ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

В. Э. ЛЯНЦЕ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ИДЕМПОТЕНТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Линейный оператор J называется идемпотентным, если $J^2 = J$. Каждому самосопряженному оператору A в гильбертовом пространстве H соответствует разложение единицы $\{E(\sigma)\}$, представляющее собой некоторое семейство самосопряженных идемпотентных операторов $E(\sigma)$, т. е. операторов ортогонального проектирования. Если оператор A не является самосопряженным, то соответствующее ему разложение единицы, коль оно существует, не будет уже, вообще говоря, состоять из самосопряженных идемпотентных операторов, т. е., проекции не будут ортогональными. В настоящей статье изучаются некоторые свойства общих (неортогональных) идемпотентных операторов в комплексном гильбертовом пространстве. В частности, устанавливается связь между J и J^* и их областями значений, а также выводятся формулы, выражающие норму идемпотентного оператора через „углы наклона" соответствующих многообразий.

1. Напомним некоторые характеристики взаимного расположения многообразий в гильбертовом пространстве (см. [1]).

1.1 Пусть M линейное многообразие в гильбертовом пространстве H. Обозначим через P_M оператор ортогонального проектирования на M, а через

$$\operatorname{dis}(x, M) = \sqrt{\|x\|^2 - \|P_M x\|^2} \tag{1}$$

расстояние вектора x до многообразия M. Раствором пары линейных многообразий M_1 и M_2 в H называется (см. [1]) число

$$\Theta(M_1, M_2) = \max(\varrho_1, \varrho_2), \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \sup[\operatorname{dis}(x, M_2) \mid x \in M_1, \|x\| = 1], \\ \varrho_2 &= \sup[\operatorname{dis}(x, M_1) \mid x \in M_2, \|x\| = 1], \end{aligned} \tag{3}$$

Всегда $0 \leqslant \Theta(M_1, M_2) \leqslant 1$, причем, если $\Theta(M_1, M_2) < 1$, то многообразия M_1, M_2 имеют одинаковую размерность.

1.2 Пара линейных многообразий M_1 и M_2 называется правильной, если единственным вектором, принадлежащим к одному из них и ортогональным ко второму, является нулевой вектор. Для обозначения того, что пара многообразий M_1 и M_2 правильная, будем писать $(M_1, M_2) = 1$. В [1] доказано, что если $(M_1, M_2) = 1$, то $\varrho_1 = \varrho_2$ (см. [3]) и, следовательно,

$$\Theta(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) = \varrho_1 = \varrho_2. \tag{4}$$

Угол $\varphi^{(M)}$, определяемый соотношениями

$$0 \leqslant \varphi^{(M)} \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \sin\varphi^{(M)} = \Theta(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2), \tag{5}$$

называется максимальным углом наклона многообразий $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2$.

1.3. Пусть M и N произвольная пара линейных многообразий в H, вообще говоря, неправильная. Минимальный угол наклона этих многообразий $\psi^{(m)}$ определяется с помощью соотношений

$$0 \leqslant \psi^{(m)} \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \cos\psi^{(m)} = \sup[\,|(x, y)|\,|\,x \in \mathrm{M}, y \in \mathrm{N}, \|x\| = \|y\| = 1] \tag{6}$$

1.4. *Пусть* M_1 и M_2 — *правильная пара многообразий*, $(\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2) = 1$, а N_1 — *ортогональное дополнение* M_2 *в* $\mathrm{H}, \mathrm{H} = \mathrm{M}_2 (\mp) \mathrm{N}_1$. *Обозначим через* $\varphi^{(M)}$ *минимальный угол наклона* M_1 и N_1. *Тогда*

$$\varphi^{(M)} + \psi^{(m)} = \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $x = x_\varepsilon \in \mathrm{M}_1$, $\|x\| = 1$ и

$$\varrho(x, \mathrm{M}_2) = \sqrt{1 - \|P_{\mathrm{M}_2} x\|^2} \leqslant \sin\varphi^{(M)} - \varepsilon.$$

Положим

$$y = y_\varepsilon = (x - P_{\mathrm{M}_2} x) \cdot \|x - P_{\mathrm{M}_2} x\|^{-1}.$$

Как показывает несложное вычисление

$$(x, y) = \sqrt{1 - \|P_{\mathrm{M}_2} x\|^2} \leqslant \sin\varphi^{(M)} - \varepsilon,$$

а поскольку $P_{\mathrm{M}_2} y = 0$ и, следовательно, $y \in \mathrm{N}_1$ и $\|y\| = 1$, то в силу (6)

$$\cos\psi^{(m)} \leqslant \sin\varphi^{(M)} - \varepsilon$$

или, так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\cos\psi^{(m)} \leqslant \sin\varphi^{(M)} - \varepsilon.$$

Докажем теперь обратное неравенство. Пусть $x = x_\varepsilon \in \mathrm{M}_1$, $y = y_\varepsilon \in \mathrm{N}_1$, $\|x\| = \|y\| = 1$, и

$$(x, y) < \cos\varphi^{(m)} - \varepsilon;$$

(умножая один из векторов x или y на число вида e^{ia}, a — действительно, всегда можно добиться того, чтобы скалярное произведение (x, y) было действительным и $\geqslant 0$ без изменения его абсолютного значения). Положим

$$z = z_\varepsilon = (x - P_{\mathrm{M}_2} x)(1 - \|P_{\mathrm{M}_2} x\|^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Пусть $\lambda = (1 - \|P_{\mathrm{M}_2} x\|^2)^{\frac{1}{2}} = (x, z)$. Из (8) находим $x = \lambda z + P_{\mathrm{M}_2} x$. Принимая во внимание, что $P_{\mathrm{M}_2} y = 0$, ибо $y \in \mathrm{N}_1$, найдем

$$(x, y) = (\lambda z + P_{\mathrm{M}_2} x, y) = \lambda(z, y) = (x, z)(z, y),$$

Следовательно,

$$(x, y) \leqslant (x, z) \cdot \| z \| \cdot \| y \| = (x, z)$$

и. таким образом,

$$\sqrt{1 - \| P_{M_2} x \|^2} = (x, z) \leqslant \cos \psi^{(m)} - \varepsilon.$$

Отсюда

$$\sin \varphi^{(M)} \leqslant \cos \psi^{(m)}.$$

В силу условий $0 \leqslant \varphi^{(M)} \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \cos \varphi^{(m)} \leqslant \frac{\pi}{2}$ равенство (7) доказано.

1.5. *Для того, чтобы прямая сумма непересекающихся подпространств* M_1 *и* N_1 *гильбертова пространства* H *была полным пространством,* $\overline{M_1 + N_1} = M_1 + N_1$, *необходимо и достаточно, чтобы минимальный угол наклона* $\psi^{(m)}$ *подпространств* M_1 и N_1 *был больше нуля,* $\psi^{(m)} > 0$.

Это предложение сформулировано без доказательства в [1]. Ввиду того, что оно в дальнейшем существенно используется, ради полноты изложения приведем его доказательство.

Достаточность. Предположим, что $\varphi^{(m)} > 0$. Пусть $z = x + y$, где $x \in M_1$, $y \in N_1$. Полагая $\cos \gamma = |(x, y)| / \| x \| \cdot \| y \|$, имеем $\cos \gamma < < \cos \psi^{(m)}$. Если $(x, y) = |(x, y)| e^{i\delta}$, то как показывает несложное вычисление

$$\| z \|^2 = (\| x \| + \| y \| \cos \gamma \cos \delta)^2 + \| y \|^2 (1 - \cos^2 \gamma \cos^2 \delta)$$

и, следовательно,

$$\| z \|^2 \leqslant (\| x \| + \| y \| \cos \gamma \cos \delta)^2 + \| y \|^2 (1 - \cos^2 \psi^{(m)}). \tag{9}$$

Из (9) сразу вытекает полнота прямой суммы $M_1 + N_1$. В самом деле, если векторы $z_n = x_n + y_n$, $x_n \in M_1$, $y_n \in N_1$, $n = 1, 2, \ldots$ образуют фундаментальную последовательность, то в силу (9) $x_n \to x, y_n \to y, n \to \infty)$, а так как по условию M_1 и N_1 замкнутые подпространства, то $x \in M_1$, $y \in N_1$, так что $\lim z_n = z = x + y \in M_1 + N_1$.

Необходимость. Предположим, что прямая сума $M_1 + N_1$ есть полное пространство H_1. Обозначим через M_2 ортогональное дополнение N_1 в H_1, $H_1 = M_2 (+) N_1$. Проверим, что $(M_1, M_2) = 1$. Пусть $x \in M_1$ и x ортогонально к M_2. Тогда $x \in N_1$, а так как M_1 и N_1 не пересекаются, то $x = 0$. Наоборот, пусть $x \in M_2$ и x ортогонально к M_1. Тогда x ортогонально к N_1 и, следовательно, x ортогонально к $M_1 + N_1 = H_1$. Так как $x \in H_1$, то $x = 0$. Итак, $(M_1, M_2) = 1$. Проверим, далее, что $P_{M_2} M_1 = M_2$. Пусть $x \in M_2$. Представим x в виде $x = x_1 + y_1$, где $x_1 \in M_1$, $y_1 \in N_1$. Вследствие того, что $P_{M_2} y_1 = 0$, то $P_{M_2} x_1 = x$. Таким образом, действительно $P_{M_2} x_1 M_1 = M_2$. Отображение P_{M_2} пространства M_1 на M_2 является взаимно однозначным. Действительно, если $x \in M_1$ и $P_{M_2} x = 0$, то $x \in N_1$, а так как пространства M_1 и N_1 не пересекаются, то $x = 0$. Так как взаимно однозначное отображение P_{M_2} пространства M_1 на полное пространство M_2 непрерывно, то обратное отображение тоже непрерывно (см. [4]). Следовательно, существует такое $\mu > 0$, что для всех $x \in M_1$ $\| P_{M_2} x \| \geqslant \mu \| x \|$ очевидно, если $\varphi^{(M)}$ максимальный угол наклона M_1 и M_2, то $\sin \varphi^{(M)} \leqslant \sqrt{1 - \mu^2} < 1$ и $\varphi^{(M)} < < \frac{\pi}{2}$. Поэтому, в силу предложения 2.4 $\psi^{(m)} > 0$, что и требовалось доказать.

2. Выясним связь между ограниченным оператором J его областью значения $M = JH$ и областью значений $M^* = J^*H$ сопряженного ему оператора J^*.

2.1. *Для того, чтобы подпространства* M *и* M^* *служили областями значений ограниченных идемпотентных операторов* J *и* J^* *необходимо и достаточно, чтобы пара подпространств* M *и* M^* *была правильной,* $(M, M^*) = 1$ *и чтобы максимальный угол наклона* $\varphi^{(M)}$ *этих подпространств был меньше* $\frac{\pi}{2}$, $\varphi^{(M)} < \frac{\pi}{2}$.[1] *Пусть* $N = H \ominus M^*$, а $N^* = H \ominus M$. Тогда $(I - J)H = N$, $(I - J^*)H = N^*$.

Операторы J *и* J^* *определяются подпространствами* M *и* M^* *однозначно.*

Доказательство. Пусть J ограниченный идемпотентный оператор. Положим $M = JH$, $M^* = J^*H$. Если для некоторого $x_0 \in M^*$ условие $(x, x_0) = 0$ выполняется для всех $x \in M$, то $(y, x_0) = 0$ для всех $y \in H$, ибо так как $x_0 = J^* x_0$, то $(y, x_0) = (y, J^* x_0) = 0$ и следовательно $x_0 = 0$. Аналогично, если $x_0 \in M$ и $(x, x_0) = 0$ для всех $x \in M^*$, то $x_0 = 0$. Таким образом, доказано, что $(M, M^*) = 1$. Положим $N = (I - J)H$. Если $(x_0, x) = 0$ для всех $x \in M^*$, то $(Jx_0, y) = (x_0, J^* y) = 0$ для всех $y \in H^*$ и $Jx_0 = 0$, и таким образом $x_0 \in N$. Наоборот, если $x_0 \in N$, а $x_1 \in M^*$, то $(x_0, x_1) = (x_0, J^* x_1) = (Jx_0, x_1) = (0, x_1)$, т. е. x_0 ортогонально к M^*. Итак, N совпадает с ортогональным дополнением M^*, $H = M^* \oplus N$. Аналогично доказывается, что $H = M \oplus N^*$, где $N^* = (I - J^*)H$. Ввиду того, что прямая сумма $M + N = JH = (I - J) = H$ есть полное пространство, на основании 1.5 можно утверждать, что минимальный угол наклона $\psi^{(m)}$ подпространств M и N больше нуля или, в силу 1 4, что максимально угол наклона $\varphi^{(M)}$ подпространств M и M^* меньше $\frac{\pi}{2}$, $\Theta(M, M^*) < 1$.

Пусть идемпотентные операторы J_1 и J^*_1 имеют те же области значений M и M^*, что и операторы J и J^*. Имеем $J = (J^*)^* = (J_1{}^* J^*) = JJ = J_1$, т. е., $J = J_1$ и $J^* = J_1{}^*$. Таким образом, в подпространстве M и M^* определяют оператор J, а поэтому и J^*, однозначно.

Предположим, наконец, что $(M, M^*) = 1$ а $\Theta(M, M^*) < 1$. Пусть по-прежнему $N = H \ominus M^*$, $N^* = H \ominus M$. Подпространства M и N не пересекаются. В самом деле, если $x_0 \in M$ и $x_0 \in N$, то x_0 ортогонально к M^*, а так как $(M, M^*) = 1$, то $x_0 = 0$.

Аналогично проверяем, что подпространства M^* и N^* не пересекаются. Образуем прямые суммы $M + N = H_1$ и $M^* + N^* = H_2$. Так H_1, H_2 как $\Theta(M, M^*) < 1$, то, в силу 1.4, минимальный угол $\psi^{(m)}$ между M и N, равный минимальному углу между M^* и N^*, больше нуля и, в силу 1.5, прямые суммы H_1 и H_2 являются замкнутыми подпространствами. Проверим, что $H_1 = H_2 = H$. Очевидно, достаточно убедиться. что H_1 и H_2 плотно в H. Пусть $(x, x_0) = 0$ для всех $x \in H_1$. Тогда x_0 ортогонально к N и, следовательно, $x_0 \in M^*$, а так как x_0 ортогонально к M и $(M, M^*) = 1$, то $x_0 = 0$. Таким образом $H_1 = H$ и, вследствие того, что H_1 замкнуто, то $H_1 = H$. Точно также $H_2 = H$. Разложениям в прямые суммы $H = M + N$ и $H = M^* + N^*$ соответствуют идемпотентные операторы J и J' такие что $JH = M$, $(I - J)H = N$, $J'H = M^*$, $(I - J')H = N^*$. Проверим, что $J' = J^*$. Принимая во внимание, что для

[1] т. е. раствор $\Theta(M, M^*)$ был меньше единицы.

любых $x, y \in \mathrm{H}$ будет $(Jx, (I-J')y)=0$ и $((I-J)x, J'y)=0$, имеем $(Jx, y)= =(Jx, J'y)+((I-J)x, J'y)=(x, J'y)$. Наконец, оператор J ограничен, ибо он замкнут, так как $J=J'^*$ и задан на всем H.

2.2 *Пусть J ограниченный идемпотентный оператор в гильбертовом пространстве* H. *Положим* $\mathrm{M}=J\mathrm{H}$, $\mathrm{M}^*=J^*\mathrm{H}$

Тогда

$$\|J\|=(1-\Theta^2)^{-\frac{1}{2}}=\sec\varphi^{(M)},$$

где $\Theta=\Theta(\mathrm{M}, \mathrm{M}^*)$ раствор подпространств M и M^*, а $\varphi^{(M)}$ их максимальный угол наклона.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что $J=JP_{\mathrm{M}^*}$, где P_{M^*} оператор ортогонального проектирования на M^*. Действительно, для любых $x, y \in \mathrm{H}$ имеет $(JP_{\mathrm{M}^*}x, y)=(x, P_{\mathrm{M}^*}J^*y)=(Jx, y)$. Принимая во внимание, что $JP_{\mathrm{M}^*}=J$ и что $\|P_{\mathrm{M}^*}x\|\leqslant\|x\|$, приходим к выводу, что

$$\|J\|=\sup[\,\|Jx\|\,|\,x\in\mathrm{M}^*, \|x\|=1]. \tag{10}$$

Заметим далее, что если $x\in\mathrm{M}^*$, то x является ортогональной проекцией Jx на M^*

$$P_{\mathrm{M}^*}Jx=x \quad (x\in\mathrm{M}^*). \tag{11}$$

Действительно, $(P_{\mathrm{M}^*}Jx, y)=(x, J^*P_{\mathrm{M}^*}y)=(x, P_{\mathrm{M}^*}y)=(P_{\mathrm{M}^*}x, y)=(x, y)$ для любых $x\in\mathrm{M}^*$ и $y\in\mathrm{H}$. Следовательно, если $x\in\mathrm{M}^*$, то $(x, Jx-x)=0$ и $\|Jx\|^2=\|x\|^2+\|Jx-x\|^2=\|x\|^2+\|Jx\|^2\cdot\left\|\frac{Jx}{\|Jx\|}-\frac{x}{\|Jx\|}\right\|^2$, что может быть переписано в виде $\|Jx\|^2=\|x\|^2+\|Jx\|^2\left[\operatorname{dis}\left(\frac{Jx}{\|Jx\|}, M^*\right)\right]^2$, где $\operatorname{dis}\left(\frac{Jx}{\|Jx\|}, \mathrm{M}^*\right)$ расстояние вектора $\frac{Jx}{\|Jx\|}$ до подпространства M^*.

Таким образом, если $x\in\mathrm{M}^*$ и $\|x\|=1$, то

$$\|Jx\|=\left[1-\varrho^2\left(\frac{Jx}{\|Jx\|}, \mathrm{M}^*\right)\right]^{-1/2}$$

и

$$\sup\|Jx\|=\left[1-\sup\varrho^2\left(\frac{Jx}{\|Jx\|}, \mathrm{M}^*\right)\right]^{-1/2}.$$

В силу (10), (4) и (5) для завершения доказательства остается лишь проверить, что любой элемент $z\in\mathrm{M}$, удовлетворяющий условию $\|z\|=1$, имеет вид $\frac{Jx}{\|Jx\|}$, где $x\in\mathrm{M}^*$. Но это очевидно, ибо вообще $J\mathrm{M}^*=\mathrm{M}$. Действительно, так как $JP_{\mathrm{M}^*}=J$, то $J\mathrm{M}^*=J\,P_{\mathrm{M}^*}\mathrm{M}^*=JP_{\mathrm{M}^*}\mathrm{H}=J\mathrm{H}= =\mathrm{M}$.

2.3 *Пусть J ограниченный идемпотентный оператор в гильбертовом пространстве* H. *Положим* $\mathrm{M}=J\mathrm{H}$, $\mathrm{N}=(I-J)\mathrm{H}$.

Тогда

$$\|J\|=\operatorname{cosec}\psi^{(m)},$$

где $\psi^{(m)}$ минимальный угол между подпространствами M и N,

Это предложение вытекает из 2.2 и 1.4,

2.4. *Для любого ограниченного идемпотентного оператора J в гильбертовом пространстве* H

$$\|I-J\|=\|J\|.$$

Это очевидное следствие предложения 2.3.

2.5. *Для того, чтобы ограниченный идемпотентный оператор J в гильбертовом пространстве* H *был самосопряженным, т. е. служил оператором ортогонального проектирования, необходимо и достаточно, чтобы* $\|J\|=1$.

Действительно, если $\|J\|=1$, то, в силу 2.3, $\psi^{(m)}=\frac{\pi}{2}$ и подпространства $\mathrm{M}=J\mathrm{H}$ и $\mathrm{N}=(I-J)\mathrm{H}$ взаимно ортогональны так, что $\mathrm{H}=\mathrm{M}(\dotplus)\mathrm{N}$.

3. На основании изложенного выше весьма просто рассмотреть вопрос о монотонных последовательностях идемпотентных операторов.

3.1. *Пусть* $\{J_n\}$ — *такая последовательность идемпотентных операторов в гильбертовом пространстве* H, *для которой* $J_\mu J_\nu=J_\lambda$, *где* $\lambda=\min(\mu,\nu)$ и $\|J_n\|\leqslant c<\infty$ *при* $n=1,2,\ldots$ *Тогда эта последовательность сильно сходится к ограниченному идемпотентному оператору* J.

Доказательство. Положим $\mathrm{M}_n=J_n\mathrm{H}$, $\mathrm{M}_n{}^*=J_n{}^*\mathrm{H}$ $n=1,2,\ldots$, $\mathrm{M}_0=U_{n=1}^{\infty}\mathrm{M}_n$, $\mathrm{M}=\overline{\mathrm{M}}_0$, $M_0^*=U_{n=1}^{\infty}M_n^*$ $\mathrm{M}^*=\overline{\mathrm{M}}_0{}^*$. Убедимся в первую очередь, в том, что $(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)=1$.Пусть $x_0{}^*\in\mathrm{M}^*$ и $(x,x_0{}^*)=0$ для всех $x\in\mathrm{M}$. Очевидно, $J_n{}^*x_0{}^*=0$ при $n=1,2,\ldots$ ибо для всех $y\in\mathrm{M}$. $J_ny\in\mathrm{M}$ и $(y,J_n{}^*x_0{}^*)=(J_ny,x_0{}^*)=0$. Представим $x_0{}^*$ в виде $x_0{}^*=\lim J_n{}^*x_n{}^*$. Имеем

$$\|J_n{}^*x_n{}^*\|=\|J_n{}^*x_n{}^*-J_n{}^{*2}x_n{}^*\|\leqslant\|J_n{}^*\|\cdot\|x_0{}^*-x_nJ^*x_n\|\leqslant$$
$$\leqslant c\|x_0{}^*-J_n{}^*x_n{}^*\|\to0,\ (n\to\infty).$$

Поэтому $x_0{}^*=\lim J_n{}^*x_n{}^*=0$. Аналогично убеждаемся, что $x_0=0$, если $x_0\in\mathrm{M}$ и $(x_0,x^*)=0$. Убедимся теперь в том, что $\Theta=\Theta(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)\leqslant\leqslant(1-c^{-2})^{1/2}<1$.

Пусть $x\in\mathrm{M}$ и $\|x\|=1$. Представим x в виде $x=\lim x_n$, где $x_n\in\mathrm{M}_n$ и $\|x_n\|=1$. Очевидно, $\varrho(x,\mathrm{M}^*)=\lim\varrho(x_n,\mathrm{M}^*)$. Но так как $\mathrm{M}_n{}^*\subset\mathrm{M}^*$, то $\varrho(x_n,\mathrm{M}^*)\leqslant\varrho(x_n,\mathrm{M}_n{}^*)\leqslant\Theta_n$, где $\Theta_n=\Theta(\mathrm{M}_n,\mathrm{M}_n{}^*)$. Однако, в силу 2.2 и условия $\|J_n\|\leqslant c$, выполняется неравенство $\Theta_n\leqslant(1-c^{-2})^{1/2}$. Поэтому $\varrho(x,\mathrm{M}^*)\leqslant(1-c^{-2})^{1/2}$ и $\Theta<1$.

Так как $(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)=1$, $\Theta(\mathrm{M},\mathrm{M}^*)<1$, то в силу 2.1 подпространства M и M* определяют единственный идемпотентный оператор J такой, что $J\mathrm{H}=\mathrm{M}$, $J^*\mathrm{H}=\mathrm{M}^*$. При этом, $\|J\|=(1-\Theta^2)^{-1/2}\leqslant c$. Остается проверить, что $J=\lim J_n$. С этой целью заметим, прежде всего, что

$$JJ_n=J_nJ=J_n,\ n=1,2,\ldots \tag{11}$$

Это вытекает из того, что $\mathrm{M}_n\subset\mathrm{M}$ и $\mathrm{M}_n{}^*\subset\mathrm{M}^*$. Пусть x произвольный вектор. Представим J_x в виде $J_x=\lim\limits_{n\to\infty}J_nx_n$. Принимая во внимание (11), найдем $J_x=\lim\limits_{n\to\infty}J_nx+\lim\limits_{n\to\infty}J_n(J_nx_n-J_x)$. Так как $\|J_n\|<c$, то $\lim\limits_{n\to\infty}J_nJ\ (J_nx_n-J_n)=0$ и $J_x=\lim\limits_{n\to\infty}J_nx$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, М. А. Красносельский, Д. П. Мильман. О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах. Сборник трудов института математики АН УССР № 11, Киев, 1948.

2. М. Г. Крейн и М. А. Красносельский. Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов. Успехи матем. наук, т. III, вып. 3 (19), (1947).

3. Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман. Теория линейных операторов. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

4. С. С. Банах. Курс функціонального аналізу. «Радянська школа», Київ, 1948.