесть, что $\varphi(z_0) = \varphi[(1+\overset{*}{K})Q(x-l)] < \varphi_0$, где $\varphi_0 = \varphi[(1+A)Ql]$, то, как нетрудно установить, имеет место следующая оценка

$$|z_n - z_{n-1}| < \frac{\varphi_0[l\sqrt{LP(1+A)}]^{2n}}{L(2n)!}. \tag{2,11}$$

При доказательстве существенное значение имеет условие Липшица, которое, при принятом вначале предположении о характере кривой $f(z)$, действительно выполняется в интервале $(0, l)$.

Неравенство (2,11) обеспечивает равномерное стремление z_n к z при $n\to\infty$ в интервале $0 < x < l_1 \leqslant l$.

Таким образом, $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Это решение в рассматриваемом интервале единственное. На доказательстве последнего останавливаться не будем, так как оно мало чем отличается от классического.

Прогиб определяется формулой

$$y(x, t) = \lim\int_0^x (x-\xi)\varphi[z_n(\xi, t)]\,d\xi,$$

поскольку $\varphi(\zeta)$ — функция непрерывная в интервале $(0, l)$.

Следует заметить, что сходимость последовательных приближений гарантируется в промежутке, меньшем, чем полная длина стержня. Поэтому пользоваться полученной формулой, определяющей прогиб, для определения критической силы в общем случае, без предварительного «продолжения решения» до границы изменения x, т. е. до l, нельзя.

2. В некоторых случаях критическая сила может быть найдена без привлечения формулы, определяющей прогиб стержня, полученной в результате решения соответствующего нелинейного интегро-дифференциального уравнения.

Принципиально это может быть выполнено в результате решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$(1-\overset{*}{\Phi})f\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = M, \tag{2,12}$$

представляющего собой символическую запись исходного интегро-дифференциального уравнения (2,1).

Уравнение (2,12) решается элементарно в следующих случаях: 1) когда стержень зажат нижним концом, верхний свободен и 2) когда нижний конец стержня зажат, верхний может перемещаться, но не может поворачиваться.

В частности, для первого из них уравнение (2,12) запишется так

$$(1-\overset{*}{\Phi})f\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+P(y-f_0)=0\,, \tag{2,13}$$

где f_0 — стрелка прогиба верхнего свободного конца стержня.

При $f\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=a\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^\alpha$ и учете граничных условий: при $x=0$, $y=0$, $dy/dx=0$ и при $x=l$, $y=f_0$, из (2,13) следует

$$P_{kp}=\frac{F^{2\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha a}{2^\alpha l^{2\alpha}}\left[1-\int^t\Phi(t,\tau)\,d\tau\right], \tag{2,14}$$

где

$$F=\int_0^f\left[f_0^{\frac{1}{\alpha}+1}-(f_0-y)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]^{-\frac{1}{2}}dy.$$

При $\alpha=1$ и $a=B$ получаем значение критической силы в случае линейной исходной зависимости между напряжением и деформацией, т. е.

$$P_{kp}=\left(\frac{\pi B}{2l}\right)^2\left[1-\int_0^t\Phi(t,\tau)\,d\tau\right].$$

Для конкретности можно взять

$$\Phi(t,\tau)=\vartheta_{\alpha_1}(-\beta;t-\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n\,(t-\tau)^{n(1+\alpha_1)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha_1)]}\,,$$

где $\alpha_1>-1$, β — положительная постоянная, размерность которой обратна размерности времени.

Функция $\vartheta_{\alpha_1}(-\beta;t-\tau)$ представляет собой ядро релаксации Работнова [2].

В этом случае $\psi(t)=1-\int_0^t\Phi(t,\tau)\,d\tau$ может быть табулирована.

В остальных трех из пяти случаев, указанных в пункте 1 § 1, определение P_{kp} путем применения уравнения (2,12) не проще, чем при использовании результатов, полученных в пункте 1 настоящего параграфа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V. Leçons sur les fonctions de lignes, Paris, 1913.
2. Работнов Ю. Н. ПММ, 1948, т. XII, вып. I.
3. Работнов Ю. Н. Вестник Московского Университета, 1948, 10.
4. Розовский М. И. Известия АН СССР, ОТН, 1948, № 5.

Работа поступила в декабре 1956 г.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор Ю. Л. Котляров.

Техредактор А. В. Малявко. Корректоры Н. И. Трофимович, З. Я. Козачук.

Львовский университет им. Ив. Франко и Львовский политехнический институт.
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА выпуск I.

БГ 05727. Сдано в набор 12/XII 1957 г. Подписано к печати 17/IX 1958 г. Формат 70×108 1/16.
Бум. л. 6,25. Усл. печ. л. 17,125. Уч.-изд. л. 12,4. Тираж 1000. Цена 6 руб. 70 коп. Зак. 189.

Типография Львовского политехнического института, г. Львов, ул. Профессорская, 1.

Цена 6 руб. 70 коп.