ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

В. О. ГУКЕВИЧ

ОСТАТОК РЯДУ ФУР'Є ФУНКЦИЙ, r-ТА ПОХІДНА ЯКИХ ЗАДОВОЛЬНЯЄ УМОВІ ЛІПШІЦА

Нехай $W^{(r)}KH^{(\alpha)}$ є класом функцій ($r \geqslant 1, 0 < \alpha \leqslant 1$) періоду 2π, r-похідна яких за Вейлем задовольняє умові $Lip\alpha$ з константою K.

Вважають, що вимірна функція φ періоду 2π є похідна r-ого порядку за Вейлем функції f періоду 2π, якщо $\int\limits_0^{2\pi} f(u)du = 0$, $\int\limits_0^{2\pi} \varphi(u)du = 0$ і f і φ зв'язані між собою рівністю

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi k^r} \int\limits_0^{2\pi} \cos\left[k(t-x) + \frac{r\pi}{2}\right]\varphi(t)dt.$$

Розглянемо вираз

$$E_{s_n}(W^{(r)}KH^{(\alpha)}) = \sup_{f \in W^{(r)}KH^{(\alpha)}} |f(x) - S_n(f; x)|, \tag{1}$$

де $S_n(f, x)$ є n-а сума ряду Фур'є функції f.

С. М. Селівановою була доведена теорема, яка в деякому смислі уточнює відому теорему С. М. Нікольського [1].

Теорема. *Для будь-яких чисел r і α, що задовольняють умові $r \geqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$ справедлива асимптотична рівність*

$$E_{s_n}(W^{(r)}KH^{(\alpha)}) = K\left[\frac{2^{\alpha+1}\lg n}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} v^\alpha \sin v dv + e_{n,r}\right] \tag{2}$$

причому $|e_{n,r}| < \frac{cr}{n^{r+\alpha}}$, *де c абсолютна константа.*

В цій статті покажемо, що, користуючись методом С. М. Нікольського [1], можна одержати більш точний результат

$$|e_{n,r}| < \frac{c_1}{n^{r+\alpha}} \quad (n \geqslant 3), \tag{3}$$

де c_1 абсолютна константа,

Нехай $K=1$. (У випадку $K\neq 1$ результат можно на K). Тоді [1]

$$E_{s_n}(W^{(r)}H^{(\alpha)})=\sup\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_n^{(r)}(u)\,\varphi(u)\,du\right., \tag{4}$$

де

$$\varphi(u)=f^{(r)}(u);\quad \varphi(0)=0;\ D_n^{(r)}(u)=\sum_{k=nn}^{\infty}\frac{\log\left(ku+\frac{r\pi}{2}\right)}{k^r}$$

Положимо

$$E_{s_n}(W^{(r)}K\,H^{(\alpha)})=I_1+I_2+I_3, \tag{5}$$

де

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{-\frac{l\pi}{n}}D_n^{(r)}(u)\,\varphi(u)\,du,\quad I_2=\int\limits_{\frac{l\pi}{n}}^{\frac{l\pi}{n}}D_n^{(r)}(u)\,\varphi(u)\,du,$$

$I_3=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{l\pi}{n}}^{\pi}D_n^{(r)}(u)\,\varphi(u)\,du$ і l є число, що задовольняє нерівності $0<l\leqslant\dfrac{3}{2}$.

Нашою метою є доведення таких трьох нерівностей, з яких негайно випливатиме (3):

$$\left|I_1-\frac{2^\alpha\lg(n-1)}{\pi^2 n^{r+\alpha}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}v^\alpha\sin v\,dv\right|<\frac{c}{n^{r+\alpha}}, \tag{6}$$

$$|I_2|<\frac{c}{n^{r+\alpha}}, \tag{7}$$

$$\left|I_3-\frac{2^\alpha\lg(n-1)}{\pi^2 n^{r+\alpha}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}v^\alpha\sin v\,dv\right|<\frac{c}{n^{r+\alpha}} \tag{8}$$

Нерівність (7) доводиться легко.* Для цього достатньо зауважати (див., наприклад, [4]), що

$$|\varphi(u)|=|\varphi(u)-\varphi(0)|<|u|^\alpha;$$

$$\int\limits_{\frac{l\pi}{n}}^{\frac{l\pi}{n}}|D_n^{(r)}(u)|\,du<\frac{c}{n^{r+\alpha}}\qquad 0<l\leqslant\frac{3}{2}.$$

Таким чином, основна трудність полягає у доведенні (6) і (8).

* Усі абсолютні постійні позначені однією і тією ж буквою.

З огляду на повну аналогію міркувань зупинимось тільки на доведенні нерівності (8).

Застосуємо перетворення [4]

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos(kx+\alpha)}{k^r} = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^1 \varrho^n \left(\lg \frac{1}{\varrho}\right)^{r-1} \frac{\cos(\overline{n+1}\,x+\alpha) - \varrho\cos(nx+\alpha)}{\varrho^2 - 2\varrho\cos x + 1} d\varrho$$

(l дійсне), а також тотожність

$$\cos(\overline{n+1}\,x+\alpha) - \varrho\cos(nx+\alpha) = (1-\varrho)\cos(nx+\alpha) + (\cos x - 1)\times$$
$$\times\cos(nx+\alpha) - \sin x \sin(nx+\alpha)$$

і запишемо I_3 у вигляді $I_3 = \sum_{i=1}^{3} I_1^{(i)}$, де

$$I_3^{(1)} = \frac{1}{\pi\Gamma(r)} \int_0^1 \varrho^n \left(\lg\frac{1}{\varrho}\right)^{r-1} d\varrho \int_{\frac{1\pi}{n}}^{\pi} \varphi(x) \frac{(1-\varrho)\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{x}{2}} dx \tag{9}$$

$$I_3^{(2)} = -\frac{1}{\pi\Gamma(r)} \int_0^1 \varrho^n \left(\lg\frac{1}{\varrho}\right)^{r-1} d\varrho \int_{\frac{1\pi}{n}}^{\pi} \varphi(x) \frac{(1-\cos x)\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{x}{2}} dx \tag{10}$$

$$I_3^{(3)} = -\frac{1}{\pi\Gamma(r)} \int_0^1 \varrho^n \left(\lg\frac{1}{\varrho}\right)^{r-1} d\varrho \int_{\frac{1\pi}{n}}^{\pi} \varphi(x) \frac{\sin x\cdot\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{x}{2}} dx \tag{11}$$

Далі покажемо справедливість таких нерівностей

$$|I_3^{(1)}| < \frac{c}{n^{r+\alpha}}, \tag{12}$$

$$|I_3^{(2)}| < \frac{c}{n^{r+\alpha}}, \tag{13}$$

$$\left| I_3^{(3)} - \frac{2^\alpha \lg(n-1)}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v^\alpha \sin v\,dv \right| < \frac{c}{n^{r+\alpha}}, \tag{14}$$

звідки буде випливати справедливість (8).

Доведення нерівності (12).

Нехай, як в [1], m є натуральне число, що задовольняє нерівності.

$$(m-1)\pi \leqslant \frac{r\pi}{2} < m\pi = \frac{r\pi}{2} + \omega, \quad 0 < \omega \leqslant \pi$$

$$t_\nu = \frac{\omega + \nu\pi}{n}, \tag{15}$$

причому

$$t_{\frac{1}{2}} > \frac{\pi}{2n},\ t_{n-\frac{3}{2}} \leqslant \pi - \frac{\pi}{2n},\ t_{n-\frac{3}{2}} \geqslant \pi - \frac{3\pi}{2n}$$

$$\int\limits_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}} \frac{(1-\varrho)\cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{x}{2}} = (-1)^{m+\nu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}\left[\frac{1}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+t}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}\right]^{(1-\rho)\cos nt\,dt}$$

$$\int\limits_{t_{\frac{1}{2}}}^{\pi} \frac{(1-\varrho)\cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{x}{2}} = \sum_{\nu=1}^{n-2}\int\limits_{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \frac{[(\varphi(x) - \varphi(t_\nu)]}{(1-\varrho)^2+\sin^2\frac{x}{2}} \times$$

$$\times(1-\varrho)\cos\left(nx + \frac{r\pi}{2}\right) + \sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\int\limits_{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}(1-\varrho)\frac{\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{c}{n\varrho} \tag{16}$$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-2}\int\limits_{t_{\nu-\frac{1}{2}}}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}(1-\varrho)\frac{\varphi(x)-\varphi(t_\nu)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha \int\limits_{t_{\frac{1}{2}}}^{t_{n-\frac{3}{2}}} \frac{(1-\varrho)\,d\chi}{(1-\varrho)^2 + \frac{4}{\pi 2}\varrho x^2} < \frac{c}{n^\alpha \varrho^{\frac{1}{2}}} \tag{17}$$

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t_{\nu+\frac{1}{2}}}\frac{(1-\varrho)\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+\varrho\sin^2\frac{x}{2}} = \right.$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)(-1)^{m+\nu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}\left[\frac{1}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+t}{2}} + \right.$$

$$+\frac{1}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}\Bigg](1-\varrho)\cos nt\,dt$$

Позначимо

$$a_\nu=(-1)^{m+\nu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}\Bigg[\frac{1}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+t}{2}}+$$

$$+\frac{1}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+t}{2}}\Bigg](1-\varrho)\cos nt\,dt$$

Мають місце нерівності

$$|a_1|<|a_3|<|a_4|<\ldots|a_{n-2}| \tag{18}$$

Застосовуючи перетворення Абеля і беручи до уваги (18), одержуємо

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-1}\varphi(t_\nu)\,a_\nu\right|<\frac{c}{n^\alpha\varrho^{\frac{1}{2}}}$$

Остання нерівність разом з (16) і (17) завершує доведення (12).

Доведення нерівності (13).

Нехай

$$v_\nu=\int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{(1-\cos x)\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=(-1)^{m+\nu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}\left[\frac{1-\cos(t_\nu-t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}+\frac{1-\cos(t_\nu+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+t}{2}}\right]\cos nt\,dt.$$

Має місце рівність

$$\int\limits_{\frac{t_1}{2}}^{\pi}\varphi(x)\,\frac{(1-\cos x)\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin\frac{x}{2}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-2}\int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}[\varphi(x)-\varphi(t_\nu)]\,\frac{(1-\cos x)\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}\,dx+$$

$$+\sum_{\nu+1}^{n-2}\varphi(t_\nu)v_\nu+\frac{c}{n\varrho}, \tag{19}$$

при чому

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-2}\int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}[\varphi(x)-\varphi(t_\nu)]\frac{(1-\cos x)\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha\int\limits_{t_{\frac{1}{2}}}^{t\left(n-\frac{3}{2}\right)}\frac{(1-\cos x)\,dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}<\frac{c}{n^\alpha\varrho}. \tag{20}$$

Щодо оцінки $\sum\limits_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)v_\nu$, то, користуючись перетворенням Абеля і беручи до уваги нерівності $|v_1|<|v_2|<\ldots|v_{n-2}|$, маємо

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)v_\nu\right|<\frac{c}{n^\alpha\varrho}. \tag{21}$$

В результаті (21), а також (19) і (20) одержуємо нерівність (13).

Доведення нерівності (14).

$$\int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{\sin x\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)}{(1-\varrho)^2+\sin^2\frac{x}{2}}dx=$$

$$=(-1)^{m+\nu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}\left[\frac{\sin(t_\nu+t)}{(-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}-\frac{\sin(t_\nu-t)}{(-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}\right]\sin nt\,dt,$$

де m і t_ν ті самі, що в (15).

Легко бачити, що

$$\left|\frac{1}{\Pi\Gamma(r)}\int\limits_0^1\varrho^n\left(\lg\frac{1}{\varrho}\right)^{r-1}d\varrho\int\limits_{t\left(n-\frac{3}{2}\right)}^{\pi}\varphi(x)\frac{\sin x\cdot\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)}{(1-\varrho)^2+4\sin^2\frac{x}{2}}\right|<\frac{c}{n^{\alpha+r}}.$$

Таким чином, необхідно оцінити вираз

$$\frac{1}{\Pi\Gamma(r)}\int_0^1 \varrho^n\left(\lg\frac{1}{\varrho}\right)^{r-1}\int_{t_{\frac{1}{2}}}^{t\left(n-\frac{3}{2}\right)}\varphi(x)\frac{\sin x\cdot\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin\frac{x}{2}}$$

$$\int_{t_{\frac{1}{2}}}^{\pi}\varphi(x)\frac{\sin x\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-2}\int_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}[\varphi(x)-\varphi(t_\nu)]\frac{\sin x\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\int_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{\sin x\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{c}{n^{\alpha+r}}. \qquad (22)$$

Нехай

$$\Delta_\nu=\int_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{\sin x\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Тоді

$$\sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\int_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{\sin x\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}=\sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\Delta_\nu$$

При цьому, з одного боку

$$\Delta_\nu=(-1)^{m+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\left[\frac{\sin(t_\nu+u)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+4}{2}}-\frac{\sin(t_\nu+u)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+4}{2}}\right]\sin nu\,du=$$

$$=(-1)^{m+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}2u\,\frac{(1+\varrho^2)\cos(t_\nu+\Theta_\nu u)-2\varrho}{[1+\varrho^2-2\varrho\cos(t_\nu+\Theta_\nu u)]^2}\sin nu\,du, \qquad (23)$$

де $-1<\Theta_\nu<1$.

З другого боку Δ_ν можна записати у вигляді

$$\Delta_\nu = (-1)^{m+\nu}[d_\nu^+ - d_\nu^-],$$

де

$$d_\nu^+ = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(t_\nu + u)\sin nu\,du}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{t_\nu + u}{2}}$$

$$d_\nu^- = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(t_\nu - u)\sin nu\,du}{(1-\chi)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{t_\nu - u}{2}}$$

Оцінимо тепер $\sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\Delta_\nu$; для цього відмітимо справедливість деяких нерівностей.

Нехай $f_1(x) = \frac{\sin x}{1+\varrho^2 - 2\varrho\cos}$, $x_1(\varrho)$ є корень виразу $(1+\varrho)^2\cos x - -2\varrho$, коли $0 < x < \pi$ і $\nu_1(\varrho)$ число, що задовольняє нерівності $t_{\nu_1(\rho)-\frac{1}{2}} < x_1(\varrho) < t_{\nu_1(\rho)+\frac{1}{2}}$.

Можна переконатись у справедливості таких нерівностей

$$|d_1^-| < |d_1^+| < |d_2^-| < |d_2^+| < \ldots \quad |d_{\nu_1(\rho)-1}^-| < |d_{\nu_1(\rho)+1}^+| \tag{24}$$

$$|d_{\nu_1(\rho)+1}^-| < |d_{\nu_1(\rho)+1}^+| < \ldots \quad |d_{n-2}^+| < |d_{n-2}^-| \tag{25}$$

Нехай далі

$$f_2(x) = \frac{(1+\varrho^2)\cos x - 2\varrho}{(1+\varrho^2 - 2\varrho\cos x)^2},$$

$$f_2'(x) = \frac{\sin x\cdot[8\varrho^2 - (1+\varrho^2)^2 - 2\varrho(1+\varrho^2)\cos x]}{(1+\varrho^2 - 2\varrho\cos x]^3},$$

$x_2(\varrho)$ є корень рівняння $8\varrho^2 - (1+\varrho^2)^2 - 2\varrho(1+\varrho^2)\cos x = 0\ (0 < x < \pi)$ і $\nu_2(\varrho)$ натуральне число, що задовольняє нерівності

$$t_{\nu_2(\rho)-\frac{1}{2}} < x_2(\varrho) \leqslant t_{\nu_2(\rho)+\frac{1}{2}}.$$

Мають місце нерівності

$$x_2(\varrho) < x_1(\varrho)$$

$$|\Delta_1| < |\Delta_2| < \ldots \quad |\Delta_{\nu_1(\rho)-1}| > |\Delta'_{\nu_1(\rho)}| \tag{26}$$

$$|\Delta''_{\nu_1(\rho)}| < |\Delta_{\nu_1(\rho)+1}| < \ldots \quad |\Delta_{\nu_2(\rho)-1}| \tag{27}$$

$$|\Delta_{\nu_2(\rho)+1}| > |\Delta_{\nu_2(\rho)+2}| > \ldots \quad > |\Delta_{n-2}|, \tag{28}$$

де через $\Delta'_{\nu_1(\rho)}$ позначено ту частину $\Delta_{\nu_1(\rho)}$, в якій вираз $(-1)^{m+\nu}\Delta_{\nu_1(\rho)}$ додатній, і через $\Delta''_{\nu_1(\rho)}$ ту її частину, де цей вираз від'ємний.

Відповідно до (25), (26) і (27) представимо суму $\sum\limits_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\Delta_\nu$ у вигляді

$$\sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\Delta_\nu=\sum_{\nu=1}^{\nu_1(\rho)}{}'\varphi(t_\nu)\Delta_\nu+\sum_{\nu=\nu_1(\rho)}^{\nu_2(\rho)-1}{}''\varphi(t_\nu)\Delta_\nu+\varphi(t_{\nu_2(\rho)})\Delta_{\nu_2(\rho)}+$$

$$+\sum_{\nu=\nu_2(\rho)+1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\Delta_\nu,$$

де значок $'$ у першій сумі означає, що замість останнього доданку беремо $\varphi(t_{\nu_1(\rho)})\Delta'_{\nu_1(\rho)}$, а значок $''$ у другій сумі, що замість першого її доданку беремо $\varphi(t_{\nu_1(\rho)})\Delta''_{\nu_1(\rho)}$.

Застосовуючи тепер перетворення Абеля, дістаємо

$$\sum_{\nu=1}^{\nu_1(\rho)}{}'\varphi(t_\nu)\Delta_\nu=\varphi(t_1\Sigma_1+\sum_{\nu=1}^{\nu_1(\rho)-1}[\varphi(t_{\nu+1})-\varphi(t_\nu)]\Sigma_{\nu+1},$$

де $$\Sigma_{\nu+1}=\Delta_{\nu+1}+\Delta_{\nu+2}+\ldots\Delta_{\nu_1(\rho)-1}+\Delta'_{\nu_1(\rho)}.$$

Але $$|\Sigma_{\nu+1}|<|\Delta_{\nu+1}|,\ \text{коли}\ \nu\leqslant\nu_1(\varrho)-|;$$

і $$|\varphi(t_1)|=|\varphi(t_1)-\varphi(0)|\leqslant 2\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}.$$

З останнього внаслідок (26) і (24) випливає

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\nu_1(\rho)}\varphi(t_\nu)\Delta_\nu\right|\leqslant 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^{\alpha}\left[d^{+}_{\nu_1(\rho)-1}+d^{+}_{1}\right] \tag{29}$$

Здійснюючи подібні перетворення над сумами

$$\sum_{\nu=\nu_1(\rho)}^{\nu_2(\rho)-1}{}''\varphi(t_\nu)\Delta_\nu \quad \text{і} \quad \sum_{\nu=\nu_2(\rho)+1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\Delta_\nu,$$

дістаємо

$$\left|\sum_{\nu=\nu_1(\rho)}^{\nu_2(\rho)-1}{}''\varphi(t_\nu)\Delta_\nu\right|\leqslant|\varphi(t_{\nu_2(\rho)-1})||\Delta_{\nu_2(\rho)-1}|+\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}[|\Delta_{\nu_1(\rho)+1}|+d^{-}_{\nu_1(\rho)+1}], \tag{30}$$

$$\left|\sum_{\nu=\nu_2(\rho)+1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\,\Delta_\nu\right| \leqslant |\varphi(t_{\nu_2(\rho)+1})|\,|\Delta_{\nu_2(\rho)+1}| + \left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha d^-_{\nu_2(\rho)+1} \tag{31}$$

Таким чином,

$$\left|\sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\,\Delta_\nu\right| \leqslant 2\left(\frac{\pi}{n}\right)^\alpha\Big[d^+_{\nu_1(\rho)-1} - d^+_1 + d^-_{\nu_1(\rho)+1} + \\ + \frac{1}{2}\,d_{\nu_2(\rho)+1}\Big] + S_{\nu_2(\rho)}, \tag{32}$$

де

$$S_{\nu_2(\rho)} = |\varphi(t_{\nu_2(\rho)-1})|\,|\Delta_{\nu_2(\rho)-1}| + |\varphi(t_{\nu_2(\rho)})|\,|\Delta_{\nu_2(\rho)}| + |\varphi(t_{\nu_2(\rho)+1})|\,|\Delta_{\nu_2(\rho)+1}|.$$

Розглянемо $S_{\nu_2(\rho)}$.

Досліджуючи функцію $f_2(x)$, можна переконатися в тому, що $\max|\Delta_\nu| \leqslant \frac{(1+\varrho^2)^2}{8\varrho(1-\varrho^2)^2}\,\frac{\pi^2}{4n^2}$; легко також встановити справедливість нерівності $(1-\varrho)^2 > \frac{4}{9\pi^2}\,x_2^2(\varrho)$ $\left(1-\varrho<\frac{1}{3}\right)$, що виявляє зв'язок між ϱ і $x_2(\varrho)$.

Звідси у випадку, коли $1-\varrho\leqslant\frac{1}{3}$, маємо

$$|\varphi(t_{\nu_2(\rho)})|\,|\Delta_{\nu_2(\rho)}| \leqslant |t_{\nu_2(\rho)}|^\alpha\,\frac{(1+\varrho^2)^2}{8\varrho(1-\varrho^2)^2}\,\frac{\pi^2}{4n^2} \leqslant \\ \leqslant \left(\frac{\omega+\nu_2(\varrho)\,\pi}{n}\right)^\alpha \frac{9\,\pi^2}{\left[32\left[\nu_2(\varrho)-\frac{1}{2}\right]\right]^2} \leqslant \frac{c}{n^\alpha\varrho}.$$

З другого боку, коли $1-\varrho\geqslant\frac{1}{3}$, дістаємо

$$|\varphi(t_{\nu_2(\rho)})|\,|\Delta_{\nu_2(\rho)}| \leqslant \frac{c}{n\varrho}$$

Аналогічними міркуваннями можна переконатися у справедливості таких самих оцінок для двох інших членів суми $S_{\nu_2(\rho)}$.

Беручи тепер до уваги нерівність (32), а також факт, що для будь-яких ν $(1\leqslant\nu\leqslant n-2)$ справедливі нерівності $d^+_\nu < \frac{A}{\varrho}$ і $d^-_\nu < \frac{B}{\varrho}$, де A і B абсолютні константи, дістаємо

$$\left|\frac{1}{\Pi\Gamma(r)}\int_0^1 \varrho^n\left(\lg\frac{1}{2}\right)^{r-1} d\varrho \sum_{\nu=1}^{n-2}\varphi(t_\nu)\,\Delta_\nu\right| < \frac{c}{n^{\alpha+r}}.$$

Необхідно ще оцінити

$$\sum_{\nu=1}^{n-2}\int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{[\varphi(x)-\varphi(t_\nu)]\sin x\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}. \tag{33}$$

Маємо

$$\sum_{\nu=1}^{n-2}\int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{[\varphi(x)-\varphi(t_\nu)]\sin x\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n-2}(-1)^{m+\nu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}\left[\frac{\psi_\nu(t_\nu+t)\sin(t_\nu+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+t}{2}}-\frac{\psi_\nu(t_\nu-t)\sin(t_\nu-t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}\right]\sin nt\,dt,$$

де

$$\psi_\nu(x)=\varphi(x)-\varphi(t_\nu).$$

Позначимо

$$A_\nu^+=\frac{\sin(t_\nu+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}\quad,\qquad A_\nu^-=\frac{\sin(t_\nu-t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}$$

$$\psi_\nu^+=\psi_\nu(t_\nu+t)\quad,\qquad \psi_\nu^+=\psi_\nu(t_\nu-t)\quad.$$

Легко бачити, що

$$\left(\psi_\nu^+-\psi_\nu^-\right)\left(A_\nu^++A_\nu^-\right)+\left(\psi_\nu^++\psi_\nu^-\right)\left(A_\nu^+-A_\nu^-\right)=2\left(\psi_\nu^+A_\nu^+-\psi_\nu^-A_\nu^-\right).$$

Таким чином,

$$\sum_{\nu=1}^{n-2}\int\limits_{t\left(\nu-\frac{1}{2}\right)}^{t\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\frac{[\varphi(x)-\varphi(t_\nu)]\sin x\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n-2}(-1)^{m+\nu}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}[\psi_\nu(t_\nu+t)+\psi_\nu(t_\nu-t)]\left[\frac{\sin(t_\nu+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu+t}{2}}-\right.$$

$$-\frac{\sin(t_\nu - t)}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{t_\nu - t}{2}}\Bigg]\sin nt\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n-2}(-1)^{m+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}[\psi_\nu(t_\nu+t)-\psi_\nu(t_\nu-t)]\Bigg[\frac{\sin(t_\nu+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu-t}{2}}+$$

$$-\frac{\sin(t_\nu - t)}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{t_\nu - t}{2}}\Bigg]\sin nt\,dt \tag{34}$$

і далі, враховуючи (24), (25), а також нерівність

$$|\psi_\nu(t_\nu+t)+\psi_\nu(t_\nu-t)|\leqslant 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha$$

$$\Bigg|\sum_{\nu=1}^{n-2}(-1)^{m+\nu}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}[\psi_\nu(t_\nu+t)+\psi_\nu(t_\nu-t)]\Bigg[\frac{\sin(t_\nu+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_\nu'-t}{2}}-$$

$$-\frac{\sin(t_\nu - t)}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho\sin^2\frac{t_\nu - t}{2}}\Bigg]\sin nt\,dt\Bigg|\leqslant 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha\Bigg(\sum_{\nu=1}^{\nu_1(\rho)}|\Delta_\nu|+$$

$$+\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\left|\frac{\sin(t_{\nu_1(\rho)}+t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_{\nu_1(\rho)}+t}{2}}-\frac{\sin(t_{\nu_1(\rho)}-t)}{(1-\varrho)^2+4\varrho\sin^2\frac{t_{\nu_1(\rho)}-t}{2}}\right|\sin nt\,dt+$$

$$+\sum_{\nu=\nu_1(\rho)+1}^{n-2}|\Delta_\nu|\Bigg)\leqslant 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha\Bigg[\sum_{\nu=1}^{\nu_1(\rho)-1}|d_\nu^+-d_\nu^-|+\max|d^+_{\nu\,(\rho)-1},\,d^-_{\nu\,(\rho)+1}|+$$

$$+\sum_{\nu=\nu_1(\rho)+1}^{n-2}|d_\nu^+-d_\nu^-|\Bigg]\leqslant 2\left(\frac{\pi}{2n}\right)^\alpha\Bigg[d^+_{\nu\,(\rho)-1}+\max|d^+_{\nu_1(\rho)-1},\,d^-_{\nu_1(\rho)+1}|+$$

$$+d^-_{\nu_1(\rho)+1}\Bigg]<\frac{c}{n^\alpha\varrho}. \tag{35}$$

Що стосується першого доданку правої частини рівності (33), то його можна оцінити, діючи подібно до того, як це зроблено в роботі [1]

$$\left| \sum_{\nu=1}^{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} [\psi_\nu(t_\nu + t) - \psi_\nu(t_\nu - t)] \left[\frac{\sin(t_\nu + t)}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho \sin^2 \frac{t_\nu - t}{2}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sin(t_\nu - t)}{(1-\varrho)^2 + 4\varrho \sin^2 \frac{t_\nu - t}{2}} \right] \sin nt\, dt \right| = \frac{2^\alpha}{\pi^2 \varrho} \frac{\lg(n-1)}{n^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v^\alpha \sin v\, dv +$$

$$+ \frac{c}{n^\alpha \varrho} \tag{36}$$

Беручи до уваги (22), (33), (34), (35) і (36), одержимо нерівність (14).

Підраховуючи числові значення констант в наших нерівностях, можна переконатись в тому, що за верхню грань для констант і A в рівності

$$E_{s_n}(W^{(r)} K H^{(\alpha)}) = K \left[\frac{2^{\alpha+1}}{\pi^2} \frac{\lg(n-1)}{n^{r+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} v^\alpha \sin v\, dv + \frac{A(\pi)^\alpha}{n^{r+\alpha}} \right] \quad (n \leqslant 3)$$

можна взяти число 41,4.

В заключення виражаю глибоку подяку І. Г. Соколову, під керівництвом якого була виконана ця робота.

ЛІТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский. Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 15 (1945).
2. И. Г. Соколов. ДАН СССР, 1955, т. 103, № 1.
3. С. Г. Селиванова. ДАН СССР, 1955, т. 105, № 5.
4. А. Н. Тверитин. ДАН СССР 64, № 6, (1953).

Робота поступила в травні 1957 р.