ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

М. Л. РАСУЛОВ

К ВЫЧЕТНОМУ МЕТОДУ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ

В этой статье дается формула (9), представляющая решение смешанных задач типа (1)—(3).

Данная формула удобна в одинаковой степени как для случая, когда спектральная задача (4)—(5) соответствует самосопряженному оператору, так и для случая, когда она не соответствует самосопряженному оператору.

Во втором параграфе приводятся примеры смешанных задач, охватываемых предлагаемым методом.

В третьем пункте параграфа 2 приводится пример, для которого решение соответствующей смешанной задачи путем замены вида (22) может быть сведено к решению задачи, для которой спектральная задача соответствует самосопряженному оператору. Этот пример показывает, что для подобных задач формула (9) позволяет получить решение рассматриваемой смешанной задачи без такого предварительного сведения к самосопряженному случаю.

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ, РАССМАТРИВАЕМОЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА, КОНТУРНЫМ ИНТЕГРАЛОМ

Спектральная задача

Пусть X, $У$ суть пространства Банаха. Рассмотрим смешанную задачу нахождения решения u уравнения

$$\sum_{k=0}^{q} A_k \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = f(t) \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{k=0}^{q} B_k \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = 0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \varphi_k (k=0, \ldots, q-1), \tag{3}$$

где t — действительное переменное из $[0, T]$, $f(t)$ — при каждом $t \in [0, T]$ принадлежит пространству X, $\varphi_k \in X$, $u=u(t)$ — искомая функция со значениями из X, A_k — линейные отображения X в X, B_k — линейные отображения пространства X в $У$, причем A_k, B_k перестановочны с оператором дифференцирования по t.

Задачу нахождения решения уравнения

$$\sum_{k=0}^{q} \lambda^k A_k v = -\sum_{k=1}^{q} A_k(\lambda^{k-1}\varphi_0 + \ldots + \varphi_{k-1}) \tag{4}$$

при условии

$$\sum_{k=0}^{q} \lambda^k B_k v = 0 \tag{5}$$

будем называть спектральной задачей, соответствующей задаче (1)—(3).

В дальнейшем через $D(A)$ будет обозначаться область определения оператора A.

Представление формального решения

Пусть задача (4)—(5) определяет оператор R_λ, обладающий свойствами:

1) При $g \in \bigcap_{k=0}^{q} D(A_k R_\lambda) \bigcap_{k=0}^{q} D(B_k R_\lambda)$ имеют место соотношения

$$\sum_{k=0}^{q} \lambda^k A_k R_\lambda g = g, \tag{6}$$

$$\sum_{k=0}^{q} \lambda^k B_k R_\lambda g = 0;$$

2) При $h \in \bigcap_{k=0}^{q} D(R_\lambda A_k) \bigcap_{k=0}^{q} D(B_k)$,

$$\sum_{k=0}^{q} \lambda^k B_k h = 0,$$

$$R_\lambda \sum_{k=0}^{q} \lambda^k A_k h = h. \tag{7}$$

3) R_λ есть аналитическая функция по λ на всей комплексной плоскости λ, за исключением некоторого дискретного множества значений, являющихся полюсами R_λ (эти значения составляют дискретную часть спектра) и конечного количества линий, составляющих непрерывную часть спектра.

4) Существует последовательность простых замкнутых расширяющихся контуров Γ_N (отношение mes Γ_N/r_N полагается ограниченным,

где r_N — расстояние ближайшей точки Γ_N от начала координат λ плоскости), не проходящих через полюсы R_λ, таких, что при $\varphi \in \prod_{k=0}^{q} D(R_\lambda A_k)$ имеет место

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{N\to\infty} \int_{\Gamma_N} \lambda^s d_\lambda R_\lambda A_k \varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } s < q-1,\ k \leqslant q-1, \\ \varphi & \text{при } s = q-1,\ k = q, \end{cases} \tag{8}$$

где равенство выполняется в смысле метрики пространства X и интеграл по Γ_N понимается в смысле главного значения по Коши.

На основании предположений 1) — 4) легко убедиться в том, что формальное решение задачи (1) — (3) представляется формулой

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{N\to\infty} \int_{\Gamma_N} e^{\lambda t} R_\lambda \left\{ \sum_{k=1}^{q} A_k(\lambda^{k-1}\varphi_0 + \ldots + \varphi_{k-1}) + \int_0^t e^{-\lambda\tau} f(\tau)\, d\tau \right\} d\lambda. \tag{9}$$

Это значит, что если операторы A_k, B_k можно вдвинуть под знаки предела и интеграла по Γ_N, то функция, определяемая формулой (9), представляет собой решение задачи (1) — (3).

Необходимо отметить, что при отсутствии непрерывной части спектра формулы (8) и (9) можно записать, соответственно, в виде:

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_k \int_{c_k} \lambda^s R_\lambda A_k \varphi\, d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } s < q-1,\ k \leqslant q-1, \\ \varphi & \text{при } s = q-1,\ k = q, \end{cases} \tag{8'}$$

$$u(t) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \sum_k \int_{c_k} e^{\lambda t} R_\lambda \left\{ \sum_{k=0}^{q} A_k(\lambda^{k-1}\varphi_0 + \ldots + \varphi_{k-1}) + \int_0^t e^{-\lambda\tau} f(\tau)\, d\tau \right\} d\lambda, \tag{9'}$$

где c_k — замкнутый контур λ плоскости, содержащий внутри только один полюс λ_k подынтегральной функции, и сумма по k распространяется на все полюсы подынтегральной функции.

В этом случае легко доказывается, что в предположении справедливости формулы (8′), если $B_q = 0$ и если задача (1) — (3) имеет решение, оно представимо формулой (9′).

2. ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

Очевидно, обоснование формул (9), (9′) в основном сводится к доказательству, соответственно, формул (8), (8′). Поэтому в данном параграфе приводятся некоторые примеры спектральных задач, для которых эти формулы имеют место.

Случай смешанной задачи для системы линейных дифференциальных уравнений в одномерной области

Пусть, в частности, (1)—(3) есть смешанная задача для системы линейных дифференциальных уравнений в одномерной области рассматриваемых в гильбертовом пространстве L_2 $[a, b]$ функций с суммируемым квадратом на интервале $[a, b]$.

При этом рассмотрим случай, когда

$$A_k = \sum_{mk+l<p} A_{kl}(x)\frac{d^l}{dx^l},$$

$$B_k = \sum_{l=0}^{p-1}\left\{P_{kl}\frac{d^l}{dx^l}\bigg|_{x=a} + G_{kl}\frac{d^l}{dx^l}\bigg|_{x=b}\right\},$$

где

1) m — произвольное натуральное число, такое, что $p=m\cdot q$, $A_{kl}(x)$ — квадратичные матрицы, непрерывные и непрерывно дифференцируемые до 2-го порядка при $mk+l=p$, до 1-го порядка при $mk+l=p-1$, $f(x,t)$, φ_{q-1} непрерывны, $\varphi_k(x)$ $(k=0,\ldots,q-2)$ непрерывно дифференцируемы до порядка p

$$|A_{qp}(x)| \neq 0 \qquad \text{при } a\leqslant x\leqslant b, \quad 0\leqslant t\leqslant T.$$

2) Корни $\psi_1(x), \ldots, \psi_{np}(x)$ характеристического уравнения

$$|\Theta^p A_{0p}(x) + \Theta^{p-m}A_{q-1m}(x) + \ldots + \Theta^m A_{1(q-1)m}(x) - E| = 0$$

при $x\in[a, b]$ различны и отличны от нуля, как их аргументы так и аргументы их разностей не зависят от $x\in[a, b]$.

3) P_{kl}, Q_{kl} — постоянные квадратичные матрицы соответствующего размера, такие, что

$$\text{ранг}\left(\sum_{k=0}^{q} P_{k0}\lambda^{mk} \ldots \sum P_{kp-1}\lambda^{mk+p-1} \sum Q_{k0}\lambda^{mk} \ldots \sum Q_{kp-1}\lambda^{mk+p-1}\right) = np.$$

при достаточно больших λ.

4) Если $\Delta(\lambda)$ есть характеристический определитель функции Грина граничной задачи, получаемой из соответствующей спектральной задачи после замены $\lambda^{-l}\dfrac{d^l v}{dx^l} = w_l$, то, пользуясь асимптотическим представлением фундаментальной системы частных решений системы для w, $\Delta(\lambda)$ можно представить в виде

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n \cdot e^{\Sigma\lambda w_i'}\{[M_1]e^{m_1 c\lambda} + \ldots + [M_\sigma]e^{m_\sigma c\lambda}\},$$

где $m_1 < m_2 < \ldots < m_\sigma$, c — некоторое постоянное, $w_i = \displaystyle\int_a^b \psi_i(x)\,dx$, $Re\,\lambda w_i' \geqslant 0$, $[M_i]\to M_i$ при $\lambda\to\infty$, M_i — постоянные, n — некоторое натуральное число.

Предполагается, что $M_1, M_2 \neq 0$. При условиях 1)—4) методом доказательства теорем 7, 8 из [1] подтверждается отсутствие непрерывной части спектра и справедливость соответствующих формул (8′), (9′) для достаточно гладких функций $\varphi_k(x), f(x, t)$.

Случай самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве

Пусть H есть гильбертово пространство, A_0 — самосопряженный оператор, определенный в H $(A_0^* = A_0)$. Пусть $A_0 - \mu E$ (E — единичный оператор) имеет резольвенту R_μ.

Известно, что $(R_\mu f, g)$ для любой пары элементов $f, g \in H$ есть аналитическая функция при всех комплексных значениях μ.

Если C_N есть последовательность расширяющихся прямоугольников, не проходящих через точки дискретной части спектра оператора A_0, с вершинами в точках $-a_N + i\tau$, $a_N + i\tau$, $a_N - i\tau$, $-a_N - i\tau$ $(\lim\limits_{N\to\infty} a_N = +\infty)$, то при любом постоянном $\tau > 0$ согласно полноте спектральной функции $E(\Delta)$ оператора A_0 [2] при $f \in H$ имеет место формула

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{N\to\infty} \int\limits_{C_N} R_\mu f\, d_\mu = E(\Delta\infty) f = f, \tag{10}$$

где (10) выполняется в смысле сильной сходимости операторов.

Полагая в (10) $\mu = \lambda^2$ и принимая во внимание четность $R_{\lambda^2} f$, как функции от λ, получим формулу

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\Gamma_N} R_{\lambda^2} f \cdot \lambda^s\, d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при } s=0, \\ f & \text{при } s=1, \end{cases} \tag{11}$$

где Γ_N есть образ контура C_N при отображении $\mu = \lambda^2$.

Примечание. Очевидно, если оператор A_0 порождается граничной задачей для системы уравнений эллиптического типа в ограниченной области, то формула (18′) примет вид (8′) в силу отсутствия непрерывной части спектра.

Случай одной несамосопряженной задачи

Пусть имеем задачу нахождения решения уравнения

$$\Delta u + a_1(x_1)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + a_3(x_3)\frac{\partial u}{\partial x_3} + (a(x) - \lambda^2)\, u = f(x) \tag{12}$$

в ограниченной области D точек $x = (x_1, x_2, x_3)$ с границей S, удовлетворяющей условиям Ляпунова, при краевом условии

$$u(y) = 0, \quad y \in S. \tag{13}$$

Пусть c_n есть замкнутый контур λ плоскости, окружающий только один полюс λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ функции Грина $G(x, y, \lambda^2)$ задачи (12)—(13).

Задача (12)—(13) при всяком регулярном λ имеет единственное решение $u(x, \lambda)$, определяемое формулой

$$u(x, \lambda) = \int_D G(x, y, \lambda^2) f(y)\, dy. \tag{14}$$

Преобразуем задачу (12)—(13) путем замены

$$u = \varrho(x) \cdot v, \tag{15}$$

где

$$\varrho(x) = e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{3}\int\limits_{x_{0i}}^{x_i} a_i(\xi_i)\, d\xi_i},$$

$a_i(\xi_i)$ предполагается достаточно гладкими в параллелепипеде $x_{0i} \leqslant x \leqslant x_{1i}$ $(i = 1, 2, 3)$, содержащем в себе область D. При замене (15) задача (12)—(13) преобразуется в задачу

$$\Delta v + \left(a(x) - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{3} a_i^2(x) - \lambda^2 \right) v = \frac{f(x)}{\varrho(x)}, \tag{16}$$

$$v(y) = 0, \quad y \in S. \tag{17}$$

Обозначим через $G_1(x, y, \lambda^2)$ функцию Грина задачи (16)—(17). Как видно из (15) $G_1(x, y, \lambda^2)$ имеет те же полюсы, что и $G(x, y, \lambda^2)$. Очевидно, согласно (14) и (15) имеем

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_n \int_{C_n} \lambda^s d\lambda \int_D G(x, y, \lambda^2) f(y)\, dy =$$

$$= -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_n \int_{C_n} \lambda^s d\lambda \cdot \varrho(x) \cdot \int_D G_1(x, y, \lambda^2)\frac{f(y)}{\varrho(y)}\, dy =$$

$$= -\frac{\varrho(x)}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_n \int_{C_n} \lambda^s d\lambda \int_D G_1(x, y, \lambda^2)\frac{f(y)}{\varrho(y)}\, dy, \tag{18}$$

где сумма по n распространена на все полюсы $G(x, y, \lambda^2)$ и, следовательно, сумма в правой части (18) на все полюсы $G_1(x, y, \lambda^2)$.

В силу самосопряженности задачи (16)—(17) согласно формуле (11) при $f(x) \in L_2(D)$ будем иметь

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_n \int_{C_n} \lambda^s d\lambda \int_D G_1(x, y, \lambda^2)\frac{f(y)}{\varrho(y)}\, dy = \begin{cases} 0 & \text{при } s = 0, \\ \dfrac{f(x)}{\rho(x)} & \text{при } s = 1. \end{cases}$$

Подстановка этого в (18) дает

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_n \int_{C_N} \lambda^s d\lambda \cdot \int_D G(x, y, \lambda^2) f(y)\, dy = \begin{cases} 0 & \text{при } s = 0\,^* \\ f(x) & \text{при } s = 1. \end{cases}$$

* Эта формула справедлива также для первой и второй краевых задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Л. Расулов. Исследование вычетного метода решения некоторых смешанных задач для дифференциальных уравнений, Мат. сб., т. 30 (72), 3 (1952).

2. А. И. Плеснер. Спектральная теория операторов, I, УМН, вып. IX, (1941).

Работа поступила в феврале 1957 г.