ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

А. И. ВОЛЬПЕРТ

НОРМАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ПЛОСКОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, применение теории сингулярных интегральных уравнений в исследовании граничных задач для эллиптических уравнений с двумя независимыми переменными оказалось чрезвычайно плодотворным. Основные результаты в этом направлении получены И. Н. Векуа (см. [1], [2]). Используя найденные им общие представления решений, И. Н. Векуа свел граничные задачи для определенного класса уравнений и систем уравнений, важного для приложений, к решению эквивалентных сингулярных интегральных уравнений, исследовал вопрос разрешимости указанных граничных задач и получил формулу для вычисления их индекса.

Фундаментальные матрицы для эллиптических систем уравнений, построенные Я. Б. Лопатинским [4], [5], дали возможность дальнейших приложений указанного метода. Некоторым таким приложениям посвящена настоящая работа.

В работе рассматривается граничная задача, состоящая в нахождении решения эллиптической системы уравнений

$$A(z)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+B(z)u+\iint\limits_D R(z,\zeta)\,u(\zeta)\,d\xi\,d\eta=f(z) \tag{1}$$

при условии на границе Γ области D вида

$$a(t)\,u(t)+\int\limits_\Gamma b(t,t_1)\,u(t_1)\,ds_1=0 \qquad (t\in\Gamma), \tag{2}$$

где A, B, R — заданные вещественные квадратные матрицы порядка $2r$ $(r\geqslant 1)$, a, b — матрицы, состоящие из r строк и $2r$ столбцов, u — искомый, f — заданные функциональные столбцы; $z(x,y)$, $\zeta(\xi,\eta)$ — точки области D.

Устанавливается условие, при котором как данная, так и сопряженная однородные задачи содержат конечные числа линейно независимых решений и имеет место нормальная разрешимость, состоящая в том, что для разрешимости граничной задачи необходима и достаточна ортогональность правой части (f) ко всем решениям однородной сопряженной задачи. Выводится формула для вычисления индекса рассматриваемой граничной задачи, т. е. разности между числом линейно независимых решений данной и сопряженной однородных задач, которая затем применяется к вычислению индекса задачи Дирихле для эллиптической системы уравнений второго порядка.

В § 1 система (1) приводится к каноническому (в указанном ниже смысле) виду. Приведение к такому виду вызвано следующими соображениями. Рассмотрим вопрос, какой вид должна иметь матрица A, входящая в (1), чтобы имели место следующие утверждения:

1) непрерывной деформацией коэффициентов без нарушения условий эллиптичности, конечности числа линейно независимых решений данной и сопряженной однородных задач и величины индекса можно привести систему (1) к системе, состоящей из систем уравнений Коши-Римана (при $f=0$);

2) к системам (1) с матрицей такого вида может быть сведена линейным неособым преобразованием с гладкими коэффициентами произвольная эллиптическая система (1) с достаточно гладкими коэффициентами.

Оказывается, достаточно взять матрицу вида

$$A(z)=\begin{pmatrix} A^{(1)}(z) & -A^{(2)}(z) \\ A^{(2)}(z) & A^{(1)}(z) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

удовлетворяющую условию: все собственные значения матрицы $A^{(1)}(z)+ i A^{(2)}(z)$ имеют положительные коэффициенты при мнимых частях.* Под системой уравнений первого порядка канонического вида и понимается система (1), в которой матрица A имеет вид (3). Приведение к каноническому виду оказывается весьма существенным для вычисления индекса граничной задачи и, собственно, с этой целью оно и делается; для получения других результатов настоящей работы оно не необходимо.

В § 2 рассмотрен один специальный случай задачи Коши, в § 3 указан способ приведения граничной задачи к сингулярным интегральным уравнениям с ядром типа Коши. В §§ 4—6 сформулированы и доказаны теоремы о сопряженных граничных задачах. При этом оказалось удобным рассматривать операторы в пространстве C, связанные с этими задачами. При доказательстве указанных теорем используются результаты § 2 и § 3. Для системы, имеющей канонический вид, условие, при котором справедливы теоремы о конечности числа линейно независимых решений данной и сопряженной однородных задач и о нормальной разрешимости, принимает весьма простой вид:

$$\det[a_1(t)+ia_2(t)]\neq 0$$

для всех точек $t\in\Gamma$, где $(a_1, a_2)=a$ (см. [2]). Индекс $\varkappa$ граничной задачи (1), (2) вычисляется по формуле

$$\varkappa=\frac{1}{\pi}[\arg\det(a_1+ia_2)]_\Gamma+r, \tag{4}$$

---

* Доказательство утверждения 1) для матрицы вида (3) было бы совершенно тривиальным, если бы приведенная ниже формула (4) могла быть получена независимо от него. Однако, формула (4) получена в § 6 как следствие формулы Н. И. Мусхелишвили для индекса системы сингулярных интегральных уравнений и утверждения 1), доказанного для одного специального выбора граничных условий (2).

где $2r$ — число уравнений в системе (1), $[\,]_\Gamma$ — обозначает приращение функции, заключенной в скобки, при обходе Γ в положительном направлении.

В § 7 из (4) получена формула для вычисления индекса граничной задачи для случая системы, не приведенной к каноническому виду. В § 8 полученный результат прилагается к вычислению индекса задачи Дирихле для системы уравнений 2-го порядка. Заметим, что к задаче (1), (2) может быть приведена не только задача Дирихле, но и достаточно общая граничная задача для систем уравнений высшего порядка с двумя независимыми переменными (с этой целью, собственно, и введено интегральное слагаемое в (1) (см. [3]).

1. ПРИВЕДЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ

Приведение линейной эллиптической системы дифференциальных уравнений первого порядка к виду, который будем называть каноническим, основан на следующей теореме.

Теорема. *Пусть $A(z)$ — вещественная квадратная матрица порядка $2r$, непрерывно дифференцируемая в некоторой ограниченной односвязной замкнутой области $\tilde{D}$ l раз по x и y $(z=x+iy)$ и имеющая при любом $z \in \tilde{D}$ только невещественные собственные значения. Тогда существует квадратная матрица $P(z)$ порядка $2r$, непрерывно дифференцируемая в $\tilde{D}$ l раз по x и y, обратимая при любом $z \in \tilde{D}$ такая, что ее последние r строк комплексно сопряжены с первыми и имеет место равенство*

$$P(z)A(z)P^{-1}(z)=\begin{pmatrix} A_0(z) & 0 \\ 0 & \overline{A_0(z)} \end{pmatrix}^*, \tag{1.1}$$

где $A_0(z)$ — квадратная матрица порядка r, все собственные значения которой при любом $z \in \tilde{D}$ имеют положительные коэффициенты при мнимых частях.

Доказательство. Обозначим через M множество точек комплексной λ — плоскости, на которое отображается область $\tilde{D}$ всеми корнями $\lambda(z)$ уравнения

$$\det\,[A(z)-\lambda(z)]=0^{**}$$

Множество M ограничено и замкнуто. Так как матрица $A(z)$ не имеет вещественных собственных значений, то при достаточно большом R замкнутый контур γ, состоящий из отрезка $[-R,\ R]$ вещественной оси λ — плоскости и полуокружности $|\lambda|=R,\ Im\lambda>0$, содержит внутри себя всю ту часть множества M, которая лежит в полуплоскости $Im\lambda>0$, и находится от M на положительном расстоянии. Рассмотрим матрицу

---

* Здесь в дальнейшем черта над матрицей обозначает переход к комплексно сопряженной матрице; z — как точку плоскости, так и ее аффикс.

** Для простоты записи здесь и в дальнейшем пишется $A-\lambda$ вместо $A-E\lambda$, где E — единичная матрица.

$$X(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} [A(z) - \lambda]^{-1} d\lambda \qquad (z \in \tilde{D}).$$

Очевидно, $X(z)$ имеет непрерывные в $\tilde{D}$ производные по x и y до порядка l.

Покажем, что $X(z)$ удовлетворяет условиям основной теоремы И. Г. Петровского [9] о приведении матриц к каноническому виду. Для этого зафиксируем z и приведем постоянную матрицу $A(z)$ к квазидиагональной (жордановой) форме. Пусть

$$C(z)\,A(z)\,C^{-1}(z) = \tilde{A}(z), \tag{1.2}$$

причем предполагается, что $C(z)$ выбрано так, что

$$\tilde{A}(z) = \begin{pmatrix} N(z) & 0 \\ 0 & \overline{N}(z) \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где $N(z)$ — квадратная матрица порядка r, все собственные значения которой имеют положительные коэффициенты при мнимой части. При таком выборе $C(z)$ (который, очевидно, возможен)

$$X(z) = C^{-1}(z)\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}[\tilde{A}(z) - \lambda]^{-1} d\lambda \cdot C(z) =$$

$$= C^{-1}(z)\begin{pmatrix} -E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C(z), \tag{1.4}$$

где E_r — единичная матрица порядка r. Последнее равенство легко получается непосредственным вычислением входящего в него интеграла. Из (1.4) следует, что элементарные делители матрицы $X(z) - \lambda$ не зависят от $z \in D$ и все первой степени. Поэтому к матрице $X(z)$ применима теорема И. Г. Петровского, на основании которой существует обратимая матрица $\tilde{P}(z)$, непрерывно дифференцируемая в $\tilde{D}$ l раз по x и y, такая, что

$$\tilde{P}(z)\,X(z)\,\tilde{P}^{-1}(z) = \begin{pmatrix} -E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

при всех $z \in \tilde{D}$. Обозначим $P_1(z)$ $(P_2(z))$ матрицу, состоящую из r первых (последних) строк матрицы $\tilde{P}(z)$, так что

$$\tilde{P}(z) = \begin{pmatrix} P_1(z) \\ P_2(z) \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Покажем, что в качестве матрицы $P(z)$, указанной в формулировке теоремы, можно взять матрицу

$$P(z) = \begin{pmatrix} P_1(z) \\ \overline{P_1(z)} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Очевидно, эта матрица непрерывно дифференцируема в $\tilde{D}$ l раз по x и y. Докажем, что она обратима. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что ее строки, которые мы обозначим

$$a_1(z), \ldots, \quad a_r(z), \quad \overline{a_1(z)}, \ldots, \quad \overline{a_r(z)}, \tag{1.8}$$

линейно независимы при любом $z \in \widetilde{D}$.

Заметим сначала, что из равенства

$$Re\{X(z)\} = Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-R}^{R}[A(z)-\lambda]^{-1}d\lambda + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R^-}[A(z)-\lambda]^{-1}d\lambda\right\} = Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}[A(z)-\lambda]^{-1}d\lambda\right\},$$

справедливого на основании теоремы Коши для всех достаточно больших R, следует

$$Re\{X(z)\} = \lim_{R\to\infty} Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}[A(z)-\lambda]^{-1}d\lambda\right\} = -\frac{1}{2}E.$$

Здесь C_R — полуокружность $|\lambda| = R$, $Im\,\lambda > 0$.

Отсюда

$$a_k(z)\,X(z) + a_k(z)\overline{X(z)} = -\,a_k(z) \qquad (k = 1, \ldots, r).$$

С другой стороны, из (1.5)

$$a_k(z)\,X(z) = -\,a_k(z) \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{1.9}$$

и, следовательно,

$$\overline{a_k(z)}\,X(z) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r). \tag{1.10}$$

Пусть теперь при некотором $z \in \widetilde{D}$ имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{r}\beta_k\,a_k(z) + \sum_{k=1}^{r}\gamma_k\,\overline{a_k(z)} = 0.$$

Умножая его справа на $X(z)$ и з(1 .9) и (1.10) получим

$$\sum_{k=1}^{r}\beta_k\,a_k(z) = 0.$$

Но векторы $a_k(z)$ $(\kappa = 1, \ldots, r)$ линейно независимы, что следует из обратимости матрицы $P(z)$. Поэтому $\beta_k = \gamma_k = 0$ $(\kappa = 1, \ldots, r)$, что и доказывает линейную независимость векторов (1.8) при любом $z \in \widetilde{D}$.

Для полного доказательства теоремы остается доказать равенство (1.1).

Обозначим

$$\widetilde{C}(z) = C(z)\,\widetilde{P}^{-1}(z). \tag{1.11}$$

Тогда из (1.4) и (1.5) следует

$$\tilde{C}(z)\begin{pmatrix}-E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\tilde{C}^{-1}(z)=\begin{pmatrix}-E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица $\tilde{C}(z)$ имеет вид

$$\tilde{C}(z)=\begin{pmatrix}C_1(z) & 0\\ 0 & C_2(z)\end{pmatrix},$$

где $C_1(z)$ и $C_2(z)$ — квадратные матрицы порядка r. Отсюда и из (1.3)

$$\tilde{C}^{-1}(z)\tilde{A}(z)\tilde{C}(z)=\begin{pmatrix}A_0(z) & 0\\ 0 & \tilde{A}_0(z)\end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

где

$$A_0(z)=C_1^{-1}(z)N(z)C_1(z),\ \tilde{A}_0(z)=C_2^{-1}(z)\overline{N(z)}C_2(z),$$

причем, очевидно, все собственные значения матрицы $A_0(z)$ имеют положительные коэффициенты при мнимых частях. Из (1.12), (1.11), (1.2) и (1.6) следует

$$\begin{pmatrix}A_0(z) & 0\\ 0 & \tilde{A}_0(z)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P_1(z)\\ P_2(z)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1(z)\\ P_2(z)\end{pmatrix}A(z),$$

так что

$$A_0(z)P_1(z)=P_1(z)A(z),$$
$$\overline{A_0(z)}\,\overline{P_1(z)}=\overline{P_1(z)}A(z).$$

Отсюда и из (1.7) следует (1.1). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь эллиптическую систему уравнений.

$$A(z)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+B(z)u+\iint_D R(z,\zeta)u(\zeta)\,d\xi\,d\eta=f(z), \tag{1.13}$$

где $A(z)$, $B(z)$, $R(z,\zeta)$ — вещественные квадратные матрицы порядка $2r$, определенные при $z=x+iy\in\tilde{D}$, $\zeta=\xi+i\eta\in D\subseteq\tilde{D}$, при чем $A(z)$ имеет непрерывные по x и y производные в $\tilde{D}$ до порядка $l\geqslant 1$. Пусть $P(z)$ — матрица, построенная по $A(z)$ так, как это сделано в теореме. Тогда $P^{-1}(z)$ на основании (1.7) имеет вид

$$P^{-1}(z)=\left(P^{(1)}(z)-iP^{(2)}(z),\ P^{(1)}(z)+iP^{(2)}(z)\right), \tag{1.14}$$

где $P^{(1)}(z)$, $P^{(2)}(z)$ — вещественные матрицы, состоящие из $2r$ строк и r столбцов.

Обозначим

$$P_*(z)=(P^{(1)}(z),P^{(2)}(z))=\frac{1}{2}P^{-1}(z)\begin{pmatrix}E_r & iE_r\\ E_r & -iE_r\end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

Очевидно, $P_*(z)$ — обратимая при всех $z\in\tilde{D}$ вещественная матрица, имеющая непрерывные по x и y производные до порядка l в области $\tilde{D}$. Из (1.1) следует, что

$$P_*^{-1}(z)\,A(z)\,P_*(z)=\begin{pmatrix} A^{(1)}(z) & -A^{(2)}(z)\\ A^{(2)}(z) & A^{(1)}(z)\end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

где $A^{(1)}(z)+i\,A^{(2)}(z)=A_0(z)$.

Сделаем в системе (1.13) преобразование

$$u(z)=P_*(z)\,u_*(z). \tag{1.17}$$

Получим

$$A_*(z)\frac{\partial u_*}{\partial x}-\frac{\partial u_*}{\partial y}+B_*(z)\,u_*+\iint\limits_D R_*(z,\zeta)\,u_*(z)\,d\xi\,d\eta=f_*(z), \tag{1.18}$$

где

$$A_*(z)=P_*^{-1}(z)\,A(z)\,P_*(z),$$

$$B_*=P_*^{-1}A\frac{\partial P_*}{\partial x}-P_*^{-1}\frac{\partial P_*}{\partial y}+P_*^{-1}BP_*,$$

$$R_*(z,\zeta)=P_*^{-1}(z)\,R(z,\zeta)\,P_*(\zeta),$$

$$f_*(z)=P_*^{-1}(z)f(z).$$

Таким образом, доказано, что эллиптическая система уравнений (1.13) приводится гладким неособым линейным преобразованием к каноническому виду. Поэтому в дальнейшем (§§ 2—6) ограничимся рассмотрением эллиптических систем уравнений первого порядка, имеющих канонический вид.

2. ЗАДАЧА КОШИ

Пусть D — конечная односвязная область с гладкой в смысле Гельдера границей Γ. Рассматривается эллиптический дифференциальный оператор

$$Lu=A(z)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+B(z)\,u+\iint\limits_D R(z,\zeta)\,u(\zeta)\,d\xi\,d\eta, \tag{2.1}$$

где A, B, R — вещественные квадратные матрицы порядка $2r$, u — столбец, состоящий из $2r$ элементов

$$z=x+iy, \qquad \zeta=\xi+i\eta.$$

Предполагается, что матрица $A(z)$ имеет первые непрерывные в смысле Гельдера производные по x и y в некоторой области $\tilde{D}\supset D+\Gamma$; $B(z)$ — непрерывна в смысле Гельдера в $\tilde{D}$;

$$R(z,\zeta)=\frac{\tilde{R}(z,\zeta)}{|z-\zeta|^{\alpha}}, \qquad (0\leqslant\alpha<2).$$

где $\tilde{R}(z,\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных z и ζ в $\tilde{D}$.

Наконец, предполагается, что система $Lu=f$ имеет канонический вид в смысле § 1. Будет рассматриваться только тот случай задачи Коши, когда условия заданы на всем контуре Γ, а решение ищется во всей области. Для дальнейшего задачу Коши удобнее сформулировать для оператора

$$Mv = -\frac{\partial A'(z)\,v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + B'(z)\,v + \iint\limits_{D} R'(\zeta, z)\,v(\zeta)\,d\xi\,d\eta, \qquad (2.2)$$

сопряженного с (2.1) в смысле Лагранжа. Обозначим через K класс функциональных столбцов, имеющих первые непрерывные производные в D, непрерывных в $D+\Gamma$ и удовлетворяющих условию Гельдера на Γ. Рассмотрим следующую задачу.

З а д а ч а 1. Найти функциональный столбец v класса K, удовлетворяющий системе

$$Mv = 0$$

в области D и условию

$$v|_{\Gamma} = g,$$

где g — заданный на Γ функциональный столбец, непрерывный в смысле Гельдера. Необходимые условия разрешимости задачи 1 непосредственно следуют из формулы Грина

$$\iint\limits_{D} [(Mv)'u - v'L\,u]\,dx\,dy = \int\limits_{\Gamma} v'(z)\,\sigma(z)\,u(z)\,ds, \qquad (2.3)$$

где

$$\sigma(z) = A(z)\cos(nx) - \cos(ny), \qquad (2.4)$$

(nx), (ny) — углы внутренней нормали с осями x и y соответственно. Очевидно, для разрешимости задачи 1 необходимо, чтобы

$$\int\limits_{\Gamma} g'(z)\,\sigma(z)\,u(z)\,ds = 0$$

для всех решений u класса K системы

$$Lu = 0.$$

Путем сведения задачи 1 к интегральным уравнениям Фредгольма будет показано, что это условие является также и достаточным.

Для этого надо будет рассмотреть интегральные операторы, ядрами которых являются фундаментальные матрицы для системы с постоянными коэффициентами.

Такие матрицы для общего случая (без ограничения на число измерений и порядок дифференцирования) были построены Я. Б. Лопатинским [4]. Укажем, в частности, вид этой матрицы в рассматриваемом случае. Пусть τ — некоторая фиксированная точка области $\tilde{D}$. Тогда матрица

$$\psi_0(\tau, \zeta - z) = \frac{1}{2\pi} j\,[(\xi - x) + A(\tau)(\eta - y)]^{-1}, \qquad (2.5)$$

где

$$J=\begin{pmatrix}0 & -E_r\\ E_r & 0\end{pmatrix},\ z=x+iy,\ \zeta=\xi+i\eta, \tag{2.6}$$

E_r — единичная матрица порядка r, является фундаментальной матрицей системы

$$A(\tau)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{2.7}$$

Она обладает следующими свойствами:

1. При $z\neq\zeta$ матрица (2.5) удовлетворяет системе (2.7).

2. Для любого столбца $f(z)$, удовлетворяющего условию Гельдера в некоторой окрестности точки z, имеет место равенство

$$f(z)=\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{C_\rho}\psi_0(\tau,\zeta-z)\,[A(\tau)\cos(n\xi)-\cos(n\eta)]f(\zeta)\,ds, \tag{2.8}$$

где C_ρ — окружность с центром в точке z радиуса ϱ, n — внутренняя нормаль к ней.

Рассмотрим теперь интеграл

$$u(z)=\iint\limits_D\varphi_0(\zeta,z)\,\alpha(\zeta)\,d\xi\,d\eta \qquad (\zeta=\xi+i\eta), \tag{2.9}$$

где

$$\varphi_0(\zeta,z)=\psi_0(z,\zeta-z), \tag{2.10}$$

$\alpha(\zeta)$ — функциональный столбец, состоящий из $2r$ элементов. Как показано Я. Б. Лопатинским [5] в общем случае, при наличии у столбца $\alpha(\zeta)$ непрерывных первых производных в D $u(z)$ также имеет первые непрерывные производные в D, и имеет место равенство

$$Lu(z)=\alpha(z)+\iint\limits_D q(\zeta,z)\,\alpha(\zeta)\,d\xi\,d\eta, \tag{2.11}$$

где

$$\begin{gathered}q(\zeta,z)=L\varphi_0(\zeta,z)=-\frac{1}{2\pi}J\,[(\xi-x)+A(z)(\eta-y)]^{-1}\times\\ \times\left[A(z)\frac{\partial A(z)}{\partial x}-\frac{\partial A(z)}{\partial y}\right][(\xi-x)+A(z)(\eta-y)]^{-1}(\eta-y)+\\ +\frac{1}{2\pi}B(z)\,J\,[(\xi-x)+A(z)(\eta-y)]^{-1}+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D R(z,\zeta_1)\,J\,[(\xi-\xi_1)+\\ +A(\zeta_1)(\eta-\eta_1)]^{-1}d\xi_1\,d\eta_1\,(\zeta_1=\xi_1+i\eta_1).\end{gathered} \tag{2.12}$$

Если $\alpha(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера в $D+\Gamma$, то к интегралу (2.9) применяются результаты С. Г. Михлина [7] о дифференцировании интегралов со слабой особенностью, и утверждение о существовании непрерывных первых производных в D y $u(z)$ и равенство (2.11) остаются справедливыми.

Отсюда, в частности, следует, что если интегральное уравнение Фредгольма*

$$\alpha(z)+\iint\limits_{D} q(\zeta,z)\,\alpha(\zeta)\,d\xi\,d\eta=f(z) \tag{2.13}$$

разрешимо для данного $f(z)$ в класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера в $D+\Gamma$, то уравнение

$$Lu=f \tag{2.14}$$

разрешимо в класс функций u, удовлетворяющих условию Гельдера в $D+\Gamma$ и имеющих первые непрерывные производные в D. Обратное, вообще говоря, неверно. Покажем, как можно дополнить ядро интеграла (2.9) до некоторого ядра $K(\zeta, z)$ так, чтобы полученное указанным выше путем интегральное уравнение было разрешимо при тех же частях f, при которых разрешимо уравнение (2.14). Обозначим через H линейное многообразие функциональных столбцов, состоящих из $2r$ элементов, которые являются функциями, удовлетворяющими условию Гельдера в $D+\Gamma$.

Пусть F_1 — линейное многообразие, состоящее из тех $f\in H$, для которых разрешимо уравнение (2.13) в H; F — линейное многообразие, состоящее из тех $f\in H$, для которых разрешимо уравнение (2.14) в классе функций $u\in H$, имеющих непрерывные производные в D. Очевидно, $F_1\subseteq F$ и H разлагается в прямую сумму

$$H=F_1\dotplus H_1,$$

где H_1 — конечномерное линейное многообразие решений из H однородного уравнения, союзного с (2.13) (заметим, что каждое непрерывное решение этого уравнения принадлежит H). Поэтому F может быть представлено в виде

$$F=F_1\dotplus G, \tag{2.15}$$

где $G=F\cap H_1$. Если $G=0$, то $F=F_1$ и полагаем $K(\zeta, z)=\varphi_0(\zeta, (z)$. В противном случае обозначим $g_1,\ldots,g_n$ — базис G, и пусть $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ — линейно независимые решения из H однородного уравнения, соответствующего (2.13). Существование n таких решений следует из того, что линейное многообразие непрерывных решений однородного уравнения соответствующего (2.13), принадлежит H и имеет размерность, равную размерности H_1. Так как $G\subseteq F$, то существуют функции $u_j\in H$, имеющие непрерывные первые производные в D и удовлетворяющие уравнению.

$$Lu_j=g_j \qquad (j=1,\ldots,n).$$

Пусть, наконец, χ_j — функциональные столбцы, непрерывно дифференцируемые в $D+\Gamma$ и удовлетворяющие условию

---

* Систему уравнений, записанную в матричной форме в виде одного уравнения, будем и в дальнейшем называть просто «уравнение» вместо «система уравнений». Функциональные столбцы там, где это не вызовет неясностей, будем называть просто функциями.

$$(\chi_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases} \qquad (i, j = 1, \ldots, n),$$

причем под (u, v) здесь и в дальнейшем понимается:

$$(u, v) = \iint_D u'(z)\, v(z)\, dx\, dy,$$

u, v — функциональные столбцы, состоящие из $2r$ элементов, $'$ означает транспонирование.

Тогда упомянутое выше дополнение ядра интеграла (2.9) производится так:

$$K(\zeta, z) = \varphi_0(\zeta, z) + \sum_{j=1}^{n} u_j(z)\, \chi_j'(\zeta). \tag{2.16}$$

Пусть теперь

$$u(z) = \iint_D K(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi\, d\eta,$$

где $\alpha \in H$. Тогда

$$Lu(z) = \alpha(z) + \iint_D Q(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi\, d\eta,$$

где

$$Q(\zeta, z) = q(\zeta, z) + \sum_{j=1}^{n} g_j(z)\, \chi_j'(\zeta).$$

Покажем, что для разрешимости уравнения

$$Lu = f \qquad (f \in H)$$

в классе функций $u \in H$, имеющих непрерывные производные в D, необходимо и достаточно, чтобы было разрешимо в H уравнение

$$T\alpha \equiv \alpha(z) + \iint_D Q(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi\, d\eta = f(z). \tag{2.17}$$

Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть $f \in F$. На основании (2.15)

$$f = f_1 + \sum_{j=1}^{n} c_j g_j \qquad (f_1 \in F_1).$$

Пусть $\alpha_0 \in H$ — решение уравнения (2.13) при правой части f_1. Тогда $\alpha = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \alpha_j$, где $\tilde{c}_j = c_j - (\chi_j, \alpha_0)$, есть решение уравнения (2.17). Действительно,

$$Ta = f_1 + \sum_{j=1}^{n} g_j\left(\chi_j, \alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \alpha_j\right) = f_1 + \sum_{j=1}^{n} g_j(\chi_j, \alpha_0) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j g_j = f.$$

Теперь может быть доказана теорема о разрешимости задачи 1.

Теорема 1. *Для разрешимости задачи 1 необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{\Gamma} g'(z)\, \sigma(z)\, u(z)\, ds = 0 \tag{2.18}$$

для всех решений и класса K уравнения

$$Lu = 0.$$

Доказательство. Доказательства требует только достаточность. Рассмотрим функцию

$$\chi(z) = \int\limits_{\Gamma} K'(z, \zeta)\, \sigma'(\zeta)\, g(\zeta)\, d_\zeta s, \tag{2.19}$$

где $K(z, \zeta)$ определено равенством (2.16), $\sigma(\zeta)$ — равенством (2.4), $'$ означает транспонирование. Покажем, что если $g(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ, то $\chi(z)$ имеет первые непрерывные производные в D по x и y и непрерывно продолжима на Γ. Действительно,

$$\chi(z) = I(z) + \sum_{j=1}^{n} \chi_j(z) \int\limits_{\Gamma} u_j'(\zeta)\, \sigma'(\zeta)\, g(\zeta)\, d_\zeta s,$$

где

$$I(z) = \int\limits_{\Gamma} \varphi_0'(z, \zeta)\, \sigma'(\zeta)\, g(\zeta)\, d_\zeta s.$$

Так как $\chi_j(z)$ $(j = 1, \ldots, n)$ имеют непрерывные производные в $D + \Gamma$, то остается рассмотреть $I(z)$. Существование непрерывных в D первых производных по x и y функции $I(z)$ очевидно.

Пусть теперь t — произвольная точка Γ и $z \to t$ $(z \in D)$. Обозначим через z' точку пересечения прямой, параллельной нормали к Γ в точке t и проходящей через z, с кривой Γ. Тогда

$$I(z) = \int\limits_{\Gamma} \varphi_0'(z, \zeta)\, \sigma'(\zeta)\, [g(\zeta) - g(z')]\, d_\zeta s + \int\limits_{\Gamma} \varphi_0'(z, \zeta)\, \sigma'(\zeta)\, d_\zeta s \cdot g(z'). \tag{2.20}$$

Первый интеграл равномерно сходится. Для преобразования второго интеграла применим формулу Грина (2.3) к области D_ϱ, полученной из D вырезанием достаточно малого круга $|z - \zeta| \leqslant \varrho$, матрицам $v = E$, $u = \varphi_0(z, \zeta)$ и операторам

$$L_0 u = A(z)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad M_0 v = -\frac{\partial A'(z)\, v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

полученным из (2.1) и (2.2) при $B = 0$ и $R = 0$.

Получим

$$\iint\limits_{D_\rho}\left[-\frac{\partial A(\zeta)}{\partial\xi}\varphi_0(z,\zeta)-q_0(z,\zeta)\right]d\xi\,d\eta=$$

$$=\int\limits_{\Gamma}\sigma(\zeta)\varphi_0(z,\zeta)\,d_\zeta s-\int\limits_{C_\rho}\sigma(\zeta)\varphi_0(z,\zeta)\,d_\zeta s, \tag{2.21}$$

где C_ρ — то же, что в (2.8),

$$q_0(z,\zeta)=L_0\varphi_0(z,\zeta)=-\frac{1}{2\pi}J[(x-\xi+A(\zeta)(y-\eta)]^{-1}\times$$

$$\times\left[A(\zeta)\frac{\partial A(\zeta)}{\partial\xi}-\frac{\partial A(\zeta)}{\partial\eta}\right][(x-\xi)+A(\zeta)(y-\eta)]^{-1}(y-\eta).$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\rho\to0}\int\limits_{C_\rho}\sigma(\zeta)\varphi_0(z,\zeta)\,d_\zeta s=\frac{1}{2\pi}\lim_{\rho\to0}\int\limits_{C_\rho}[A(\zeta)\cos(n\xi)-\cos(n\eta)]\times$$

$$\times J[(x-\xi)+A(\zeta)(y-\eta)]^{-1}\,d_\zeta s=$$

$$=\frac{1}{2\pi}J\lim_{\rho\to0}\int\limits_{C_\rho}[A(z)\cos(n\xi)-\cos(n\eta)]\,[(x-\xi)+A(z)(y-\eta)]^{-1}d_\zeta s=-E.$$

Последнее равенство следует из (2.8).

Переходя в (2.21) к пределу при $\varrho\to0$ и транспонируя, получим

$$\int\limits_{\Gamma}\varphi_0'(z,\zeta)\,\sigma'(\zeta)\,d_\zeta s=\iint\limits_{D}\left[-\varphi_0'(z,\zeta)\frac{\partial A'(\zeta)}{\partial\xi}-q_0'(z,\zeta)\right]d\xi\,d\eta-E.$$

Отсюда и из (2.20) следует, что предельное значение $I(z)$ при $z\to t$ существует и равно

$$\int\limits_{\Gamma}\varphi_0'(t,\zeta)\,\sigma'(\zeta)\,[g(\zeta)-g(t)]\,d_\zeta s+\iint\limits_{D}\left[-\varphi_0'(t,\zeta)\frac{\partial A'(\zeta)}{\partial\xi}-\right.$$

$$\left.-q_0'(t,\zeta)\right]d\xi d\eta\cdot g(t)-g(t).$$

Если под значением $I(t)$ $(t\in\Gamma)$ понимать это выражение, то $I(z)$ оказывается непрерывной в $D+\Gamma$. Теперь очевидным образом определяется значение $\chi(z)$ на Γ так, что $\chi(z)$ становится непрерывной в $D+\Gamma$ функцией.

Пусть теперь непрерывная в смысле Гельдера на Γ функция $g(z)$ удовлетворяет условию (2.18), $\chi(z)$ — определено указанным выше образом. Покажем, что уравнение

$$v(z)+\iint\limits_{D}Q'(z,\zeta)\,v(\zeta)\,d\xi\,d\eta=-\chi(z) \tag{2.22}$$

разрешимо в классе непрерывных функций и каждое его непрерывное решение v является решением задачи I.

Для доказательства разрешимости уравнения (2.22) в классе непрерывных функций достаточно, очевидно, доказать, что

$$(\chi, \alpha)=0, \tag{2.23}$$

каково бы ни было непрерывное решение уравнения

$$T\alpha=0$$

(см. [2.17]). Так как каждое непрерывное решение α этого уравнения удовлетворяет условию Гельдера в $D+\Gamma$, то функция

$$u(z)=\iint\limits_D K(\zeta, z)\,\alpha(\zeta)\,d\xi d\eta$$

является решением класса K уравнения $Lu=0$. Поэтому из условия (2.18) и из равенства

$$\int\limits_\Gamma g'(z)\,\sigma(z)\,u(z)\,ds=(\chi, \alpha)$$

следует (2.23), что и доказывает существование непрерывного в $D+\Gamma$ решения $v(z)$ уравнения (2.22). Покажем, что $v(z)$ имеет непрерывные в D первые производные по x и y.

Так как второе слагаемое в левой части равенства (2.22) удовлетворяет условию Гельдера в $D+\Gamma$, а $\chi(z)$ имеет непрерывные в D первые производные по x и y, то $v(z)$ удовлетворяет условию Гельдера в каждой замкнутой подобласти области D.

Для доказательства существования непрерывных в D производных по x и y функции $v(z)$ достаточно доказать это для интеграла, входящего в (2.22). Имеем

$$\iint\limits_D Q'(z,\zeta)\,v(\zeta)\,d\xi\,\partial\eta=\sum_{j=1}^{n}\chi_j(z)\iint\limits_D g_j'(\zeta)\,v(\zeta)\,d\xi d\eta+$$
$$+\iint\limits_D q_1(z,\zeta)\,v(\zeta)\,d\xi\,d\eta+\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D [(x-\xi_1)+A'(\zeta_1)\,(y-\eta_1)]^{-1}j'\,d\xi_1\,d\eta_1\times$$
$$\times\iint\limits_D R'(\zeta,\zeta_1)\,v(\zeta)\,d\xi\,d\eta \qquad (\zeta_1=\xi_1+i\eta_1), \tag{2.24}$$

где

$$q_1(z,\zeta)=-\frac{1}{2\pi}(y-\eta)\,[(x-\xi)+A'(\zeta)(y-\eta)]^{-1}\times$$
$$\times\left[\frac{\partial A'(\zeta)}{\partial\xi}A'(\zeta)-\frac{\partial A'(\zeta)}{\partial\eta}\right][(x-\xi)+A'(\zeta)(y-\eta)]^{-1}j'+$$
$$+\frac{1}{2\pi}[(x-\xi)+A'(\zeta)(y-\eta)]^{-1}j'\,B'(\zeta).$$

Первое слагаемое в правой части (2.24) имеет, очевидно, первые непрерывные производные по x и y в D. Рассмотрим второе слагаемое. Пусть D_1 — произвольная область (с гладкой границей Γ_1), лежащая вместе с границей в области D.

Тогда

$$\iint\limits_{D} q_1(z, \zeta)\, v(\zeta)\, d\xi d\eta = \iint\limits_{D_1} q_1(z, \zeta)\, v(\zeta)\, d\xi d\eta +$$

$$+ \iint\limits_{D-D_1} q_1(z, \zeta)\, v(\zeta)\, d\xi d\eta. \tag{2.25}$$

Второй интеграл справа имеет непрерывные производные по x и y в D_1. Так как $v(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера $D_1 + \Gamma_1$, то применяя к первому интегралу справа в (2.25) рассуждения, аналогичные проведенным на стр. 91 — 93 в книге С. Г. Михлина [7], заключаем, что этот интеграл имеет непрерывные производные по x и y в D_1. Ввиду указанного произвола в выборе D_1 отсюда следует существование непрерывных производных по x и y в D интеграла, стоящего слева в (2.25). Наконец, так как внутренний интеграл, входящий в третье слагаемое правой части равенства (2.24) удовлетворяет условию Гельдера в $D + \Gamma$, то и третье слагаемое справа в (2.24) имеет непрерывные производные по x и y в D. Таким образом, существование непрерывных производных $v(z)$ по x и y в D доказано.

Пусть $h(z)$ — произвольный функциональный столбец, имеющий непрерывные в смысле Гельдера первые производные по x и y в $D + \Gamma$. Тогда $Lh \in H$ и поэтому на основании утверждения, приведенного выше, уравнение

$$T\alpha = Lh \qquad (\alpha \in H) \tag{2.26}$$

разрешимо. Положим

$$u(z) = \iint\limits_{D} K(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi d\eta, \tag{2.27}$$

где α — решение уравнения (2.26). Тогда $L(h - u) = 0$ и на основании (2.18)

$$\int\limits_{\Gamma} g'(z)\, \sigma(z)\, [h(z - u(z)]\, ds = 0.$$

Поэтому на основании (2.27), (2.19), (2.22) и (2.26)

$$\int\limits_{\Gamma} g'(z)\, \sigma(z)\, h(z)\, ds = \int\limits_{\Gamma} g'(z)\, \sigma(z)\, u(z)\, ds =$$

$$= (\chi, \alpha) = -(v, T\alpha) = -(v, Lh). \tag{2.28}$$

Полагая, в частности, h равным нулю в граничной полоске, будем иметь

$$(v, Lh) = 0.$$

Отсюда и из формулы Грина (2.3), примененной к v и h, получим

$$(Mv, h) = 0.$$

Так как последнее равенство верно для любого функционального столбца h, имеющего непрерывные в смысле Гельдера в D первые производные и обращающегося в нуль в граничной полоске, то из него следует, что

$$Mv = 0$$

в D. Применяя снова формулу (2.3) к v и произвольному функциональному столбцу h, имеющему непрерывные в смысле Гельдера производные в $D + \Gamma$, получим

$$\int_\Gamma v'(z)\,\sigma(z)\,h(z)\,ds = -(v, Lh).$$

Отсюда и из (2.28) следует

$$\int_\Gamma [g'(z) - v'(z)]\,\sigma(z)\,h(z)\,ds = 0.$$

Учитывая, что рассматриваемое множество функций h плотно в пространстве $C(\Gamma)$ непрерывных на Γ функций и что матрица $\sigma(z)$ обратима вследствие условия эллиптичности, заключаем, что

$$v|_\Gamma = g.$$

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь однородную задачу 1 ($g=0$). Легко показать на примере, построенном путем соответствующего подбора интегрального слагаемого в (2.2), что эта задача может иметь нетривиальные решения. Пусть v — решение этой задачи, α — произвольная функция из H. Тогда, применяя формулу Грина (2.3) к v и функции

$$u(z) = \iint_D K(\zeta, z)\,\alpha(\zeta)\,d\xi d\eta,$$

получим

$$(v, T\alpha) = 0.$$

Поэтому v есть решение уравнения

$$v(z) + \iint_D Q'(z, \zeta)\,v(\zeta)\,d\xi d\eta = 0. \tag{2.29}$$

Обратно, так как при $g=0$ уравнение (2.22) принимает вид уравнения (2.29), то каждое непрерывное решение уравнения (2.29) является решением однородной задачи 1. Итак, линейное многообразие решений однородной задачи 1 совпадает с линейным многообразием непрерывных решений уравнения (2.29). Отсюда, в частности, следует, что однородная задача 1 может иметь только конечное число линейно независимых решений. Доказана теорема 2, формулированная ниже.

Теорема 2. *Для разрешимости уравнения*

$$Lu = f \qquad (f \in H)$$

в классе функций $u \in H$, имеющих непрерывные производные по x и y в D, необходимо и достаточно, чтобы правая часть f была ортогональна ко всем решениям v однородной задачи 1:

$$(v, f) = 0.$$

3. ПРИВЕДЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ К ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

Будет рассматриваться следующая граничная задача.

Задача II. Найти функциональный столбец $u(z)$ класса K, удовлетворяющий системе

$$Lu = 0 \tag{3.1}$$

в D и граничному условию

$$\Lambda u \equiv a(t)\,u(t) + \int\limits_{\Gamma} b(t, t_1)\,u(t_1)\,ds_1 = f(t) \qquad (t \in \Gamma). \tag{3.2}$$

Здесь под Lu и D понимается то же, что в § 2 (см. (2.1)); $a(t)$, $b(t, t_1)$ – вещественные матрицы, содержащие r строк и $2r$ столбцов, причем $a(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ

$$b(t, t_1) = \frac{\tilde{b}(t, t_1)}{|t - t_1|^{\lambda}} \quad (0 \leqslant \lambda < 1), \tag{3.3}$$

где $\tilde{b}(t, t_1)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных t, t_1 на Γ; ds_1 — элемент дуги в точке $t_1 \in \Gamma$; $f(t)$ — заданный функциональный столбец, удовлетворяющий условию Гельдера на Γ.

Начнем с построения ядра интегрального представления решений системы (3.1), при помощи которого задача II будет сведена к интегральным уравнениям. Для этого понадобятся некоторые предварительные рассмотрения. Пусть D_1—произвольная односвязная область с гладкой границей Γ_1 такая, что $D + \Gamma \subset D_1$, $D_1 + \Gamma_1 \subset \tilde{D}$. Обозначим через $I(D_1)$ — множество всех функциональных столбцов, удовлетворяющих условию Гельдера в $D_1 + \Gamma_1$: $H_0(D_1)$ — множество всех функциональных столбцов из $H(D_1)$, имеющих первые непрерывные производные в D_1.

Пусть, далее, $F(D_1)$ — множество всех функциональных столбцов $f \in H(D_1)$, для которых разрешимо уравнение

$$Lu = f \qquad (u \in H_0(D_1)).$$

Обозначим, наконец, через $V(D_1)$ линейное многообразие всех функциональных столбцов v, определенных на всей плоскости, равных нулю вне $D_1 + \Gamma_1$, удовлетворяющих условию Гельдера в $D_1 + \Gamma_1$ и условию

$$\iint\limits_{D_1} v' f\, dx\, dy = 0 \tag{3.4}$$

для всех $f \in F(D_1)$. Укажем некоторые свойства линейного многообразия $V(D_1)$.

1. $V(D_1)$ конечномерно.

Действительно, пусть

$$u(z) = \iint_{D_1} \varphi_0(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi d\eta \qquad (z \in D_1),$$

где $\varphi_0(\zeta, z)$ определено равенством (2.10), $\alpha(\zeta) \in H(D_1)$. Тогда $u \in H_0(D_1)$ и

$$Lu = \alpha(z) + \iint_{D_1} q(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi d\eta \equiv T_1 \alpha \in F(D_1),$$

где $q(\zeta, z)$ определено равенством (2.12).

Пусть v — произвольная функция из $V(D_1)$.

Тогда

$$\iint_{D_1} v'\, T_1 \alpha\, dx\, dy = 0.$$

Так как это равенство верно для всех $\alpha \in H(D_1)$, то

$$v(z) + \iint_{D_1} q'(z, \zeta)\, v(\zeta)\, d\xi d\eta = 0, \tag{3.5}$$

откуда и следует утверждение.

2. Каждая функция $v \in V(D_1)$ обращается в нуль на Γ_1 и, следовательно, удовлетворяет условию Гельдера на всей плоскости.

Действительно, пусть $\zeta \in D_1 + \Gamma_1$ и c — произвольный постоянный столбец высоты $2r$. Тогда $u(z) = \varphi_0(\zeta, z)\, c \in H_0(D_1)$ и $Lu = q(\zeta, z)\, c \in F(D_1)$. Таким образом:

$$\iint_{D_1} v'(z)\, q(\zeta, z)\, dx\, dy \cdot c = 0.$$

Так как это верно для произвольного c, то

$$\iint_{D_1} v'(z)\, q(\zeta, z)\, dx\, dy = 0.$$

Переходя здесь к пределу при $\zeta \to t \in \Gamma_1$, получим

$$\iint_{D_1} q'(t, \zeta)\, v(\zeta)\, d\xi d\eta = 0. \tag{3.6}$$

С другой стороны, переходя в (3.5) к пределу при $z' \to t$, получим

$$v(t) + \iint_{D_1} q'(t, \zeta)\, v(\zeta)\, d\xi d\eta = 0.$$

Отсюда и из (3.6) следует, что $v\,(t) = 0$, что и требовалось доказать.

3. Если D_1 и D_2 — две области рассматриваемого вида и $D_2 \subseteq D_1$, то $v(D_2) \subseteq v(D_1)$.

Действительно, пусть $v \in V(D_2)$. Тогда v обращается в нуль вне $D_1+\Gamma_1$ и на основании предыдущего удовлетворяет условию Гельдера $D_1+\Gamma_1$. Если $f \in F(D_1)$, то $f \in F(D_2)$ и, следовательно,

$$\iint_{D_1} v' f\, d x\, d y = \iint_{D_2} v' f\, d x\, d y = 0, \text{ т. е. } v \in V(D_1).$$

Из этих свойств вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Существует односвязная область D_1 с гладкой границей Γ_1 такая, что $D+\Gamma \subset D_1$, $D_1+\Gamma_1 \subset \tilde{D}$ и что для любой функции $v \in V(D_1)$ выполняется условие $v(z)=0$ для всех $z \in D_1-D$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для любой области D_1 рассматриваемого вида существует функция $v \in V(D_1)$ и точка $z_1 \in D_1-D$, такие, что $v(z_1) \neq 0$. Ввиду непрерывности v без ограничения общности можно считать, что $z_1 \bar{\in} \Gamma$. Построим теперь цепочку областей следующим образом. Зафиксируем одну из рассматриваемых областей D_1 и выбранную указанным образом точку $z_1 \in D_1-(D+\Gamma)$. В области $D_1-(D+\Gamma)$ построим замкнутый гладкий контур Γ_2 так, чтобы он проходил через точку z_1 и являлся границей некоторой односвязной области D_2, содержащей область $D+\Gamma$. Обозначим m_k размерность линейного многообразия $V(D_k)$ $(\kappa=1,\ 2)$. На основании свойства 3 $m_2 \leqslant m_1$. Но знак равенства здесь невозможен, так как $V(D_1)$ содержит функцию, отличную от нуля на Γ_2 и, следовательно, не принадлежащую $V(D_2)$.

Итак,

$$m_1 > m_2 > 0.$$

Аналогично, приняв область D_2 за исходную, построим область D_3 так, что размерность m_3 многообразия $V(D_3)$ удовлетворяет неравенству

$$m_2 > m_3 > 0.$$

Продолжая так далее, получим бесконечную последовательность областей $D_k\,(\kappa=1,\ 2,\ 3,\ldots)$ и бесконечную последовательность целых положительных чисел m_k, равных размерностям $V(D_k)$, для которых имеют место неравенства

$$m_1 > m_2 > \ldots > m_k > \ldots,$$

что, очевидно, невозможно. Лемма доказана.

В области D_1, указанной в лемме, и будет строиться ядро интегрального представления решений системы (3.1). Построение этого ядра совпадает по методу с построением фундаментальной матрицы в работе Я. Б. Лопатинского [4].

Проведем построение подобное тому, как это сделано выше, рассматривая вместо области D в интеграле (2.9) область D_1, указанную в лемме. Тогда получим матрицу вида

$$K_1(\zeta, z) = \varphi_0(\zeta, z) + \sum_{j=1}^{n_1} u_j(z)\, \chi_j'(\zeta) \qquad (z, \zeta \in D_1), \tag{3.7}$$

где $u_j \in H_0(D_1)$, $Lu_j = g_j \in H(D_1)$, χ_j — функциональные столбцы, непрерывно дифференцируемые $D_1 + \Gamma_1$. Она обладает следующими свойствами:

1. Если $\alpha \in H(D_1)$ и

$$u(z) = \iint\limits_{D_1} K_1(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi d\eta \qquad (z \in D_1), \tag{3.8}$$

то $u \in H_0(D_1)$ и

2. Если $\alpha \in H(D_1)$ и u определено равенством (3.8), то

$$Lu(z) = \alpha(z) + \iint\limits_{D_1} Q_1(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi d\eta,$$

где

$$Q_1(\zeta, z) = q(\zeta, z) + \sum_{j=1}^{n_1} g_j(z)\, \chi_j'(\zeta), \tag{3.9}$$

$q(\zeta, z)$ определено равенством (2.12).

3. Для существования решения $u \in H_0(D_1)$ уравнения

$$Lu = f \qquad (f \in H(D_1)) \tag{3.10}$$

необходимо и достаточно, чтобы было разрешимо в $H(D_1)$ уравнение

$$\alpha(z) + \iint\limits_{D_1} Q_1(\zeta, z)\, \alpha(\zeta)\, d\xi d\eta = f(z). \tag{3.11}$$

Л е м м а 2. *Все непрерывные в $D_1 + \Gamma_1$ решения $v(z)$ однородного уравнения*

$$v(z) + \iint\limits_{D_1} Q_1'(z, \zeta)\, v(\zeta)\, d\xi d\eta = 0, \tag{3.12}$$

союзного с (3.11), *удовлетворяют условию Гельдера в $D_1 + \Gamma_1$ и обращаются в нуль в области $D_1 - D$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что ядро $Q_1(\zeta, z)$ имеет вид

$$Q_1(\zeta, z) = \frac{\tilde{Q}_1(\zeta, z)}{|\zeta - z|^{\lambda_1}} \quad (\zeta, z \in D_1 + \Gamma_1), \tag{3.13}$$

где $\tilde{Q}_1(\zeta, z)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных ζ, $z \in D_1 + \Gamma_1$, $\lambda_1 > 1$ и может быть взято сколь угодно близким к единице.

Отсюда непосредственно, следует, что непрерывное решение v уравнения (3.12) удовлетворяет условию Гельдера в $D_1 + \Gamma_1$. Далее, вследствии того, что v ортогонально ко всем f, для которых разрешимо уравнение (3.11), а, следовательно, и (3.10), то условие (3.4) выполняется. Доопределив v, считая его равным нулю вне $D_1 + \Gamma_1$, получим, что $v \in V(D_1)$. Поэтому на основании леммы 1 $v(z)$ обращается в нуль в $D_1 - D$. Лемма доказана. Пусть

$$v_1, \ldots, v_k — \tag{3.14}$$

— полная система линейно независимых непрерывных решений уравнения (3.12), которую мы будем считать ортонормированной.

Пусть, далее $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — полная система линейно независимых непрерывных решений однородного уравнения (3.11) ($f=0$). Введем новое ядро

$$Q_2(\zeta, z) = Q_1(\zeta, z) + \sum_{j=1}^{k} v_j(z)\,\alpha_j'(\zeta) \qquad (z, \zeta \in D_1 + \Gamma_1). \tag{3.15}$$

Очевидно, уравнение

$$\alpha(z) + \iint_{D_1} Q_2(\zeta, z)\,\alpha(\zeta)\,d\xi d\eta = 0$$

не имеет отличных от нуля непрерывных решений. Далее, ядро $Q_2(\zeta, z)$ имеет вид

$$Q_2(\zeta, z) = \frac{\tilde{Q}_2(\zeta, z)}{|\zeta - z|^{\lambda_1}} (\zeta, z \in D_1 + \Gamma_1), \tag{3.16}$$

где $\tilde{Q}_2(\zeta, z)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных $\zeta, z \in D_1 + \Gamma_1$; λ_1 то же, что в (3.13). Отсюда и из известных результатов теории Фредгольма следует, что существует решение $\psi(z, \zeta)$ уравнения

$$\psi(z, \zeta) + \iint_{D_1} Q_2(\zeta_1, z)\,\psi(\zeta_1, \zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1 =$$

$$= -Q_1(\zeta, z - \sum_{j=1}^{k} v_j(z)\,v_j'(\zeta) \qquad (\zeta, z \in D_1) \tag{3.17}$$

вида

$$\psi(z, \zeta) = \frac{\tilde{\psi}(z, \zeta)}{|z - \zeta|^{\lambda_1}} (z, \zeta \in D_1 + \Gamma_1), \tag{3.18}$$

где $\tilde{\psi}(z, \zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных z, ζ в $D_1 + \Gamma_1$. При этом используются оценки резольвенты. Из них и из обоих уравнений резольвенты следует, что резольвента представима в виде, подобном (3.16), откуда и получается (3.18).

Покажем, что матрица $\psi(z, \zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$\psi(z, \zeta) + \iint_{D_1} Q_1(\zeta_1, z)\,\psi(\zeta_1, \zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1 =$$

$$= -Q_1(\zeta, z) - \sum_{j=1}^{k} v_j(z)\,v_j'(\zeta) \qquad (\zeta, z \in D_1). \tag{3.19}$$

Для этого на основании (3.15), очевидно, достаточно доказать, что

$$\iint_{D_1} \alpha_i'(\zeta_1)\,\psi(\zeta_1,\zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1 = 0 \qquad (j=1,\ldots,k;\ \zeta\in D_1).$$

Так как функции (3.14) удовлетворяют уравнению (3.12), то

$$\iint_{D_1} v_i'(z)\Big[Q_1(\zeta,z)+\sum_{j=1}^{k} v_j(z)\,v_j'(\zeta)\Big]dx\,dy=0$$

$(i=1,2,\ldots,k)$. Отсюда и из (3.17) следует, что

$$0=\iint_{D_1} v_i'(z)\Big[\psi(z,\zeta)+\iint_{D_1} Q_2(\zeta_1,z)\,\psi(\zeta_1,\zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1\Big]dx\,dy=$$

$$=\iint_{D_1}\Big[v_i'(z)+\iint_{D_1} v_i'(\zeta_1)\,Q_1(z,\zeta_1)\,d\xi_1 d\eta_1\Big]\psi(z,\zeta)\,dx\,dy+$$

$$+\sum_{j=1}^{k}\iint_{D_1} v_i'(z)\,v_j(z)\,dx\,dy\iint_{D_1}\alpha_j'(\zeta_1)\,\psi(\zeta_1,\zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1=$$

$$=\iint_{D_1}\alpha_i'(\zeta_1)\,\psi(\zeta_1,\zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1 \qquad (i=1,\ldots,k),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь матрицу

$$\varphi(\zeta,z)=K_1(\zeta,z)+\iint_{D_1} K_1(\zeta_1,z)\,\psi(\zeta_1,\zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1 \tag{3.20}$$

$(z,\zeta\in D_1+\Gamma_1)$, где матрица $K_1(\zeta,z)$ определена равенством (3.7), $\psi(z,\zeta)$ — решение (3.18) уравнения (3.17). Она обладает следующими свойствами:

1. $$\varphi(\zeta,z)=\frac{\tilde\varphi(\zeta,z)}{|\xi-z|^{\lambda}}\ (\zeta,z\in D_1+\Gamma_1), \tag{3.21}$$

где $\tilde\varphi(\zeta,z)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных ζ, $z\in D_1+\Gamma_1$, $\lambda>1$ и может быть взято сколь угодно близким к 1.

Действительно, из вида матрицы $K_1(\zeta,z)$ непосредственно следует, что

$$K_1(\zeta,z)=\frac{\tilde K_1(\zeta,z)}{|\zeta-z|^{\lambda}}, \tag{3.22}$$

где $\tilde K_1(\zeta,z)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных ζ, $z\in D_1+\Gamma_1$, $\lambda>1$ и может быть взято сколь угодно близким к единице. Отсюда и из (3.18) следует (3.21).

2. При $\zeta \neq z$ $(\zeta, z \in D_1)$ матрица $\varphi(\zeta, z)$ имеет непрерывную производную по x и y.

Действительно, для первого слагаемого в правой части (3.20) это очевидно. Второе слагаемое запишем в виде

$$\iint_{D_1} \varphi_0(\zeta_1, z)\,\psi(\zeta_1, \zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1 + \sum_{j=1}^{n_1} u_j(z) \iint_{D_1} \chi_j'(\zeta_1)\,\psi(\zeta_1, \zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1.$$

К первому слагаемому здесь применимы результаты С. Г. Михлина [7] о дифференцировании интегралов со слабой особенностью, во втором слагаемом $u_j(z)$ $(j=1, \ldots, n_1)$ имеют непрерывные производные в D_1.

3. При $\zeta \neq z$ $(\zeta,\ z \in D_1)$ имеет место равенство

$$L\,\varphi(\zeta, z) \equiv A(z)\frac{\partial\varphi(\zeta, z)}{\partial x} - \frac{\partial\varphi(\zeta, z)}{\partial y} + B(z)\,\varphi(\zeta, z) +$$

$$+ \iint_D R(z, \zeta_1)\,\varphi(\zeta, \zeta_1)\,d\xi_1\,d\eta_1 = -\sum_{j=1}^{k} v_j(z)\,v_j'(\zeta), \tag{3.23}$$

где v_j $(j=1, \ldots, k)$ — функциональные столбцы (3.14). В частности, при $\zeta \in D_1 - D$, $z \in D_1$, $\zeta \neq z$

$$L\varphi(\zeta, z) = 0. \tag{3.24}$$

Для доказательства заметим сначала, что на основании равенств (3.7), (3.9) и (2.12)

$$LK_1(\zeta_1, z) = Q_1(\zeta, z).$$

Поэтому (см. стр. 36—37)

$$L\,\varphi(\zeta, z) = Q_1(\zeta, z) + \psi(z, \zeta) +$$

$$+ \iint_{D_1} Q_1(\zeta_1, z)\,\psi(\zeta_1, \zeta)\,d\xi_1\,d\eta_1 = -\sum_{j=1}^{k} v_j(z)\,v_j'(\zeta).$$

Последнее равенство следует из (3.19).

Далее, поскольку на основании леммы 2 столбцы (3.14) обращаются в нуль в $D_1 - D$, то равенство (3.24) является непосредственным следствием равенства (3.23).

Заметим, что если интегральное уравнение (3.12) не имеет отличных от нуля непрерывных решений, то вторые слагаемые в правых частях (3.15) и (3.17) нужно считать нулями. При этом (3.19) просто совпадает с (3.17), и равенство (3.24) имеет место во всей области D_1.

Приведение задачи II к интегральным уравнениям основано на следующей теореме.

Теорема. *Если функциональный столбец $\nu(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера на Γ, то функция*

$$u(z) = \int_\Gamma \varphi(\zeta, z)\,\sigma(\zeta)\,\nu(\zeta)\,d_\zeta s \quad (z \in D) \tag{3.25}$$

имеет первые непрерывные производные по x и y в D, удовлетворяет уравнению

$$Lu = 0 \tag{3.26}$$

и непрерывно продолжима на Γ, причем имеет место формула

$$u^+(t) = \frac{1}{2} \nu(t) + \int_\Gamma \varphi(\zeta, t)\, \sigma(\zeta)\, \nu(\zeta)\, d_\zeta s \qquad (t \in \Gamma), \tag{3.27}$$

где $u^+(t)$ предельное значение $u(z)$ при $z \to t \in \Gamma$, интеграл в (3.27) понимается в смысле главного значения, $\sigma(\zeta)$ определено равенством (2.4).

Доказательство. Существование непрерывных производных функции $u(z)$ по x и y в D непосредственно следует из свойства 2 матрицы $\varphi(\zeta, z)$. Докажем непрерывную продолжимость $u(z)$ на Γ и равенство (3.27). Для этого запишем равенство (3.25) в виде

$$u(z) = U_0(z) + U_1(z) \qquad (z \in D), \tag{3.28}$$

где

$$U_0(z) = \int_\Gamma \varphi_0(\zeta, z)\, \sigma(\zeta)\, \nu(\zeta)\, d_\zeta s,$$

$$U_1(z) = \sum_{j=1}^{n_1} u_j(z) \int_\Gamma \chi_j'(\zeta)\, \sigma(\zeta)\, \nu(\zeta)\, d_\zeta s + \int_\Gamma \varphi_1(\zeta, z)\, \sigma(\zeta)\, \nu(\zeta)\, d_\zeta s,$$

$$\varphi_1(\zeta, z) = \iint_{D_1} K_1(\zeta_1, z)\, \psi(\zeta_1, \zeta)\, d\xi_1\, d\eta_1. \tag{3.29}$$

Из (3.22) и (3.18) следует, что

$$\varphi_1(\zeta, z) = \frac{\tilde{\varphi}_1(\zeta, z)}{|\zeta - z|^{\lambda_0}}, \tag{3.30}$$

где $\tilde{\varphi}_1(\zeta, z)$ удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных ζ, $z \in D_1 + \Gamma_1$, $\lambda_0 < 1$.

Так как, далее, $u_j(z) \in H(D_1)$ $(j = 1, \ldots, n_1)$, то

$$U_1^+(t) = \sum_{j=1}^{n_1} u_j(t) \int_\Gamma \chi_j'(\zeta)\, \sigma(\zeta)\, \nu(\zeta)\, d_\zeta s + \int_\Gamma \varphi_1(\zeta, t)\, \sigma(\zeta)\, \nu(\zeta)\, d_\zeta s \qquad (t \in \Gamma). \tag{3.31}$$

Остается рассмотреть $U_0(z)$. Получим сначала некоторые вспомогательные формулы. Пусть D_0 — область с кусочно-гладкой границей Γ_0, причем $D_0+\Gamma_0\subset\tilde{D}$; u_0, v_0 — произвольные прямоугольные матрицы, состоящие из $2r$ строк, имеющие непрерывные производные в D_0 и непрерывные в $D_0+\Gamma_0$. Пусть, далее,

$$L_0 u_0 = A(z)\frac{\partial u_0}{\partial x}-\frac{\partial u_0}{\partial y},$$

$$M_0 v_0 = -\frac{\partial A'(z) v_0}{\partial x}+\frac{\partial v_0}{\partial y},$$

где матрица $A(z)$ та же, что и в (2.1). Тогда имеет место следующая формула Грина

$$\iint\limits_{D_0}[(M_0 v_0)' u_0 - v_0' L_0 u_0]\,dxdy = \int\limits_{\Gamma_0} v_0'(z)\,\sigma(z)\,u_0(z)\,ds, \qquad (3.32)$$

где $\sigma(z)$ — определено равенством (2.4).

Применяя эту формулу к области D_0 без кружка $|z-\zeta|\leqslant\varepsilon$ $(z\in D_0)$ и матрицам $v_0(\zeta)=\varphi_0'(\zeta, z)$, $u_0(\zeta)=E$ (единичная матрица), а затем переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получим

$$E=\int\limits_{\Gamma_0}\varphi_0(\zeta, z)\,\sigma(\zeta)\,d_\zeta s-\iint\limits_{D_0} p(\zeta, z)\,d\xi d\eta \qquad (z\in D_0), \qquad (3.33)$$

где

$$p(\zeta, z)=\frac{1}{2\pi}j[(\xi-x)+A(z)(\eta-y)]^{-2}[A(\zeta)-A(z)]-$$
$$-\frac{1}{2\pi}j[(\xi-x)+A(z)(\eta-y)]^{-1}\frac{\partial A(\zeta)}{\partial\xi}.$$

Применяя, далее, формулу (3.32) к матрицам $v_0(\zeta)=\varphi_0'(\zeta,z)$, $u_0(\zeta)=E$ при $z\bar{\in} D_0+\Gamma_0$, получим

$$\int\limits_{\Gamma_0}\varphi_0(\zeta, z)\,\sigma(\zeta)\,d_\zeta s=\iint\limits_{D_0} p(\zeta, z)\,d\xi d\eta \qquad (z\bar{\in} D_0+\Gamma_0). \qquad (3.34)$$

Пусть теперь t — произвольная точка контура Γ. Проведем окружность с центром в точке t радиуса ρ столь малого, чтобы окружность пересекала контур Γ только в двух точках. Обозначим D_ρ область, состоящую из всех точек области D, лежащих вне проведенной окружности; Γ_ρ — ту часть контура Γ, которая лежит вне окружности; C_ρ — ту часть окружности, которая лежит в D.

Применяя форму (3.34) к области D_ρ, получим

$$\int\limits_{\Gamma_\rho}\varphi_0(\zeta, t)\,\sigma(\zeta)\,d_\zeta s+\int\limits_{C_\rho}\varphi_0(\zeta, t)\,\sigma(\zeta)\,d_\zeta s=\iint\limits_{D_\rho} p(\zeta, t)\,d\xi d\eta.$$

Отсюда и из равенства

$$\lim_{\rho\to 0}\int\limits_{C_\rho}\varphi_0(\zeta, t)\,\sigma(\zeta)\,d_\zeta s=-\frac{1}{2}E$$

(см. [4]) следует существование главного значения интеграла $\int\limits_{\Gamma}\varphi_0(\zeta, t)$ $\sigma(\zeta)\, d_\zeta s$ и равенство

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi_0(\zeta, t)\,\sigma(\zeta)\, d_\zeta s = \frac{1}{2} E + \iint\limits_{D} p(\zeta, t)\, d\xi d\eta. \tag{3.35}$$

Вернемся теперь к рассмотрению функции $U_0(z)$. Пусть z — точка области D, лежащая в некоторой, достаточно малой окрестности точки t. Пусть, далее, z' — точка пересечения прямой, параллельной нормали к Γ в точке t и проходящей через z, с кривой Γ. Тогда

$$U_0(z) = \int\limits_{\Gamma} \varphi_0(\zeta, z)\,\sigma(\zeta)\,[\nu(\zeta) - \nu(z')]\, d_\zeta s + \int\limits_{\Gamma} \varphi_0(\zeta, z)\,\sigma(\zeta)\, d_\zeta s\cdot \nu(z').$$

Отсюда и из формулы (3.33), примененной к области D, получим

$$U_0(z) = \int\limits_{\Gamma} \varphi_0(\zeta, z)\,\sigma(\zeta)\,[\nu(\zeta) - \nu(z')]\, d_\zeta s +$$

$$+ \nu(z') + \iint\limits_{D} p(\zeta, z)\, d\xi d\eta\cdot \nu(z').$$

Ввиду равномерной сходимости первого интеграла справа отсюда следует, что $U_0{}^+(t)$ существует, причем

$$U_0{}^+(t) = \int\limits_{\Gamma} \varphi_0(\zeta, t)\,\sigma(\zeta)\,[\nu(\zeta) - \nu(t)]\, d_\zeta s +$$

$$+ \nu(t) + \iint\limits_{D} p(\zeta, t)\, d\xi d\eta\cdot \nu(t). \tag{3.36}$$

Заметим, что криволинейный интеграл, входящий сюда, существует в обычном смысле. Так как, кроме того, существует интеграл, стоящий слева в (3.35), в смысле главного значения, то существует и главное значение интеграла

$$\int\limits_{\Gamma} \varphi_0(\zeta, t)\,\sigma(\zeta)\,\nu(\zeta)\, d_\zeta s. \tag{3.37}$$

Поэтому из (3.36) и (3.35) следует

$$U_0{}^+(t) = \frac{1}{2}\,\nu(t) + \int\limits_{\Gamma} \varphi_0(\zeta, t)\,\sigma(\zeta)\,\nu(\zeta)\, d_\zeta s, \tag{3.38}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

Таким образом, доказано, что каждое слагаемое, входящее в правую часть (3.28), непрерывно продолжимо на Γ.

Из (3.38) и (3.31) следует (3.27), причем существование главного значения, входящего в (3.27) интеграла, следует из существования главного значения интеграла (3.37).

Наконец, равенство (3.26) непосредственно следует из равенства (3.24), справедливого, как было указано, при $\zeta \in \Gamma$. Теорема доказана.

Заметим, что при $\zeta, z \in \Gamma$ матрица

$$\omega(\zeta, z) = \varphi(\zeta, z)(\zeta - z)$$

удовлетворяет условию Гельдера по совокупности переменных $\zeta, z \in \Gamma$.

Действительно, представим $\omega(\zeta, z)$ в виде

$$\omega(\zeta, z) = \varphi_0(\zeta, z)(\zeta - z) + \sum_{j=1}^{n_1} u_j(z)\chi_j'(\zeta)(\zeta - z) + \varphi_1(\zeta, z)(\zeta - z), \quad (3.39)$$

где $\varphi_1(\zeta, z)$ определено равенством (3.29)

Так как $u_j(z), \chi_j(\zeta) \in H(D_1)$ $(j = 1, \ldots, n_1)$, а $\varphi_1(\zeta, z)$ представляется в виде (3.30), то для двух последних слагаемых справа в (3.39) утверждение очевидно. Далее

$$\varphi_0(\zeta, z)(\zeta - z) = \frac{1}{2\pi} J\, [\cos\Theta + A(z)\sin\Theta]^{-1} e^{i\Theta}, \quad (3.40)$$

где $e^{i\Theta} = \dfrac{\zeta - z}{|\zeta - z|}$. Из условия эллиптичности следует существование такого числа m, что

$$|\det[\cos\Theta + A(z)\sin\Theta]| > m$$

при любых Θ и $z \in \Gamma$. Отсюда, учитывая, что Γ предполагается гладким в смысле Гельдера контуром, получим, что матрица (3.40) удовлетворяет условию Гельдера по z на каждой из дуг $\zeta\zeta_1$ и $\zeta\zeta_2$ кривой Γ, лежащих по разные стороны от точки ζ [8]. В точке же ζ матрица (3.40), очевидно, непрерывна. Отсюда уже легко получить, что она удовлетворяет условию Гельдера по z на Γ с постоянными, не зависящими от ζ. Аналогичный результат получается и для ζ с оценкой, не зависящей от z, откуда и следует утверждение.

Подставляя

$$\varphi(\zeta, t) = \frac{\omega(\zeta, t)}{\zeta - t} \quad (3.41)$$

в интеграл, входящий в равенство (3.27), заключаем ([8], § 20), что этот интеграл, а следовательно, и $u^+(t)$, удовлетворяет условию Гельдера на Γ.

Таким образом, доказано, что функция $u(z)$, определенная равенством (3.25) в D и равенством (3.27) на Γ, является решением класса K уравнения (3.26). (Определение класса K см. стр. 35).

В дальнейшем, задавая функцию u интегралом вида (3.25), мы всегда будем предполагать, не оговаривая этого специально, что u продолжено на Γ по формуле (3.27), и в этом смысле понимать, что интеграл (3.25) является решением класса K уравнения (3.26).

Будем искать решение задачи II в виде

$$u(z) = \int_{\Gamma} M(\zeta, z)\, \mu(\zeta)\, d_\zeta s, \tag{3.42}$$

где

$$M(\zeta, z) = \varphi(\zeta, z)\, \sigma(\zeta)\, \beta(\zeta). \tag{3.43}$$

Здесь $\beta(\zeta)$ матрица вида

$$\beta(\zeta) = \begin{pmatrix} \beta_1(\zeta) \\ \beta_2(\zeta) \end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

где $\beta_1(\zeta)$, $\beta_2(\zeta)$ — вещественные квадратные матрицы порядка r, удовлетворяющие условию Гельдера на Γ и условию

$$\det(\beta_1(\zeta) + i\beta_2(\zeta) \neq 0 \tag{3.45}$$

при всех $\zeta \in \Gamma$. В остальном $\beta(\zeta)$ может выбираться произвольно.* $\mu(\zeta)$ — подлежащий определению функциональный столбец из r элементов, удовлетворяющий условию Гельдера на Γ.

Подставляя (3.42) в граничное условие (3.2), на основании (3.27) получим

$$\frac{1}{2} a(t)\, \beta(t)\, \mu(t) + \int_{\Gamma} N(\zeta, t)\, \mu(\zeta)\, d_\zeta s = f(t)\, (t \in \Gamma), \tag{3.46}$$

где

$$N(\zeta, t) = a(t)\, M(\zeta, t) + \frac{1}{2} b(t, \zeta)\, \beta(\zeta) + \\ + \int_{\Gamma} b(t, t_1)\, M(\zeta, t_1)\, ds_1 \qquad (t, \zeta \in \Gamma), \tag{3.47}$$

ds_1 — элемент дуги в точке t_1.

Так как в равенстве (3.41) $\omega(\zeta, t)$ удовлетворяет условию Гельдера по $\zeta, t \in \Gamma$, то из (3.43), (3.3) и (3.47) следует, что $N(\zeta, t)$ может быть представлено в виде

$$N(\zeta, t) = \frac{\tilde{N}(\zeta, t)\, \zeta'(s)}{\pi i(\zeta - t)},$$

где $\tilde{N}(\zeta, t)$ удовлетворяет условию Гельдера по переменным $\zeta, t \in \Gamma$.

---

* Этот произвол в выборе β можно использовать, чтобы получать представления решений вида (3.42), обладающие нужными свойствами. Например, можно β выбрать так, чтобы получаемые ниже интегральные уравнения были уравнениями Фредгольма (см. (3.52)). Для дальнейшего, однако, наряду с таким выбором β существенной оказывается возможность выбора ядра (3.43), не зависящего от граничных условий. Тогда можно считать для определенности, что

$$\beta = \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица.

Уравнение (3.46) теперь записывается в виде

$$\frac{1}{2} a(t)\beta(t)\mu(t)+\frac{1}{\pi i}\int\frac{\tilde{N}(\zeta, t)\mu(\zeta)d\zeta}{\zeta-t}=f(t). \tag{3.48}$$

Найдем основные матрицы полученного сингулярного интегрального уравнения ([8], § 130). Для этого вычислим

$$\tilde{N}(t, t)=\lim_{\zeta\to t}[\pi i(\zeta-t)\bar{\zeta}'(s)N(\zeta, t)].$$

Обозначая Θ — угол касательной к Γ в точке t с осью абсцисс, найдем после простых преобразований

$$\tilde{N}(t, t)=\frac{i}{2} a(t) J[\cos\Theta+A(t)\sin\Theta]^{-1}\sigma(t)\beta(t).$$

Но

$$\sigma(t)=-A(t)\sin\Theta-\cos\Theta.$$

Поэтому

$$\tilde{N}(t, t)=-\frac{i}{2} a(t) J\beta(t).$$

Представим матрицу $a(t)$ в виде

$$a(t)=(a_1(t), a_2(t)),$$

где $a_1(t)$, $a_2(t)$ — квадратные матрицы порядка r. Отсюда, из (2,6) и (3.44) следует

$$\tilde{N}(t, t)=-\frac{i}{2}\{a_2(t)\beta_1(t)-a_1(t)\beta_2(t)\}.$$

Таким образом, основные матрицы уравнения (3.48) имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} a(t)\beta(t)+\tilde{N}(t, t)&=\frac{1}{2}[a_1(t)-ia_2(t)][\beta_1(t)+i\beta_2(t)]\\ \frac{1}{2} a(t)\beta(t)-\tilde{N}(t, t)&=\frac{1}{2}[a_1(t)+ia_2(t)][\beta_1(t)-i\beta_2(t)].\end{aligned} \tag{3.49}$$

Всюду в дальнейшем предполагается выполненным следующее условие:

$$\det[a_1(t)+ia_2(t)]\neq 0 \tag{3.50}$$

при всех $t\in\Gamma$.

При выполнении этого условия (см. [3.45]) (3.48) является уравнением нормального типа. Индекс этого уравнения, вычисленный по формуле Н. И. Мусхелишвили [8], равен

$$\varkappa=\frac{1}{\pi}[\arg\det(a_1+ia_2)]_\Gamma+\frac{1}{\pi}[\arg\det(\beta_1-i\beta_2)]_\Gamma. \tag{3.51}$$

Из (3.49) следует, что если β, входящее в (3.44), выбрать, например, следующим образом

$$\beta = \begin{pmatrix} Re\,(a_1 - ia_2)^{-1} \\ Im\,(a_1 - ia_2)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{3.52}$$

то (3.46) оказывается уравнением Фредгольма. В общей постановке вопрос о приведении граничных задач к уравнениям Фредгольма был изучен Я. Б. Лопатинским в работе [6], в которой получены условия приведения граничных задач для эллиптических систем уравнений в многомерном случае к уравнениям Фредгольма и указан способ самого такого приведения.

(Продолжение статьи будет опубликовано в следующем выпуске сборника).

ЛИТЕРАТУРА

1. Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М—Л, 1946.
2. Векуа И. Н. Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек. Матем. сборник, т. 31, № 2, 1952.
3. Вольперт А. И. Граничные задачи для эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений на плоскости. Диссертация, Львов, 1954.
4. Лопатинский Я. Б. Фундаментальная система решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений. Укр. матем. журнал, т. III, № 1, 1951.
5. Лопатинский Я. Б. Фундаментальные решения системы дифференциальных уравнений эллиптического типа. Укр. матем. журнал, т. III, № 3, 1951.
6. Лопатинский Я. Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. Укр. матем. журнал, т. V, № 2, 1953.
7. Михлин С. Г. Проблема минимума квадратичного функционала. М—Л, 1952.
8. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М—Л, 1946.
9. Петровский И. Г. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций. Бюллетень МГУ, т. I, Математика и механика, вып. 7, 1938.

Работа поступила в марте 1957 г.