ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

И. Ц. ГОХБЕРГ и М. Г. КРЕЙН

О ПАРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ И ЕГО ТРАНСПОНИРОВАННОМ I

(Сообщение I)

В настоящей статье исследуется интегральное уравнение вида

$$\begin{aligned} &\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty}k_1(t-s)\varphi(s)\,ds=f(t) \qquad (-\infty<t<0)\\ &\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty}k_2(t-s)\varphi(s)\,ds=f(t) \qquad (0<t<\infty), \end{aligned} \tag{!}$$

где $k_1(t)$ и $\kappa_2(t)$ любые функции из пространства $L=L_1(-\infty,\infty)$.

Парное интегральное уравнение (!) можно еще записать в виде одного уравнения

$$\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty}k_\pi(t,s)\varphi(s)\,ds=f(t) \qquad (-\infty<t<\infty), \tag{!}$$

где ядро $k_\pi(t,s)$ определяется равенствами

$$k_\pi(t,s)=\begin{cases} k(t-s) & (-\infty<t<0, \quad -\infty<s<\infty)\\ k_2(t-s) & (0<t<\infty, \quad -\infty<s<\infty).\end{cases}$$

В достаточно общей постановке интегральное уравнение (!), по-видимому, впервые было рассмотрено И. М. Рапопортом [1], который обнаружил, что задача отыскания решения уравнения (!) может быть сведена к решению некоторой задачи Римана-Гильберта на прямой. Тем самым была впервые получена некоторая процедура построения решения уравнения (!) в достаточно общем случае.

Однако, не говоря о том, что эта процедура построения решения отнюдь не оказалась наиболее простой, И. М. Рапопорту не удалось, отправляясь от нее, дать полное исследование интегрального уравнения (!) (не были получены в явном виде условия разрешимости уравнения (!), не была выяснена структура резольвенты уравнения (!), роль транспонирования уравнения и др.).

В известной мере это объясняется тем, что И. М. Рапопорт рассматривал уравнения (!) в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ (т. е. от правой части $f(t)$ и решения $\varphi(t)$ требовалась принадлежность к пространству

L_2) в предположении, что функции $k_{1,2}(t)$ принадлежат пространству L. При такой общей постановке И. М. Рапопорт пришел к проблеме Римана-Гильберта на прямой, которая, как им же отмечено, не была еще изучена (ввиду принадлежности коэффициентов к слишком широкому классу функций, не удовлетворяющих, вообще говоря, условию Гельдера).

Вместе с тем, следуя иному пути, удается дать полный анализ интегрального уравнения (!) не только в классе L_2, но и в ряде других классов: L_p $(p \geqslant 1)$ M, C, и др., что и составляет задачу первой части этой статьи.

В основу этой работы положены методы, которые были развиты М. Г. Крейном в применении к интегральному уравнению Винера-Хопфа

$$g(t) - \int_0^\infty k(t-s) g(s)\, ds = h(t) \qquad (0 < t < \infty) \tag{0.1}$$

и которые изложены в его статье [2], где можно найти также краткий исторический обзор исследований уравнения (0.1).

Как и следовало ожидать, теория интегрального уравнения (!) оказывается тесно связанной с теорией транспонированного уравнения

$$\psi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_{\tau}(s, t) \psi(s)\, ds = f(t), \tag{!τ}$$

которое в более развернутом виде может быть записано и так

$$\psi(t) - \int_{-\infty}^{0} k_1(s-t) \psi(s)\, ds - \int_0^\infty k_2(s-t) \psi(s)\, ds = f(t). \tag{!τ}$$

Отметим, что как уравнение (!), так и уравнение (!τ) рассматривались в классе L_2 Ю. И. Черским [3], [4] — в предположении, что преобразования Фурье $K_1(\lambda)$ и $K_2(\lambda)$ функций $k_1(t)$ и $k_2(t)$ удовлетворяют условиям Гельдера на сомкнутой вещественной оси. Этот автор получил ряд существенных дополнений к исследованиям И. М. Рапопорта, которые однако полностью покрываются более общими и точными результатами настоящего сообщения.

Укажем также на то, что уравнения (!) и (!) изучались еще Ф. Д. Гаховым и Ю. И. Черским [5], [6] при специальных предположениях относительно характера убывания или возрастания функций $k_1(t)$ и $k_2(t)$ при $t \to \pm\infty$ и соответствующих предположениях относительно поведения при $t \to \pm\infty$ функций ψ, φ, f. Эти исследования к нашему первому сообщению отношения не имеют.

Во втором сообщении на уравнения (!) и (!τ) будут перенесены результаты В. А. Фока [7] и М. Г. Крейна [2], относящиеся к уравнению Винера-Хопфа (0.1) с «экспоненциально убывающим» ядром (когда при некотором $h>0$: $exp\ (h|t|)\ k\ (t) \in L$). Тем самым будет развита теория интегрального уравнения (!τ) в той постановке, которая встречается в задачах на исследование хода плотности моноэнергетических нейтронов в двух полупространствах, разделенных плоской границей (см., например, у Г. Ф. Батя и Д. А. Зарецкого). В этой части работы мы укажем также на ряд возможных усовершенствований исследований Ф. Д. Гахова и Ю. И. Черского, вытекающих из наших результатов.

Заметим, наконец, что недавняя работа авторов [8] позволяет полностью обобщить (во всяком случае в его экзистенциальной части) настоящее исследование на случай, когда в уравнениях (!) и (!τ) «ядра» $\varkappa_1(t)$ и $\varkappa_2(t)$ суть некоторые квадратные матрицы-функции n-го порядка с элементами из L, а, ψ, φ и f суть соответственно n-мерные вектор-функции.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

1. Рассмотрение парного интегрального уравнения (!) тесно связано с исследованием уравнения типа Винера-Хопфа (0.1). Подробная теория последнего, как уже отмечалось, изложена в статье [2]. В связи с тем, что в дальнейшем нам придется опираться на ряд результатов этой статьи, кратко изложим их.

Через L будем обозначать пространство всех комплекснозначных измеримых и суммируемых функций $f(t)$ $(-\infty<t<\infty)$, для которых конечен интеграл

$$\|f\|_L=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt,$$

принимаемый за норму в пространстве L.

Через $L_+^{(p)}$ $(p\geqslant 1)$ обозначается пространство L_p $(0,\infty)$ комплексно-значных функций $f(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$, суммируемых в p-ой степени. Как известно, сопряженным к пространству $L_+=L_+^{(1)}$ является пространство M_+ ограниченных комплекснозначных функций $f(t)$ $(0\leqslant t<\infty)$ с определением нормы

$$\|f\|_M=\sup_{0<t<\infty}\operatorname{ess}|f(t)|.$$

Через M_+^c и M_+^u обозначаются подпространства из M_+, состоящие соответственно из всех непрерывных и равномерно непрерывных функций. Наконец, через C_+ обозначается подпространство M_+^c, состоящее из всех функций, для которых существует предел

$$f(\infty)=\lim_{t\to\infty}f(t),$$

и через C_+^0 $(\subset C_+)$ — подпространство всех функций, для которых этот предел равен нулю: $f(\infty)=0$.

В дальнейшем E_+ будет означать одно из пространств

$$L_+^{(p)}\,(p\geqslant 1),\quad M_+,\quad M_+^c,\quad M_+^u,\quad C_+,\quad C_+^0.$$

Для упрощения изложения будем далее полагать, что функция $f(t)$, определенная на всей вещественной оси $t(-\infty<t<\infty)$, принадлежит пространству E_+, если на положительной полуоси $(0\leqslant t<\infty)$ функция $f(t)\in E_+$, а на отрицательной полуоси $(-\infty<t<0)$ функция $f(t)$ тождественно равна нулю.

2. Через R обозначим кольцо (см. [2], [9]) всех функций $\Phi(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ вида

$$\Phi(\lambda)=c+\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{i\lambda t}\,dt,$$

где c постоянная, а $\varphi(t)$ произвольная функция из L. Очевидно, что все функции $\Phi(\lambda)\in R$ являются непрерывными на сомкнутой вещественной оси и $\Phi(\pm\infty)=c$. Через $R_{\pm}$ будем обозначать подкольца кольца R, образованные, соответственно, всеми функциями $\Phi(\lambda)$ $(-\infty<\lambda<\infty)$ вида

$$\Phi(\lambda)=c+\int_0^\infty \varphi(\pm t)e^{\pm i\lambda t}\,dt \qquad (\varphi\in L). \tag{1.1}$$

Очевидно, если функция $\Phi\in R_+$ (R_-), то формулой (1.1) эта функция может быть определена для всех комплексных чисел λ из верхней (нижней) полуплоскости; при таком определении функция $\Phi(\lambda)$ становится непрерывной в замкнутой верхней (нижней) полуплоскости и голоморфной внутри верхней (нижней) полуплоскости $Im\lambda\geqslant 0$ $(Im\lambda\leqslant 0)$. Введем оператор $\mathbf{P}_+$, проектирующий кольцо R в кольцо R_+ по следующему правилу

$$\mathbf{P}_+\Big(c+\int_{-\infty}^\infty \varphi(t)e^{i\lambda t}\,dt\Big)=c+\int_0^\infty \varphi(t)e^{i\lambda t}\,dt \qquad (\varphi\in L).$$

Легко видеть, что аналитически проектор $\mathbf{P}_+$ может быть определен формулой

$$\mathbf{P}_+(\Phi(\lambda))=\Phi(\infty)+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^\infty \frac{\Phi(\mu)-\Phi(\infty)}{\mu-\lambda}\,d\mu \qquad (Im\,\lambda>0).$$

Существенную роль в исследовании парного интегрального уравнения (!) играет проблема *факторизации* функций из R, которая заключается в представлении функции $G(\lambda)\in R$ в виде произведения

$$G(\lambda)=G_+(\lambda)\,G_-(\lambda) \qquad (-\infty<\lambda<\infty), \tag{1.2}$$

где G_+ (G_-) является непрерывной функцией в замкнутой верхней (нижней) полуплоскости и голоморфной внутри верхней (нижней) полуплоскости. Факторизация (1.2) называется *канонической*, если каждый из множителей $G_\pm(\lambda)$ отличен от нуля в своей полуплоскости, и *правильной*, если хотя бы один из сомножителей $G_\pm(\lambda)$ отличен от нуля в своей полуплоскости.

Пусть функция $k(t)\in L$ обладает следующим свойством

$$1-K(\lambda)\neq 0 \qquad (-\infty<\lambda<\infty), \tag{1.3}$$

где

$$K(\lambda)=\int_{-\infty}^\infty k(t)e^{i\lambda t}\,dt.$$

Тогда, согласно теореме Винера (см. [2], [9]), наряду с функцией $1-K(\lambda)$ функция $[1-K(\lambda)]^{-1}$ также принадлежит кольцу R. Обозначим через ν индекс функции $[1-K(\lambda)]^{-1}$, т. е.

$$\nu=-\operatorname{ind}[1-K(\lambda)]=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty d_\lambda \arg[1-K(\lambda)].$$

Нас будет интересовать задача факторизации функции $[1-K(\lambda)]^{-1}$, которая подробно разобрана в цитированной статье [2].

При факторизации функции $[1-K(\lambda)]^{-1}$ естественно нормировать множители $G_{\pm}(\lambda)$ условием

$$G_{+}(\infty)=1\,.$$

При выполнении условия (1.3) функция $[1-K(\lambda)]^{-1}$ всегда допускает правильную факторизацию:

$$[1-K(\lambda)]^{-1}=G_{+}(\lambda)\,G_{-}(\lambda) \qquad (-\infty<\lambda<\infty)\,, \tag{1.4}$$

причем множители $G_{\pm}(\lambda)$ принадлежат соответственно кольцам $\mathrm{R}_{\pm}$.

При $\nu\neq 0$ правильная факторизация (1.4) не единственна. Если $\nu>0$, то функция $G_{+}(\lambda)\neq 0$ $(Im\,\lambda\geqslant 0)$, а если $\nu<0$, то функция $G_{-}(\lambda)\neq 0$ $(Im\,\lambda\leqslant 0)$.

При $\nu=0$ правильная факторизация (1.4) является единственной и превращается в каноническую.

3. Функция $k\in L$ порождает в любом пространстве E_{+} линейный ограниченный оператор

$$\mathrm{K}\,g(t)=\int_{0}^{\infty}k(t-s)\,g(s)\,ds \qquad (0<t<\infty),$$

причем

$$\|\mathbf{K}\|_{E+}\leqslant\|k\|_{L}\,.$$

При выполнении условия (1.3) будем называть, следуя [2], индексом уравнения (0.1) число

$$\nu=-\operatorname{ind}(1-K(\lambda))\,.$$

Если $\nu=0$, то при любой правой части $h(t)\in E_{+}$ уравнение (0.1) имеет единственное решение $g(t)\in E_{+}$, причем это решение определяется по формуле

$$g(t)=h(t)+\int_{0}^{\infty}\gamma(t,s)\,h(s)\,ds \qquad (0<t<\infty)\,, \tag{1.5}$$

где

$$\gamma(t,s)=\gamma_1(t-s)+\gamma_2(s-t)+\int_{0}^{\min(t,s)}\gamma_1(t-u)\,\gamma_2(s-u)\,du\,,$$

а функции $\gamma_j(t)$ $(-\infty<t<\infty;\ j=1,2)$ принадлежат пространству L_{+} и определяются равенствами

$$1+\int_{0}^{\infty}\gamma_1(t)\,e^{i\lambda t}\,dt=\exp\left(-\int_{0}^{\infty}l(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\right)$$

$$1+\int_{0}^{\infty}\gamma_2(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt=\exp\left(-\int_{-\infty}^{0}l(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\right),$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty}l(t)\,e^{i\lambda t}\,dt=\ln(1-K(\lambda))\,.$$

Если положить

$$G_{+}(\lambda)=1+\int_{0}^{\infty}\gamma_1(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\,, \qquad G_{-}(\lambda)=1+\int_{0}^{\infty}\gamma_2(t)\,e^{-i\lambda t}\,dt\,, \tag{1.6}$$

то равенство (1.4), очевидно, будет выполняться. Оно будет представлять собой каноническую факторизацию функции $[1-K(\lambda)]^{-1}$. Этим свойством могут быть определены функции $\gamma_1(t)$ и $\gamma_2(t)$.

Множители $G_{\pm}(\lambda)$ могут быть найдены по формулам:

$$\ln G_+(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1-K(\mu))}{\mu-\lambda}\,d\mu \qquad (Im\,\lambda > 0)$$

$$\ln G_-(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln(1-K(\mu))}{\mu-\lambda}\,d\mu \qquad (Im\,\lambda < 0).$$

4. Прежде чем сформулировать свойства уравнения (0.1) при $\nu > 0$, введем, следуя [2], понятие *D_+-цепочки* функций.

Упорядоченная система функций $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{\nu-1}$ из пространства L_+ называется *D_+-цепочкой*, если:

1) все функции χ_j $(j = 0, 1, \ldots, \nu-1)$ абсолютно непрерывны,

2) $\chi_{j+1}(t) = \frac{d}{dt}\chi_j(t)$, $\chi_j(0) = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, \nu-2)$,

3) $\chi_{\nu-1}(0) = 1$, $\frac{d}{dt}\chi_{\nu-1} \in L_+$.

Условия 1), 2), 3) эквивалентны следующим

$$\chi_j(t) = \int_0^t \chi_{j+1}(s)\,ds \qquad (j = 0, 1, \ldots, \nu-2),\ \chi_{\nu-1}(t) = 1 + \int_0^t \chi_\nu(s)\,ds,$$

где $\chi_\nu(t)$ некоторая функция из L_+.

Преобразования Лапласа функций D_+-цепочки, очевидно, связаны соотношением

$$X_{j+1}(\lambda) = -i\lambda X_j(\lambda) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, \nu-2).$$

Из последнего соотношения, в частности, получается линейная независимость функций D_+-цепочки.

Отметим еще, что функции D_+-цепочки принадлежат всем пространствам E_+.

При $\nu > 0$ уравнение (0.1) имеет решение в E_+ при любой правой части $h(t) \in E_+$; одно из решений можно найти по формуле (1.5), где функции $\gamma_j(t) \in L_+$ $(j = 1, 2)$ определяются равенствами (1.6), в которых $G_{\pm}(\lambda)$ суть множители какой-либо правильной факторизации функции $[1-K(\lambda)]^{-1}$.

Однородное уравнение

$$\chi(t) - \int_0^\infty k(t-s)\chi(s)\,ds = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{1.7}$$

в этом случае имеет в любом пространстве E_+ точно ν линейно независимых решений. Множество всех решений этого уравнения не зависит от выбора пространства E_+ и имеет базис, составляющий D_+-цепочку.

5. Если $\nu < 0$, то однородное уравнение (1.7) имеет в каждом из пространств E_+ единственное нулевое решение. Неоднородное уравнение

(0.1) разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть $h(t) \in E_+$ удовлетворяет условиям

$$\int_0^\infty h(t)\,\omega(t)\,dt = 0, \tag{1.8}$$

где $\omega(t) \in E_+$ любое решение транспонированного однородного уравнения

$$\omega(t) - \int_0^\infty k(s-t)\,\omega(s)\,ds = 0.$$

При выполнении условий (1.8) решение уравнения (0.1) получается по формуле (1 5), где функции $G_\pm(\lambda)$ осуществляют правильную факторизацию (1.4) функции $[1-K(\lambda)]^{-1}$.

Из сказанного, в частности, следует, что все ζ, для которых

$$\zeta - K(\lambda) \neq 0 \qquad (-\infty < \lambda < \infty) \text{ и } \nu_\zeta = -\operatorname{ind}(\zeta - K(\lambda)) \neq 0,$$

суть точки спектра оператора **K** (эти точки спектра являются Φ-точками* с d-характеристикой вида $(\nu_\zeta, 0)$ или $(0, |\nu_\zeta|)$.

Оказывается, кроме указанных точек, спектр оператора **K** состоит еще из всех точек кривой $\zeta = K(\lambda)$ $(-\infty \leqslant \lambda < \infty)$.

Последние уже не являются ни Φ-точками и ни $\Phi_\pm$-точками оператора **K**.

2. ПАРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО ТРАНСПОНИРОВАННОЕ

1. В дальнейшем E будет обозначать пространство всех комплекснозначных функций $f(t)$ $(-\infty < t < \infty)$, обладающих тем свойством, что функции $f(t)$ и $f(-t)$ $(0 < t < \infty)$ принадлежат пространству E_+.

В зависимости от того, является ли пространство E пространством $L^{(p)} = L_p(-\infty, \infty)$ или подпространством пространства $M(-\infty, \infty)$ норма в E определяется одним из равенств

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}, \qquad \|f\|_M = \sup_{-\infty < t < \infty} \operatorname{ess} |f(t)|.$$

Пусть $k_1(t)$ и $k_2(t)$ — две функции из L. Равенством

$$\mathbf{K}_\pi \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k_\pi(t, s)\,\varphi(s)\,ds, \tag{2.1}$$

---

* Мы применяем здесь терминологию, принятую нами в статье [10]. Напомним необходимые определения из [10]. Линейный ограниченный оператор, A, действующий в банаховом пространстве B, называется *нормально разрешимым*, если условие $l(y) = 0$, где $l \in B^\tau$ произвольное решение однородного уравнения $A^\tau l = 0$, является необходимым и достаточным условием для разрешимости уравнения $Ax = y$. Здесь B^τ означает пространство, сопряженное к B, а A^τ — оператор, сопряженный (транспонированный) к A.

Обозначим через α_ζ и β_ζ размерности подпространств решений соответственно уравнений $(A - \zeta I)x = 0$, $(A - \zeta I)^\tau l = 0$. Число ζ называется Φ-*точкой* оператора A, если оператор $A - \zeta I$ нормально разрешим и числа α_ζ, β_ζ конечны. Если оператор $A - \zeta I$ нормально разрешим и только одно из чисел α_ζ, β_ζ конечно, то ζ называется $\Phi_\pm$-*точкой* (в зависимости от того, какое из чисел конечно). Пара чисел $(\alpha_\zeta, \beta_\zeta)$ называется *d-характеристикой* оператора A в точке ζ. Множество всех Φ-точек оператора A называется его Φ-*множеством*.

где

$$k_\pi(t.s) = \begin{cases} k_1(t-s) & (-\infty < t < 0; \quad -\infty < s < \infty) \\ k_2(t-s) & (0 < t < \infty; \quad -\infty < s < \infty), \end{cases} \tag{2.2}$$

определяется линейный ограниченный оператор, действующий в любом пространстве E, причем

$$\|\mathbf{K}_\pi\|_E \leqslant \|k_1\|_L + \|k_2\|_L. \tag{2.3}$$

Следует отметить, что во всех пространствах E, за исключением пространств $L^{(p)}(p > 1)$, сходимость интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_j(t-s)\,\varphi(s)\,ds \qquad (j = 1,2) \tag{2.4}$$

понимается в обычном смысле. В пространстве $L^{(p)}(p > 1)$ интеграл (2.4) надо понимать как предел в смысле метрики $L^{(p)}$ интеграла

$$\int_{-N}^{N} k_j(t-s)\,\varphi(s)\,ds \qquad (j = 1,2)$$

при N, стремящемся к бесконечности:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_j(t-s)\,\varphi(s)\,ds = \operatorname*{l\cdot i\cdot m}_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} k_j(t-s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Сопряженным или, точнее, транспонированным оператором к оператору $\mathbf{K}_\pi$, рассматриваемому в пространстве L, будет оператор

$$\mathbf{K}_\pi^\tau \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} k_\pi(s, t)\,\varphi(s)\,ds,$$

рассматриваемый в M. Более подробно он записывается следующим образом

$$\mathbf{K}_\pi^\tau \varphi = \int_{-\infty}^{0} k_1(s-t)\,\varphi(s)\,ds + \int_{0}^{\infty} k_2(s-t)\,\varphi(s)\,ds. \tag{2.5}$$

Оператор $\mathbf{K}_\pi^\tau$ является линейным ограниченным оператором не только в пространстве M, но и в любом пространстве E, причем для нормы оператора $\mathbf{K}_\pi^\tau$ также справедлива оценка (2.3).

Если рассматривать оператор $\mathbf{K}_\pi^\tau$ в пространстве L, то транспонированным к нему оператором будет оператор $\mathbf{K}_\pi$.

Таким образом, парное интегральное уравнение (!) и интегральное уравнение

$$\psi(t) - \int_{-\infty}^{0} k_1(s-t)\,\psi(s)\,ds - \int_{0}^{\infty} k_2(s-t)\,\psi(s)\,ds = f(t) \tag{!$^\tau$}$$

являются взаимно транспонированными.

Исследование парного уравнения (!) и его транспонированного уравнения (!$^\tau$) удобно вести параллельно с интегральным уравнением Винера-Хопфа

$$g(t) - \int_{0}^{\infty} k(t-s)\,g(s)\,ds = h(t) \quad (0 < t < \infty; \quad g, h \in E_+) \tag{2.6}$$

со специально подобранным ядром $k(t-s)$.

Прежде чем указать выражение для $k(t)$, наложим на функции $k_j(t)$ $(j=1,2)$, кроме ограничения $k_j(t)\in L$ $(j=1,2)$, еще одно естественное ограничение:

$$1-K_j(\lambda)=1-\int_{-\infty}^{\infty}k_j(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\neq 0 \quad (-\infty<\lambda<\infty;\ j=1,2). \qquad (2.7)$$

Тогда на основании известной теоремы Н. Винера [2, § 1] функция $[1-K_1(\lambda)]^{-1}[K_2(\lambda)-K_1(\lambda)]$ будет преобразованием Фурье некоторой функции из L, которую и обозначим через $k(t)$, так что:

$$\int_{-\infty}^{\infty}k(t)\,e^{i\lambda t}\,dt=[1-K_1(\lambda)]^{-1}[K_2(\lambda)-K_1(\lambda)]. \qquad (2.8)$$

Число

$$\nu=-\operatorname{in}(1-K(\lambda))=-\operatorname{ind}\left(\frac{1-K_2(\lambda)}{1-K_1(\lambda)}\right), \qquad (2.9)$$

являющееся индексом уравнения (2.6), назовем *индексом уравнения* (!). Естественность этого определения будет выяснена ниже.

Такой же индекс будем приписывать уравнению

$$\varphi(t)-\int_{-\infty}^{0}k_1(t-s)\,\varphi(s)\,ds-\int_{0}^{\infty}k_2(t-s)\,\varphi(s)\,ds=f(t).$$

Следовательно, если парное интегральное уравнение (!) имеет индекс ν, то транспонированное уравнение (!$^{\tau}$) будет иметь индекс $\nu^{\tau}=-\nu$.

2. Пусть $a(t,s)$ $(-\infty<t,s<\infty)$ некоторое ядро, порождающее в пространстве E линейный ограниченный оператор

$$\mathbf{A}\varphi=\int_{-\infty}^{\infty}a(t,s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Будем говорить, что ядро $b(t,s)$ $(-\infty<t,s<\infty)$ является *правой резольвентой* ядра $a(t,s)$, если $b(t,s)$ порождает в E линейный ограниченный оператор

$$\mathbf{B}\varphi=\int_{-\infty}^{\infty}b(t,s)\,\varphi(s)\,ds$$

и для любой функции $f(t)\in E$ функция

$$g(t)=f(t)+\int_{-\infty}^{\infty}b(t,s)f(s)\,ds \qquad (2.10)$$

является одним из решений уравнения

$$g(t)-\int_{-\infty}^{\infty}a(t,s)\,g(s)\,ds=f(t). \qquad (2.11)$$

Аналогично ядро $b(t,s)$ будем называть *левой резольвентой* ядра $a(t,s)$, если ядро $a(t,s)$ является правой резольвентой ядра $b(t,s)$.

Иначе говоря, ядро $b(t,s)$ будет левой резольвентой ядра $a(t,s)$, если всякий раз, когда для некоторого $f\in E$ уравнение (2.11) разрешимо, его решение $g\in E$ будет единственным и будет определяться по формуле (2.10). Отметим еще, что если ядро $b(t, s)$ является одновременно левой и правой резольвентой ядра $a(t, s)$, то оно представляет собой полную резольвенту ядра $a(t, s)$ и, следовательно, $\mathbf{I}+\mathbf{B}=(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$.

3. ПАРНОЕ И ТРАНСПОНИРОВАННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ИНДЕКСОМ, РАВНЫМ НУЛЮ

Начнем с исследования парного интегрального уравнения (!) в пространстве L при условии $\nu=0$.

Предположим сначала, что парное уравнение имеет решение $\varphi \in L$. Введем функции

$$b_+(t)=-f(t)+\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)\,ds \quad (0<t<\infty);$$

$$b_+(t)=0 \quad (-\infty<t<0)$$

$$b_-(t)=-f(t)+\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)\,ds \quad (-\infty<t<0);$$

$$b_-(t)=0 \quad (0<t<\infty).$$

Тогда функция $\varphi(t)$ будет решением следующей системы двух уравнений

$$\begin{cases} \varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)\,ds=f(t)+b_+(t) \\ \varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)\,ds=f(t)+b_-(t) \end{cases} \quad (-\infty<t<\infty).$$

Применяя к этим двум равенствам преобразования Фурье, получим

$$\begin{gathered}(1-K_1(\lambda))\,\Phi(\lambda)=F(\lambda)+B_+(\lambda) \\ (1-K_2(\lambda))\,\Phi(\lambda)=F(\lambda)+B_-(\lambda),\end{gathered} \tag{3.1}$$

где функции Φ, F, $B_\pm$ являются преобразованиями Фурье соответственно функций φ, f и $b_\pm$, причем $B_\pm \in R_\pm$.

Таким образом, решение Φ системы (3.1) получается по формуле

$$\Phi=\frac{F+B_+}{1-K_1}=\frac{F+B_-}{1-K_2}. \tag{3.2}$$

Согласно (2.8) и (3.2), функции $B_\pm$ удовлетворяют уравнению

$$(1-K)B_+-B_-=KF. \tag{3.3}$$

При наложенных ограничениях функция $[1-K(\lambda)]^{-1}$ допускает каноническую факторизацию [2, § 2]

$$[1-K(\lambda)]^{-1}=G_+(\lambda)\,G_-(\lambda) \qquad (-\infty<\lambda<\infty).$$

Следовательно, уравнение (3.3) можно записать в виде

$$G_+^{-1} B_+ - G_- B_- = G_- KF.$$

Применяя к обеим частям последнего равенства проектор $\mathbf{P}_+$ (см. § 1, п. 2), получаем

$$G_+^{-1} B_+ = \mathbf{P}_+ (G_- KF),$$

ибо $G_- B_- \in R_-$ и $B_-(\infty) = 0$. Стало быть

$$B_+ = G_+ \mathbf{P}_+ (G_- KF).$$

Таким образом, если парное интегральное уравнение (!) имеет решение в L, то это решение единственно и его преобразование Фурье выражается через известные функции следующим образом:

$$\Phi = [1 - K_1]^{-1} \cdot [F + G_+ \mathbf{P}_+ (G_- KF)]. \tag{3.4}$$

Обратно, пусть $f(t)$ любая функция из L и Φ определяется по формуле (3.4). Обозначая тогда функцию $G_+ \mathbf{P}_+ (G_- KF)$ $(\in R_+)$ через B_+, получим

$$(1 - K_1) \Phi = F + B_+.$$

Рассматривая функции Φ и B_+ как преобразования Фурье функций $\varphi(t) \in L$ и $b_+(t) \in L_+$, устанавливаем, что функция φ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s) \varphi(s)\, ds = f(t) + b_+(t) \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Принимая во внимание, что функция $b_+(t)$ обращается в нуль при всех отрицательных значениях t, найдем

$$\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s) \varphi(s)\, ds = f(t) \qquad (-\infty < t < -0).$$

Далее, из равенства

$$B_+ = G_+ \mathbf{P}_+ (G_- KF)$$

получаем, что разность

$$G_-^{-1} G_+^{-1} B_+ - KF$$

является некоторой функцией из R_-, обращающейся в нуль на бесконечности. Обозначим ее через B_-; тогда

$$(1 - K) B_+ = KF + B_-,$$

или

$$(1 - K_2)(B_+ + F) = (1 - K_1)(B_- + F).$$

Следовательно,

$$(1 - K_2) \Phi = F + B_-.$$

Последнее означает, что функция $\varphi \in L$ и удовлетворяет также второму уравнению

$$\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\,\varphi(s)\,ds=f(t) \qquad (0\leqslant t<\infty).$$

Таким образом, при любой правой части $f\in L$ уравнение (!) имеет единственное решение, преобразование Фурье которого определяется по формуле (3.4).

Из (3.4) следует. что преобразование Фурье решения парного интегрального уравнения (!) можно также представить в виде

$$\Phi=(1-K_1)^{-1}(F+H),$$

где $H(\lambda)$ преобразование Фурье функции $h(t)\in L_+$, являющейся решением уравнения

$$h(t)-\int_0^{\infty} k(t-s)\,h(s)\,ds=\int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)f(s)\,ds \qquad (0<t<\infty)$$

и обращающейся в нуль при $t<0$.

Таким образом, решение φ парного интегрального уравнения (!) в рассматриваемом случае представляется в виде

$$\varphi(t)=f(t)+h(t)+\int_{-\infty}^{\infty} k_{-1}(t-s)f(s)\,ds+\int_0^{\infty} k_{-1}(t-s)\,h(s)\,ds,$$

где $k_{-1}(t)$ является функцией из пространства L, преобразование Фурье которой определяется равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_{-1}(t)\,e^{i\lambda t}\,dt=-K_1(\lambda)\,[1-K_1(\lambda)]^{-1}.$$

Обозначая через $\gamma(t, s)$ резольвенту ядра $k(t-s)$ в E_+, получаем окончательную формулу:

$$\varphi(t)=f(t)+\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\pi(t, s)f(s)\,ds, \tag{3.5}$$

где

$$\gamma_\pi(t, s)=k(t-s)+k_{-1}(t-s)+\int_0^{\infty} k_{-1}(t-r)\,k(r-s)\,dr+$$

$$+\int_0^{\infty}\gamma(t, r)\,k(r-s)\,dr+\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k_{-1}(t-r)\,\gamma(r, u)\,k(u-s)\,du\,dr. \tag{3.6}$$

Легко установить, что для всех s $(-\infty<s<\infty)$ и почти для всех t $(-\infty<t<\infty)$ выполняются следующие равенства

$$\gamma_\pi(t, s)-\int_{-\infty}^{\infty} k_\pi(t, r)\,\gamma_\pi(r, s)\,dr=k_\pi(t, s)$$

$$\gamma_\pi(t, s)-\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\pi(t; r)\,k_\pi(r, s)\,dr=k_\pi(t, s).$$

Ядро $\gamma_\pi(t, s)$ состоит из суммы и композиции ядер, каждое из которых порождает линейный ограниченный оператор не только в пространстве L, но и в любом пространстве E. Следовательно, ядро $\gamma_\pi(t, s)$ порождает в любом пространстве E линейный ограниченный оператор

$$\Gamma_\pi \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\pi(t, s) \varphi(s)\, ds.$$

Равенства (3.7) означают, что в любом пространстве E оператор $I - K_\pi$ имеет ограниченный обратный, совпадающий с оператором $I + \Gamma_\pi$:

$$(I - K_\pi)^{-1} = I + \Gamma_\pi.$$

Таким образом, $\gamma_\pi(t, s)$ является резольвентой ядра $k_\pi(t, s)$ в любом пространстве E.

Мы пришли к следующей теореме:

Теорема 1. *Если функции $k_j(t) \in L$ $(j = 1,2)$ удовлетворяют условию* (2.7) *и индекс парного интегрального уравнения равен нулю* $(\nu = 0)$, *то при любой правой части $f \in E$ уравнение* (!) *имеет одно и только одно решение $\varphi \in E$. Это решение получается по формуле* (3.5) *и, следовательно, ядро $\gamma_\pi(t, s)$, определяемое равенством* (3.6), *является резольвентой парного ядра $k_\pi(t, s)$.*

Заметим, что условие $\nu = 0$ будет всегда выполнено, когда $k_j(t)$ $(j = 1,2)$ четные функции, ибо в этом случае также и $K_j(\lambda)$ $(j = 1,2)$ четные функции.

Такое же замечание можно сделать в отношении случая, когда $k_j(t)$ $(j = 1,2)$ эрмитовы функции, т. е. $k_j(-t) = \overline{k_j(t)}$ $(j = 1,2)$.

Принимая во внимание, что уравнение $(!^\tau)$ является транспонированным к парному уравнению (!), и учитывая свойства ядра $\gamma_\pi(t, s)$, легко вывести следующую теорему.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то при любой правой части $f \in E$ транспонированное уравнение $(!^\tau)$ имеет одно и только одно решение $\psi \in E$. Это решение получается по формуле*

$$\psi(t) = f(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_\pi(s, t) f(s)\, ds. \tag{3.8}$$

Справедливость теоремы 2, как уже отмечено, следует из свойства ядра $\gamma_\pi(t, s)$ и теоремы 1. Для дальнейшего существенно, что теорему 2 можно доказать, не прибегая к теореме 1; это доказательство можно провести аналогично и теми же средствами, что и доказательство теоремы 1. Приведем вкратце схему этого доказательства, ограничиваясь случаем $E = L$.

Допуская, что функции φ и f принадлежат пространству L, и применяя к обеим частям уравнения $(!^\tau)$ преобразование Фурье, получим, что уравнение $(!^\tau)$ эквивалентно следующему

$$(1 - K_2(-\lambda)) \Psi_+(\lambda) + (1 - K_1(-\lambda)) \Psi_-(\lambda) = F(\lambda), \tag{3.9}$$

где

$$\Psi_+(\lambda) = \int_0^\infty \psi(t) e^{i\lambda t}\, dt, \qquad \Psi_-(\lambda) = \int_{-\infty}^0 \psi(t) e^{i\lambda t}\, dt.$$

Для решения уравнения (3.9) перепишем его в виде

$$[1 - K(-\lambda)]\, \Psi_+(\lambda) + \Psi_-(\lambda) = [1 - K_1(-\lambda)]^{-1} \cdot F(\lambda). \qquad (3.10)$$

Принимая во внимание, что при условиях теоремы 2 функция $[1-K(\lambda)]^{-1}$ допускает каноническую факторизацию

$$[1 - K(-\lambda)]^{-1} = G_+(-\lambda)\, G_-(-\lambda) = G_+^{\tau}(\lambda)\, G_-^{\tau}(\lambda),$$

где

$$G_+^{\tau}(\lambda) = G_-(-\lambda), \qquad G_-^{\tau}(\gamma) = G_+(-\lambda),$$

получаем

$$\left(G_+^{\tau}\right)^{-1}\Psi_+ + G_-^{\tau}\Psi_- = [1 - K_1(-\lambda)]^{-1}\, G_-^{\tau} F.$$

Применяя к последнему равенству проекторы $\mathbf{P}_+$, найдем Ψ_+. После этого из (3.10) находим, что при любой правой части $f \in L$ преобразование Фурье $\Psi = \Psi_+ + \Psi_-$ решения ψ уравнения ($!^{\tau}$) имеет вид:

$$\Psi(\lambda) = [1 - K_1(-\lambda)]^{-1} F + K(-\lambda)\, G_+^{\tau}\, \mathbf{P}_+ [G_-^{\tau}(1 - K_1(-\lambda))^{-1} F].$$

Окончательно решение уравнения ($!^{\tau}$) определяется по формуле:

$$\psi(t) = f(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\pi}^{\tau}(t, s)\, f(s)\, ds \qquad (-\infty < t < \infty), \qquad (3.11)$$

где, как легко видеть, $\gamma_{\pi}^{\tau}(t, s) = \gamma_{\pi}(s, t)$.

В заключение этого параграфа отметим, что, как следует из доказанных теорем, каждое из однородных уравнений

$$\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_{\pi}(t, s)\, \varphi(s)\, ds = 0 \qquad (-\infty < t < \infty) \qquad (+)$$

и

$$\psi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k_{\pi}(s, t)\, \psi(s)\, ds = 0 \qquad (-\infty < t < \infty) \qquad (+^{\tau})$$

в случае $\nu = 0$ имеет в любом из пространств E единственное нулевое решение.

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМ ИНДЕКСОМ

1. Нам осталось немного добавить к рассуждениям предыдущего параграфа, чтобы установить следующее предложение.

Теорема 3. *Если функции $k_j(t) \in L$ ($j = 1,2$) удовлетворяют условию* (2.7) *и индекс парного интегрального уравнения* (!) *положителен* ($\nu > 0$), *то при любой правой части $f \in E$ функция $\varphi(t) \in E$, определяемая формулой* (3.5), *является одним из решений уравнения* (!). *Следовательно, ядро $\gamma_{\pi}(t, s)$, определяемое равенством* (3.6), *является правой резольвентой парного ядра $k_{\pi}(t, s)$.*

Доказательство. При соблюдении условий теоремы функция $[1-K(\lambda)]^{-1}$ допускает правильную факторизацию (1.4), при которой множители $G_{\pm}(\lambda)$ принадлежат соответственно кольцам $R_{\pm}$ и $G_{+}(\lambda) \neq 0$ $(Im\,\lambda \geqslant 0)$.

Легко устанавливается, что для любой функции $f \in L$ функция $\Phi(\lambda) \in R$, определенная формулой (3.4), является преобразованием Фурье некоторого решения $\varphi \in L$ парного уравнения (!).

Следовательно, формулой (3.5), где функции $\gamma_{1,2}(t) \in L_{+}$ задаются равенствами (1.6), определяется некоторое решение уравнения (!). Как и в случае $\nu=0$ легко убедиться, что последнее утверждение сохраняет силу при замене пространства L любым пространством E.

Таким образом, при $\nu>0$ ядро $\gamma_{\pi}(t, s)$ является правой резольвентой ядра $k_{\pi}(t, s)$.

Анализируя аналогичным образом второе доказательство теоремы 2, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 4. *Если функции* $k_j(t) \in L$ $(j=1,2)$ *удовлетворяют условию* (2.7) *и индекс интегрального уравнения* ($!^{\tau}$) *положителен* $(\nu^{\tau}=-\nu>0)$, *то при любой правой части* $f \in E$ *функция* $\psi \in E$, *определяемая формулой* (3.11), *является одним из решений уравнения* ($!^{\tau}$). *Следовательно, ядро* $\gamma_{\pi}^{\tau}(t, s)=\gamma_{\pi}(s, t)$, *определяемое равенством* (3.6), *является правой резольвентой ядра* $k_{\pi}^{\tau}(t, s)=k_{\pi}(s, t)$.

2. Перейдем к исследованию однородного парного интегрального уравнения (+) или, что одно и то же, уравнения:

$$\begin{cases} \varphi(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\varphi(s)\,ds=0 & (-\infty<t<0) \\ \varphi(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s)\varphi(s)\,ds=0 & (0<t<\infty) \end{cases} \qquad (+)$$

в пространстве E.

Исследование уравнения (+) облегчается установлением связи между его решениями и решениями однородного уравнения Винера-Хопфа

$$\chi(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\chi(s)\,ds=0 \qquad (0<t<\infty). \qquad (4.1)$$

Пусть $\chi \in E_{+}$ произвольное решение уравнения (4.1'); тогда функция

$$\varphi(t)=\chi(t)+\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s)\chi(s)\,ds \qquad (4.2)$$

принадлежит пространству E и является решением уравнения (+). В самом деле:

$$\varphi(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_j(t-s)\varphi(s)\,ds=\chi(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty} l_j(t-s)\chi(s)\,ds \qquad (j=1,2),$$

где

$$l_j(t)=-k_1(t)+k_j(t)-\int\limits_{-\infty}^{\infty} k_j(t-s)k_{-1}(s)\,ds \qquad (j=1,2).$$

Последнее и означает, что функция $\varphi(t)$ является решением однородного уравнения $(+)$, ибо легко видеть, что

$$l_1(t)=0\,, \text{ а } l_2(t)=k(t) \qquad (-\infty<t<\infty)\,.$$

Аналогично проверяется и обратное предложение: если функция $\varphi\in E$ является решением уравнения $(+)$, то функция

$$\chi(t)=\varphi(t)-\int_{-\infty}^{\infty}k_1(t-s)\,\varphi(s)\,ds$$

принадлежит пространству E_+ и является решением однородного уравнения (4.1).

Из установленной связи между решениями уравнений (4.1) и $(+)$ непосредственно следует, что уравнение $(+)$ имеет во всех пространствах E одни и те же решения. В случае, когда индекс ν уравнения $(+)$ положителен, решения уравнения $(+)$ составляют ν-мерное подпространство.

Аналогичное положение имеет место для однородного транспонированного уравнения:

$$\psi(t)-\int_{-\infty}^{0}k_1(s-t)\,\psi(s)\,ds-\int_{0}^{\infty}k_2(s-t)\,\psi(s)\,ds=0. \qquad (+^{\tau})$$

Если функция $\omega(t)\in E_+$ является решением однородного уравнения

$$\omega(t)-\int_{0}^{\infty}k(s-t)\,\omega(s)\,ds=0, \qquad (4.3)$$

то функция $\psi(t)$, определяемая равенством

$$\psi(t)=\int_{0}^{\infty}k(s-t)\,\omega(s)\,ds, \qquad (4.4)$$

или, что одно и то же, равенством

$$\psi(t)=\begin{cases}\omega(t) & (0<t<\infty)\\ \int_{0}^{\infty}k(s-t)\,\omega(s)\,ds & (-\infty<t<0),\end{cases}$$

принадлежит пространству E и является решением уравнения $(+\tau)$. Действительно, подставляя функцию $\psi(t)$, заданную равенством (4.4), в левую часть уравнения $(+\ )$, получаем

$$\psi(t)-\int_{-\infty}^{0}k_1(s-t)\,\psi(s)\,ds-\int_{0}^{\infty}k_2(s-t)\,\psi(s)\,ds=\psi(t)-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}k_1(s-t)\,\psi(s)\,ds-\int_{-\infty}^{\infty}[k_2(s-t)-k_1(s-t)]\,\omega(s)\,ds=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}m(s-t)\,\omega(s)\,ds,$$

где

$$m(t)=k(t)+k_1(t)-k_2(t)-\int_{-\infty}^{\infty}k_1(t-s)\,k(s)\,ds\,.$$

Применяя преобразование Фурье к функции $m(t)$ и учитывая равенство (2.8), находим, что $m(t)=0$.

Без труда можно доказать и обратное предложение, а именно: если функция $\psi(t)\in E$ является решением уравнения $(+^{\tau})$, то функция $\omega(t)=\psi(t)$ $(0<t<\infty)$ представляет собой решение уравнения (4.3).

Для более детального исследования линеалов решений уравнений $(+)$ и $(+^{\tau})$ в E введем следующие определения.

Упорядоченную систему функций $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{\nu-1} (\in L)$ будем называть D^{τ}*-цепочкой*, если:

$$\psi_j(t)=\int_{-\infty}^{t} \psi_{j+1}(s)\,ds \qquad (j=0,1,2,\ldots, \nu-1),$$

где $\psi_\nu(t)$ — некоторая функция из L.

Функции D^{τ}-цепочки линейно независимы, ибо их преобразования Фурье связаны друг с другом следующими соотношениями:

$$\Phi_{j+1}(\lambda)=-i\lambda\,\Phi_j(\lambda) \qquad (j=0,1,\ldots,\nu-2). \tag{4.5}$$

Упорядоченную систему функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1} (\in L)$ будем называть D*-цепочкой*, если:

1) функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-2}$ абсолютно непрерывны, а функция $\varphi_{\nu-1}$ становится абсолютно непрерывной по вычитании из нее функции $\eta(t)=(1+\operatorname{sign} t)/2$.

2) $\varphi_{j+1}=\dfrac{d}{dt}\varphi_j \qquad (j=0,1,\ldots,\nu-2), \qquad \dfrac{d}{dt}(\varphi_{\nu-1}-\eta)\in L.$

Очевидно, условия 1) и 2) могут быть заменены следующими:

$$\varphi_j(t)=\int_{-\infty}^{t}\varphi_{j-1}(s)\,ds \ \ (j=0,1,\ldots,\nu-2),$$

$$\varphi_{\nu-1}(t)=\eta(t)+\int_{-\infty}^{t}\varphi_\nu(s)\,ds,$$

где $\varphi_\nu(t)$ — некоторая функция из L.

Для функций D-цепочки также справедливы соотношения (4.5), в силу которых эти функции линейно независимы.

Между D-цепочками обоих родов и D_+-цепочками (см. § 1, пункт 4) функций имеется следующая связь: *если система функций* $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_{\nu-1}$ *образует* D_+*-цепочку, а* $k_0(t)$ *произвольная функция из* L*, то система функций*

$$\psi_j(t)=\int_0^{\infty} k_0(t-s)\,\chi_j(s)\,ds \qquad (j=0,1,\ldots,\nu-1) \tag{4.6}$$

образует D^{τ}*-цепочку, а система функций*

$$\varphi_j(t)=\chi_j(t)+\int_0^{\infty}k_0(t-s)\,\chi_j(s)\,ds \qquad (j=0,1,\ldots,\nu-1) \tag{4.7}$$

D*-цепочку.*

В самом деле, из (4.6) следует:

$$\int_{-\infty}^{t} \psi_{j+1}(s)ds = \int_{0}^{\infty} l(t-s)\chi_{j+1}(s)\,ds =$$

$$= \int_{0}^{\infty} k_0(t-s)\,\chi_j(s)\,ds = \psi_j(s) \qquad (j=0,1,\ldots,\nu-2),$$

где

$$l(t) = \int_{-\infty}^{t} k_0(s)\,ds\,.$$

Обозначая через $\chi_\nu \in L_+$ функцию, для которой имеет равенство

$$\chi_{\nu-1}(t) = \eta(t) + \int_{0}^{t} \chi_\nu(s)\,ds,$$

и через $\psi_\nu \in L$ функцию

$$\psi_\nu(t) = \int_{0}^{\infty} k_0(t-s)\,\chi_\nu(s)\,ds + k_0(t)\,,$$

получим

$$\int_{-\infty}^{t} \psi_\nu(s)\,ds = \int_{0}^{\infty} l(t-s)\,\chi_\nu(s)\,ds + \int_{-\infty}^{t} k_0(s)\,ds =$$

$$= \int_{0}^{\infty} k_0(t-s)\,\chi_{\nu-1}(s)\,ds = \psi_{\nu-1}(t)\,.$$

Таким образом, система функций (4.6) образует D^{-}-цепочку.

Для доказательства того, что система (4.7) образует D-цепочку остается заметить, что

$$\varphi_j = \psi_j + \chi_j \qquad (j=0,1,\ldots,\nu-1),$$

а следовательно,

$$\int_{-\infty}^{t} \varphi_{j+1}(s)\,ds = \int_{-\infty}^{t} \psi_{j+1}(s)ds + \int_{-\infty}^{t} \chi_{j+1}(s)\,ds = \psi_j + \chi_j = \varphi_j(t)$$

$$(j=0,1,\ldots,\nu-2)$$

и

$$\int_{-\infty}^{t} [\psi_\nu(s) + \chi_\nu(s)]ds = \psi_{\nu-1}(t) + \chi_{\nu-1}(t) - \eta(t) = \varphi_{\nu-1}(t) - \eta(t)\,.$$

Объединяя все сказанное выше и учитывая сформулированные ранее свойства решений уравнения (1.7), приходим к следующим предложениям.

Теорема 5. *Если выполняются условия теоремы 3, то парное однородное уравнение* (+) *во всех пространствах E имеет одни и те же решения. Эти решения образуют ν-мерное подпространство, имеющее своим базисом некоторую D-цепочку.*

Добавим также, что D-цепочка, о которой идет речь в теореме, может быть получена из соответствующей D_+-цепочки решений уравнения (4.1) по формуле (4.2).

Теорема 6. *Если выполняются условия теоремы 4, то однородное уравнение* $(+^\tau)$ *имеет во всех пространствах* E *одни и те же решения. Эти решения образуют* ν^τ*-мерное подпространство, имеющее своим базисом некоторую* D^τ*-цепочку.*

Упомянутая D^τ-цепочка получается из соответствующей D-цепочки решений уравнения (4.3) по формуле (4.4).

5. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ИНДЕКСОМ

Рассмотрим парное однородное интегральное уравнение $(+)$ с отрицательным индексом $(\nu<0)$, по-прежнему считая, что для функций $k_j(t) \in L$ $(j=1,2)$ выполняются условия (2.7).

На основании связи, установленной между решениями уравнения $(+)$ и уравнения (4.1) (см. § 4, п. 2), заключаем, что однородное уравнение $(+)$ в рассматриваемом случае имеет единственное нулевое решение в любом пространстве E. Следовательно, если неоднородное уравнение (!) разрешимо при некоторой правой части $f \in E$, то это решение единственно.

Аналогичные соображения приводят нас к таким же результатам относительно уравнения $(+)$ в случае, когда его индекс ν^τ отрицателен.

Теорема 7. *Если функции* $k_j(t) \in L$ $(j=1,2)$ *обладают свойством* (2.7) *и индекс уравнения* (!) *отрицателен* $(\nu<0)$, *то для разрешимости парного уравнения* (!) *в* E *необходимо и достаточно, чтобы функция* $f \in E$ *удовлетворяла условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\psi(t)\,dt = 0, \tag{5.1}$$

где $\psi(t)$ *любое решение уравнения* $(+^\tau)$. *При выполнении условия* (5.1) *решение уравнения* (!) *единственно и получается по формуле* (3.5). *Следовательно, ядро* $\gamma_\pi(t,s)$, *определяемое равенством* (3.6), *является левой резольвентой парного ядра* $k_\pi(t,s)$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве E уравнение, транспонированное к уравнению (!):

$$g - K_\pi^\tau\, g = f,$$

где по-прежнему

$$K_\pi^\tau\, g = \int_{-\infty}^{\infty} k_\pi(s,t)\, g(s)\, ds.$$

Согласно условиям теоремы, индекс ν^τ $(=-\nu)$ уравнения $(!^\tau)$ положителен; следовательно, для уравнения $(!^\tau)$ выполняются условия применимости теоремы 4. Это означает, что ядро $k_\pi^\tau(t,s)$ имеет правую резольвенту $\gamma_\pi^\tau(t,s) = \gamma_\pi(s,t)$.

Определим оператор $\mathbf{\Gamma}^{\tau}$ в пространстве E следующим равенством

$$\mathbf{\Gamma}^{\tau} f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{\pi}(s, t) f(s)\, ds\,.$$

Очевидно, функция

$$g = f + \mathbf{\Gamma}^{\tau} f \qquad (\in E)$$

является решением уравнения ($!^{\tau}$) при любой правой части $f \in E$.

Рассмотрим уравнение

$$g - \mathbf{K}^{\tau}_{\pi}\, g = \left(I - \mathbf{K}^{\tau}_{\pi}\right) f,$$

решениями которого являются функции

$$g_1 = f \text{ и } g_2 = (I + \mathbf{\Gamma}^{\tau}) \left(I - \mathbf{K}^{\tau}_{\pi}\right) f.$$

Разность $g_2 - g_1$ является некоторым решением однородного уравнения ($+^{\tau}$). Согласно теореме 6 уравнение ($+^{\tau}$) имеет ровно $|\nu|$ линейно независимых решений. Обозначая эти решения через $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{\nu}$, получаем

$$g_2 - g_1 = \sum_{j=1}^{|\nu|} c_j \psi_j$$

или

$$(I + \mathbf{\Gamma}^{\tau}) \left(I - \mathbf{K}^{\tau}_{\pi}\right) f = f + \sum_{j=1}^{|\nu|} c_j(f) \psi_j \qquad (f \in E)\,. \tag{5.2}$$

Обозначим через $\mathbf{C}$ линейный конечномерный оператор $(I + \mathbf{\Gamma}^{\tau}) \left(I - \mathbf{K}^{\tau}_{\pi}\right) - I$. Выберем в пересечении всех пространств E какие-либо функции $\omega_j'(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, |\nu|)$ так, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega'_j(t)\, \psi_k(t)\, dt = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, |\nu|)\,.$$

Умножая обе части равенства (5.2) на $\omega'_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, |\nu|)$ и интегрируя их в пределах от $-\infty$ до ∞, получим

$$c_j(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{C} f)(t)\, \omega'_j(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \omega_j(t)\, dt,$$

где

$$\omega_j(t) = \mathbf{C}^{\tau} \omega'_j = [(I - \mathbf{K}_{\pi})(I + \mathbf{\Gamma}) - I]\, \omega'_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, |\nu|).$$

Очевидно, все функции ω_j $(j = 1, 2, \ldots, |\nu|)$ принадлежат пересечению всех пространств E.

Таким образом, оператор $\mathbf{C}$ определяется в любом пространстве E равенством

$$\mathbf{C}f = \sum_{j=1}^{|\nu|} \psi_j(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\omega_j(s)\,ds\,.$$

Это означает, что для оператора $\mathbf{C}^{\tau}$ справедливо равенство

$$\mathbf{C}^{\tau} f = \sum_{j=1}^{|\nu|} \omega_j(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\psi_j(s)\,ds\,.$$

Сопоставляя различные представления оператора $\mathbf{C}^{\tau}$, получаем, что для любой функции $f \in E$ имеет место равенство

$$(I - \mathbf{K}_{\pi})(I + \mathbf{\Gamma}^{\tau}) f = f + \sum_{j=1}^{|\nu|} \omega_j(t) \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,\psi_j(s)\,ds\,.$$

Стало быть, условие (5.1) является достаточным условием для разрешимости уравнения (!). Необходимость условия (5.1) очевидна. Кроме того, из сказанного выше следует, что ядро $\gamma_{\pi}(t, s)$ является левой резольвентой уравнения (!) и имеет вид (3.6).

Таким же методом можно доказать следующую теорему.

Теорема 8. *Если функции $k_j(t) \in L$ $(j = 1,2)$ обладают свойством* (2.7) *и индекс уравнения* $(!^{\tau})$ *отрицателен* $(\nu^{\tau} = -\nu < 0)$, *то для разрешимости уравнения* $(!^{\tau})$ *в E, необходимо и достаточно, чтобы функция $f \in E$ удовлетворяла условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt = 0, \tag{5.3}$$

где $\varphi(t)$ любое решение уравнения (+). *При выполнении условия* (5.3) *решение уравнения* $(!^{\tau})$ *единственно и получается по формуле* (3.11). *Ядро $\gamma_{\pi}^{\tau}(t, s) = \gamma_{\pi}(s, t)$, определяемое равенством* (3.6) *является левой резольвентой ядра $k_{\pi}^{\tau}(t, s) = k_{\pi}(s, t)$.*

6. СПЕКТР ОПЕРАТОРА $\mathbf{K}_{\pi}$

Прежде всего заметим, что из доказанных теорем следует принадлежность спектру оператора $\mathbf{K}_{\pi}$ всех комплексных чисел ζ, для которых

$$\zeta - K_1(\lambda) \neq 0, \qquad \zeta - K_2(\lambda) \neq 0 \qquad (-\infty < \lambda < \infty) \tag{6.1}$$

и

$$\nu_{\zeta} = -\operatorname{ind} \frac{\zeta - K_2(\lambda)}{\zeta - K_1(\lambda)} \neq 0\,. \tag{6.2}$$

Точки спектра ζ, обладающие свойствами (6.1) и (6.2), по доказанному, являются Φ-точками оператора $\mathbf{K}_{\pi}$. В этих точках d-характеристика оператора $\mathbf{K}_{\pi}$ имеет вид $\nu_{\zeta}, 0$ или $(0, |\nu_{\zeta}|)$ в зависимости от того, является ли индекс ν_ζ положительным или отрицательным. Остается подвергнуть исследованию точки кривых

$$\zeta = K_1(\lambda) \text{ и } \zeta = K_2(\lambda) \qquad (-\infty < \lambda < \infty).$$

Воспользовавшись некоторыми соображениями, уже применявшимися нами в [9, § 10], покажем, что точки кривых $\zeta = K_j(\lambda)$ $(j = 1,2)$ не только не являются регулярными точками оператора $\mathbf{K}_\pi$, но, более того, не являются ни Φ-точками ни Φ_+-точками оператора $\mathbf{K}_\pi$.

Рассмотрим пространство E_+^{II}, состоящее из двухмерных вектор-функций $\mathrm{f}(t) = \{f_1(t), f_2(t)\}$ $(0 < t < \infty)$ с координатами $f_j(t) \in E_+$ $(j = 1,2)$, с нормой

$$\|\mathrm{f}\| = \|f_1\|_E + \|f_2\|_E.$$

Пространство E_+^{II} эквивалентно пространству E в силу следующего изоморфизма: всякому $f \in E$ сопоставляется $\mathrm{f} \in E_+^{\text{II}}$ по правилу:

$$f_1(t) = f(-t), \qquad f_2(t) = f(t) \qquad (0 < t < \infty).$$

Ввиду этой эквивалентности оператор $\mathbf{K}_\pi$ можно понимать как оператор, действующий в E_+^{II}; при этом, если

$$\mathrm{f} = \mathbf{K}_\pi g \qquad (\mathrm{f}, \mathrm{g} \in E_+^{\text{II}}),$$

то

$$\begin{cases} f_1(t) = \int_0^\infty k_1(s-t)\, g_1(s)\, ds + \int_0^\infty k_1(t+s)\, g_2(s)\, ds \\ f_2(t) = \int_0^\infty k_2(t+s)\, g_1(s)\, ds + \int_0^\infty k_2(t-s)\, g_2(s)\, ds \end{cases}$$

или в сокращенной записи:

$$f_1 = \mathbf{K}_{11} g_1 + \mathbf{K}_{12} g_2$$
$$f_2 = \mathbf{K}_{21} g_1 + \mathbf{K}_{22} g_2.$$

Таким образом

$$\mathbf{K}_\pi = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix}.$$

Параллельно с оператором $\mathbf{K}_\pi$ рассмотрим операторы D и $\mathbf{T}$, определяемые равенствами

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{11} & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы $\mathbf{K}_{12}$ и $\mathbf{K}_{21}$, действующие в пространстве E_+, являются вполне непрерывными операторами. Это утверждение доказано в [8, § 10, пункт 3] для случая $E_+ = L_+$; оно легко обобщается на случай любого E_+. Следовательно, оператор T вполне непрерывен.

Из сказанного следует [8, § 4, § 8], что как Φ-множества, так и $\Phi_{\pm}$-множества операторов $\mathbf{K}_{\pi}$ и D совпадают. Оператор D распадается в прямую сумму двух операторов $\mathbf{K}_{11}$ и $\mathbf{K}_{22}$, каждый из которых действует в пространстве, эквивалентном пространству E_{+}. Стало быть, $\Phi_{\pm}$-множество оператора D представляет собой пересечение $\Phi_{\pm}$-множеств операторов $\mathbf{K}_{11}$ и $\mathbf{K}_{22}$.

Как известно (см. [2]), $\Phi_{\pm}$-множества оператора $\mathbf{K}_{jj}$ $(j=1,2)$ совпадают с его Φ-множеством, которое содержит все точки плоскости, за исключением точки ноль и точек кривых $\zeta=K_j(\lambda)$ $(j=1,2)$.

Следовательно, $\Phi_{\pm}$-множества оператора $\mathbf{K}_{\pi}$ совпадают с его Φ-множеством, а последнее состоит из всех точек плоскости, за исключением точек кривых $\zeta=K_j(\lambda)$ $(j=1,2)$ и точки ноль.

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема 9. *Спектр оператора K_{π} в пространстве E состоит из замыкания S_{ζ}* множества всех точек ζ кривых*

$$\zeta=K_1(\lambda), \qquad \zeta=K_2(\lambda) \qquad (-\infty<\lambda<\infty) \tag{6.3}$$

и открытого множества S_0 всех точек $\zeta\in S_{\zeta}$, для которых $\nu_{\zeta}\neq 0$ (т. е. выполняется условие (6.2)). S_0 является Φ-множеством оператора $\mathbf{K}_{\pi}$, а точки $\zeta\in S_{\zeta}$ не являются ни Φ-, ни $\Phi_{\pm}$-точками оператора $\mathbf{K}_{\pi}$.

Теорема сохраняет силу при замене оператора $\mathbf{K}_{\pi}$ его транспонированным $\mathbf{K}_{\pi}^{\tau}$.

7. ЗАМЕЧАНИЕ О ДИСКРЕТНЫХ АНАЛОГАХ УРАВНЕНИЙ (!) И (!*)

Дискретным аналогом парного интегрального уравнения является бесконечная система уравнений:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k}^{(1)}\xi_k=\eta_j & (j=-1,-2,\cdots) \\ \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_{j-k}^{(2)}\xi_k=\eta_j & (j=0,1,2,\ldots). \end{cases} \tag{7.1}$$

Подобно тому, как вся теория интегральных уравнений (0.1) переносится [2, 10] на систему линейных уравнений

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{j-k}\xi_k=\eta_j \qquad (j=0,1,2,\ldots),$$

при этом как доказательства теорем, так и их формулировки в известном смысле упрощаются, теория систем уравнений (7.1) и соответствующих транспонированных систем

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_{k-j}^{(1)}\xi_k+\sum_{k=0}^{\infty} a_{k-j}^{(2)}\xi_k=\eta_j \qquad (j=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$$

* Замыкание S_{ζ} очевидно, получается присоединением к множеству точек кривых (6.3) одной точки $\zeta=0$.

может быть построена путем соответствующего перенесения изложенных результатов относительно парного интегрального уравнения (!) и его транспонированного (!ᵀ), при этом теория принимает более простой вид.

При таком перенесении роль условий $\kappa_{1,2}(t) \in L$ будут играть условия

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} |a_\kappa^{(p)}| < \infty \qquad (p = 1,2).$$

Роль пространств E, E_+ будут играть соответствующие пространства последовательностей (E) и (E_+) (относительно последних см. [2, § 6]). Роль условий (2.7) будут играть условия

$$\mathrm{a}_p(e^{i\varphi}) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} a_\kappa^{(p)} e^{\kappa i\varphi} \neq 0 \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;\quad p = 1,2),$$

а роль индекса ν — число, равное поделенному на 2π приращению аргумента функции $\mathrm{a}_2(\zeta)/\mathrm{a}_1(\zeta)$, когда ζ пробегает единичную окружность в положительном направлении.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Рапопорт. О некоторых «парных» интегральных и интегродифференциальных уравнениях. Сборник трудов института математики АН УССР, № 12, 1949, стр. 102—118.

2. М. Г. Крейн. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, т. XIII, вып. 5, 1958.

3. Ю. И. Черский. О некоторых особых интегральных уравнениях. Ученые записки Казанского Госуниверситета, т. 113, кн. 10, 1953, 43—55.

4. Ю. И. Черский. Интегральные уравнения типа свертки. Автореферат диссертации. Тбилиси, 1956.

5. Ф. Д. Гахов и Ю. И. Черский. Особые интегральные уравнения типа свертки и площадная задача типа задачи Римана. Ученые записки Казанского Госуниверситета, т. 114, кн. 8, 1954, 21—33.

6. Ф. Д. Гахов и Ю. И. Черский. Особые интегральные уравнения типа свертки. Известия Акад. наук СССР, т. 20, № 1, 1956, 33—52.

7. В. А. Фок. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Математический сборник, т. 4(56), № 1—2, 1944, 3—50.

8. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. УМН, т. XIII, вып. 2(80), 1958, 3—72.

9. И. М. Гельфанд, Д. А. Райков и Г. Е. Шилов. Нормированные континуальные кольца. Успехи математических наук, т. I, вып. 2, 1946, 48—146.

10. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. Успехи математических наук, т. 12, вып. 2, 1957.

11. І. М. Рапопорт. Про один клас безконечних систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Доповіді Акад. наук УРСР. Відділ фізико-математичних та хімічних наук. № 3, 1948, 6—10.

Работа поступила в июне 1957 г.