Т. Я ЗАГОРСКИЙ

К ТЕОРИИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

1. Настоящая статья представляет собой продолжение статей [1, 2, 3, 4], посвященных смешанной задаче для параболических систем, и содержит построение решения параболической системы с производными различных порядков и с переменными коэффициентами при младших производных, зависящими от пространственных координат $x_1, \ldots, x_n$ и от t.

Кроме того, здесь рассматриваются граничные условия с переменными коэффициентами и исследуются вопросы единственности.

Предполагается, что уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u$$

параболично, т. е. λ_κ корни характеристического уравнения

$$\det A(\alpha, \lambda) = \det (A(\alpha) - \lambda E) = 0$$

подчинены условию

$$\operatorname{Re} \lambda \leqslant - \delta |\alpha|^s, \qquad \delta > 0.$$

Здесь $A(\alpha)$ — результат замещения символа $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ в матрице $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, определяемой ниже, числом $i\alpha$; $u = (u_1, \ldots, u_N)$ — столбцевая функциональная матрица.

В статье используются следующие обозначения:

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\sum_{\kappa_1 + \ldots + \kappa_n = S} a_{ij}^{\kappa_1, \ldots, \kappa_n} \frac{\partial^S}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}}\right)_{i, j=1}^{i, j=N};$$

$$L\left(x; t; \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\sum_{\kappa_1 + \ldots + \kappa_n \leqslant S-1} l_{ij}^{\kappa_1, \ldots, \kappa_n}(x, t) \frac{\partial^{\kappa_1 + \ldots + \kappa_n}}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}}\right)_{i j=1}^{i j=N};$$

s — целое положительное четное число, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка n-мерной области V, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Область v есть конечная область, ограниченная выпуклой замкнутой поверхностью S типа Ляпунова. В некоторых случаях v обозначает также полупространство $x_n > 0$;

$a_{ij}^{\kappa_1, \dots, \kappa_n}$ — некоторые постоянные числа; $l_{ij}^{\kappa_1, \dots, \kappa_n}(x, t)$ — непрерывные функции в замкнутой области $\bar{v}$, $0 \leqslant t \leqslant T$;

$$B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(\sum_{\kappa_1 + \dots + \kappa_n = s_l} b_{ij}^{\kappa_1, \dots, \kappa_n}(y) \frac{\partial^{s_l}}{\partial x_1^{\kappa_1} \dots \partial x_n^{\kappa_n}} \right)_{l, j=1}^{i=\frac{SN}{2};\ j=N}.$$

Здесь $b_{ij}^{\kappa_1 \dots \kappa_n}(y)$ — некоторые непрерывные функции точки y, заданные на поверхности S, ограничивающей объем v; s_l — целое положительное число, причем $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots s_{\frac{SN}{2}} < s$.

2. В этом пункте будет рассмотрена смешанная задача, описываемая системой

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u, \qquad x \in v \tag{1}$$

и условиями

$$\lim_{x \to y \in S} B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = f(y; t). \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = 0. \tag{3}$$

В работе [2] было построено решение смешанной задачи, описываемой системой (1), условием (3) и граничным условием

$$\lim_{x \to y \in S} B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f(y; t) \tag{4}$$

$f(y, t)$ — непрерывная функция $y \in S$ и t, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Коэффициенты матрицы $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, обозначаемые через $b_{ij}^{\kappa_1, \dots, \kappa_n}$ считались постоянными и порядок производных в ней одинаковым и равным $s_1 < s$.

Решение задачи (1), (3), (4) легко обобщается для случая коэффициентов $b_{ij}^{\kappa_1, \dots, \kappa_n}(y)$, непрерывно зависящих от точки $y \in S$. Будем обозначать матрицу, которая получается из $B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ при этом условии, символом $B_1\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Рассмотрим вопрос о решении системы (1) при начальном условии (3) и граничном условии

$$\lim_{x \to y \in S} B_1\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = f(y, t). \tag{5}$$

В работе [2] решение задачи (1), (3), (4) разыскивалось в виде

$$u = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(S)} G^{\nu_y}(x-y;\ t-\tau)\, \varphi(y, \tau)\, d_y S,$$

где $G^{\nu y}(x-y\,;\,t-\tau)$ есть функция Грина смешанной задачи для полупространства, ограниченного плоскостью, касательной к поверхности S с орт-нормалью ν_y, направленной в сторону объема V. Устанавливается формула скачка этого „потенциала“ в виде

$$\lim_{x\to y\in S} B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = B_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)|_{x=y\in S} + \varphi(y,t). \tag{6}$$

Используя формулу скачка и граничное условие, получаем интегральное уравнение для определения неизвестной функции $\varphi(y,t)$ в виде

$$\varphi(z,t) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^t d\tau \int_{(S)} B_1\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) G^{\nu y}(z-y\,;\,t-\tau)\,\varphi(y,\tau)\,d_y S = f(z,t). \tag{7}$$

Разрешимость интегрального уравнения (7) доказывается с помощью оценки для функции $B_1\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) G^{\nu y}(z-y\,;\,t-\tau)$, записываемой в виде неравенства

$$\left| B_1\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) G^{\nu y}(z-y;\,t-\tau)\right| \angle \frac{C_1 e^{-C_2 |z_{T_y}-y|^{\frac{S}{S-1}}(t-\tau)^{-\frac{1}{S-1}}} |z-z_{T_y}|}{(t-\tau)^{\frac{S+n}{S}}}. \tag{8}$$

Здесь z_{T_y} есть проекция точки z на касательную к S плоскость в точке $y\in S$.

Решение задачи (1), (3), (5) также будем искать в форме

$$u = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int_0^t d\tau \int_S G^{\nu y}(x-y;\,t-\tau)\,\varphi(y;\tau)\,d_y S. \tag{9}$$

Здесь $G^{\nu y}(x-y\,;\,t-\tau)$ есть функция Грина смешанной задачи для полупространства, ограниченного касательной к S плоскостью T_y в точке $y\in S$ с граничным условием

$$\lim_{|x-x_{T_y}|\to 0} B_1\left(\nu,\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t) = f_1(x_{T_y},t);$$

x_{T_y} есть проекция точки x на плоскость T_y.

Последняя смешанная задача для полупространства характеризуется граничной матрицей $B_1\left(y,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ с постоянными коэффициентами $b_{ij}^{\kappa_1,\dots,\kappa_n}(y)$, т. к. $b_{ij}^{\kappa_1,\dots,\kappa_n}(y)$ в любой точке плоскости T_y равны своему значению в точке касания $y\in S$. Поэтому для функции u, определенной (9), сохраняются все свойства, изученные в [2], а именно: имеет место формула скачка

$$\lim_{x \to z \in S} B_1\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = B_1\left(y, \frac{\partial}{\partial z}\right) u(z, t) + \varphi(z, t) \tag{10}$$

и для определения функции $\varphi(z, t)$ получается уравнение

$$\varphi(z, t) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(S)} B_1\left(y, \frac{\partial}{\partial z}\right) G^{\nu y}(z - y; t - \tau)\, \varphi(y, \tau)\, d_y S = f(z, t). \tag{11}$$

Оценка (8) принимает вид

$$\left| B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial z}\right) G^{\nu y}(z - y; t - \tau) \right| \leqslant \frac{C_1(y)\, e^{-c_2 |z_{T_y} - y|^{\frac{S}{S-1}} (t-\tau)^{-\frac{1}{S-1}}} |z - z_{T_y}|}{(t-\tau)^{\frac{S+n}{S}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3 e^{-C_2 |z_{T_y} - y|^{\frac{S}{S-1}} (t-\tau)^{-\frac{1}{S-1}}} |z - z_{T_y}|}{(t-\tau)^{\frac{S+n}{S}}}, \quad C_3 = \text{const}.$$

Здесь $C_3 \geqslant C_1(y)$, т. к. $B_1\left(y, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ непрерывно по y на замкнутом множестве S. Следовательно, доказательство разрешимости уравнения (7) сохраняет силу и для (11).

В работе [4] было указано, что интегральное уравнение (7) разрешимо и при замене матрицы B_1 матрицей $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ с различными порядками производных в различных строках, если наложить дополнительное ограничение на функцию $f(y, t)$, а именно: принять, что

$$f(y, 0) = 0.$$

Очевидно, при выполнении этого условия будет разрешима и задача (1), (2), (3).

3. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу. Требуется найти решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u + f(x, t) \tag{12}$$

для

$$x \in V \text{ и } 0 \leqslant t \leqslant T$$

при условиях

$$u|_{t=0} = \psi(x)^* \tag{13}$$

и

$$\lim_{x \to y \in S} B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = \varphi(y, t). \tag{14}$$

* Функции $f(x, t)$ и $\psi(x)$ предполагаются непрерывными при $x \in v$ и $0 \leqslant t \leqslant T$ и непрерывно дифференцируемыми до порядка s по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Предполагается согласованность начальных и граничных условий, т. е.

$$\lim_{x \to y \in S} B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = \varphi(y, 0), \tag{15}$$

и выполнение условия регуляризуемости (разрешимости) (см. [1], [2]) в каждой точке поверхности S. Функцию u будем искать в виде суммы

$$u = u_1 + u_2,$$

где u_1 есть решение задачи Коши для системы (12) при начальном условии (13), т. е.

$$u_1 = \int\limits_{(V)} \Gamma(x - \xi, t)\psi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{(V)} \Gamma(x - \xi; t - \tau) f(\xi; \tau)\,d\xi\,. \tag{16}$$

Здесь функция $\Gamma(x-\xi;\ t-\tau)$ есть так называемая функция Грина задачи Коши, построенная И. Г. Петровским [5]; u_2 определяется как решение системы

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u_2 \tag{17}$$

при условиях

$$u_2\Big|_{t=0} = 0;\ \lim_{x \to y \in S} B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)u_2 = \varphi(y, t) - B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)u_1(x,\ t)\Big|_{x = y \in S}. \tag{18}$$

Последнее можно осуществить, используя результаты работы [3], [4] и п. 1 настоящей статьи, в соответствии с чем полагаем

$$u_2 = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{(S)} G^{\nu_y}(x - y\,;\ t - \tau)\mu(y, \tau)\,d_yS, \tag{19}$$

где $G^{\nu_y}(x-y;\ t-\tau)$ — функция Грина смешанной задачи для полупространства, ограниченного плоскостью с ортнормалью ν_y, касательной к поверхности S в точке y; $\mu(y; \tau)$ — столбцевая матрица высоты $\frac{sN}{2}$ с элементом, непрерывным в области $\bar{V}$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, определяемая как решение системы

$$\mu(z; t) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{(S)} B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) G^{\nu_y}(x - y;\ t - \tau)\big|_{x=z \in S}\,\mu(y, \tau)\,d_yS -$$

$$- B_2\left(z, \frac{\partial}{\partial x}\right)u_1(x, t)\big|_{x=z \in S} + \varphi(z, t)\,. \tag{20}$$

Разрешимость этого уравнения для рассматриваемого класса поверхностей была доказана в работе [3], [4].

Решение смешанной задачи (12), (13), (14) запишется в виде

$$u=\int\limits_{(V)}\Gamma(x-\xi;\,t)\,\psi(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{(V)}\Gamma(x-\xi;\,t-\tau)\,f(\xi;\tau)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{(S)}G^{\nu y}(x-y;\,t-\tau)\,\mu(y;\tau)\,d_yS, \tag{21}$$

где $\mu(y,\tau)$ определяется из системы (20).

4. В этом пункте займемся решением системы

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u+L\left(x,\,t,\,\frac{\partial}{\partial x}\right)u+f(x,t) \tag{22}$$

в области V при условиях

$$u\,|_{t=0}=0;\ \lim_{x\to y\in S}B_2\left(y,\,\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t)=0. \tag{23}$$

Используя (20) и (21), можно записать смешанную задачу (22), (23) в виде системы интегро-дифференциальных уравнений:

$$u(x,\,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{(V)}\Gamma(x-\xi;\,t-\tau)\,L\left((\xi,\,\tau,\,\frac{\partial}{\partial\xi}\right)u(\xi,\,\tau)\,d\xi+$$

$$+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{(V)}\Gamma(x-\xi;\,t-\tau)\,f(\xi,\,\tau)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{(S)}G^{\nu y}(x-y;\,t-\tau)\,\mu(y,\,\tau)\,d_yS; \tag{24}$$

$$\mu(z,\,t)=-\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{(S)}B_2\left(y,\,\frac{\partial}{\partial x}\right)G^{\nu y}(x-y;\,t-\tau)\,|_{x=z\in S}\,\mu(y,\,\tau)\,d_yS-$$

$$-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{(V)}B_2\left(y,\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\Gamma(x-\xi;\,t-\tau)|_{x=z\in S}\,L\left(\xi,\,\tau,\,\frac{\partial}{\partial\xi}\right)u(\xi,\,\tau)\,d\xi-$$

$$-\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{(V)}B_2\left(y,\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\Gamma(x-\xi;\,t-\tau)\,|_{x=z\in S}f(\xi,\,\tau)\,d\xi. \tag{25}$$

Здесь $G^{\nu y}(x-y;\ t-$ — функция Грина смешанной задачи для полупространства, ограниченного плоскостью, касательной к S в точке y, для системы (1) при условиях (2) и (3).

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$\int_0^t d\tau \int_{(V)} \Gamma(x-\xi; t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi = \varphi(x, t);$$

$$B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) G^{\nu_y}(x-y; t-\tau) = K(x, y, t, \tau);$$

$$B_2\left(z, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Gamma(x-\xi; t-\tau) = Q(z, x, \xi, t, \tau);$$

$$\int_0^t d\tau \int_{(V)} B_2\left(z, \frac{\partial}{\partial x}\right) \Gamma(x-\xi; t-\tau)|_{x=z\in S} f(\xi, \tau)\, d\xi = \psi(z, t).$$

Введем также понятие модуля матрицы A.

Модулем матрицы A будем называть и обозначать $|A|$ матрицу, составленную из модулей, т. е.

$$|A| = (|A_{ij}|).$$

Далее матричное неравенство $A \leqslant B$ означает, что существует n^2 неравенств между соответствующими элементами $A_{ij} \leqslant B_{ij}$. Очевидно, имеет место соотношение

$$|AB| \leqslant |A|\,|B|.$$

Систему (24), (25) можно записать в виде:

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{(V)} \Gamma(x-\xi; t-\tau)\, L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(\xi, \tau)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(S)} G^{\nu_y}(x-y; t-\tau)\, \mu(y, \tau)\, d_y S + \varphi(x, t); \qquad (26)$$

$$\mu(z; t) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(S)} K(z, y, t, \tau)\, \mu(y, \tau)\, d_y S -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_{(V)} Q(z, z, \xi, t, \tau)\, L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(\xi, \tau)\, d\xi - \psi(z, t) \qquad (27)$$

Систему (26), (27) будем решать методом последовательных приближений. Положим $u_0 = \varphi(x; t)$; $\mu_0 = \psi(z, t)$ и будем далее вычислять u_k и μ_k при помощи рекуррентных соотношений

$$u_k(x; t) = \int_0^t dt \int_{(V)} \Gamma(x-\xi; t-\tau)\, L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u_{k-1}(\xi, \tau)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(S)} G^{\nu_y}(x-y; t-\tau)\, \mu_{k-1}(y, \tau)\, d_y S + \varphi(x; t); \qquad (28)$$

$$\mu_k(z, t) = \int_0^t d\tau \int_{(S)} K(z, y; t, \tau)\,\mu(y; \tau)\,d_y S -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_{(V)} Q(z, z, \xi, t, \tau)\, L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u(\xi, \tau)\,d\xi + \psi(z, t)\,. \tag{29}$$

Обозначим:

$$u_k - u_{k-1} = v_k; \quad \mu_k - \mu_{k-1} = \lambda_k; \quad u_0 = v_0; \quad \lambda_0 = \mu_0\,.$$

Необходимо доказать равномерную сходимость рядов

$$\sum_{k=\partial}^{\infty} v_k, \quad \sum_{k=\partial}^{\infty} D^{s-1} v_k, \quad \sum_{k=\partial}^{\infty} \lambda_k\,.$$

D^{s-1} — символ дифференцирования порядка $s-1$ по некоторой последовательности аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Очевидно, имеют место соотношения:

$$v_k = \int_0^t d\tau \int_{(V)} \Gamma(x-\xi; t-\tau)\, L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v_{k-1}(\xi, \tau)\,d\xi +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(S)} G^{\nu_y}(x-y; t-\tau)\,\lambda_k(y, \tau)\,d_y S\,; \tag{28'}$$

$$\lambda_k = \int_0^t d\tau \int_{(S)} K(z, y; t, \tau)\,\lambda_{k-1}(y, \tau)\,d_y S -$$

$$-\int_0^t d\tau \int_{(V)} Q(z, z, \xi, t, \tau)\, L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v_{k-1}(\xi, \tau)\,d\xi\,. \tag{29'}$$

Перейдем теперь к оценке v_k, λ_k, $D^{s-1}v_k$.
Пусть

$$\sup\{|v_0|,\ |D^{s-1}v_0|;\ |\lambda_0|,\ |l_{ij}^{k_1,\ldots,k_n}(x, t)|\} = M;$$

$$x \in \bar{V}; \qquad 0 \leqslant t \leqslant T; \qquad i, j = 1, 2, \ldots, N.$$

Очевидно,

$$\left| L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u_0(\xi, \tau) \right| \leqslant M^2 NE$$

и, следовательно,

$$|v_1(x, t)| \leqslant \int_0^t d\tau \int_{(V)} |\Gamma(x-\xi; t-\tau)|\,d\xi\, M^2 NE +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{(S)} |G^{\nu y}(x-y;\, t-\tau)|\, d_y SME;$$

$$|D^{s-1} v_1(x, t)| \leqslant \int_0^t d\tau \int_{(V)} |D^{s-1}\Gamma(x-\xi;\, t-\tau)|\, d\xi M^2NE +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{(S)} |D^{s-1} G^{\nu y}(x-y;\, t-\tau)|\, d_y SME;$$

$$|\lambda_1| \leqslant \int_0^t d\tau \int_{(S)} |K(t, y;\, t, \tau)|\, d_y SME +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{(V)} |Q(z, z, \xi, t, \tau)|\, d\xi\, M^2NE.$$

Матрицы

$$\int_0^t d\tau \int_{(V)} |\Gamma(x-\xi;\, t-\tau)|\, d\xi; \quad \int_0^t d\tau \int_{(V)} |D^{s-1}\Gamma(x-\xi,\, t-\tau)|\, d\xi;$$

$$\int_0^t d\tau \int_{(S)} |G^{\nu y}(x-y;\, t-\tau)\, d_y S; \quad \int_0^t d\tau \int_{(S)} |K(z, y, t, \tau)|\, d_y S;$$

$$\int_0^t d\tau \int_{(V)} |Q(z, z, \xi, t, \tau)|\, d\xi$$

могут быть мажорированы одной матрицей с положительными, непрерывными, монотонно возрастающими элементами, зависящими от t и обращающимися в нуль вместе с t. Такую матрицу обозначим символом $\Phi(t)$. Теперь можно написать:

$$\sup\{|v_1|;\ \ |D^{s-1} v_1|;\ \ |\lambda_1|\} \leqslant \Phi(t)(M^2N+M)E.$$

$$x \in v;\quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Используя эти оценки, легко найдем

$$|v_2(x, t)| \leqslant \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} |\Gamma(x-\xi;\, t-\tau)| \left| L\left(\xi, \tau, \frac{\partial}{\partial \xi}\right) v_1 \right| d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau \int_{(V)} |G^{\nu y}(x-\xi;\, t-\tau)|\, |\lambda_1|\, d_y S \leqslant \Phi^2(t)(M^2N+M)^2 E.$$

Также получаем:

$$|D^{s-1}v_2| \leqslant \Phi^2(t)(M^2N+M)^2E; \qquad |\lambda_2| \leqslant \Phi^2(t)(M^2N+M)^2E.$$

Легко доказать, что

$$\sup\{|v^{(k)}|, \quad |D^{s-1}v_k|, \quad |\lambda^{(k)}|\} \leqslant \Phi^k(t)(M^2N+M)^kE.$$
$$x \in \bar{v} \cdot 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Очевидно, взяв достаточно малое t, найдем

$$\Phi(t_1)(M^2N+M) < 1.$$

Таким образом, в полосе $0 \leqslant t \leqslant t_1$ последовательные приближения, сходятся абсолютно и равномерно, что и доказывает существование и единственность решения нашей задачи в полосе

$$0 \leqslant t \leqslant t_1.$$

Можно повторить решение задачи, исходя из начальных данных при $t=t_1$, и получить решение в интервале $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Продолжая так же, можно построить решение в некоторой полосе $0 \leqslant t \leqslant T_1 \leqslant T$.

5. Теоремы единственности. В настоящем пункте выясним вопрос единственности решений смешанных задач для параболических систем. Отметим одно существенное обстоятельство построенной выше теории смешанной задачи. Как в задаче для полупространства [1], так и в задаче для конечной области [2] предполагалось, что предельный переход изнутри области к ограничивающей поверхности совершается по внутренней нормали к этой поверхности в некоторой ее точке. Естественно, возникает вопрос, каков будет предел решения при предельном переходе, совершающемся по любому некасательному пути, целиком лежащему внутри рассматриваемой области; не будет ли предельное значение решения зависеть от выбранного пути подхода к предельной точке. Отрицательный ответ на этот вопрос, подтверждающий независимость предельного значения от некасательного пути, дается следующей теоремой.

Решение системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u \tag{30}$$

при условиях

$$u|_{t=0} = 0; \qquad \lim_{x \to y \in S} B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x;t) = f_1(y;t)$$

не зависит от пути, по которому точка x изнутри области стремится к точке $y \in S$, если только x не выходит при этом из области V, двигаясь по любому некасательному к S пути.

Под S здесь подразумевается либо замкнутая выпуклая поверхность типа Ляпунова, либо плоскость $x_n=0$, ограничивающая полупространство $x_n>0$.

Доказательство начнем со смешанной задачи для полупространства $x_n > 0$.

Пусть требуется решить систему (30) при условиях

$$u|_{t=0}=0; \qquad \lim_{x\to y \in S(x_n=0)} B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x; t)=f_1(y, t).$$

Стремление x к y предполагается по произвольному некасательному пути, лежащему внутри полупространства $x_n>0$.

Рассмотрим разность

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)-f_1(y; t).$$

Очевидно, имеет место неравенство

$$\left|B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)-f_1(y, t)\right| \leqslant \left|B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)-f_1(x', t)\right| + \\ + |f_1(x', t)-f_1(y; t)|.$$

Здесь $x'=(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

Оценим

$$\left|B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x; t)-f_1(x', t)\right|,$$

для чего представим $f_1(x', t)$ в виде

$$f_1(x', t)=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x'-\xi')\alpha'}\, d\alpha' \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} dp \int_{C^+} B(\alpha) A^{-1}(\alpha, p)(E\alpha_n E \ldots \\ \ldots \alpha_n^{\frac{s}{2}-1} E)\, d\alpha_n R^{-1}(\alpha', p)\int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\xi', \tau)\, d\tau,$$

что возможно в силу условий, наложенных на функцию $f_1(x', t)$.

Теперь

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^n i}\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{i((x'-\xi')\alpha')} d\alpha' \int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p(t-\tau)} dp \int_{C^+} e^{i\alpha_n x_n} B(\alpha) A^{-1}(\alpha_1 p)\times \\ \times (E\alpha_n E \ldots \alpha_n^{\frac{s}{2}-1} E)\, d\alpha_n R^{-1}(\alpha', p) f_1(\xi', \tau).$$

В силу абсолютной сходимости при $x_n>0$ можно написать

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x; t)=\frac{1}{(2\pi)^n i}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} e^{i((x'-\xi')\alpha')} d\alpha' \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} dp \int_{C^+} e^{i\alpha_n x_n} B(\alpha)\times$$

$$\times A^{-1}(\alpha_1 p)(E\alpha_n E \ldots \alpha_n^{\frac{s}{2}-1} E)\, d\alpha_n R^{-1}(\alpha', p)\int\limits_0^\infty e^{-p\tau} f(\xi', \tau)\, d\tau .$$

и, следовательно,

$$\left| B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) - f_1(x', t)\right| = \frac{1}{(2\pi)^n}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi' \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i((x'-\xi')\alpha')} d\alpha' \times\right.$$

$$\times \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} dp \int\limits_{C^+} \left(e^{i\alpha_n x_n} - 1\right) B(\alpha) A^{-1}(\alpha; p)(E\alpha_n E \ldots \alpha_n^{\frac{s}{2}-1} E)\, d\alpha_n \times$$

$$\left. \times R^{-1}(\alpha', p) \int\limits_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\xi', \tau)\, d\tau \right| =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\xi' \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i((x'-\xi')\alpha'} d\alpha' \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} dp \int\limits_0^{x_n} d\xi_n \int\limits_{C^+} e^{i\alpha_n \xi_n} i\alpha_n B(\alpha) A^{-1}(\alpha; p) \times\right.$$

$$\left. \times (E\alpha_n E \ldots \alpha_n^{\frac{s}{2}-1} E)\, d\alpha_n R^{-1}(\alpha', p) \int\limits_0^\infty e^{-p\tau} f_1(\xi', \tau)\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \int\limits_0^{x_n} d\xi_n' \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-C_2 |x'-\xi'|^{\frac{s}{s-1}} t^{-\frac{1}{s-1}}} A_1(\xi')\, d\xi'}{t^{\frac{n+s-1}{s}} \left(1 + \frac{\xi_n}{t^{\frac{1}{s}}}\right)^{n+s-1}} \leqslant C_3 x_n .$$

В данном случае использована оценка функции Грина смешанной задачи для полупространства и условия

$$|f_1(\xi', \tau)| \leqslant A_1(\xi') e^{\sigma t}; \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} A_1(\xi')\, d\xi' < \infty \quad \sigma > 0$$

(см. [3]).

C_3 здесь не зависит от x.

Теперь, очевидно, что если x стремится к $y \in S$ по любому некасательному пути внутри полупространства $x_n > 0$, то в силу непрерывности $f_1(y, x)$ на плоскости $x_n = 0$ разность $|f(x', t - f(\nu, t)|$ по абсолютной величине станет в конце концов сколь угодно малой. Такой же станет и разность $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) - f(x_1, t)$.

Но это означает, что при стремлении x к $y \in S$ по произвольному некасательному пути при $x_n > 0$, $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)$ стремится к $f_1(y, t)$

Перейдем теперь к рассмотрению смешанной задачи для области V, ограниченной выпуклой замкнутой поверхностью типа Ляпунова.

Решение задачи разыскивается в виде

$$u = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^t d\tau \int_{(V)} G^{\nu_y}(x-y;\, t-\tau)\, \mu(y, \tau)\, d_y S, \tag{31}$$

где $G^{\nu_y}(x-y; t-\tau)$ — матрица Грина смешанной задачи для полупространства, ограниченного плоскостью, касательной к S в точке y с ортнормалью ν_y. По построению эта функция удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию $u|_{t=0}=0$.

Требуется так подобрать непрерывную функцию $\mu(y, \tau)$, чтобы выполнялось краевое условие

$$\lim_{x \to y \in S} B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f(y, t). \tag{31'}$$

На основе решения смешанной задачи для полупространства была доказана теорема о поведении интеграла (31) при подходе внутренней точки $x \in v$ к граничной точке $y \in S$ по нормали ν_y; при этом получилось равенство

$$\lim_{x \to y \in S} B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x; t) = B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)|_{x=y \in S} + \mu(y, t). \tag{32}$$

Использование равенства (32) и краевого условия (31′) приводит к интегральному уравнению для определения функции $\mu(y, t)$. Теорема, доказанная в этом разделе, делает очевидным, что соотношение (32) имеет место не только при подходе к $y \in S$ по нормали ν_y, но и по любому некасательному пути, не выходящему из области v, а это означает, что теорема справедлива и во второй своей части, т. е. для конечной области, ограниченной поверхностью S.

Перейдем теперь к установлению теорем единственности решений некоторых смешанных задач для параболических систем. Сначала рассмотрим смешанную задачу для полупространства $x_n > 0$ системы (1) с краевым условием

$$\lim_{x_n \to 0} B_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = f(x', t)$$

при начальном условии $u|_{t=0}=0$. Считается также выполненным условие регуляризуемости [1]. Класс функций K, в котором будет доказана единственность решения, описывается следующим образом. К классу K относятся все функции $u(x_1, \ldots, x_n, t)$, имеющие непрерывные производные по любой последовательности переменных $x_1, \ldots, x_n$ до порядка S включительно и по t первого порядка, подчиненные условию

$$\left|\frac{\partial^{\kappa_1, \ldots, \kappa_n} u(x, t)}{\partial x_1^{\kappa_1} \ldots \partial x_n^{\kappa_n}}\right| \leqslant M(x')\, M_1(x_n)\, e^{\sigma t}; \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right| \leqslant M(x')\, M_1(x_n)\, e^{\sigma t} \tag{33}$$

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \ldots + \kappa_n \leqslant s,$$

причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} M(x')\,dx' < \infty\,; \quad \int_{0}^{\infty} M(x_n)\,dx_n < \infty\,; \quad \sigma > 0\,.$$

Пусть функция $u \in K$ удовлетворяет системе

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u \tag{34}$$

и условиям

$$u|_{t=0} = 0; \qquad \lim_{x_n \to 0} B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0\,. \tag{35}$$

Обе части системы (34) умножим на $e^{-i(\xi'\alpha')}$ и проинтегрируем по всему пространству $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Это дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi'\alpha')}\frac{\partial u}{\partial t}\,d\xi' = \int_{0}^{\infty} e^{-i(\xi'\alpha')} A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(\xi, \tau)\,d\xi'.$$

В силу условий (33) законно изменение порядка дифференцирования и интегрирования, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\xi'\alpha')}\frac{\partial u}{\partial t}\,d\xi' = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi'\alpha')}u\,d\xi' = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}\,.$$

Рассмотрим теперь

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi'\alpha')}\frac{\partial^{\kappa} u(\xi' x_n, t)}{\partial x_1^{\kappa_1}\cdots\partial x_n^{\kappa_n}}\,.$$

Интегрированием по частям получаем

$$I = (-i)^{\kappa-\kappa_n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi'\alpha')}\alpha_1^{\kappa_1}\ldots\alpha_{n-1}^{\kappa_{n-1}}\frac{\partial^{\kappa_n} u}{\partial x_n^{\kappa_n}}\,d\xi'\,.$$

Здесь также можно изменить порядок дифференцирования и интегрирования, т. е. написать

$$I = (-i)^{\kappa-\kappa_n}\alpha_1^{\kappa_1}\ldots\alpha_{n-1}^{\kappa_{n-1}}\frac{\partial^{\kappa_n}}{\partial x_n^{\kappa_n}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\xi'\alpha')}u\,d\xi' = (-i)^{\kappa-\kappa_n}\alpha_{n-1}^{\kappa_{n-1}}\cdots\alpha_{n-\kappa}^{\kappa_{n-1}}\frac{\partial^{\kappa_n}\tilde{u}}{\partial x_n^{\kappa_n}}\,.$$

Следовательно, применение преобразования Фурье к системе (34) и условиям (35) дает

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = A\left(\alpha' \frac{d}{\partial x_n}\right)\tilde{u}, \quad \tilde{u}|_{t=0} = 0, \quad \lim B\left(\alpha', \frac{\partial}{\partial x_n}\right)\tilde{u} = 0 \tag{36}$$

Преобразование Лапласа, примененное к (36), приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$p\tilde{u} = A\left(\alpha', \frac{d}{dx_n}\right)\tilde{u} \tag{37}$$

с граничным условием

$$\lim_{x_n \to 0} B\left(\alpha', \frac{d}{dx_n}\right)\tilde{u} = 0. \tag{38}$$

Общее решение системы (37) можно записать с помощью контурного интеграла в виде

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\pi i}\int_B e^{i\alpha_n x_n} A^{-1}(\alpha, p)(C_0 + \alpha_n C_1 + \ldots + \alpha_n^{s-1} C_{s-1})\, d\alpha_n .$$

Здесь $C_0, \ldots, C_{s-1}$ суть столбцы произвольных параметров высоты N, (C) есть контур в комплексной плоскости α_n, внутри которого находятся все корни характеристического уравнения

$$\det(pE - A(\alpha', d_n)) = \det A(\alpha, p) = 0. \tag{39}$$

Из условий (33) следует, что $u \to 0$ при $x_n \to \infty$ и потому, вместо контура C нужно взять контур C^+, внутри которого находится $\frac{sN}{2}$ корней (39), у которых $Im\alpha_n^{(k)} > 0$. Итак,

$$\bar{u} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C^+} e^{i\alpha_n x_n} A^{-1}(\alpha, p)(C_0 + \alpha_n C_1 + \ldots + \alpha_n^{s-1} C_{s-1})\, d\alpha_n .$$

Здесь уже будет лишь $\frac{sN}{2}$ независимых произвольных параметров.

Применим теперь граничное условие (38). Это даст

$$\int_{C^+} B(\alpha) A^{-1}(\alpha, p)(E\alpha_n E \ . \ . \ . \ \alpha_n^{s-1} E)\, d\alpha_n \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_{\frac{sN}{2}} \end{pmatrix} = 0 .$$

Учитывая условия регуляризуемости (ранг матрицы в правой части равняется $\frac{sN}{2}$), находим, что $C_1 = 0, \ldots, C_{\frac{sN}{2}} = 0$, т. е. $u = 0$, что и требовалось.

Теорема единственности для смешанной задачи, в конечной области ограниченной выпуклой замкнутой поверхностью типа Ляпунова, формулируется следующим образом.

Пусть рассматривается смешанная задача для параболической системы вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u \tag{40}$$

в области $v \cup S$ с начальным условием

$$u|_{t=0} = 0 \tag{41}$$

и граничным

$$\lim B_2\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0. \tag{42}$$

Предполагается выполнение условия регуляризуемости для задачи (40) (41) (42), т. е. что в каждой точке $y \in S$ ранг матрицы

$$\int_{C+} B_2(y, \lambda \nu_y + \mu) A^{-1}(\lambda \nu_y + \mu)(E \lambda E \ldots \lambda^{s-1}E)\, d\lambda \quad \text{равен } \frac{sN}{2}.$$

Кроме того, предполагается выполнение следующих двух условий: а) сопряженный граничный оператор $B^*\left(y, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ представляет собой линейный дифференциальный оператор с производным порядка не выше $s-1$ и с коэффициентами, непрерывно зависящими от точки $y \in S$; и б) для сопряженной краевой задачи выполняется условие регуляризуемости, т. е. ранг матрицы

$$\int_{C+} B_2^*(h, \lambda \nu_y A^{*-1}(\lambda \nu_y + \mu)(E \lambda E \ldots \lambda^{s-1}E)\, d\lambda.$$

равняется $\frac{sN}{2}$. Среди функций, имеющих непрерывные производные по любой последовательности аргументов $x_1, \ldots, x_n$, до порядка s включительно и непрерывную первую производную по t, не существует иного, кроме тождественного нуля, решения смешанной задачи (40), (41), (42).

Рассмотрим два вектора $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $W = (W_1, \ldots, W_n)$ высоты N, непрерывные в области $x \in v$ и при $0 \leqslant t \leqslant T$, и пусть $Q[u] = \frac{\partial u}{\partial t} - A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и Q^* — обозначение оператора, сопряженного к Q, т. е. Q^* получается из Q транспонированием и заменой каждого элемента его сопряженным по Лагранжу. Используя формулу Остроградского, можно написать

$$\int_0^t d\tau \int_{(V)} \{WQ[u] - (Q^*[W^*]u\}\, \partial x = \int_0^t d\tau \int_{(S)} \Omega[u, W]\, dS +$$

$$+ \int_{(V)} W u dx - \int_{(V)\tau=t} W u \partial x.$$

Здесь $\Omega[u, v]$ есть билинейная форма относительно u и W их производных $x_1, \ldots, x_n$ до порядка $s-1$.

Пусть u есть решение системы (40) в области v, удовлетворяющее условиям (41) и (42). В противоречии с теоремой допустим, что $u_1 > 0$ в некоторой окрестности σ точки $x \in v$;

Пусть W есть решение сопряженной задачи, т. е. решение системы

$$\frac{\partial W}{\partial t} = A^* \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) W$$

при условиях

$$W_1 |_{\tau=t\,(i=2,3,\ldots,N)} = 0, \quad W_1 |_{\tau=t} = W^0.$$

Здесь W_0 есть непрерывная функция, равная нулю вне окрестности σ и положительная внутри σ.

При этих значениях u и W из формулы Остроградского следует, что

$$\int\limits_{(\sigma)\,\tau=t} W_1 u_1 d\xi = 0\,.$$

Но это противоречит принятым предположениям, и, следовательно, теорема единственности может считаться доказанной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Загорский Т. Я. Укр. математ. журнал № 3, 1957.
2. Загорский Т. Я. Научные записки Львовск. политехн. ин-та. Серия физ.-мат. вып. 2, 1956.
3. Загорский Т. Я. Доклады АН СССР, т. 106, № 1, 1956, т. III.
4. Загорский Т. Я. Доклады АН СССР, т. 117, № 3, 1957.
5. Петровский И. Г. Бюллетень МГУ, секция А, т. I, вып. 7. 1938.

Работа поступила в апреле 1957 г.