ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

Р. Я. СУНЧЕЛЕЕВ

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАДАЧ О РАВНОВЕСИИ УПРУГОГО ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА

Изучение инвариантных свойств дифференциальных уравнений относительно групп преобразований дает возможность естественным путем получить методом разделения переменных Фурье некоторые известные результаты, и благодаря этому оказывается возможным явное решение некоторых граничных задач для областей, инвариантных относительно тех же групп преобразований.

«Общее» в некотором смысле представление решений инвариантных систем тесно связано с группой преобразований.

Решение граничной задачи для системы уравнений и области, инвариантных относительно данной группы преобразований, определяет такое «общее» представление решений системы, которое хорошо приспособлено для явного решения данной граничной задачи.

В настоящей статье даются явные решения основных граничных задач теории упругости для бесконечного изотропного цилиндра.

1. «ОБЩЕЕ» ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

1) Известно, что система уравнений теории упругости для изотропной однородной среды

$$\begin{pmatrix} 1+\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sigma \end{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}+$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_2}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\,\partial x_3}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \\ 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2\,\partial x_3}=0 \quad (1)$$

является инвариантной системой относительно всех вращений и всех смещений в пространстве.

Здесь и далее приняты обозначения $U=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\sigma=\frac{\lambda+\mu}{\mu}$, где λ и μ — упругие постоянные, обозначенные по методу Ляме.

Так как система (1) и бесконечный цилиндр инвариантны относительно группы вращений вокруг оси цилиндра, и смещений вдоль ее, то «общее» представление решения системы (1) определяется этой группой.

Для определенности за ось цилиндра примем ось Ox_3.

2) В дальнейшем для простоты вычислений нам будет необходимо, как систему уравнений (1), так и соответствующие граничные условия подвергать преобразованиям. Определим эти преобразования.

Преобразованием (A) будем называть:

а) замену переменных по формулам

$$\left.\begin{aligned} X &= AY \\ U &= AV \end{aligned}\right\},$$

где

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -i & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix};$$

б) умножение слева системы, полученной после такой замены переменных, на матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразованием (B) будем называть:

а) замену переменных по формулам

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= re^{i\varphi} \\ y_2 &= re^{-i\varphi} \\ y_3 &= y_3 \end{aligned}\right\} V = T_\varphi W,$$

где

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

б) умножение слева системы, полученной после такой замены переменных, на матрицу

$$T_\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) В системе (1) сделаем преобразование (A). Тогда вместо (1) получим систему:

$$\sum_{i, j=1} Q_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} = 0, \tag{2}$$

где

$$Q_{11} = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{22} = 2\begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{33} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sigma \end{pmatrix},$$

$$Q_{12} = \begin{pmatrix} \sigma+2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma+2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, Q_{13} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma \\ \sigma & 0 & 0 \end{pmatrix}, Q_{23} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\sigma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \end{pmatrix},$$

причем $Q_{ij} = Q_{ji}$.

Систему (2) подвергнем преобразованию (B), тогда вместо (2) получим систему:

$$\frac{1}{4}(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12})\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{1}{4r^2}(Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12})\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} + \right.$$

$$\left. + 2iC_1 \frac{\partial W}{\partial \varphi} - C_1^2 W\right) - \frac{i}{2r}(Q_{11} - Q_{22})\left(iC_1 \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial^2 W}{\partial r\, \partial \varphi}\right) +$$

$$+ \frac{i}{2r^2}(Q_{11} - Q_{22})\left(iC_1 W + \frac{\partial W}{\partial \varphi}\right) - \frac{1}{4r}(Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})\frac{\partial W}{\partial r} +$$

$$+ (Q_{13} + Q_{23})\frac{\partial^2 W}{\partial r\, \partial y_3} - \frac{i}{r}(Q_{13} - Q_{23})\left(iC_1 \frac{\partial W}{\partial y_3} + \frac{\partial^2 W}{\partial \varphi \partial y_3}\right) + Q_{33}\frac{\partial^2 W}{\partial y_3^2} = 0, \tag{3}$$

где

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Так как система инвариантна относительно группы вращений вокруг оси Ox_3 и смещений вдоль той же оси, будем искать решение системы среди функций, инвариантных относительно тех же преобразований.

Положим

$$W(r, \varphi, y_3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3} W^{(k)}(r, \alpha)\, d\alpha. \tag{4}$$

Подставляя значение $W(r, \varphi, y_3)$ из (4) в систему (3), получим обыкновенную систему уравнений

$$\frac{1}{2}Q_{12}\left[\frac{d^2 W^{(k)}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dW^{(k)}}{dr} - \frac{(Ek + C_1)^2}{r^2}W^{(k)}\right] + \frac{1}{4}Q_{11}\left[\frac{d^2 W^{(k)}}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{dW^{(k)}}{dr} + \right.$$

$$+\frac{(Ek+C_1)^2}{r^2}W^{(k)}-\frac{2(Ek+C_1)}{r^2}W^{(k)}+\frac{2(Ek+C_1)}{r}\frac{dW^{(k)}}{dr}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{4}Q_{22}\left[\frac{d^2W^{(k)}}{dr^2}-\frac{1}{r}\frac{dW^{(k)}}{dr}+\frac{(Ek+C_1)^2}{r^2}W^{(k)}+\frac{2(Ek+C_1)}{r^2}W^{(k)}-\right.$$

$$\left.-\frac{2(Ek+C_1)}{r}\frac{dW^{(k)}}{dr}\right]+iQ_{13}\alpha\left[\frac{dW^{(k)}}{dr}+\frac{(Ek+C_1)}{r}W^{(k)}\right]+$$

$$+iQ_{23}\alpha\left[\frac{dW^{(k)}}{dr}-\frac{(Ek+C_1)}{r}W^{(k)}\right]-\alpha^2Q_{33}W^{(k)}=0, \tag{5}$$

где

$$(Ek+C_1)=\begin{pmatrix} k+1 & 0 & 0\\ 0 & k-1 & 0\\ 0 & 0 & k\end{pmatrix}.$$

В развернутой форме эта система может быть записана в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sigma+2}{2}\left[\frac{d^2W_1^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_1^{(k)}}{dr}-\frac{(k+1)^2}{r^2}W_1^{(k)}\right]+\frac{\sigma}{2}\left[\frac{d^2W_2^{(k)}}{dr^2}-\right.\\
&\left.-\frac{(2k-1)}{r}\frac{dW_2^{(k)}}{dr}+\frac{k^2-1}{r^2}W_2^{(k)}\right]+i\alpha\sigma\left[\frac{dW_3^{(k)}}{dr}-\frac{k}{r}W_3^{(k)}\right]-\alpha^2W_1^{(k)}=0\\
&\frac{\sigma+2}{2}\left[\frac{d^2W_2^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_2^{(k)}}{dr}-\frac{(k-1)^2}{r^2}W_2^{(k)}\right]+\frac{\sigma}{2}\left[\frac{d^2W_1^{(k)}}{dr^2}+\frac{(2k+1)}{r}\times\right.\\
&\left.\times\frac{dW_1^{(k)}}{dr}+\frac{k^2-1}{r^2}W_1^{(k)}\right]+i\alpha\sigma\left[\frac{dW_3^{(k)}}{dr}+\frac{k}{r}W_3^{(k)}\right]-\alpha^2W_2^{(k)}=0\\
&\left[\frac{d^2W_3^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_3^{(k)}}{dr}-\frac{k^2}{r^2}W_3^{(k)}\right]+\frac{i\alpha\sigma}{2}\left[\frac{dW_1^{(k)}}{dr}+\frac{(k+1)}{r}W_1^{(k)}\right]+\\
&\quad+\frac{i\alpha\sigma}{2}\left[\frac{dW_2^{(k)}}{dr}-\frac{(k-1)}{r}W_2^{(k)}\right]-(1+\sigma)\alpha^2W_3^{(k)}=0
\end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

В системе (6) можно сделать операторные разложения и записать ее так:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}\right)\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)W_1^{(k)}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}\right)\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)W_1^{(k)}+\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)W_2^{(k)}+2i\alpha W_3^{(k)}\right]=\alpha^2W_1^{(k)}\\
&\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)W_2^{(k)}+\frac{\sigma}{2}\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)W_1^{(k)}+\right.\\
&\qquad\left.+\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)W_2^{(k)}+2i\alpha W_3^{(k)}\right]=\alpha^2W_2^{(k)}
\end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2 W_3^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_3^{(k)}}{dr}-\frac{k^2}{r^2}W_3^{(k)}+\frac{\sigma\alpha i}{2}\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)W_1^{(k)}+\right.\\&\qquad\left.+\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)W_2^{(k)}+2i\alpha W_3^{(k)}\right]=\alpha^2 W_3^{(k)}\end{aligned}\right\}. \quad (6')$$

Обозначим

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)W_1^{(k)}+\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)W_2^{(k)}+2i\alpha W_3^{(k)}=Z. \quad (7)$$

Тогда система (6′) запишется в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}\right)\left[\left(\frac{d}{dr}-\frac{k+1}{r}\right)W_1^{(k)}+\frac{\sigma}{2}Z\right]=\alpha^2 W_1^{(k)}\\&\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)\left[\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)W_2^{(k)}+\frac{\sigma}{2}Z\right]=\alpha^2 W_2^{(k)}\\&\frac{d^2 W_3^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_3^{(k)}}{dr}-\frac{k^2}{r^2}W_3^{(k)}+\frac{\sigma\alpha i}{2}Z=\alpha^2 W_3^{(k)}\end{aligned}\right\}. \quad (8)$$

К первому уравнению из (8) применим оператор $\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)$, ко второму — $\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)$, третье уравнение умножим на $2i\alpha$ и сложим полученные равенства, тогда, имея в виду операторное тождество

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)\left(\frac{d}{dr}-\frac{k}{r}\right)=\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)\left(\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right)=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{k^2}{r^2},$$

найдем

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{k^2}{r^2}\right)\left[\left(\frac{d}{dr}+\frac{k+1}{r}\right)W_1^{(k)}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{d}{dr}-\frac{k-1}{r}\right)W_2^{(k)}+2i\alpha W_3^{(k)}+\sigma Z\right]-\sigma\alpha^2 Z=\alpha^2 Z.$$

Воспользовавшись равенством (7) и сокращая на $(1+\sigma)$, это выражение можно записать так:

$$\frac{d^2 Z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dZ}{dr}-\frac{k^2}{r^2}Z=\alpha^2 Z.$$

Известно, что решением данного уравнения является функция

$$Z=a I_k(i\alpha r)+b N_k(i\alpha r),$$

где $I_k(i\alpha r)$, $N_k(i\alpha r)$ — соответственно цилиндрические функции первого и второго рода.

Подставим значение Z в (8), тогда для определения функций $W_1^{(k)}$, $W_2^{(k)}$, $W_3^{(k)}$ получим систему уравнений:

$$\frac{d^2W_1^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_1^{(k)}}{dr}-\frac{(k+1)^2}{r^2}W_1^{(k)}-\alpha^2W_1^{(k)}=$$

$$=\frac{i\alpha\sigma}{2}\left[a I_{k+1}(i\alpha r)+b N_{k+1}(i\alpha r)\right],$$

$$\frac{d^2W_2^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_2^{(k)}}{dr}-\frac{(k-1)^2}{r^2}W_2^{(k)}-\alpha^2W_2^{(k)}=$$

$$=-\frac{i\alpha\sigma}{2}\left[a I_{k-1}(i\alpha r)+b N_{k-1}(i\alpha r)\right]$$

$$\frac{d^2W_3^{(k)}}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dW_3^{(k)}}{dr}-\frac{k^2}{r^2}W_3^{(k)}-\alpha^2W_3^{(k)}=$$

$$=-\frac{i\alpha\sigma}{2}\left[a I_k(i\alpha r)+b N_k(i\alpha r)\right.$$

Решениями этих неоднородных уравнений Бесселя являются функции:

$$W_1^{(k)}=c_1^{(k)}(\alpha)\,I_{k+1}(i\alpha r)+c_4^{(k)}(\alpha)\,N_{k+1}(i\alpha r)+$$

$$+\frac{\sigma i}{4\alpha}r\left[a(\alpha)\,I'_{k+1}(i\alpha r)+b(\alpha)\,N'_{k+1}(i\alpha r)\right],$$

$$W_2^{(k)}=c_2^{(k)}(\alpha)\,I_{k-1}(i\alpha r)+c_5^{(k)}(\alpha)\,N_{k-1}(i\alpha r)-$$

$$-\frac{\sigma i}{4\alpha}r\left[a(\alpha)\,I'_{k-1}(i\alpha r)+b(\alpha)\,N'_{k-1}(i\alpha r)\right],$$

$$W_3^{(k)}=c_3^{(k)}(\alpha)\,I_k(i\alpha r)+c_6^{(k)}(\alpha)\,N_k(i\alpha r)-$$

$$-\frac{\sigma i}{4\alpha}r\left[a(\alpha)\,I'_k(i\alpha r)+b(\alpha)\,N'_k(i\alpha r)\right],$$

где

$$I'_\nu(i\alpha r)=\frac{dI_\nu(i\alpha r)}{dr};\qquad N'_\nu(i\alpha r)=\frac{dN_\nu(i\alpha r)}{dr}.$$

Введем матричное обозначение

$$I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)=\begin{pmatrix} I_{k+1}(i\alpha r) & 0 & 0\\ 0 & I_{k-1}(i\alpha r) & 0\\ 0 & 0 & I_k(i\alpha r)\end{pmatrix}$$

и аналогичное для $N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)$.

Тогда $W^{(k)}$ матрицу-столбец решений можно записать в следующем виде:

$$W^{(k)}=I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\,C_1^{(k)}(\alpha)+N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\,C_2^{(k)}(\alpha)+$$

$$+\frac{\sigma i}{4\alpha} r\left[a(\alpha) I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)+b(\alpha) N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\right]\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

Подставляя значение $W^{(k)}$ в равенство (4), получим

$$W(r,\varphi,y_3)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3}\left\{I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\,C_1^{(k)}(\alpha)+N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\,C_2^{(k)}(\alpha)+\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma i}{4\alpha} r\left[a(\alpha) I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)+b(\alpha) N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\right]\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}\right\}d\alpha, \tag{9}$$

где

$$C_1^{(k)}(\alpha)=\begin{pmatrix}c_1^{(k)}\\c_2^{(k)}\\c_3^{(k)}\end{pmatrix}\qquad C_2^{(k)}(\alpha)=\begin{pmatrix}c_4^{(k)}\\c_5^{(k)}\\c_6^{(k)}\end{pmatrix}.$$

Между восемью постоянными $C_1^{(k)}(\alpha)$, $C_2^{(k)}(\alpha)$, $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ существуют две связи, определяемые равенством (7):

$$\begin{aligned}c_1^{(k)}-c_2^{(k)}+2c_3^{(k)}&=-\frac{a(\alpha)(\sigma+2)i}{2\alpha},\\ c_4^{(k)}-c_5^{(k)}+2c_6^{(k)}&=-\frac{b(\alpha)(\sigma+2)i}{2\alpha}.\end{aligned}\tag{10}$$

Подставим в (9) значение

$$a(\alpha)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=-\frac{2\alpha}{i(\sigma+2)}\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\-1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1^{(k)}\\c_2^{(k)}\\c_3^{(k)}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{2\alpha}{i(\sigma+2)}D\begin{pmatrix}c_1^{(k)}\\c_2^{(k)}\\c_3^{(k)}\end{pmatrix}$$

$$b(\alpha)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=-\frac{2\alpha}{i(\sigma+2)}\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&-2\\-1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_4^{(k)}\\c_5^{(k)}\\c_6^{(k)}\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{2\alpha}{i(\sigma+2)}D\begin{pmatrix}c_4^{(k)}\\c_5^{(k)}\\c_6^{(k)}\end{pmatrix},$$

тогда „общее" представление решения системы будет иметь вид

$$W(r,\varphi,y_3)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3}\left\{\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]\times\right.$$

$$\left.\times C_1^{(k)}(\alpha)+\left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]C_2^{(k)}(\alpha)\right\}d\alpha. \quad (9')$$

2. РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА

Граничные задачи будем ставить для системы (3), полученной из (1) путем преобразования (A) и (B).

Очевидно, если задача ставится для системы (1), то граничные условия для системы (6) получаются из граничных условий системы (1) в результате преобразований (A) и (B).

Связь между U и W следующая:

$$U=AT_{\varphi}W;\qquad W=T_{\varphi}^{-1}A^{-1}U.$$

1) Найти решение $W(r,\varphi,y_3)$ системы (6), непрерывное и дважды непрерывно дифференцируемое внутри цилиндра $r<h$ и удовлетворяющее на поверхности цилиндра $r=h-0$ краевому условию

$$W(r,\varphi,y_3)\,|_{r=h-0}=f(\varphi,y_3), \quad (11)$$

где $f(\varphi,y_3)$ — дважды непрерывно дифференцируемая матрица-столбец функций.

Функцию $f(\varphi,y_3)$ разложим в ряд по φ и коэффициенты Фурье представим через интеграл Фурье

$$f(\varphi,y_3)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}f^{(k)}(y_3)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}^{(k)}(\alpha)e^{i\alpha y_3}d\alpha.$$

Тогда граничное условие перепишется так:

$$W(r,\varphi,y_3)\,|_{r=h-0}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}^{(k)}(\alpha)\,e^{i\alpha y_3}d\alpha.$$

В „общем" представлении решений (9') $C_2^{(k)}(\alpha)$ положим равным нулю, т.к. $N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)$ при $r=0$ имеет особенность

$$W(r,\varphi,y_3)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3}\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)-\right.$$

$$\left.-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]C_1^{(k)}(\alpha)\,d\alpha. \quad (12)$$

Приравнивая подинтегральные выражения в отдельных гармониках в (11) и в (12) при $r=h$ для определения трех неизвестных

$c_1^{(k)}(\alpha)$, $c_2^{(k)}(\alpha)$, $c_3^{(k)}(\alpha)$ получим три линейных уравнения, записанных в матричной форме так:

$$\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) - \frac{\sigma h}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha h)\, D \right] C_1^{(k)}(\alpha) = \bar{f}^{-(k)}(\alpha). \quad (13)$$

Решение этой системы представится в следующем виде:

$$C_1^{(k)}(\alpha) = \left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) - \frac{\sigma h}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha h)\, D \right]^{-1} \bar{f}^{-(k)}(\alpha). \quad (14)$$

Подставив значение $C_1^{(k)}(\alpha)$ из (14) в (12), получим решение поставленной задачи

$$W(r, \varphi, y_3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3} \left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} I^1_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\, D \right] \times$$

$$\times \left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) - \frac{\sigma h}{2(\sigma+2)} I^1_{(Ek+C_1)}(i\alpha h)\, D \right]^{-1} f^{-(k)}(\alpha)\, d\alpha. \quad (15)$$

2) В этом n° будет дано явное решение внешней краевой задачи для бесконечного цилиндра в следующей постановке.

Найти решение $W(r, \varphi, y_3)$ системы (6), непрерывное и дважды непрерывно дифференцируемое вне цилиндра $r > h$ и удовлетворяющее на поверхности цилиндра $r = h + 0$ краевому условию

$$W(r, \varphi, y_3)\,|_{r=h+0} = f(\varphi, y_3). \quad (16)$$

В этом случае в решении (9') положим $C_1^{(k)}(\alpha)$ равным нулю, т. к. $I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)$ имеет особенность при $r = \infty$

$$W(r, \varphi, y_3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3} \Big[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) -$$

$$- \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\, D \Big] C_2^{(k)}(\alpha)\, d\alpha.$$

После аналогичных вычислений найдем значение $C_2^{(k)}(\alpha)$

$$C_2^{(k)}(\alpha) = \left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) - \frac{\sigma h}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha h)\, D \right]^{-1} \bar{f}^{-(k)}(\alpha). \quad (17)$$

Решение внешней краевой задачи для бесконечного цилиндра следующее:

$$W(r, \varphi, y_3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3} \Big[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) -$$

$$- \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)\, D \Big] \cdot \Big[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha h) -$$

$$- \frac{\sigma h}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,h)\,D \Big]^{-1} \overline{f}^{k}(\alpha)\,d\,\alpha\,. \tag{18}$$

Заметим, что матрицы

$$I_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,h) - \frac{\sigma h}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,h)\,D,$$

$$N_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,h) - \frac{\sigma h}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,h)\,D$$

неособенные и, следовательно, обратимы.

3) Рассмотрим решение граничной задачи для полого цилиндра (цилиндрического слоя), когда на внутренней и внешней поверхностях заданы смещения.

Пусть ширина цилиндрического слоя равна $r_2 - r_1 = 2h$.

Дадим решение задачи в следующей постановке.

Найти решение $W(r, \varphi, y_3)$ системы (6), непрерывное и дважды непрерывно дифференцируемое внутри цилиндрического слоя $r_2 - r_1 = 2h$, удовлетворяющее на внутренней поверхности $r = r_1 + 0$ граничному условию:

$$W(r, \varphi, y_3)\,|_{r=r_1+0} = f(\varphi, y_3) \tag{20}$$

и на внешней поверхности $r = r_2 - 0$ граничному условию

$$W(r, \varphi, y_3)\,|_{r=r_2-0} = \psi(\varphi, y_3), \tag{21}$$

где $f(\varphi, y_3)$, $\psi(\varphi, y_3)$ — дважды непрерывно дифференцируемые матрицы-столбцы функций.

Для решения задачи будем исходить из „общего" представления решения (9'). $f(\varphi, y_3)$, $\psi(\varphi, y_3)$ как и в 1), 2) представим соответствующими рядами.

Приравнивая подынтегральные выражения в отдельных гармониках при $r = r_1 + 0$ и $r = r_2 - 0$ в (9') и в разложениях $f(\varphi, y_3)$, $\psi(\varphi, y_3)$, для определения шести неизвестных $C_1^{(k)}(\alpha)$, $C_2^{(k)}(\alpha)$ получим шесть уравнений, записанных в матричной форме:

$$\left.\begin{aligned}
&\Big[I_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r_1) - \frac{\sigma r_1}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r_1)\,D \Big] C_1^{(k)}(\alpha) + \\
&+ \Big[N_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r_1) - \frac{\sigma r_1}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r_1)\,D \Big] C_2^{(k)}(\alpha) = \overline{f}^{(k)}(\alpha) \\
&\Big[I_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r_2) - \frac{\sigma r_2}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r_2)\,D \Big] C_1^{(k)}(\alpha) + \\
&+ \Big[N_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r_2) - \frac{\sigma r_2}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r_2)\,D \Big] C_2^{(k)}(\alpha) = \overline{\psi}^{(k)}(\alpha)
\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Введем обозначения:

$$R_1(i\,\alpha\,r) = I_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r)\,D\,,$$

$$R_2(i\alpha r) = N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) D.$$

Решение системы (22) представится в следующем виде:

$$C_1^{(k)}(\alpha) = [R_2^{-1}(i\alpha r_1) R_1(i\alpha r_1) - R_2^{-1}(i\alpha r_2) R_1(i\alpha r_2)]^{-1} \times$$
$$\times [R_2^{-1}(i\alpha r_1) \overline{f}^{(k)}(\alpha) - R_2^{-1}(i\alpha r_2) \overline{\psi}^{(k)}(\alpha)]$$
$$C_2^{(k)}(\alpha) = [R_1^{-1}(i\alpha r_1) R_2(i\alpha r_1) - R_1^{-1}(i\alpha r_2) R_2(i\alpha r_2)]^{-1} \times$$
$$\times [R_1^{-1}(i\alpha r_1) \overline{f}^{(k)}(\alpha) - R_1^{-1}(i\alpha r_2) \overline{\psi}^{(k)}(\alpha)].$$

Решение поставленной задачи имеет вид

$$\left.\begin{aligned} W(r,\varphi,y_3) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3} \{ R_1(i\alpha r) [R_2^{-1}(i\alpha r_1) R_1(i\alpha r_1) - \\ - R_2^{-1}(i\alpha r_2) R_1(i\alpha r_2)]^{-1} \cdot [R_2^{-1}(i\alpha r_1) \overline{f}^{(k)}(\alpha) - R_2^{-1}(i\alpha r_2) \overline{\psi}^{(k)}(\alpha)] + \\ + R_2(i\alpha r) [R_1^{-1}(i\alpha r_1) R_2(i\alpha r_1) - R_1^{-1}(i\alpha r_2) R_2(i\alpha r_2)] \times \\ \times [R_1^{-1}(i\alpha r_1) \overline{f}^{(k)}(\alpha) - R_1^{-1}(i\alpha r_2) \overline{\psi}^{(k)}(\alpha)] \} \, d\alpha \end{aligned}\right\} . \quad (23)$$

3. РЕШЕНИЕ ВТОРОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В этом параграфе будут рассмотрены решения граничных задач для бесконечного цилиндра при заданных напряжениях на границе.

1) Известно, что девять компонент напряжения для изотропного тела могут быть представлены в виде матрицы

$$X = \begin{pmatrix} X_{x_1}^{(1)} & X_{x_2}^{(1)} & X_{x_3}^{(1)} \\ X_{x_1}^{(2)} & X_{x_2}^{(2)} & X_{x_3}^{(2)} \\ X_{x_1}^{(3)} & X_{x_2}^{(3)} & X_{x_3}^{(3)} \end{pmatrix},$$

где

$$X_{x_i}^{(j)} = X_{x_j}^{(i)}.$$

Компоненты напряжения и смещения связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} X_{x_1}^{(1)} &= 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), \\ X_{x_2}^{(2)} &= 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), \\ X_{x_3}^{(3)} &= 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right), \qquad (24) \\ X_{x_3}^{(2)} &= X_{x_2}^{(3)} = \mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right), \end{aligned}$$

$$X_{x_3}^{(1)} = X_{x_1}^{(3)} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right),$$

$$X_{x_2}^{(1)} = X_{x_1}^{(2)} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right),$$

здесь λ и μ имеют прежний смысл.

Направляющие косинусы внешней нормали к поверхности обозначим через $\nu_1 = \cos(nx_1)$, $\nu_2 = \cos(nx_2)$, $\nu_3 = \cos(nx_3)$. Изучим решение задачи, когда граничные условия будут задаваться на поверхности бесконечного цилиндра, поэтому $\nu_3 = 0$, а $\nu_1 = \cos\varphi$, $\nu_2 = \sin\varphi$, где φ — полярный угол.

Граничные условия второй краевой задачи для системы имеют следующий вид:

$$L(u) = X \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{x_1}^{(1)} \nu_1 + X_{x_2}^{(1)} \nu_2 \\ X_{x_1}^{(2)} \nu_1 + X_{x_2}^{(2)} \nu_2 \\ X_{x_1}^{(3)} \nu_1 + X_{x_2}^{(3)} \nu_2 \end{pmatrix}.$$

В развернутой матричной форме это запишется так:

$$L(u) = \begin{pmatrix} (2\mu+\lambda)\nu_1 & \mu\nu_2 & 0 \\ \lambda\nu_2 & \mu\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\nu_1 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \begin{pmatrix} \mu\nu_2 & \lambda\nu_1 & 0 \\ \mu\nu_1 & (2\mu+\lambda)\nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu\nu_2 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_2} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda\nu_1 \\ 0 & 0 & \lambda\nu_2 \\ \mu\nu_1 & \mu\nu_2 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_3}. \tag{25}$$

Равенство (25) подвергнем преобразованию (A), тогда получим:

$$L_1(v) = \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ (\lambda+\mu)e^{-i\varphi} & 2\mu e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \mu e^{i\varphi} \end{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y_1} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 2\mu e^{-i\varphi} & (\lambda+\mu)e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & (\lambda+\mu)e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \mu e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y_2} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda e^{i\varphi} \\ 0 & 0 & \lambda e^{-i\varphi} \\ \frac{\mu}{2}e^{-i\varphi} & \frac{\mu}{2}e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial y_3}. \tag{26}$$

Равенство (26) подвергнем преобразованию (B) и получим граничное условие для $W(r, \varphi, y_3)$

$$L_2(W) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0 \\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{1}{2r} \begin{pmatrix} \mu-\lambda & -(\lambda+\mu) & 0 \\ -(\lambda+\mu) & (\mu-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} W +$$

$$+\frac{i}{2r}\begin{pmatrix}\mu-\lambda & \lambda+\mu & 0\\ -(\lambda+\mu) & -(\mu-\lambda) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{\partial W}{\partial\varphi}+\begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda\\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0\end{pmatrix}\frac{\partial W}{\partial y_3}. \tag{27}$$

2) Найти решение $W(r,\varphi,y_3)$ системы (6), непрерывное и дважды непрерывно дифференцируемое внутри цилиндра $r<h$ и удовлетворяющее на поверхности цилиндра $r=h-0$ краевому условию

$$L_2(W)|_{r=h-0}=f(\varphi,y_3), \tag{28}$$

где $f(\varphi,y_3)$ — дважды непрерывно дифференцируемая матрица-столбец функций.

Функцию $f(\varphi,y_3)$ разложим в ряд по φ и коэффициенты представим через интеграл Фурье.

Тогда граничное условие (28) перепишется так:

$$L_2(W)|_{r=h-0}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{ik\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{f}^{(k)}(\alpha)e^{i\alpha y_3}d\alpha. \tag{29}$$

В „общем" представлении решений (9′) $C_2^{(k)}(\alpha)$ положим равным нулю, т. к. $N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)$ при $r=0$ имеет особенность.

Подставляя в $L_2(W)$ значение $W(r,\varphi,y_3)$ из (9′) при $C_2^{(k)}(\alpha)=0$ и приравнивая подынтегральные выражения в отдельных гармониках, получим

$$\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0\\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0\\ 0 & 0 & 2\mu\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{2r}\begin{pmatrix}(\mu-\lambda) & (\mu+\lambda) & 0\\ -(\mu+\lambda) & -(\mu-\lambda) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}(Ek+C_1)+\right.$$

$$\left.+i\alpha\begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda\\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0\end{pmatrix}\right\}\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right.$$

$$\left.\times I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]_{r=h-0}C_1^{(k)}(\alpha)=\bar{f}^{(k)}(\alpha). \tag{30}$$

Из этого равенства определяем матрицу $C_1^{(k)}(\alpha)$

$$C_1^{(k)}(\alpha)=\left\{\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0\\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0\\ 0 & 0 & 2\mu\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2r}\begin{pmatrix}(\mu-\lambda) & (\mu+\lambda) & 0\\ -(\mu+\lambda) & -(\mu-\lambda) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}(Ek+C_1)+i\alpha\begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda\\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0\end{pmatrix}\right]\times$$

$$\times\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) D\right]_{|r=h-0}\Bigg\}^{-1} \bar{f}^{(k)}(\alpha) \tag{31}$$

Решение поставленной задачи дается формулой:

$$W(r,\varphi,y_3)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3}\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) D\right]\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0\\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0\\ 0 & 0 & 2\mu\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{2r}\begin{pmatrix}(\mu-\lambda) & (\mu+\lambda) & 0\\ -(\mu+\lambda) & -(\mu-\lambda) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\right.\right.$$

$$\left.\times(Ek+C_1)+i\alpha\begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda\\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0\end{pmatrix}\right]\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right.$$

$$\left.\left.\times I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) D\right]_{|r=h-0}\right\}\bar{f}^{(k)}(\alpha)\,d\alpha. \tag{32}$$

3) Найти решение $W(r,\varphi,y_3)$ системы (6), непрерывное и дважды непрерывно дифференцируемое вне цилиндра и удовлетворяющее на поверхности цилиндра $r=h+0$ краевому условию

$$L_2(W)|_{r=h+0}=\psi(\varphi,y_3). \tag{33}$$

В „общем" представлении решений (9') $C_1^{(k)}(\alpha)$ положим равным нулю, т. к. $I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)$ при $r=\infty$ имеет особенность. После вычислений, аналогичных 2), решение поставленной задачи получим в следующем виде:

$$W(r,\varphi,y_3)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\varphi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha y_3}\left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) D\right]\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0\\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0\\ 0 & 0 & 2\mu\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{2r}\begin{pmatrix}(\mu-\lambda) & (\mu+\lambda) & 0\\ -(\mu+\lambda) & -(\mu-\lambda) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}(Ek+C_1)+\right.\right.$$

$$\left.+i\alpha\begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda\\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0\end{pmatrix}\right]\cdot\left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right.$$

$$\left.\left.\times N'_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r)\,D\right]_{|\,r=h+0}\right\}^{-1}\overline{\psi}^{(k)}(\alpha)\,d\,\alpha\,. \tag{34}$$

4) Найти решение $W(r,\varphi,y_3)$ системы (6), непрерывное и дважды непрерывно дифференцируемое внутри цилиндрического слоя $r_2-r_1=2h$, удовлетворяющее на внутренней поверхности $r=r_1+0$ граничному условию

$$L_2(W)\,|_{\,r=r_1+0}=f(\varphi,y_3) \tag{35}$$

и на внешней поверхности $r=r_2-0$ граничному условию

$$L_2(W)\,|_{\,r=r_2-0}=\psi(\varphi,y_3)\,, \tag{36}$$

$f(\varphi,y_3)$, $\psi(\varphi,y_3)$ — имеют прежний смысл.

Подставим в (35) и (36) значение $W(r,\varphi,y_3)$ из (9′) и, приравнивая подынтегральные выражения в отдельных гармониках при $r=r_1+0$ и $r=r_2-0$ и в разложениях $f(\varphi,y_3)$ и $\psi(\varphi,y_3)$, для определения шести неизвестных $C_1^{(k)}(\alpha)$, $C_2^{(k)}(\alpha)$ получим шесть уравнений, записанных в матричной форме:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0\\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0\\ 0 & 0 & 2\mu\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{2r}\begin{pmatrix}(\mu-\lambda) & (\mu+\lambda) & 0\\ -(\mu+\lambda) & -(\mu-\lambda) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\right.\\
&\left.\times(Ek+C_1)+i\,\alpha\begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda\\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0\end{pmatrix}\right\}\left\{\left[I_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r)-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right.\right.\\
&\left.\times I'_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r)\,D\right]C_1^{(k)}(\alpha)+\left[N_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r)-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right.\\
&\left.\left.\times N'_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r)\,D\right]C_2^{(k)}(\alpha)\right\}_{|\,r=r_1+0}=\overline{f}^{(k)}(\alpha)\\
&\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}(\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0\\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0\\ 0 & 0 & 2\mu\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{2r}\begin{pmatrix}(\mu-\lambda) & (\mu+\lambda) & 0\\ -(\mu+\lambda) & -(\mu-\lambda) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\times\right.\\
&\left.\times(Ek+C_1)+i\,\alpha\begin{pmatrix}0 & 0 & \lambda\\ 0 & 0 & \lambda\\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0\end{pmatrix}\right\}\left\{\left[I_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r)-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right.\right.\\
&\left.\times I'_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r)\,D\right]C_1^{(k)}(\alpha)+\left[N_{(Ek+C_1)}(i\,\alpha\,r)-\frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right.
\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$$\left.\left.\times N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]C_2^{(k)}(\alpha)\right\}_{|r=r_2-0}=\bar{\psi}^{(k)}(\alpha). \qquad (37)$$

Определив из (37) $C_1^{(k)}(\alpha)$, $C_2^{(k)}(\alpha)$ и подставив в (9′) их значения, получим решение задачи.

5) Рассмотрим решение задачи для бесконечного полого цилиндра с шириной слоя $r_2 - r_1 = 2h$, когда на внутренней поверхности $r = r_1 + 0$ будут заданы смещения, а на внешней поверхности $r = r_2 - 0$ — напряжения.

Решение задачи дается в следующей математической постановке.

Найти решение $W(r, \varphi, y_3)$ системы (6), непрерывное и дважды непрерывно дифференцируемое внутри цилиндрической полосы $r_2 - r_1 = 2h$, удовлетворяющее на внутренней поверхности $r = r_1 + 0$ граничному условию

$$W(r, \varphi, y_3)|_{r=r_1+0} = f(\varphi, y_3) \qquad (38)$$

и на внешней поверхности $r = r_2 - 0$ граничному условию

$$L_2(W)_{|r=r_2-0} = \psi(\varphi, y_3). \qquad (39)$$

После вычислений, аналогичных предыдущим, для определения шести неизвестных $C_1^{(k)}(\alpha)$, $C_2^{(k)}(\alpha)$ получим шесть алгебраических уравнений, записанных в матричной форме:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_1) - \frac{\sigma r_1}{2(\sigma+2)} I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_1)D\right]C_1^{(k)}(\alpha) + \\
&+\left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_1) - \frac{\sigma r_1}{2(\sigma+2)} N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r_1)D\right]C_2^{(k)}(\alpha) = \bar{f}^{(k)}(\alpha) \\
&\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} (\lambda+3\mu) & (\lambda+\mu) & 0 \\ (\lambda+\mu) & (\lambda+3\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{2r}\begin{pmatrix} (\mu-\lambda) & (\mu+\lambda) & 0 \\ -(\mu+\lambda) & -(\mu-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\times\right. \\
&\left.\times(Ek+C_1) + i\alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \\ \frac{\mu}{2} & \frac{\mu}{2} & 0 \end{pmatrix}\right\}\left\{\left[I_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right.\right. \\
&\left.\times I'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]C_1^{(k)}(\alpha) + \left[N_{(Ek+C_1)}(i\alpha r) - \frac{\sigma r}{2(\sigma+2)}\times\right. \\
&\left.\left.\times N'_{(Ek+C_1)}(i\alpha r)D\right]C_2^{(k)}(\alpha)\right\}_{|r=r_2-0} = \bar{\psi}^{(k)}(\alpha).
\end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

Определив из (40) $C_1^{(k)}(\alpha)$, $C_2^{(k)}(\alpha)$, подставим в (9′) их значения и найдем решение поставленной задачи.

Работа поступила в апреле 1957 г.