Я. Б. ЛОПАТИНСКИЙ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В настоящей статье рассматривается статическая задача определения смещений упругого однородного изотропного тела в конечной области с границей, кусочно удовлетворяющей условиям Ляпунова, по заданным на границе смещениям. Для определенности рассматривается плоский случай.

Систему уравнений Лямэ можно представить в матричной записи так:

$$(1-\varkappa)\,\Delta\,\boldsymbol{u}(x)+\partial\partial^1\,\boldsymbol{u}(x)=0\,. \tag{1}$$

Здесь $\varkappa=\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $u(x)=\begin{pmatrix}u_1(x)\\u_2(x)\end{pmatrix}$ — вектор смещения, $\partial=$ $=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\[2mm]\dfrac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}$, ∂' — соответствующая строка, λ, μ — постоянные Лямэ.

Определяется решение уравнения [1] в конечной области D с границей Γ по заданному смещению в точках границы.

$$\boldsymbol{u}(y)=f(y)\qquad(y\in\Gamma), \tag{2}$$

$f(y)$ — кусочно-непрерывная функция.

Граница Γ будет предполагаться удовлетворяющей условию Ляпунова.

Фредгольм [1] дал следующий метод сведения этой граничной задачи к эквивалентному регулярному интегральному уравнению.

Пусть

$$g(x,\nu)=\frac{(x,\nu)}{\pi}\left\{\frac{1-\varkappa}{|x|^2}E+\frac{2\varkappa}{|x|^4}xx'\right\}; \tag{3}$$

здесь $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, x' — соответствующая строка*, $(x,\nu)=x_1\nu_1+x_2\nu_2$, $|x|=+\sqrt{(x,x)}$, E — единичная матрица.

Тогда

$$\boldsymbol{u}(x)=\int_\Gamma g(x-z,\ \nu(z))\,\mu(z)\,d_zS \tag{4}$$

---

* Вообще A' будет обозначать матрицу полученную из A транспортированием и комплексным сопряжением.

($\nu(z)$ есть здесь единичный вектор внутренней нормали в точке $z \in \Gamma$) является решением уравнения (1) в области D, при любой интегрируемой матричной „плотности“ $\mu(z)$, заданной на границе Γ; при этом, если $y \in \Gamma$ есть точка, в которой нормаль $\nu(y)$ определена и непрерывна и в которой непрерывна функция μ, то при приближении $x \in D$ по некасательному пути к точке y контура, не являющейся угловой, функция $u(x)$, представленная формулой (4), стремится к пределу $u_+(y)$, равному

$$u_+(y) = \mu(y) + \int_\Gamma g(y - z, \nu(z)) \mu(z) d_z S. \tag{5}$$

Таким образом, решение задачи (1), (2) будет представлено формулой (4), если плотность μ, удовлетворяет интегральному уравнению

$$\mu(y) + \int_\Gamma g(y - z, \nu(z)) \mu(z) d_z S = f(y). \tag{6}$$

Как известно,

$$g(y - z, \nu(z)) = 0\left(\frac{1}{|y - z|^{1-\alpha}}\right). \tag{7}$$

Следовательно, интегральное уравнение (6) регулярно

Это замечание, а также формула скачка (5) справедливы и при любых комплексных значениях параметра $\varkappa$.

Теперь будет рассмотрен вопрос о разрешимости уравнения (6); используемый здесь прием хорошо известен для задачи Дирихле.

Пусть

$$\omega(x) = \frac{1 - \varkappa^2}{\pi}\left\{\lg|x| \cdot E - \varkappa \frac{xx'}{|x|^2}\right\}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered} A\left(\nu, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\{\nu_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varkappa\nu_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \varkappa\nu_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \varkappa^2 \nu_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \frac{\partial}{\partial x} + \\ + \left\{\nu_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \varkappa\nu_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \varkappa\nu_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \varkappa^2 \nu_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \frac{\partial}{\partial x_2} \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} B(u, v) = \frac{\partial v'}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v'}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \varkappa \frac{\partial v'}{\partial x_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} - \varkappa \frac{\partial v'}{\partial x_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_2} + \\ + \varkappa \frac{\partial v'}{\partial x_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \varkappa \frac{\partial v'}{\partial x_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_2} - \varkappa^2 \frac{\partial v'}{\partial x_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \\ + \varkappa^2 \frac{\partial v'}{\partial x_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_2}. \end{gathered} \tag{10}$$

Без труда проверяются тождества:

$$g(x, \nu) = A\left(\nu, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega(x), \tag{11}$$

$$-\int_\Gamma v'(x) A\left(\nu(x), \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) d_x S = \int_D B(u(x), v(x)) dx +$$

$$+\int v'(x)\{(1-\varkappa)\Delta+2\varkappa\,\partial\partial'\}\,u(x)\,dx\,, \tag{12}$$

$$-\int\limits_{\Gamma}\left\{v'(x),\ A\left(\nu(x),\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x)-\left[A\left(\nu(x),\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]'u(x)\right\}d_xS=$$

$$=\int\limits_{D}\{v'(x)[(1-\varkappa)\Delta+2\beta\,\partial\partial']\,u(x)-[((1-\varkappa)\Delta+2\varkappa\,\partial\partial')\,v(x)]'\,u(x)\}\,dx. \tag{13}$$

В формулах (2), (13) $\nu(x)$ обозначает единичный вектор внутренней нормали к границе Γ области D; справедливы эти формулы при обычных предположениях относительно матричных функций $u(x)$, $v(x)$ и области D, обеспечивающих применимость формулы Остроградского.

В частности, из формул (3), (11), (13), при $u(x)=\omega(x-y)$, $y\in D$ получается

$$-2v'(y)=\int\limits_{\Gamma}\left\{v'(x)\,g(x-y,\ \nu(x))-\right.$$

$$\left.-\left[A\left(\nu(x),\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x)\right]'\omega(x-y)\right\}d_xS-$$

$$-\int\limits_{D}[((1-\varkappa)\Delta+2\varkappa\,\partial\partial')\,v(x)]'\,\omega(x-y)\,dx. \tag{14}$$

Из формулы (14) при $v(y)=E$,

$$-2E=\int\limits_{\Gamma}g(x-y\,,\ \nu(x))\,d_xS\,.$$

Приближая точку y к границе, получают на основании (5):

$$E-\int g(y-z,\ \nu(z))\,d_zS=0\quad(y\in S) \tag{15}$$

Таким образом, единичная матрица является собственной функцией ядра $g(y-z,\ v(z))$, соответствующей собственному числу -1.

Следовательно, если $\psi'(z)$ есть решение уравнения

$$\psi'(z)+\int\limits_{\Gamma}\psi'(y)\,g(y-z\,,\ \nu(z))\,d_zS=0\,, \tag{16}$$

то

$$\int\psi(z)\,d_zS=0\,. \tag{17}$$

Пусть далее

$$v(x)=\int\omega(x-y)\,\psi(y)\,d_yS\,. \tag{18}$$

Очевидно, $v(x)$ удовлетворяет уравнению (1) при $x\,\bar{\in}\,\Gamma$. Применяя к $v(x)$ оператор $A\left(\nu(z),\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, где z некоторая не угловая точка Γ, и приближая x извне к точке z, легко получают, на основании (16),

$$\lim_{x \to z} A\left(\nu(x), \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) = \psi(z) + \int_{\Gamma} g(y - z, \nu(z)) \psi(y) d_y S = 0 .$$

Применяя формулу (12), при $u(x) = v(x)$, в области D_R, ограниченной Γ и кругом C_R достаточно большого радиуса R, находят:

$$-\int_{C_R} v'(x) A\left(\nu(x), \frac{\partial}{\partial x}\right) v(x) d_x = \int_{D_R} B(v(x), v(x)) \partial x. \tag{19}$$

Величины $v(x)$, $\dfrac{\partial v(x)}{\partial x}$ имеют на C_R на основании формул (8), (16) оценки вида $0\left(\dfrac{1}{R}\right)$, $0\left(\dfrac{1}{R^2}\right)$ соответственно.

Таким образом, интеграл в левой части формулы (19) стремится к нулю при R, стремящемся к бесконечности. Формула (19) в пределе принимает вид:

$$\int_{D_\infty} B(v, v) \partial x = 0 . \tag{20}$$

Рассматривая это уравнение, как квадратное уравнение относительно $\varkappa$ (сравнить с (10)), можно легко показать, что при $v(x)$ непостоянном в D_∞, оно не имеет корней в единичном круге.

Таким образом, при $|\varkappa| < 1$ из (20) заключают, что $v(x)$ постоянно в D_∞ и, следовательно, по формуле (18), постоянно и на Γ.

По формуле (12), при $v(x) = u(x)$, примененной на этот раз к области D, легко показать, что задача типа Дирихле для уравнения (1) имеет в области D единственное решение при $|\varkappa| < 1$. Таким образом, $v(x)$ постоянно на всей плоскости.

Принимая теперь к формуле (18) оператор $A\left(\nu(z), \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ и приближая x к точке $z \leqslant \Gamma$ извне и изнутри области D, получаем

$$\psi(z) = 0 \qquad (y \in \Gamma).$$

Отсюда вытекает, что при $|\varkappa| < 1$ интегральное уравнение (6) однозначно разрешимо и, следовательно, резольвента этого уравнения является аналитической матричной функцией $\varkappa$ в круге $|\varkappa| < 1$.

Это же имеет тем самым место и для решения $\mu(y)$ уравнения (5) и, по формуле (4), для решения $u(x)$ задачи (1), (2).

Из проведенных рассуждений следует теорема: *При сделанных предположениях относительно области D и граничных значениях $f(x)$, решение задачи* (1), (2) ***разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся при*** $|\varkappa| < 1$ ***ряд по степеням*** $\varkappa$.

По формуле (4) этот ряд можно неограниченно почленно дифференцировать по x в области D.

Если

$$u(x) = u(x, \varkappa) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} \varkappa^{\kappa} u_{\kappa}(x),$$

то матрицы $u_\kappa(x)$ определяются условиями:

$$\Delta u_0(x)=0, \qquad \Delta u_\kappa(x)=\Delta u_{\kappa-1}-2\partial\partial' u_{\kappa-1},$$

$$u_0(y)=f(y), \qquad u_\kappa(y)=0 \, (\kappa=1,2,\cdots; \;\; x\in D, \; y\in \Gamma).$$

Определение $u_\kappa(x)$ сводится, таким образом, к последовательному решению задач Дирихле.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Fredholm, Arkiv for matematik, astronomi och fysik, 2, № 28, (1906) 1—8.

Работа поступила в апреле 1957 г.