ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
Выпуск I 1958

М. И. РОЗОВСКИЙ

ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЯ КАК СЛОЖНЫЙ ПРОЦЕСС ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВО ВРЕМЕНИ

Процесс деформирования упруго-наследственной среды во времени будем называть сложным, если он не может быть описан с помощью конечного числа параметров, зависящих только от времени.

Это будет иметь место в том случае, когда известное решение соответствующей упруго-мгновенной задачи не может быть представлено в виде суммы произведений координатных множителей на рациональные функции упругих постоянных.

При решении упруго-наследственных задач, соответствующих последнему случаю, можно воспользоваться способом В. Вольтерра [1], развитым Ю. Н. Работновым [2] и основанным на дедуктивном применении принципа Вольтерра, требующим введения специальной трансцендентной функции, зависящей от координат и времени.

В настоящей статье рассматривается задача о продольном изгибе стержня. как при линейной исходной физической зависимости типа Вольтерра, так и нелинейной типа Работнова [3].

Изменение продольного изгиба стержня во времени является, согласно данному выше определению, сложным процессом деформирования.

Символический способ, который будет здесь применен, основан на индуктивном приложении принципа Вольтерра и в отличие от упомянутого выше способа, не требует предварительного введения специальной функции.

Заметим, что рассматриваемая здесь задача и ей подобные могут быть решены также способом двумерных интегральных уравнений.

По эффективности данный и символический методы равноценны.

I. СЛУЧАЙ ЛИНЕЙНОЙ ИСХОДНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

1. Рассмотрим процесс изменения во времени продольного изгиба прямоугольного стержня длины l, нагруженного в осевом направлении сжимающей силой P.

Основное уравнение изгиба стержня будет

$$B\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\int_0^t \Phi(t,\tau)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}d\tau\right]=M(x,t), \tag{1,1}$$

где $y(x, t)$ — прогиб стержня, $B=EI$, I — наименьший момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести, E — мгновенный модуль упругости, $M(t, x)$ — изгибающий момент, $\Phi(t, \tau)$ — приведенный коэффициент релаксации.

Вывод формулы (1,1) и выражение $\Phi(t, \tau)$ через исходные коэффициенты релаксации Вольтерра приводятся в [4].

Запишем уравнение (1,1) в символической форме

$$\overset{*}{B}\frac{d^2y}{dx^2}=M, \tag{1,2}$$

где $\overset{*}{B}=B(1-\overset{*}{\Phi})$; $\overset{*}{\Phi}\nu$ — интегральный оператор, т. е.

$$\overset{*}{\Phi}\nu=\nu(t)-\int\limits_0^t \Phi(t, \tau)\,\nu(\tau)\,d\tau .$$

Для всех основных случаев: 1) нижний конец стержня зажат, верхний оперт, 2) стержень зажат нижним концом, верхний конец свободен, 3) нижний конец стержня зажат, верхний может перемещаться, но не может поворачиваться, 4) оба конца зажаты, 5) оба конца оперты.

Решение уравнения (1,2) имеет вид

$$y=c_1\cos\overset{*}{q}x+c_2\frac{1}{\overset{*}{q}}\sin\overset{*}{q}x+A_1x+B_1, \tag{1,3}$$

где $\overset{*}{q}=\sqrt{P/\overset{*}{B}}$.

Постоянные c_1, c_2, A_1 и B_1 зависят только от указанных выше видов условий на концах стержня.

Таким образом, основным в задаче является расшифровка символической записи (1,3).

Для определенности рассмотрим, например, первый случай.

Будем иметь

$$y=\frac{Q}{P}\left(l\cos\overset{*}{q}x-\frac{1}{\overset{*}{q}}\sin\overset{*}{q}x+x-l\right), \tag{1,4}$$

где Q — горизонтальная реакция опоры на верхний конец стержня.

Опора может быть вполне жесткой или ее механические свойства будут изменяться во времени. В последнем случае Q является функцией времени.

Модуль упругости E может зависеть от времени, последнее будет иметь место при учете старения материала. Это нисколько не усложнит дальнейшее рассмотрение вопроса. Следует только при этом нижний предел интегрирования — нуль заменить $t_0 \neq 0$ — моментом приложения нагрузки, совпадающим с возрастом материала, поскольку ядро уравнения (1,1) позволяет описывать процессы деформирования с учетом старения материала.

Представим (1,4) в следующем виде

$$y=\frac{Q}{P}\left(l\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\overset{*}{q}x)^{2n-2}}{(2n-2)!}-\frac{1}{\overset{*}{q}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\overset{*}{q}x)^{2n-1}}{(2n-1)!}+x-l\right),$$

откуда

$$y=\frac{Q}{P}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\overset{*}{q}x)^{2n}[x-(2n+1)l]}{(2n+1)!}. \tag{1,5}$$

Так как $\overset{*}{q}{}^2=q^2(1-\overset{*}{\Phi})^{-1}$, то

$$y=\frac{Q}{P}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(qx)^{2n}[x-(2n+1)l]}{(2n+1)!}\cdot\frac{1}{(1-\overset{*}{\Phi})^n}. \tag{1,6}$$

Разложение

$$\frac{1}{(1-\overset{*}{\Phi})^n}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{m!}\overset{*}{\Phi}{}^m$$

позволяет переписать (1,6) так

$$y=\frac{Q}{P}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(qx)^{2n}[x-(2n+1)l]}{(2n+1)!}\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\ .\ .\ .\ (n+m-1)}{m!}\overset{*}{\Phi}{}^m. \tag{1,7}$$

Введем обозначения

$$F_0=1,$$

$$F_1(t)=\int_0^t\Phi(t,\tau)\,d\tau=\overset{*}{\Phi}\cdot 1, \tag{1,8}$$

$$.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$F_n(t)=\int_0^t\Phi(t,\varepsilon_1)\,d\tau_1\int_0^{\tau_1}\Phi(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_2\dots\int_0^{\tau_{n-1}}\Phi(\tau_{n-1},\tau_n)\,d\tau_n=\overset{*}{\Phi}{}^n\cdot 1.$$

$$\varphi_n(x)=\frac{x^{2n}[x-(2n+1)l]}{(2n+1)!}. \tag{1,9}$$

Пользуясь (1,8) и (1,9) и принимая во внимание, что $q^2={}^P/_B$, приведем (1,7) к виду

$$y=\frac{Q}{B}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}q^{2n-2}\varphi_n(x)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n(n+1)\ .\ .\ .\ (n+m-1)}{m!}F_m(t)$$

или

$$y=\frac{Q}{B}\left[\varphi_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{m-1}\binom{n}{m}q^{2m}\varphi_{m+1}(x)F_{n-m}(t)\right]. \tag{1,10}$$

Легко проверить, что $y(x, t)$, определяемое соотношением (1,10), действительно удовлетворяет уравнению (1,1) при

$$M = -Py - Q(l - x). \tag{1,11}$$

Ряд, фигурирующий в (1,10), сходится абсолютно и равномерно при условии ограниченности ядра уравнения (1,1), что будет доказано в пункте 2.

2. Эта же задача может быть решена также методом приведения к двумерному интегральному уравнению.

Положим

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = u(x, t). \tag{1,12}$$

Так как $y(0, t) = 0$ и $y'(0, t) = 0$, то из (1,12) следует

$$y = \int_0^x (x - \xi)\, u(\xi)\, d\xi. \tag{1,13}$$

Подставим (1,12) и (1,13) в уравнение (1,1), которое с учетом (1,11) запишется так

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \int_0^t \Phi(t, \tau)\, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, d\tau - q^2 y + \frac{Q}{B}(l - x),$$

получим двумерное интегральное уравнение

$$u(x, t) = \int_0^t \Phi(t, \tau)\, u(x, \tau)\, d\tau - q^2 \int_0^x (x - \xi)\, u(\xi, t)\, d\xi - \frac{Q}{B}(l - x). \tag{1,14}$$

Решение уравнения (1,14) будем искать в виде ряда

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t). \tag{1,15}$$

Тогда получим рекуррентную формулу

$$u_n(x, t) = -q^2 \int_0^x (x - \xi)\, u_{n-1}(\xi, t)\, d\xi + \int_0^t \Phi(t, \tau)\, u_{n-1}(x, \tau)\, d\tau, \tag{1,16}$$

причем $u_0 = \dfrac{Q(x - l)}{B}$.

Пользуясь обозначениями (1,8) и (1,9), найдем:

$$u_n(x, t) = \frac{Q}{B} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} q^{2m} \varphi_m(x)\, F_{n-m}(t). \tag{1,17}$$

Покажем теперь, что ряд (1,15) сходится абсолютно и равномерно.

Из (1,9), вернее из первоначального представления для $\varphi_n(x)$ в виде интегралов, являющихся прямым следствием рекуррентной формулы (1,16), получим

$$|\varphi_n(x)| \leqslant l^{n+1} \frac{x^n}{n!}. \tag{1,18}$$

Пусть $|\Phi(t, \tau)| < A$ для всех конечных значений t и τ, где A — некоторая постоянная.

Тогда из (1,8) непосредственно следует

$$|F_n(t)| < \frac{(At)^n}{n!}. \tag{1,19}$$

Пусть $\max (q^2, x, t) = z$.

Тогда, принимая во внимание (1,18) и (1,19), получим

$$|u_n(x, t)| < l^{n+1} \frac{z^n}{n!}. \tag{1,20}$$

Таким образом, ряд (1,15) сходится абсолютно и равномерно.

Решение уравнения (1,14) будет

$$u(x, t) = \frac{Q}{B}\left[\varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} q^{2m} \varphi_m(x) F_{n-m}(t)\right]. \tag{1,21}$$

Подставляя (1,21) в (1,13), определим

$$y = \frac{Q}{B}\left[\varphi_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} q^{2m} \varphi_{m+1}(x) F_{n-m}(t)\right]. \tag{1,22}$$

Формула (1,22) полностью совпадает с формулой (1,10).

Полагая в (1,10) $x = l$ и учитывая, что $y(l, t) = 0$ и $q^2 = \frac{P}{B}$, получим уравнение для определения критической силы

$$\varphi_1(l) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \binom{n}{m} \left(\frac{P}{B}\right)^m \varphi_{m+1}(l) F_{n-m}(t) = 0.$$

3. Задача, решенная выше, может быть решена также путем приведения интегро-дифференциального уравнения (1,1) к двумерному интегральному уравнению, отличному от (1,14), причем такого вида, который позволит найти его резольвенту по известному правилу. Однако на этом здесь останавливаться не будем.

2. СЛУЧАЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ИСХОДНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТИПА РАБОТНОВА

1. Если задача существенно нелинейна в смысле Работнова, то интегро-дифференциальное уравнение продольного изгиба стержня будет иметь вид

$$f\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) - \int_0^t \Phi(t, \tau) f\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) d\tau = M(x, t). \tag{2,1}$$

Формула (2,1) непосредственно вытекает из уравнения Работнова [3]

$$M(x, t) + \int_0^t K(t, \tau) M(x, \tau)\, d\tau = 2bh^2 F\left(\frac{h}{R}\right), \tag{2,2}$$

$$F(z) = \frac{1}{z^2}\int_0^z \varphi(s)\, ds, \quad \varphi(\varepsilon) = \sigma + \int_0^t K(t, \tau)\, \sigma(\tau)\, d\tau,$$

b — ширина, $2h$ — высота сечения стержня.

Полагая в (2,2) $\frac{1}{R} \approx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ и $f\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = 2bh^2 F\left(h\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$, получим

$$M + \int_0^t K(t, \tau) M(\tau)\, d\tau = f\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right). \tag{2,3}$$

Решая (2,3) относительно $M(x, t)$, получим (2,1).

Здесь $\Phi(t, \tau)$ является резольвентной ядра $K(t, \tau)$ — коэффициента последействия.

Пусть

$$M(x, t) = -Py - Q(l - x). \tag{2,4}$$

Значение величин P, Q и l такое же, как и в § 1.

Полагая в уравнении (2,1) $\partial^2 y/\partial x^2 = u(x, t)$ и учитывая, что

$$y(x, t) = \int_0^x (x - \xi)\, u(\xi, t)\, d\xi, \tag{2,5}$$

а также принимая во внимание (2,4), получим

$$f(u) - \int_0^t \Phi(t, \tau) f(u)\, d\tau + P\int_0^x (x - \xi)\, u(\xi)\, d\xi + Q(l - x) = 0. \tag{2,6}$$

В дальнейшем будем считать, что $f(u)$ удовлетворяет условию

$$\frac{f(u)}{u} > \frac{df}{du} > 0.$$

Поэтому, положив $f(u) = z(x, t)$, получим $u = \varphi(z)$, где $\varphi(\zeta)$ — функция, обратная $f(\zeta)$.

На основании последнего, уравнение (2,6) обращается в следующее

$$z(x, t) - \int_0^t \Phi(t, \tau)\, z(x, \tau)\, d\tau + P\int_0^x (x - \xi)\, \varphi(z)\, d\xi + Q(l - x) = 0$$

или

$$z(x, t) = Q(x-l)\left[1+\int_0^t K(t, \tau)\, d\tau\right] -$$

$$-P\int_0^x (x-\xi)\,\varphi(z)\, d\xi - P\int_0^t K(t, \tau)\, d\tau \int_0^x (x-\xi)\,\varphi(z)\, d\xi, \qquad (2,7)$$

где $K(t, \tau)$ — резольвента ядра $\Phi(t, \tau)$.

В символической форме уравнение (2,7) может быть записано следующим образом

$$z = (1+\overset{*}{K})\left[Q(x-l) - P\int_0^x (x-\xi)\,\varphi(z)\, d\xi\right],$$

где оператор

$$\overset{*}{K}W = \int_0^t K(t, \tau)\, W(\tau)\, d\tau. \qquad (2,8)$$

Уравнение (2,8) по отношению к $z(x, t)$ является интегральным, поскольку $(1+\overset{*}{K})$ рассматривается пока как постоянный множитель.

Нелинейное интегральное уравнение (2,8) может быть решено методом последовательных приближений.

Будем иметь

$$z_n(x, t) = (1+\overset{*}{K})\left[Q(x-l) - P\int_0^x (x-\xi)\,\varphi(z_{n-1})\, d\xi\right], \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

причем $z_0 = (1+\overset{*}{K})\,Q(x-l)$.

Заметим, что при фактическом нахождении написанных выше последовательных приближений последовательные действия временного оператора сводятся к определению обыкновенных квадратур.

Последнее объясняется структурой нулевого приближения

$$z_0(x, t) = Q(x-l)\,[1+F(t)],$$

где

$$F(t) = \int_0^t K(t, \tau)\, d\tau.$$

Так, например, первое приближение будет

$$z_1(x, t) = z_0(x, t) -$$

$$-P\int_0^x (x-\xi)\left\{\varphi[z_0(\xi, t)] + \int_0^t K(t, \tau)\,\varphi[z_0(\xi, \tau)]\, d\tau\right\} d\xi.$$

Если предположить, что

$$\varphi\{Q(x-l)[1+F(t)]\} = \chi\Theta, \qquad (2,9)$$

где $\chi = \chi[Q(x-l)]$, $\Theta = \Theta[1+F(t)]$, то первое приближение примет вид

$$z_1(x, t) = \chi\Theta - P\chi_1(1+\Theta_1), \tag{2,10}$$

$$\chi_1 = \int_0^x (x-\xi)\,\chi[Q(\xi - l)]\,d\xi, \quad \Theta_1 = \int_0^t K(t,\tau)\,\Theta[1+F(\tau)]\,d\tau.$$

Такое представление $z_1(x, t)$ возможно, например, при $\varphi(\zeta) = a\zeta^{\alpha}$.

Если принять, что: 1) $A = \lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t K(t,\tau)\,d\tau$, в частности, при $K(t,\tau) = K(t-\tau)$, $A = \int_0^{\infty} K(s)\,ds$, 2) $L = \max\left|\frac{df}{dz}\right|$ в интервале $(0, l)$, а также учесть, что $\varphi(z_0) = \varphi[(1+\overset{*}{K})\,Q(x-l)] < \varphi_0$, где $\varphi_0 = \varphi[(1+A)Ql]$, то, как нетрудно установить, имеет место следующая оценка

$$|z_n - z_{n-1}| < \frac{\varphi_0[l\sqrt{LP(1+A)}]^{2n}}{L\,(2n)!}. \tag{2,11}$$

При доказательстве существенное значение имеет условие Липшица, которое, при принятом вначале предположении о характере кривой $f(z)$, действительно выполняется в интервале $(0, l)$.

Неравенство (2,11) обеспечивает равномерное стремление z_n к z при $n \to \infty$ в интервале $0 < x < l_1 \leqslant l$.

Таким образом, $z = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$. Это решение в рассматриваемом интервале единственное. На доказательстве последнего останавливаться не будем, так как оно мало чем отличается от классического.

Прогиб определяется формулой

$$y(x, t) = \lim \int_0^x (x-\xi)\,\varphi[z_n(\xi, t)]\,d\xi,$$

поскольку $\varphi(\zeta)$ — функция непрерывная в интервале $(0, l)$.

Следует заметить, что сходимость последовательных приближений гарантируется в промежутке, меньшем, чем полная длина стержня. Поэтому пользоваться полученной формулой, определяющей прогиб, для определения критической силы в общем случае, без предварительного «продолжения решения» до границы изменения x, т. е. до l, нельзя.

2. В некоторых случаях критическая сила может быть найдена без привлечения формулы, определяющей прогиб стержня, полученной в результате решения соответствующего нелинейного интегро-дифференциального уравнения.

Принципиально это может быть выполнено в результате решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$(1-\overset{*}{\Phi})\,f\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = M, \tag{2,12}$$

представляющего собой символическую запись исходного интегро-дифференциального уравнения (2,1).

Уравнение (2,12) решается элементарно в следующих случаях: 1) когда стержень зажат нижним концом, верхний свободен и 2) когда нижний конец стержня зажат, верхний может перемещаться, но не может поворачиваться.

В частности, для первого из них уравнение (2,12) запишется так

$$(1-\overset{*}{\Phi})f\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+P(y-f_0)=0\,, \qquad (2,13)$$

где f_0 — стрелка прогиба верхнего свободного конца стержня.

При $f\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=a\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^\alpha$ и учете граничных условий: при $x=0$, $y=0$, $dy/dx=0$ и при $x=l$, $y=f_0$, из (2,13) следует

$$P_{kp}=\frac{F^{2\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^\alpha a}{2^\alpha l^{2\alpha}}\left[1-\int^t\Phi(t,\tau)\,d\tau\right], \qquad (2,14)$$

где

$$F=\int_0^f\left[f_0^{\frac{1}{\alpha}+1}-(f_0-y)^{\frac{1}{\alpha}-1}\right]^{-\frac{1}{2}}dy.$$

При $\alpha=1$ и $a=B$ получаем значение критической силы в случае линейной исходной зависимости между напряжением и деформацией, т. е.

$$P_{kp}=\left(\frac{\pi B}{2l}\right)^2\left[1-\int_0^t\Phi(t,\tau)\,d\tau\right].$$

Для конкретности можно взять

$$\Phi(t,\tau)=\ni_{\alpha_1}(-\beta;t-\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n\,(t-\tau)^{n(1+\alpha_1)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha_1)]},$$

где $\alpha_1>-1$, β — положительная постоянная, размерность которой обратна размерности времени.

Функция $\ni_{\alpha_1}(-\beta;t-\tau)$ представляет собой ядро релаксации Работнова [2].

В этом случае $\psi(t)=1-\int_0^t\Phi(t,\tau)\,d\tau$ может быть табулирована.

В остальных трех из пяти случаев, указанных в пункте 1 § 1, определение P_{kp} путем применения уравнения (2,12) не проще, чем при использовании результатов, полученных в пункте 1 настоящего параграфа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V. Leçons sur les fonctions de lignes, Paris, 1913.
2. Работнов Ю. Н. ПММ, 1948, т. XII, вып. I.
3. Работнов Ю. Н. Вестник Московского Университета, 1948, 10.
4. Розовский М. И. Известия АН СССР, ОТН, 1948, № 5.

Работа поступила в декабре 1956 г.