Теоретична і прикладна МАТЕМАТИКА

Випуск II

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1963

МВССО УРСР
ЛЬВІВСЬКИЙ ОРДЕНА ЛЕНІНА ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ім. Ів. ФРАНКА

ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

ВИПУСК II

ВИДАВНИЦТВО ЛЬВІВСЬКОГО УНІВЕРСИТЕТУ
1963

51
Т33

Друкується за рішенням Редакційно-видавничої ради
Львівського університету

С. В. ДЕНИСКО

ПРО ДЕЯКІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ПРЯМОЛІНІЙНИХ КОНГРУЕНЦІЙ

1. Розглянемо згинання конгруенції C нормалей поверхні Φ, яке здійснюється шляхом згинання поверхні Φ. Причому конгруенція C містить в собі такі лінійчаті поверхні Σ, що при згинанні конгруенції C площі будь-яких областей поверхонь Σ зберігаються.

Нехай поверхня Φ згинається в поверхню $\overset{*}{\Phi}$. Тоді конгруенція C буде згинатись в конгруенцію нормалей поверхні $\overset{*}{\Phi}$.

Віднесемо обидві поверхні Φ і $\overset{*}{\Phi}$ до спільних координат u^1, u^2 так, що точка (u^1, u^2) поверхні Φ накладатиметься на точку з тими ж координатами (u^1, u^2) поверхні $\overset{*}{\Phi}$.

Для компонент основних тензорів поверхонь Φ і $\overset{*}{\Phi}$ введемо позначення. Компоненти першого, другого і третього основних тензорів поверхні Φ позначимо відповідно через g_{ij}, π_{ij}, ν_{ij}. Очевидно, при нашому виборі координат u^1, u^2 величини g_{ij} є також компонентами першого основного тензора поверхні $\overset{*}{\Phi}$, компоненти другого і третього основних тензорів цієї поверхні позначимо відповідно через $\overset{*}{\pi}_{ij}$ і $\overset{*}{\nu}_{ij}$.

Лінії перетину поверхонь Σ з поверхнею Φ будемо називати для зручності лініями α.

Легко переконатись, що диференціали криволінійних координат при зміщенні вздовж лінії α задовольняють рівняння

$$\left.\begin{aligned}(\pi_{ij}-\overset{*}{\pi}_{ij})\,du^i\,du^j=0,\\(\nu_{ij}-\overset{*}{\nu}_{ij})\,du^i\,du^j=0.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Звідси видно, що існує не більше ніж два однопараметричні сімейства ліній α, а отже — не більше ніж два однопараметричні сімейства поверхонь Σ.

Надалі нам будуть потрібні такі відомі формули:

$$\left.\begin{aligned}\nu_{ij}-2H\pi_{ij}+Kg_{ij}=0,\\\overset{*}{\nu}_{ij}-2\overset{*}{H}\overset{*}{\pi}_{ij}+Kg_{ij}=0,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

$$H=\pi_{ij}\,g^{ij},\ \overset{*}{H}=\overset{*}{\pi}_{ij}\,g^{ij},\tag{3}$$

$$\pi_{11}\,\pi_{22}-\pi_{12}^2=\overset{*}{\pi}_{11}\,\overset{*}{\pi}_{22}-\overset{*}{\pi}{}_{12}^2,\tag{4}$$

де H і $\overset{*}{H}$ — середні кривини поверхонь Φ і $\overset{*}{\Phi}$, а K — повна кривина кожної з цих поверхонь.

Будемо вважати, очевидно, це завжди можливо, що на обох поверхнях координатна сітка ортогональна, причому на поверхні Φ сімейство ліній $u^2 = \text{const}$ складається з ліній α. Тоді

$$g_{12} = g^{12} = 0 \tag{5}$$

і в силу (1)

$$\pi_{11} = \overset{*}{\pi}_{11}, \; \nu_{11} = \overset{*}{\nu}_{11}. \tag{6}$$

Якщо $\pi_{11} = 0$, то згідно з (6_1) і $\overset{*}{\pi}_{11} = 0$.

Отже, при згинанні поверхні Φ асимптотичні лінії α перетворюються в асимптотичні лінії.

Навпаки, якщо поверхня Φ згинається в поверхню $\overset{*}{\Phi}$ з збереженням одного сімейства асимптотичних ліній, то це сімейство складається з ліній α.

Дійсно, нехай обидві поверхні даним згинанням віднесені до загальних координат u^1, u^2 так, що сімейство ліній $u^2 = \text{const}$ на кожній з цих поверхонь складається з асимптотичних ліній. Тоді

$$\pi_{11} = \overset{*}{\pi}_{11} = 0. \tag{7}$$

Тому з (2) матимемо

$$\nu_{11} = \overset{*}{\nu}_{11}. \tag{8}$$

Згідно з (7) і (8), з (1) виходить, що на поверхні Φ сімейство ліній $u^2 = \text{const}$ утворене лініями α, що й треба було довести.

Нехай тепер лінії $u^2 = \text{const}$ не є асимптотичні. Тоді $\pi_{11} \neq 0$, а тому згідно з (6) і рівностей (2) матимемо

$$H = \overset{*}{H}. \tag{9}$$

Звідси, враховуючи (3), (5) і (6_1), дістанемо

$$\pi_{22} = \overset{*}{\pi}_{22}. \tag{10}$$

В силу (6_1) і (10) з рівності (4) маємо

$$\pi_{12} = -\overset{*}{\pi}_{12}. \tag{11}$$

Беручи до уваги рівності (5), (9), (10) і (11), з (2) дістаємо

$$\nu_{22} = \overset{*}{\nu}_{22}, \; \nu_{12} = -\overset{*}{\nu}_{12}. \tag{12}$$

Згідно з (6), (10), (11) і (12), з (1) виходить, що координатна сітка складається з ліній α.

Таким чином, якщо на поверхні Φ одне сімейство ліній α не є сімейством асимптотичних ліній, то на цій поверхні існує ще й друге сімейство ліній α, ортогональне до першого.

Сітка, диференціальне рівняння якої має вигляд (1_1), називається характеристичною [1]. Відомо [1], що ортогональна характеристична сітка — ізотермічна.

Отже, сітка, що складається з ліній α, — характеристична і ізотермічна.

Тому надалі будемо вважати, що u^1, u^2 — ізотермічні координати.

В силу (6), (10) і (11) з рівнянь Петерсона — Кодацці виходить, що в ізотермічних координатах u^1, u^2

$$\pi_{12} = \text{const}.$$

Знайдемо коефіцієнти першої і другої квадратичних форм поверхні Ф для того випадку, коли одне з двох сімейств ліній α утворене асимптотичними лініями.

Нехай сімейство ліній $u^1 = \text{const}$ складається з асимптотичних ліній.

Раніше було встановлено, що асимптотичні лінії α при згинанні поверхні Ф перетворюються в асимптотичні лінії. Але, як відомо [2], інваріантне при згинанні поверхні сімейство асимптотичних ліній складається з прямих. Тому лінії $u^1 = \text{const}$ є прямі. Якщо так, то

$$\Gamma^1_{22} = 0.$$

Звідси, враховуючи, що $g_{12} = 0$, дістанемо

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = 0.$$

Отже,

$$g_{22} = B^2(u^2).$$

Оскільки $g_{11} = g_{22}$, то перша квадратична форма поверхні Ф набирає вигляду

$$ds^2 = B^2(u^2)[(du^1)^2 + (du^2)^2].$$

Але це є перша квадратична форма поверхні обертання.

Таким чином, якщо на поверхні Ф одне з двох сімейств ліній α складається з асимптотичних ліній, то поверхню Ф так можна накласти на поверхню обертання, що асимптотичні лінії α перетворяться в меридіани.

Оскільки на поверхні Ф лінії $u^1 = \text{const}$ — асимптотичні, то $\pi_{22} = 0$. Тому з рівняння Гаусса виходить, що

$$B^2 \frac{d^2 B^2}{(du^2)^2} - \left(\frac{dB^2}{du^2}\right)^2 - 2\pi_{12}^2 B^2 = 0.$$

Звідси, враховуючи, що $\pi_{12} = \text{const}$, дістанемо

$$4B^2 = \left(\frac{4\pi_{12}^2}{c_1 c_2} e^{-\frac{u^2\sqrt{c_1}}{2}} + c_2 e^{\frac{u^2\sqrt{c_1}}{2}}\right)^2,$$

де c_1, c_2 — сталі інтегрування.

Отже, ми знайшли коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні Ф.

Серед коефіцієнтів другої квадратичної форми поверхні Ф залишається невідомим тільки коефіцієнт π_{11}. Щоб знайти його, скористуємось рівняннями Петерсона — Кодацці. Одне з цих рівнянь перетворюється в тотожність, а друге набирає вигляду

$$2B^2 \frac{\partial \pi_{11}}{\partial u^2} - \pi_{11} \frac{dB^2}{du^2} = 0,$$

звідки знаходимо

$$\pi_{11} = F(u^1) B^2(u^2),$$

де $F(u^1)$ — довільна функція.

2. Нехай одиничний вектор a^i визначає векторне поле на поверхні Ψ. Нехай деяка лінійчата поверхня S конгруенції дотичних до векторних ліній поля a^i дотикається поверхні Ψ вздовж кривої Г. Кожну прямолінійну твірну поверхні S повернемо на кут π навколо точки її дотику з поверхнею Ψ. При цьому поверхня S буде перетворюватись сама в себе. Нехай дане перетворення поверхні S зберігає площу будь-якої її області. Криву Г будемо називати лінією β.

Покажемо, що тільки векторні лінії поля a^i і його трансверсалі є лінії β.

Легко переконатись, що диференціальне рівняння ліній β має вигляд

$$\nabla_l a^k g_{kj} du^l du^j = 0,$$

де g_{ij} — метричний тензор поверхні Ψ. Але відомо [3], що

$$\nabla_l a^k = \alpha_l \tilde{a}^k,$$

де α_l і $\tilde{a}^k$ — відповідно трансверсальний і доповняльний вектори поля a^i. Тому диференціальне рівняння ліній β можна переписати таким чином:

$$(\alpha_i du^i)(\tilde{a}_j du^j) = 0. \tag{13}$$

Відомо [3], що рівняння векторних ліній і трансверсалей поля a^i мають відповідно вигляд

$$\tilde{a}_i du^i = 0,$$

$$\alpha_i du^i = 0.$$

Завдяки цьому з (13) виходить, що тільки векторні лінії поля a^i і його трансверсалі є лінії β.

Наше твердження доведене.

ЛІТЕРАТУРА

1. A. Voss. Ueber isometrischen Flächen, Math. Ann., **46** (1895).
2. С. П. Фиников. Теория поверхностей. М.— Л., 1934.
3. А. П. Норден. Теория поверхностей. М., 1956.

ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

С. В. ДЕНИСКО

ПРО ЕКВІАРЕАЛЬНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХОНЬ, КОЖНЕ З ЯКИХ ЗДІЙСНЮЄТЬСЯ АБО З ДОПОМОГОЮ В'ЯЗКИ ПРЯМИХ, АБО З ДОПОМОГОЮ НОРМАЛЕЙ ДЕЯКОЇ ПОВЕРХНІ

Відображення однієї поверхні на другу, при якому зберігається відношення площ, називається еквіареальним. Якщо при цьому зберігатимуться ще й площі, а не тільки їх відношення, то таке еквіареальне відображення будемо називати еквіалентним.

1. Еквіареальне відображення замкненої поверхні Φ на замкнену поверхню $\overset{*}{\Phi}$ з допомогою в'язки P паралельних прямих може бути тільки еквіалентним. [1]

Справді, якщо $r(A)$ — радіус-вектор точки A поверхні Φ, то точка $\overset{*}{A}$ поверхні $\overset{*}{\Phi}$, відповідна до точки A, визначатиметься радіусом-вектором

$$\overset{*}{\bar{r}}(\overset{*}{A}) = \bar{r}(A) + \lambda(A)\,\bar{k},$$

де $\bar{k}$ — сталий вектор, паралельний прямим в'язки P.

Оскільки поверхні Φ і $\overset{*}{\Phi}$ замкнені, то функція $\lambda(A)$ на поверхні Φ в деякій точці A_0 досягає екстремального значення.

Нехай нашим відображенням окіл точки A_0 на поверхні Φ і відповідний йому окіл точки $\overset{*}{A}_0$ на поверхні $\overset{*}{\Phi}$ віднесені до спільних координат u^1, u^2. Тоді в точці A_0 похідні $\frac{\partial\lambda}{\partial u^1}$ і $\frac{\partial\lambda}{\partial u^2}$ повинні дорівнювати нулеві, а тому

$$g_{ij}(A_0) = \overset{*}{g}_{ij}(\overset{*}{A}_0),$$

де g_{ij} і $\overset{*}{g}_{ij}$ — компоненти метричних тензорів поверхонь Φ і $\overset{*}{\Phi}$. Це можливо тільки в тому випадку, коли еквіареальне відображення поверхні Φ на поверхню $\overset{*}{\Phi}$ з допомогою прямих в'язки P еквіалентне.

---

[1] Поверхня Φ відображається на всю поверхню $\overset{*}{\Phi}$, а не на її частину. Крім цього, вважаємо, що кожна з поверхонь Φ і $\overset{*}{\Phi}$ не має особливих точок, за винятком, можливо, точок ліній самоперетину або точок ліній самостику. Причому в околі особливої точки відображаються тільки регулярні прості куски поверхні, що проходять через цю точку.

Ці зауваження стосуються всіх інших пунктів нашої статті, в яких йтиме мова про відображення замкнених поверхонь.

Отже, наше твердження доведене.

Чи для кожної замкненої поверхні існує якась інша замкнена поверхня, така, щоб одна з цих поверхонь еквіареально відображалась на другу з допомогою в'язки паралельних прямих?

Виявляється, що так. Навіть більш того, для кожної замкненої поверхні можна вказати таку замкнену поверхню, що одна з цих поверхонь ізометрично відображатиметься на другу з допомогою в'язки паралельних прямих.

Справді, нехай $\bar{r}(A)$ — радіус-вектор довільної точки A даної замкненої поверхні Ψ. Візьмемо іншу поверхню $\overset{*}{\Psi}$, векторне рівняння якої записується у вигляді

$$\bar{\overset{*}{r}}(\overset{*}{A}) = \bar{r}(A) + \lambda(A)\bar{m},$$

де $\bar{m}$ — одиничний вектор сталого напрямку, а $\lambda(A)$ — взята із знаком мінус подвоєна проекція вектора $\bar{r}(A)$ на вісь вектора $\bar{m}$.

Поверхня Ψ ізометрично відображатиметься на поверхню $\overset{*}{\Psi}$ з допомогою в'язки прямих, паралельних вектору $\bar{m}$.

Крім цього, очевидно, поверхня $\overset{*}{\Psi}$ замкнена, а тому має місце наше твердження.

2. Нехай замкнена поверхня Φ еквіареально відображається на замкнену поверхню $\overset{*}{\Phi}$ з допомогою в'язки прямих з центром S.

Тоді поверхні Φ і $\overset{*}{\Phi}$ повинні бути подібними і подібно розміщеними відносно точки S.

Для доведення візьмемо за початок координат точку S. Тоді, якщо $\bar{r}(A)$ — радіус-вектор точки A поверхні Φ, то точка $\overset{*}{A}$ поверхні $\overset{*}{\Phi}$, відповідна до точки A, матиме радіус-вектор

$$\bar{\overset{*}{r}}(\overset{*}{A}) = \lambda(A)\bar{r}(A).$$

Оскільки поверхні Φ і $\overset{*}{\Phi}$ замкнені і точка S не є конічною для жодної з цих поверхонь, то функція $\lambda(A)$ досягає на поверхні Φ свого найбільшого і найменшого значення. Покажемо, що ці значення рівні, тобто що функція $\lambda(A)$ стала.

Міркуючи так само, як і в попередньому пункті, дістанемо, що в точці A_0, в якій $\lambda(A)$ досягає екстремуму,

$$\lambda(A_0) = c,$$

або

$$\lambda(A_0) = -c,$$

де c^2 — коефіцієнт спотворення площ.

Але найбільше значення функції $\lambda(A)$ і її найменше значення не можуть бути різних знаків, бо інакше центр в'язки був би конічною точкою поверхні $\overset{*}{\Phi}$.

Таким чином, функція $\lambda(A)$ стала і дорівнює c або $-c$.

Це говорить про те, що поверхні Φ і $\overset{*}{\Phi}$ подібні і подібно розміщені відносно точки S, що й треба було довести.

3. Одна з поверхонь Φ і $\overset{*}{\Phi}$ відображається на другу з допомогою нормалей поверхні Φ.

Нехай на поверхні Φ знайдеться хоч одна точка A_0, що не збігається з відповідною їй точкою $\overset{*}{A}_0$ на поверхні $\overset{*}{\Phi}$, і в точці A_0:

1) одиничний вектор $\overline{n}$, нормальний до поверхні Φ, нормальний також до поверхні $\overset{*}{\Phi}$ в точці $\overset{*}{A}_0$, тобто пряма $A_0\overset{*}{A}_0$ є нормаль для кожної з поверхонь Φ і $\overset{*}{\Phi}$;

2) головні напрямки відображення не збігаються з головними напрямками поверхні Φ;

3) середня кривина $H(A_0)$ поверхні Φ відмінна від нуля;

4) повна кривина $K(A_0)$ поверхні Φ відмінна від нуля.

При цих умовах дане відображення не може бути еквівалентним.

Справді, нехай рівняння поверхонь Φ і $\overset{*}{\Phi}$ відповідно

$$\overline{r} = \overline{r}(u^1, u^2),$$

$$\overset{*}{\overline{r}} = \overline{r}(u^1, u^2) + z(u^1, u^2)\,\overline{n}(u^1, u^2).$$

З цих рівнянь видно, що відповідні при нашому відображенні точки мають однакові координати.

Крім цього, згідно з умовою 1, похідні $\frac{\partial z}{\partial u^1}$ і $\frac{\partial z}{\partial u^2}$ в точці A_0 рівні нулеві.

Тому в точці $\overset{*}{A}_0$ метричний тензор поверхні $\overset{*}{\Phi}$

$$\overset{*}{g}_{ij} = g_{ij} - 2\pi_{ij} z(A_0) + \nu_{ij} z^2(A_0), \tag{1}$$

де g_{ij}, π_{ij}, ν_{ij} — компоненти трьох основних тензорів поверхні Φ в точці A_0.

Вважатимемо, що на обох поверхнях головна сітка відображення є координатна сітка. Тоді $g_{12} = \overset{*}{g}_{12} = 0$, і тому з рівності (1) дістанемо

$$z(A_0) = 0$$

або

$$z(A_0)\nu_{12} - 2\pi_{12} = 0.$$

Перша рівність в нашому випадку неможлива, бо точка A_0 не збігається з точкою $\overset{*}{A}_0$.

Якщо скористатись формулою [1]

$$\nu_{ij} = 2H(A_0)\pi_{ij} - K(A_0)g_{ij} \tag{2}$$

і врахувати умови 2 і 3, то з другої рівності дістанемо

$$z(A_0) = \frac{1}{H(A_0)}. \tag{3}$$

Беручи до уваги (2) і (3), легко переконатись, що якби наше відображення було еквівалентним, то

$$k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2) = 0,$$

де k_1 і k_2 — головні кривини поверхні Φ в точці A_0. Але це суперечить умові 4.

Таким чином, ми прийшли до суперечності, що й доводить наше твердження.

4. Узагальнюючи поняття симетрії точок відносно площини, будемо вважати, що дві точки A_1 і A_2 симетричні відносно поверхні Φ, якщо пряма A_1A_2 є нормаль до поверхні Φ і точкою перетину прямої A_1A_2 з поверхнею Φ відрізок A_1A_2 ділиться навпіл.

Дві поверхні називатимемо симетричними відносно поверхні Φ, якщо кожна точка однієї поверхні симетрична відносно поверхні Φ деякій точці другої поверхні.

Нехай замкнена поверхня Φ_1 симетрична поверхні Φ_2 відносно замкненої поверхні Φ.

Поверхні Φ_1 і Φ_2 мають відповідно рівняння

$$\bar{r}_1(A_1) = \bar{r}(A) + z(A)\bar{n}(A)$$

і

$$\bar{r}_2(A_2) = \bar{r}(A) - z(A)\bar{n}(A),$$

де $\bar{r}(A)$ — радіус-вектор точки A поверхні Φ, а $\bar{n}(A)$ — одиничний вектор, нормальний до поверхні Φ в точці A.

Між точками поверхонь Φ_1 і Φ_2 встановимо відповідність, вважаючи відповідними точки, симетричні відносно поверхні Φ. Нехай ця відповідність буде еквіалентною.

Тоді, аналогічно пункту 1, можемо твердити, що в точці A_0, в якій $z(A)$ досягає екстремального значення,

$$z(A_0)(g_{11}\pi_{22} + g_{22}\pi_{11} - 2g_{12}\pi_{12}) + z^3(A_0)(\nu_{11}\pi_{22} + \nu_{22}\pi_{11} - 2\nu_{12}\pi_{12}) = 0,$$

де g_{ij}, π_{ij}, ν_{ij} — компоненти першого, другого і третього основних тензорів поверхні Φ. Поділивши праву і ліву частини попередньої рівності на дискримінант тензора g_{ij}, а також врахувавши відповідні вирази для середньої кривини H поверхні Φ [1], матимемо

$$H(A_0)z(A_0)[1 + z^2(A_0)] = 0. \tag{4}$$

Очевидно, $z(A_0) \neq 0$, бо інакше б збігалися поверхні Φ_1, Φ_2 і Φ. Тому з рівності (4) виходить, що $H(A_0) = 0$.

Отже, якщо в кожній точці замкненої поверхні Φ її середня кривина відмінна від нуля, то не знайдеться жодної пари замкнених поверхонь, симетричних відносно поверхні Φ, таких, щоб одна з них еквіалентно відображалась на другу з допомогою нормалей поверхні Φ.

Від попереднього доведення мало чим відрізняється доведення такого твердження.

Нехай поверхні Ψ_1 і Ψ_2, симетричні відносно поверхні Ψ, відображаються одна на другу з допомогою нормалей поверхні Ψ. Це відображення не може бути еквіалентним, якщо є пара відповідних точок A_1 і A_2, таких, що:

1) пряма A_1A_2 є нормаль як до поверхні Ψ_1 в точці A_1, так і до поверхні Ψ_2 в точці A_2;

2) точка A_1 не збігається з точкою A_2;

3) середня кривина поверхні Ψ в точці її перетину з прямою A_1A_2 відмінна від нуля.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей, II. М.—Л., 1948.

ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

С. П. ПОНОМАРЬОВ

ПРО МОНОГЕННІСТЬ СИМЕТРИЧНО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Відомо, що якщо функція дійсного змінного має симетричну похідну всюди в $[a, b]$, тобто, якщо існує всюди границя

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f_s'(x), \qquad (1)$$

то, взагалі кажучи, звідси не випливає, що функція має всюди похідну, навіть якщо $f(x)$ є неперервною.

Теорема А. Я. Хінчина [1] твердить, що вимірна функція, яка має симетричну похідну майже всюди, майже всюди має похідну. При вивченні симетричної неперервності та симетричного диференціювання функцій дійсного змінного виникають великі труднощі. Так, наприклад, залишається до цього часу нерозв'язаною проблема Хаусдорфа: чи є зчисленною множина точок розриву всюди симетрично неперервної функції.

Для функцій комплексної змінної дамо визначення: функція $f(z)$ в точці z_0 має симетричну похідну, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0-h)}{2h}=f_s'(z_0), \qquad (2)$$

де h — комплексне число. Оскільки існування $f_s'(z)$ накладає сильнішу умову на $f(z)$, ніж відповідно існування $f_s'(x)$ — на $f(x)$, то можна сподіватися, що при не дуже значних обмеженнях, накладених на $f(z)$, виконання (2) всюди в області викличе аналітичність $f(z)$.

Тут буде доведена така основна

Теорема 1. Якщо неперервна однолиста в області Ω функція $f(z)$ всюди має симетричну похідну, то $f(z)$ є аналітична в Ω.

Для доведення будуть потрібними декілька попередніх тверджень.

Теорема 2. Якщо в умовах теореми 1 вимагати, щоб

$$\sup|f_s'|<\infty, \qquad (3)$$

то $f(z)$ буде аналітичною в Ω.

Доведення. Легко перевірити, що з (3) випливає виконання умови Ліпшица для $f(z)$

$$|f(z')-f(z'')|\leq \sup|f_s'(z)|\cdot|z'-z''| \qquad (3')$$

і що майже всюди в Ω виконується $f_x=-if_y$. Після цього твердження теореми стає очевидним, якщо використати формулу Гріна.

Вкажемо на зв'язок симетричного диференціювання з симетричною ареолярною похідною. Можна показати, що з (2) випливає

$$\lim_{m\sigma\to 0}\frac{1}{m\sigma}\int_{\partial\sigma} f(z)\,dz = 0, \tag{4}$$

де σ — квадрати з центром в точці z_0. Тому, якщо (4) викликає моногенність f, то в цьому випадку функція, яка має симетричну похідну, буде поготів моногенною. Поки що встановлено, що з виконання (4) майже всюди в Ω і з умови (3) випливає моногенність f.

Теорема 3. Нехай неперервна на $[a, b]$ функція $\varphi(x)$ в кожній точці має скінченну симетричну похідну $\varphi_s'(x)$, яка є сумовною на $[a, b]$. Тоді

$$\int_a^b \varphi_s'(x)\,dx = \int_a^b \varphi'(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Доведення. Для довільного інтервала $\Delta \subset [a, b]$ маємо

$$\Delta = \bigcup_n E_n\left(x : \left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x-h)}{2h}\right| \leqslant n,\ |h| < \frac{1}{n}\right). \tag{5}$$

Через те, що кожна E_n є замкненою в Δ і має місце теорема Бера про категорії, знайдеться така множина E_n і такий інтервал $\delta \subset \Delta$, що $\delta \subset E_n$. Тому

$$\int_\delta \varphi_s'\,dx = \int_\delta \varphi'\,dx = \varphi(\beta') - \varphi(\alpha'), \tag{6}$$

$$\delta = (\alpha', \beta'),$$

бо φ задовольняє умову Ліпшица в δ. Звідси випливає, що існує всюди щільна в $[a, b]$ відкинута множина G, на кожному складовому інтервалі якої виконується (6). Зобразимо $P = [a, b] - G$ у вигляді (5) і, знову використовуючи теорему Бера, знайдемо інтервал $\Delta = (\alpha, \beta)$ і E_{n_0}, що при цьому $\Delta P \neq 0$ і $\Delta P \subset E_{n_0}$. Можна вважати P досконалою. Покажемо, що на Δ виконується (6). Для цього достатньо встановити абсолютну неперервність φ на Δ. Нехай $\{\Delta_i\}$, $i = 1, \ldots, n$; $\Delta_i\Delta_j = 0$, $i \neq j$ — довільна система інтервалів в Δ. Можна показати, що для кожного $\Delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$ і $\eta > 0$ має місце розклад

$$\Delta_i = \Big(\bigcup_{k=1}^{P(i)} \delta_k^i\Big) \cup \delta_i,\ m\delta_i < \eta;\ \delta_k^i = (\alpha_k^i, \beta_k^i);\ \delta_i = (\alpha_{P(i)}, \beta_i). \tag{7}$$

При цьому кожний δ_k^i такий, що або $\overset{0}{\delta}{}_k^i P = 0$, або центр δ_k^i міститься в P. Оцінимо суму приростів

$$\sum_{i=1}^n |\varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_i)| \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{P(i)} |\varphi(\beta_k^i) - \varphi(\alpha_k^i)| + \sum_{i=1}^n |\varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_{P(i)})| =$$

$$= \sum{}' |\varphi(\beta_k^i) - \varphi(\alpha_k^i)| + \sum{}'' |\varphi(\beta_k^i) - \varphi(\alpha_k^i)| + \sum_{i=1}^n |\varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_{P(i)})|. \tag{8}$$

Суми Σ' і Σ'' поширені відповідно на δ_k^i, які не містять всередині точок P, і на δ_k^i, центр яких належить P. Одержуємо

$$\sum' |\varphi(\beta_k^i) - \varphi(\alpha_k^i)| = \sum' \left|\int\limits_{\delta_k^i} \varphi' \, dx\right| \leqslant \int\limits_{\cup\Delta_i} |\varphi_s'| \, dx,$$

і, покладаючи $\sum\limits_{i=1}^{n} m\Delta_i < \frac{1}{n_0}$, маємо

$$\sum'' |\varphi(\beta_k^i) - \varphi(\alpha_k^i)| \leqslant n_0 \sum_{i=1}^{n} m\Delta_i.$$

Через те, що $\varphi(x)$ є неперервною, останній доданок в (8) може бути зроблений як завгодно малим. Тому остаточно

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_i)| \leqslant \int\limits_{\cup\Delta_i} |\varphi_s'| \, dx + n_0 \sum_{i=1}^{n} m\Delta_i.$$

Звідси випливає абсолютна неперервність φ на Δ і виконання (6) на складових інтервалах множини $G_1 = G \cup \Delta$. Далі використовуємо трансфінітну індукцію. Нехай (6) виконується на складових інтервалах множин G_α, $\alpha < \beta$. Якщо β — другого роду, то, як неважко бачити, (6) виконується на складових інтервалах $G_\beta = \cup\, \sigma_\alpha$. Якщо ж β — першого роду, то, зображуючи $P_{\beta-1} = [a, b] - G_{\beta-1}$ у вигляді (5) і знову використовуючи теорему Бера, знайдемо відповідну порцію $\Delta P_{\beta-1}$, яка належить деякій E. Використовуючи міркування, які наведені вище, одержимо, що (6) виконується на складових інтервалах множини $G_\beta = G_{\beta-1} \cup \Delta$. Через те, що $\{P_\alpha\}$ строго монотонно спадає, то, згідно з принципом Контора—Бера, знайдеться таке γ, що $P_\gamma = 0$. Цим і завершується доведення твердження. Перейдемо до доведення основної теореми 1.

З її умов випливає, що $f(z)$ аналітична на всюди щільній в Ω відкритій множині G, якщо мати на увазі теорему 2 і теорему Бера, бо для будь-якого квадрата $\omega \subset \Omega$,

$$\omega = \cup_n E_n \left(\left| \frac{f(z+h) - f(z-h)}{2h} \right| \leqslant n, \ |h| < \frac{1}{n}, \ z \in \omega \right). \tag{9}$$

Множина особливостей $P = \overline{\Omega} - G$ є досконалою в Ω.

Покажемо, що $P_0 = P \cap \Omega = 0$. Припустимо протилежне. Тоді

$$P_0 = \bigcup_n E_n \left(\left| \frac{f(z+h) - f(z-h)}{2h} \right| \leqslant n, \ |h| < \frac{1}{n} \right). \tag{10}$$

Згідно з теоремою Бера про категорії, знайдеться квадрат ω і така E_n, що $P_0 \cap \omega = E_n \cap \omega \neq \varnothing$. В ω модуль $|f_s'|$ буде сумовний:

$$\iint\limits_{\omega} |f'_s| \, dxdy \leqslant \sqrt{m(\omega \cap G) \cdot mf(\omega \cap G)} + nm\omega. \tag{11}$$

Тому використовуючи теорему Фубіні і теорему 3, робимо висновок, що в ω для будь-якого прямокутника q має місце формула Гріна:

$$\frac{1}{2i} \int\limits_{\partial q} f dz = \iint\limits_{q} \frac{\partial t}{\partial \bar{z}} \, dxdy. \tag{12}$$

Через те, що умови Коші—Рімана виконуються майже всюди в Ω, права частина в (12) дорівнює нулеві. Згідно з теоремою Морера, $f(z)$ аналітична в ω. Тому $P \cap \Omega = 0$.

У зв'язку з (4) доведемо таке твердження.

Теорема 4. Нехай $f(z)$ неперервна в області Ω і для майже всіх точок $z \in \Omega$.

$$\lim_{m\sigma \to 0} \frac{1}{m\sigma} \int_{\partial\sigma} f\ (z+\zeta)\, d\zeta = 0,$$

де σ — квадрат з центром в точці z. Нехай, крім того, функція

$$\varphi(z) = \sup_{\sigma} \frac{1}{m\sigma} \left| \int_{\partial\sigma} f(z+\zeta)\, d\zeta \right| \tag{13}$$

сумовна в Ω. Тоді f аналітична в Ω.

Доведення. Розглянемо

$$F_r(z) = \frac{1}{r^2} \iint_{\omega_r} f(z+\zeta)\, d\xi\, d\eta, \tag{14}$$

де ω_r — квадрат з стороною довжини r, z належить області G_r, $d(G_r, c\Omega) > r$.

Нехай σ — довільний квадрат, який міститься в G_r. Тоді

$$\frac{1}{m\sigma} \int_{\partial\sigma} F_r(z+t)\, dt = \frac{1}{r^2} \iint_{\omega_r} \left(\frac{1}{m\sigma} \int_{\partial\sigma} f(z+t+\zeta)\, dt \right) d\xi d\eta. \tag{15}$$

Використовуючи (13), маємо оцінку

$$\frac{1}{m\sigma} \left| \int_{\partial\sigma} F_r(z+t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{r^2} \iint_{\Omega} \varphi dx dy. \tag{16}$$

З другого боку, оскільки φ сумовна,

$$\lim_{m\sigma \to 0} \frac{1}{m\sigma} \int_{\partial\sigma} F_r(z+t)\, dt = 0. \tag{17}$$

З (16) і (17), як неважко показати, випливає аналітичність F_r в G_r. Після цього аналітичність f в Ω очевидна.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин. Fund. Math., **9**, 212—279 (1927).

ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

І. Г. СОКОЛОВ

ПРО ОБЕРНЕНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ДЕЯКИХ ПРОЦЕСІВ НАБЛИЖЕННЯ

С. М. Нікольський у відомій роботі [1, стор. 245] вказує на те, що метод С. Н. Бернштейна для доведення теорем (обернених) конструктивної теорії функцій є на сьогодні єдиним методом доведення тверджень подібного роду.

В цій замітці робимо спробу побудови загальної схеми доведення обернених теорем певного типу.

Як відомо, прямими теоремами конструктивної теорії функцій називаємо теореми типу Джексона, де виходячи з конструктивної характеристики функції дається висновок про порядок її наближення деякою послідовністю операторів.

Узагальнена обернена задача може бути сформульована таким чином. Нехай E — простір Банаха. Розглядається послідовність операторів $\{U_n\}$ з E в E. Нехай D_ω — множина елементів із E таких, що при $x \in D_\omega$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| U_n(x) \| < +\infty.$$

Необхідно дати конструктивну характеристику елементам із D_ω.

При вирішуванні цієї задачі ми розглядаємо функції як лінійні функціонали у просторі Банаха, тобто стаємо на точку зору теорії узагальнених функцій. При цьому, як видно з теореми [1], якщо у просторі E_1 має місце деяка пряма теорема для послідовності операторів U_n^*, то у спряженому просторі має місце деяка обернена теорема для послідовності «спряжених» операторів.

§ 1

Нехай E_1 — сепарабельний простір Банаха і E — простір, спряжений з E_1. Кожний лінійний функціонал L в E_1 має вигляд

$$L(y) = \langle x;\ y \rangle;\ \| L \| = \| x \|;\ x \in E;\ y \in E_1. \qquad (1)$$

Скалярний добуток $\langle x; y \rangle$ є білінійний функціонал, неперервний по кожному аргументу.

Розглянемо у просторі E послідовність операторів $\{U_n\}$ (з E в E) і множину $D_\omega \in E$ елементів, на яких послідовність значень $U_n(x)$ обмежена:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| U_n(x) \| < +\infty, \text{ якщо } x \in D_\omega. \qquad (2)$$

Припустимо далі, що дана множина $D_{\omega*} \in E_1$ і послідовність операторів $\{U_n^*\}$ (з E_1 в E_1), для яких виконуються умови

$$\lim_{n\to\infty} U_n^*(y) = \omega^*(y); \; y \in D_\omega^*, \tag{3}$$

$$< U_n(x); \; y > = < x; \; U_n^*(y) >; \; x \in D_\omega: \; y \in D_{\omega*}. \tag{4}$$

При цих припущеннях справедлива теорема:

Теорема 1.

а) Існує оператор A з областю визначення $H \in E$, що задається формулою

$$< z; \; y > = < A(z); \; \omega^*(y) >; \; z \in H; \; y \in D_{\omega*}. \tag{5}$$

в) Для будь-якого $x \in D_\omega$ знайдуться елементи $z \in H$ і $u \in \mathfrak{G}$ такі, що

$$x = A(z) + u. \tag{6}$$

Притому $\mathfrak{G}$ є множина елементів з E, що задовольняють умову:

$$< u; \; \omega^*(y) > = 0 \tag{7}$$

для $y \in D_{\omega*}$

Формула (6) дає деяку конструктивну характеристику елементам з D_ω.

Д о в е д е н н я. Нехай $x \in D_\omega$. Тоді послідовність лінійних функціоналів обмежена і, в силу відомої теореми Банаха, слабо компактна. Таким чином знайдеться така послідовність $U_{n_k}(x)$ (виділена з $U_n(x)$) і такий елемент $z \in E$, що $U_{n_k}(x)$ збігається слабо до z; тобто для усіх $y \in E_1$,

$$\lim_{n_k\to\infty} < U_{n_k}(x); \; y > = < z; \; y >.$$

Нехай $z = \omega(x)$, тоді

$$\lim < U_{n_k}(x); \; y > = < \omega(x); \; y >; \; x \in D_\omega; \; y \in E_1. \tag{8}$$

З умов (3) і (4) маємо

$$< \omega(x); \; y > = < x; \; \omega^*(y) > \tag{9}$$

для всіх $x \in D_\omega$ і $y \in D_{\omega*}$.

Позначимо через H область значень оператора ω. На H визначимо оператор A формулою (5)

$$< z; \; y > = < A(z); \; \omega^*(y) >,$$

яка справедлива для всіх $z \in H$ і $y \in D_{\omega*}$.

Існування такого оператора A випливає безпосередньо з формули (9).

Оператор A, взагалі кажучи, багатозначний, але характер його багатозначності легко визначити. Якщо $(Az)_1$ і $(Az)_2$ два значення оператора A для елемента z, то з формули (5) маємо

$$<(Az)_1 - (Az)_2; \; \omega^*(y) > = 0,$$

тобто

$$(Az)_1 - (Az)_2 \in \mathfrak{G}.$$

Покладаючи в формулі (9) $\omega(x) = z$ і беручи до уваги (5), одержимо $\langle x - A(z);\ \omega^*(y) \rangle = 0$ для всіх $y \in D\omega^*$, тобто

$$x = A(z) + u \tag{6}$$

§ 2

В останні роки теореми типу Е. В. Вороновської про наближення функцій поліномами Бернштейна були перенесені на наближення функцій деякими інтегральними додатними операторами (див., наприклад, [3], стор. 130—131, задачі 29, 31, 32 [4]).

Теорема, обернена теоремі Вороновської, була доведена Леу [5].

Використовуючи теорему [1], легко одержати обернення вищевказаних результатів.

Теорема 2. Нехай $K_n(x, t)$ неперервні по кожному аргументу в проміжку $[a, b]$ і $\psi(n)$ функція від n така, що

$$\lim_{n\to\infty} \psi(n)\left[\int_a^b \varphi(t) K_n(x;\ t)\,dt - \varphi(x)\right] = \varphi''(x) \tag{10}$$

рівномірно в проміжку $[c;\ d] \in [a;\ b]$, де $\varphi(x)$ має неперервну другу похідну. Якщо при тому для неперервної функції $f(x)$ виконується умова

$$\psi(n) \max_{c\leqslant t\leqslant d} \left| \int_a^b f(x) K_n(x;\ t)\,dx - f(t) \right| \leqslant K, \tag{11}$$

де K — деяка постійна, то $f(x)$ має на проміжку $[c;\ d]$ зображення

$$f(x) = \int_c^x dz \int_c^z q(v)\,dv + \alpha x + \beta, \tag{12}$$

де q — вимірна, обмежена функція на $[c;\ d]$, а α і β постійні.

Доведення. Нехай $E = m[a;\ b]$ — простір обмежених, вимірних функцій, а $E_1 = L[a;\ b]$ — сумовних на $[a;\ b]$ функцій.

Розглянемо послідовність лінійних операторів з E в E

$$\tilde{U}_n(f;\ t) = \psi(n)\left[\int_a^b K_n(x;\ t) f(x)\,dx - f(t)\right]$$

і покладемо

$$U_n(f; t) = \begin{cases} \tilde{U}_n(f;\ t), & t \in [c;\ d], \\ 0, & t \text{ зовні } [c;\ d]; \end{cases}$$

тоді

$$\| U_n(f;\ t) \|_{m(a;\ b)} = \| \tilde{U}_n(f;\ t) \|_{m(c;\ d)}.$$

Нехай далі D_{ω^*} є множина функцій з $L(a;\ b)$ неперервних на $[a;\ b]$ разом з своїми двома першими похідними. При цьому кожна функція із D_{ω^*} дорівнює нулю зовні деякого інтервала $(\gamma;\ \delta)$ (свого для кожної функції), внутрішнього до $[c;\ d]$.

Покладемо далі

$$U_n^*(\varphi; x) = \psi(n)\left[\int_a^b \varphi(t) K_n(x; t)\, dt - \varphi(x)\right].$$

Тоді, як легко бачити, для кожної функції $f \in E$ і $\varphi \in D_{\omega^*}$ маємо

$$< U_n(f); \varphi > = \int_a^b U_n(f; t)\varphi(t)\, dt = \int_a^b f(x) U_n^*(\varphi; x)\, dx =$$

$$= < f; U_n^*(\varphi) >.$$

Далі

$$\lim_{n\to\infty} U_n^*[\varphi; x] = \varphi''(x) = \omega^*(\varphi)$$

і

$$< z: \varphi > = \int_a^b z(t)\varphi''(t)\, dt = \int_a^b \left[\int_c^t du \int_c^u z(v)\, dv\right]\varphi''(t)\, dt$$

для $z \in E$ і $\varphi \in D_{\omega^*}$.

Тому, поклавши

$$A(z) = \int_c^t du \int_c^u z(v)\, dv,$$

одержимо

$$< z; \varphi > = < A(z); \omega^*(\varphi) >.$$

В силу теореми [1], якщо f неперервна на $[a; b]$ функція, така, що

$$\| U_n(f) \|_{m(a; b)} \leq K,$$

то

$$f(t) = \int_c^t du \int_c^u z(v)\, dv + \psi(t),$$

де $\psi(t)$ — неперервна функція, яка задовольняє умову

$$\int_c^d \psi(t)\varphi''(t)\, dt = 0$$

для будь-якої $\varphi \in D_{\omega^*}$.

В силу відомої теореми Дю Буа Реймонда ψ — лінійна функція.

ЛІТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский. Тр. мат. ин-та Стеклова, т. XXXVII, 244—278 (1951).
2. Е. В. Вороновская. ДАН СССР, (А), 79—85 (1932).
3. П. П. Коровкин. Линейные операторы и теория приближений. Физматгиз, 1959.
4. П. П. Коровкин. УМН., т. XIII, 6 (1958).
5. K. Leew, J. anal. math. 7, 1, 89—104 (1959).

І. Г. СОКОЛОВ

УТОЧНЕННЯ ОДНІЄЇ НЕРІВНОСТІ П. Л. ЧЕБИШЕВА

Чебишев довів таке цікаве твердження.

Нехай $f(x)$ і $K(x)$ дві монотонні обмежені функції. Якщо f і K змінюються в одному напрямі, то

$$\int_a^b f(x)\,K(x)\,dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\int_a^b K(x)\,dx \geqslant 0. \tag{1}$$

Якщо ж f і K змінюються в обернених напрямах, то справедлива нерівність, обернена до (1) [1].

Ми даємо уточнення нерівності в тому сенсі, що для кожної вимірної, обмеженої на $[a, b]$ функції $f(x)$ і сумовної на $[a, b]$ $K(x)$ дається оцінка зверху для лівої частини нерівності (1).

Ми будемо виходити з такої теореми С. М. Нікольського (2):

Нехай E — простір Банаха і $F, F_1, F_2, \ldots, F_n$ — лінійні функціонали, визначені на E. Тоді

$$\min_{\lambda_k}\|F - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k F_k\| = \max_x F(x),$$

де максимум береться серед тих $x \in E$, для яких

$$\|x\| \leqslant 1;\ F_k(x) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Якщо E є $L(a, b)$, то теорема С. М. Нікольського набуває вигляду:

Нехай f; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ вимірні, обмежені на $[a, b]$ функції. Тоді

$$\min_{\lambda_k}\|f - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\varphi_k\|_m = \max_k \int_a^b K(x) f(x)\,dx,$$

де максимум береться за тими сумовними функціями K, які задовольняють умови

$$\int_a^b K(x)\,\varphi_k(x)\,dx = 0;\quad \int_a^b |K(x)|\,dx = 1.$$

В окремому випадку $(n = 1;\ \varphi_1(x) = 1)$ маємо

$$\min_\lambda\|f - \lambda\|_m = \max\int_a^b f(x)\,K(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\text{де } \|K\|_L = 1; \quad \int_a^b K(x)\,dx = 0.$$

Але

$$\min_\lambda \|f - \lambda\| = \frac{1}{2}\omega(f),$$

де $\omega(f)$ є істотне коливання f на $[a, b]$, тобто

$$\omega(f) = vrai \max f(x) - vrai \min f(x).$$

Таким чином, із (2) одержуємо

$$\frac{1}{2}\omega(f) = \max_K \int_a^b f(x) K(x)\,dx, \tag{3}$$

де функції K задовольняють умови, вказані в (2).

Якщо тепер K є будь-яка сумовна функція, то

$$K_1(x) = \frac{1}{K_c}\left(K(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b K(x)\,dx\right),$$

де $K_c = \|K - \frac{1}{b-a}\int_a^b K(x)\,dx\|_L$

є вже допустима функція і із (3) випливає

$$\frac{1}{2}\omega(f)\cdot K_c \geqslant \int_a^b K(x) f(x)\,dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b K(x)\,dx \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Нерівність (4) є точною у тому сенсі, що для будь-якої $f \in \mathfrak{M}$ найдеться $K \in L$, така, що ця нерівність переходить в рівність.

Для $K(x) = f(x)$ одержимо

$$\frac{1}{2}\omega(f)\cdot f_c \geqslant \int_a^b f^2(x)\,dx - \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2. \tag{5}$$

Остання нерівність є уточненням нерівності Буняковського—Шварца.

П р и к л а д. Розглянемо оцінку зверху для коефіцієнтів Фур'є вимірної обмеженої функції $f(x)$:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Нехай

$$[a, b] = \left[\frac{m\pi}{n};\ \frac{m+1}{n}\pi\right] \quad (m = \overline{0;\ 2n} - 1).$$

Покладемо $K(x) = \cos nx$.

Тоді

$$\int_{\frac{m\pi}{n}}^{\overline{\frac{m+1}{n}}\pi} \cos nx\,dx = 0; \quad K_c = \int_{\frac{m\pi}{n}}^{\overline{\frac{m+1}{n}}\pi} |\cos nx|\,dx = \frac{2}{n},$$

і нерівність (4) дає

$$\frac{1}{n}\,\omega_m(f) \geqslant \int_{\frac{m\pi}{n}}^{\overline{\frac{m+1}{n}}\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

де $\omega_m(f)$ є істотна зміна f на $\left[\frac{m\pi}{n};\ \overline{\frac{m+1}{n}}\,\pi\right]$.

Сумуючи по m, одержуємо

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{m=0}^{2n-1} \omega_m(f)\,\Delta x_m \geqslant a_n, \tag{6}$$

де

$$\Delta x_m = \frac{\pi}{n} = \overline{\frac{m+1}{n}}\cdot\pi - \frac{m\pi}{n}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Гурса. Курс математического анализа, т. 1.
2. С. М. Никольский. ИАН СССР, сер. мат., **10**, 207—256 (1946).

ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

В. О. ГУКЕВИЧ

ЦІЛІ ФУНКЦІЇ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ І ЧАСТКОВИЙ ІНТЕГРАЛ ФУР'Є

Нехай функція f задана на всій осі. Назвемо «частковим» інтегралом Фур'є порядку T функції f в точці x вираз

$$S_T(f;\ x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin T(x-t)}{x-t}\,dt \qquad (T>0)$$

(легко переконатися, що $S_T(f)$ існує майже всюди, якщо $f\in L_p(-\infty,\infty)$ $(p\geqslant 1)$).

Далі, через $\mathfrak{G}_\sigma$ і $\mathfrak{G}_{\sigma-0}$ позначено сукупність усіх цілих трансцендентних функцій експоненціального типу з показником відповідно $\leqslant\sigma$ і $<\sigma$, а через $\mathfrak{G}_\sigma^{(p)}$ і $\mathfrak{G}_{\sigma-0}^{(p)}$ — клас функцій, що належать відповідно до $\mathfrak{G}_\sigma$ і $\mathfrak{G}_{\sigma-0}$ і рівночасно є сумовними в p-му степеню на всій осі.

У питаннях гармонічної апроксимації неперіодичних функцій на всій осі частковий інтеграл Фур'є і цілі функції експоненціального типу відіграють відповідно таку роль, як часткова сума ряду Фур'є і тригонометричні многочлени при гармонічній апроксимації періодичних функцій.

В цій замітці розглянемо деякі властивості функцій класу $\mathfrak{G}_\sigma^{(p)}$, $\mathfrak{G}_{\sigma-0}^{(p)}$ і частково інтеграла Фур'є, аналогічні відповідним властивостям тригонометричного полінома і часткового ряду Фур'є.

§ 1

Введемо позначення

$$S_T(x;\ f;\ \theta)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-v)\,\frac{\sin Tv\sin\theta Tv}{\pi\,Tv^2\theta}\,dv$$

і

$$\Phi(v;\ \theta)=\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin v}{v}\cdot\frac{\sin\theta v}{\theta v}\quad (0<\theta\leqslant 1).$$

Обчислимо інтеграл

$$\varphi(t)=2\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(u)\cos ut\,du.$$

$$\varphi(t) = 2\int_0^\infty \Phi(u)\cos ut\,du = 2\int_0^\infty \frac{\sin u \sin \theta u}{\pi\theta u^2}\cos ut\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(1-\theta+t)u - \cos(1+\theta+t)u}{\pi\theta u^2}du +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(1-\theta-t)u - \cos(1+\theta-t)u}{\pi\theta u^2}du.$$

Відомо, що

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2ax - \cos 2bx}{x^2}dx = \pi(b-a), \text{ якщо } b \geqslant a,\ a \geqslant 0.$$

Використовуючи останній факт, маємо

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leqslant 1-\theta \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1-t}{\theta}+1\right), & 1-\theta \leqslant t \leqslant 1+\theta \\ \frac{1}{2}\left(\frac{-1+t}{\theta}+1\right), & -(1+\theta) \leqslant t \leqslant 1-\theta \\ 0, & |t| \geqslant 1+\theta \end{cases} \qquad (\beta).$$

Справедлива така

Теорема 1. Якщо $f \in W_2$, тобто $\frac{f(x)}{1+|x|} \in L_2(-\infty, \infty)$ і $f \in \mathfrak{G}_\tau$, де $\tau \leqslant \leqslant T(1-\theta)$,

то

$$S_T(x;\ f;\ \theta) \equiv f(x). \qquad (1)$$

Доведення теореми є повторенням доведення подібної теореми для узагальненого інтеграла Феєра [1, стор. 217].

Дійсно, в розглянутому випадку, згідно з теоремою Вінера—Палея, маємо

$$f_1(x) = \frac{f(x) - f(i)}{x-i} = \int_{-\tau}^{\tau} e^{itx}\,\psi(t)\,dt,$$

де

$$\psi(t) \in L_2[-\tau, \tau].$$

$$S_T(x;\ f;\ \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-v)\frac{\sin Tv \sin \theta Tv}{\pi\theta T v^2}dv =$$

$$= T\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(i) + f_1(x-v)(x-i-v)\right]\frac{\sin Tv \sin \theta Tv}{\pi\theta v^2 T^2}dv =$$

$$=f(i)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Tv\sin\theta Tv}{\pi\theta Tv^2}\,dv+(x-i)\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-v)\,\frac{\sin Tv\sin\theta Tv}{\pi\theta Tv^2}\,dv-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-v)\,\frac{\sin Tv\sin\theta Tv}{\pi\theta Tv}\,dv\,.$$

Але [5, т. 2, стор. 637]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u\sin\theta u}{\theta u^2}\,du=\pi.$$

Таким чином,

$$S_T(x;f;\theta)=f(i)+(x-i)\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-v)\,\frac{\sin Tv\sin\theta Tv}{\pi\theta Tv^2}\,dv-$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-v)\,\frac{\sin Tv\sin\theta Tv}{\pi\theta Tv}\,dv.$$

Використовуючи теорему про звертку [1, стор. 136], дістаємо

$$S_T(x;f;\theta)=f(i)+(x-i)\int_{-\tau}^{\tau}\varphi\left(\frac{t}{T}\right)\psi(t)\,e^{itx}\,dt-$$

$$-\frac{i}{T}\int_{-\tau}^{\tau}\varphi'\left(\frac{t}{T}\right)\psi(t)\,e^{itx}\,dt,$$

після чого залишається взяти до уваги (β).

Зауважимо [1, стор. 208], що коли $f\in L_p(-\infty,\infty)$, $p\geqslant 2$, то $f\in W_2$. Розглянемо функцію $f\in\mathfrak{G}_\tau^{(p)}$, де $p\geqslant 2$, $\tau\leqslant T(1-\Theta)$.

Для такої функції в рівності (1) можна перейти до границі, коли $\Theta\to 0$.

Дійсно. Використовуючи нерівність Гельдера, бачимо, що інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x-v)\,\frac{\sin Tv}{v}\,\psi(\theta Tv)\,dv,$$

де

$$\psi(\theta;v)=\begin{cases}\dfrac{\sin\theta v}{\theta v}, & \theta v\neq 0\\[2mm] 1, & \theta v=0,\end{cases}$$

рівномірно збігається відносно u з проміжку [0,1], звідки, беручи до уваги неперервність підінтегральної функції для $-\infty<v<\infty$ і $-1\leqslant\theta\leqslant 1$, випливає неперервність інтеграла по параметру в проміжку [0,1].

Таким чином, якщо $f\in\mathfrak{G}_T^{(p)}$ і $p\geqslant 2$, то

$$S_T(f;\, x) = \lim_{\theta \to 0} S_T(x;\, f;\, \theta) \equiv f(x). \tag{2}$$

Покажемо, що для $1 < p \leqslant 2$ має місце тотожність, аналогічна (2). А саме, справедлива така

Теорема 2. Функція $\varphi(z) \in \mathfrak{S}^{(p)}_{T-0}$, де $1 < p \leqslant 2$, є нерухомою точкою оператора $S_T(f)$, тобто

$$S_T(\varphi;\; x) \equiv \varphi(x). \tag{3}$$

Доведення. Нехай $1 < p \leqslant 2$. Згідно з узагальненою теоремою Вінера—Палея будь-яку функцію $\varphi(z) \in \mathfrak{S}^{(p)}_{T-0}$ можна зобразити у вигляді

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iuz} \gamma(u)\, du,$$

де $\gamma(u) \in L_2(-\sigma,\, \sigma)$ і $\sigma < T$.

Тоді тому, що $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt = \pi$, маємо

$$\sqrt{2\pi}\, [\varphi(x) - S_T(\varphi;\, x)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt \int_{-\sigma}^{\sigma} (e^{iut} - e^{iux})\, \gamma(u). \tag{4}$$

Легко бачити, що для будь-яких додатних A і C

$$\int_{-C}^{A} \left[\int_{-\sigma}^{\sigma} (e^{iut} - e^{iux})\, \gamma(u)\, du \right] \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt =$$

$$= \int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(u)\, du \int_{-C}^{A} (e^{iut} - e^{iux})\, \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt.$$

Але

$$\lim_{\substack{A \to \infty \\ C \to \infty}} \int_{-C}^{A} \left[\int_{-\sigma}^{\sigma} (e^{iut} - e^{iux})\, \gamma(u)\, du \right] \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt \int_{-\sigma}^{\sigma} (e^{iut} - e^{iux})\, \gamma(u)\, du$$

і тому

$$\sqrt{2\pi}\, [\varphi(x) - S_T(\varphi;\, x)] = -\frac{1}{\pi} \lim_{\substack{A \to \infty \\ C \to \infty}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(u)\, du \int_{-C}^{A} (e^{iut} - e^{iux})\, \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt. \tag{5}$$

Покажемо, що в інтегралі справа можна перейти до границі під знаком інтеграла, коли A і $C \to \infty$.

Для цього зауважимо, що

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(u)\, du \int_{A}^{\infty} (e^{iut} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt \to 0,$$

коли $A \to \infty$.

(Доведення того, що $\int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(u)\, du \int_{-\infty}^{-C} (e^{iut} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt$, коли $C \to \infty$ зовсім аналогічне останньому).

З цією метою зауважимо, що

$$\int_{a}^{\infty} (e^{iut} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt, \text{ де } a > x$$

збігається рівномірно відносно u в проміжку $[-\sigma, \sigma]$. (Дійсно. Для інтеграла $\int_{a}^{\infty} e^{iux} \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt$ це очевидно, а для інтеграла $\int_{a}^{\infty} e^{iut} \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt$ випливає з відомої ознаки Діріхле [5, т. 2, стор. 690], якщо врахувати, що які б не були B,

$$\left| \int_{a}^{\infty} e^{iut} \sin T(x-t)\, dt \right| = \left| \int_{a+x}^{B+x} e^{iu(x+z)} \sin Tz\, dz \right| =$$

$$= \left| e^{iux} \frac{iu \sin Tz - T\cos Tz}{T^2 - u^2} \Bigg|_{z=a+x}^{B+x} \right| < \frac{2(\sigma + T)}{T^2 - \sigma^2} \quad (0 < \sigma < T)$$

і $\frac{1}{x-t} \searrow 0 \; (t \to \infty)$.

Але тоді

$$\Phi(A;\, u) = \int_{A}^{\infty} (e^{iut} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt \to 0 \quad (A \to \infty)$$

рівномірно відносно u, звідки в силу нерівності Шварца відразу випливає, що

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(u)\, du \int_{A}^{\infty} (e^{iut} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt \to 0, \quad (A \to \infty),$$

оскільки $\gamma(u) \in L_2(-\sigma, \sigma)$.

Отже, перехід до границі під знаком інтеграла в рівності (5) законний.

Таким чином,

$$\sqrt{2\pi}\, [\varphi(x) - S_T(\varphi;\, x)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iut} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt.$$

Розглянемо

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}\gamma(u)du\int_{-\infty}^{\infty}(e^{iut}-e^{iux})\frac{\sin T(x-t)}{x-t}dt.$$

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}\gamma(u)\,du\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-e^{iux})\frac{\sin T(x-t)}{x-t}\,dt=$$

$$=\int_{0}^{\sigma}\gamma(u)\,du\int_{-\infty}^{\infty}(e^{itu}-e^{iux})\frac{\sin T(x-t)}{x-t}\,dt+$$

$$+\int_{0}^{\sigma}\gamma(-u)\,du\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-itu}-e^{-iux})\frac{\sin T(x-t)}{x-t}\,dt \qquad (6)$$

і далі

$$\int_{-\infty}^{\infty}(e^{\pm iut}-e^{\pm iux})\frac{\sin T(x-t)}{x-t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}(\cos ut-\cos ux)\frac{\sin T(x-t)}{x-t}\,dt\pm$$

$$\pm i\int_{-\infty}^{\infty}(\sin ut-\sin ux)\frac{\sin T(x-t)}{x-t}\,dt. \qquad (7)$$

Але

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\cos ut-\cos ux)\frac{\sin T(x-t)}{x-t}\,dt=\cos ux\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cos uz\frac{\sin Tz}{z}\,dz-\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Tz}{z}dz\right)-\sin ux\int_{-\infty}^{\infty}\sin uz\frac{\sin Tz}{z}\,dz. \qquad (8)$$

Зауважимо, що всі інтеграли в (8) існують, тому що $|u|\leqslant\sigma<T$. При цьому

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin uz\frac{\sin Tz}{z}\,dz=0$$

і [5, т. 2, стор. 636]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos uz\frac{\sin Tz}{z}\,dz=\pi\ \ (0<u<T).$$

Таким чином,

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\cos ut-\cos ux)\frac{\sin T(x-t)}{x-t}\,dt=0, \qquad (9)$$

тому що

$$0\leqslant u\leqslant\sigma<T.$$

Аналогічно показуємо, що також

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\sin ut - \sin ux)\,\frac{\sin T(x-t)}{x-t}\,dt = 0 \quad (0 \leqslant u \leqslant \sigma < T). \tag{10}$$

З формул (4—10) випливає справедливість теореми (2).

На основі тотожностей (2) і (3) можна висловити таке загальне твердження.

Якщо $f \in \mathfrak{G}^{(p)}_{T-0}$ $(p > 1)$, $(T > 0)$,
то

$$S_T\,(f;\ x) \equiv f(x). \tag{11}$$

Нехай, як і всюди, у дальшому через $\|\psi\|_{L_p}$ позначено $\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi\ (t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}$; справедлива

Теорема 3. Якщо $f \in L_p(-\infty,\ \infty)$ $(p > 1)$,
то

$$\|S_T(f)\|_{L_p} \leqslant c_p \|f\|_{L_p},$$

де c_p — постійна, що залежить тільки від p.

Теорема є безпосередньо результатом відомого факту [2, стор. 312] згідно з яким, якщо $f \in L_p(-\infty,\ \infty)\ (p > 1)$, то функція

$$g\,(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{f\,(t)}{x-t}\,dt$$

існує майже всюди і задовольняє нерівність $\|g\|_{L_p} \leqslant A\ (p)\,\|f\|_{L_p}$, де $A(p)$ — постійна, що залежить тільки від p.

§ 2

Відзначимо ще одну властивість часткового інтеграла Фур'є.

В роботі С. М. Лозинського [3] показано, що в метриці C часткова сума ряду Фур'є даного порядку має найменшу норму серед норм тригонометрично-поліноміальних операцій того ж порядку. Подібний факт справедливий для часткового інтеграла Фур'є, як засобу наближення функцій в просторі $L_2(-\infty,\ \infty)$. Дійсно, нехай $A(f)$ є лінійний оператор, який функцію $f \in L_2(-\infty,\ \infty)$ переводить у функцію класу $\mathfrak{G}^{(2)}_\sigma$ і нерухомими точками якого є функції того ж класу $\mathfrak{G}^{(2)}_\sigma$.

Справедлива нерівність

$$\|A\|_{L_2} \geqslant \|S_\sigma\|_{L_2}, \tag{12}$$

де $\|A\|_{L_2}$, $\|S_\sigma\|_{L_2}$ є відповідно норми операторів $A(f)$ і $S_\sigma(f)$.

Доведення. Покажемо, що оператор $S_\sigma\,(f)$ належить $\mathfrak{G}^{(2)}_\sigma$, звідки. беручи до уваги тотожність (2), випливає, що він є оператором типу $A(f)$.

Дійсно. Якщо $f \in L_2(-\infty, \infty)$, то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx$$

збігається до функції

$$F(y) \in L_2(-\infty, \infty)$$

і

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(y)|^2\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2\, dy.$$

Нехай

$$F_\alpha(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, e^{-ixy}\, dx \quad (\alpha > 0).$$

Тоді [2, стор. 313]

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} F_\alpha(y)\, e^{ixy}\, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t) \frac{\sin \sigma (x-t)}{x-t}\, dt.$$

Переходячи в останній рівності до границі, коли $\alpha \to \infty$, що законно, тому що $F_\alpha(y)$ збігається в L_2 до $F(y) \in L_2(-\infty, \infty)$, одержуємо

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(y)\, e^{ixy}\, dy = S_\sigma(f; x). \tag{13}$$

Згідно з теоремою Вінера—Палея формула (13) означає, що $S_\sigma(f)$ є функцією класу $\mathfrak{G}_\sigma^{(2)}$ і

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S_\sigma(f; x)|^2\, dx = \int_{-\sigma}^{\sigma} |F(x)|^2\, dx.$$

Але

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx.$$

Таким чином,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S_\sigma(f; x)|^2\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx,$$

і значить $\| S_\sigma \|_{L_2} \leqslant 1$.

З другого боку, тому що оператор $A(f)$ має ненульову нерухому точку, то $\| A \|_{L_2} \geqslant 1$. Звідси випливає (12) і $\| S_\sigma \|_{L_2} = 1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. ГОНТИ, 1939.
2. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. ГОНТИ, 1939.
3. С. М. Лозинский. ДАН СССР, 61, 2, 193—196 (1948).

4. И. И. Ибрагимов. УМН, **12 : 13** (75), 323—328 (1948).
5. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2 и 3. Физматгиз, М.—Л., 1959.
6. Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч. 1. М.—Л., 1933.

ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

І. В. ВІТЕНЬКО, О. М. КОСТОВСЬКИЙ

УЗАГАЛЬНЕНІ ФОРМУЛИ ПЕРЕТВОРЕНЬ В МЕТОДАХ ЛОБАЧЕВСЬКОГО—ГРЕФФЕ І ЛЕМЕРА

В даній замітці даються узагальнені формули перетворень в методах Лобачевського—Греффе і Лемера для випадків поліномів, рядів Тейлора і рядів Лорана. Конкретно задача ставиться так: виразити коефіцієнти розкладу в ряд Лорана для функцій:

$$f_k(z) = \prod_{j=0}^{k-1} f(\omega_j^k z^{\frac{1}{k}}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i^{(k)} z^i, \tag{1}$$

$$Q_k(z) = \frac{1}{k} \sum_{m=0}^{k-1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq m}}^{k-1} f(\omega_j^{(k)} z^{\frac{1}{k}}) R_v(\omega_m^{(k)} z^{\frac{1}{k}}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i^{(k)} z^i,$$

де

$$R_v(z) = zv(z) f'(z),\ \omega_j^{(k)} = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k} j}\ (j = 0, 1, \ldots, k-1),$$

через коефіцієнти заданого ряду Лорана $f(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i z^i$ і допоміжного $v(z) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i z^i$. Ряд Лорана $v(z)$ обирається так, щоб $f(z)$ і $v(z)$ мали спільне кільце збіжності.

Розглянемо спочатку формули перетворень для методу Лобачевського—Греффе.

Нехай $f(z)$ — поліном: $f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_0 \neq 0$. Як відомо [2 і 3], коефіцієнти $a_i^{(k)}$ обчислюються за формулами:

$$a_i^{(k)} = -\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} a_{i-j}^{(k)} S_{kj} \quad a_0^{(k)} = a_0^k,$$

$$S_m = -\frac{1}{a_0} \left(\sum_{j=1}^{m-1} a_j S_{m-j} + m a_m \right) \quad (m = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

$$S_m = -\frac{1}{a_0} \sum_{j=1}^{n} a_j S_{m-j} \quad (m > n).$$

Припустимо тепер, що $f(z)$ — ряд Тейлора, $f(z)=\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i z^i, a_0 \neq 0$. З першої формули (1) маємо:

$$f_k(z)=\lim_{n\to\infty} P_n^{(k)}(z),$$

де

$$P_n^{(k)}(z)=\prod_{j=0}^{k-1} P_n(z^{\frac{1}{k}}\omega_j^{(k)}),\ P_n(z)=a_0+a_1 z+\ldots+a_n z^n.$$

Беручи до уваги (2), переконуємось, що:

$$a_i^{(k)}=a_{i,ki}^{(k)}=a_{i,ki+1}^{(k)}=\ldots=a_{i,ki+l}^{(k)}=\lim_{n\to\infty} a_{i,n}^{(k)},$$

де $a_{i,j}^{(k)}$ — коефіцієнти полінома $P_n^{(k)}(z)$, $(i=0, 1, 2, \ldots)$, $(j=1, 2, \ldots, n)$. Звідси робимо висновок, що формули (2) залишаються без зміни і для ряду Тейлора, тільки третя рівність (2) є в цьому випадку зайвою, тому що $n=\infty$. Формули (2) можна застосувати теж для ряду Лорана, який обривається хоч би з одної сторони. У випадку, коли ряд Лорана має нескінченну кількість членів в обидві сторони, $a_i^{(k)}$ визначаються таким чином:

$$a_i^{(k)}=\lim_{\substack{m_1\to-\infty\\ m_2\to+\infty}} a_{i,m_1,m_2}^{(k)}=\lim_{m_2\to+\infty} a_{i,-\infty,m_2}^{(k)}=\lim_{m_1\to-\infty} a_{i,m_1,+\infty}^{(k)}, \tag{3}$$

де $a_{i,m_1,m_2}^{(k)}$ — коефіцієнти розкладу в ряд Лорана для функції:

$$f_{k,m_1,m_2}(z)=\prod_{j=0}^{k-1} f_{m_1,m_2}(z^{\frac{1}{k}}\omega_j^{(k)}),$$

причому

$$f_{m_1,m_2}(z)=\sum_{i=m_1}^{m_2} a_i z^i,\ m_2>m_1, \tag{4}$$

якщо $m_1=-\infty (m_2=+\infty)$, то $m_2\neq+\infty (m_1\neq-\infty)$. Із (4) видно, що $a_{i,m_1,m_2}^{(k)}$ можуть бути обчислені за формулами (2).

Перейдемо тепер до виводу формул перетворень для методу Лемера.

Спочатку розглянемо випадок ряду Тейлора:

$$f(z)=a_0+a_1 z+\ldots+a_n z^n+\ldots,\ a_0\neq 0.$$

Функцію $Q_k(z)$ з (1) можна записати у вигляді

$$Q_k(z)=f_k(z)T_k(z),$$

де

$$T_k(z)=\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1} T\left(\omega_m^{(k)} z^{\frac{1}{k}}\right),\ T(z)=\frac{zf'(z)\,v(z)}{f(z)}, \tag{5}$$

$$\omega_m^{(k)}=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}\,m}{k}}\quad (m=0,1,\ \ldots k-1).$$

По коефіцієнтах розкладу заданих функцій $f(z)$ і $v(z)$ легко можна знайти коефіцієнти функції $T(z)$. Нехай

$$T(z)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} t_i z^i. \tag{6}$$

Тоді з (5) випливає

$$T_k(z)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} t_{ik} z^i. \tag{7}$$

Значить,

$$b_i^{(k)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} t_{mk} a_{i-m}^{(k)} \quad (i=\ldots-2,-1,0,1\ldots). \tag{8}$$

$b_i^{(k)}$ визначаються за формулою (8) і тоді, коли $f(z)$ є ряд Лорана, який обривається хоч би з однієї сторони.

Якщо число членів ряду Лорана не обмежене з двох сторін, тоді для $b_i^{(k)}$ можна дати такі формули:

$$b_i^{(k)}=\lim_{\substack{m_1\to-\infty\\ m_2\to+\infty}} b_{i,m_1,m_2}^{(k)}=\lim_{m_2\to+\infty} b_{i,-\infty,m_2}^{(k)}=\lim_{m_1\to-\infty} b_{i,m_1,+\infty}^{(k)}, \tag{9}$$

де $b_{i,m_1,m_2}^{(k)}$ — коефіцієнти розкладу в ряд Лорана для функції

$$Q_{k,m_1,m_2}(z)=\sum_{m=0}^{k-1}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k-2} f_{m_1,m_2}\left(\omega_j^{(k)} z^{\frac{1}{k}}\right) R_v\left(\omega_m^{(k)} z^{\frac{1}{k}}\right).$$

Причому $f_{m_1,m_2}(z)$ задовольняє умову (4).

При даних умовах коефіцієнти $b_{i,m_1,m_2}^{(k)}$ можуть бути обчислені за формулою (8). Формули (3) і (9) показують, що у випадку ряду Лорана з нескінченною кількістю членів в обидві сторони $a_i^{(k)}$ і $b_i^{(k)}$ $(i=\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots)$ можуть бути обчислені для даного i з якою завгодно точністю при обриванні даного ряду на достатньо великих номерах m_1 і m_2 $(m_1<i-N,\ m_2>i+N)$. Припустимо, що $v(z)=z^l$ (l — будь-яке ціле число) і $f(z)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, $a_0\neq 0$. Позначимо коефіцієнти $b_i^{(k)}$ у випадку функції $v(z)=z^l$ через $b_{i;l}^{(k)}$. Із (6), (7) і (8) легко виводяться такі формули для обчислення $b_{i;l}^{(k)}$:

$$b_{i;l}^{(k)}=-\sum_{j=1}^{i} a_{i-j}^{(k)} S_{kj-l}, \tag{10}$$

де величини $a_i^{(k)}$ і S_m обчислюються за формулами (2). Із формул (2) і (10) можна вивести формули для випадку, коли k набирає дискретних значень вигляду $k=p^\nu$ $(\nu=1,2,\ldots)$.

Тоді

$$A_i^{(\nu)} = -\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} A_{i-j}^{(\nu)} S_j^{(\nu)},\ A_0^{(\nu)} = (A_0^{(\nu-1)})^p,$$

$$S_m^{(\nu)} = S_{km}^{(\nu-1)},\ S_m^{(\nu-1)} = -\frac{1}{A_0^{(\nu-1)}}\left(\sum_{j=1}^{m-1} A_j^{(\nu-1)} S_{m-j}^{(\nu-1)} + mA_m^{(\nu-1)}\right),$$

$$B_{i;l}^{(\nu)} = -\sum_{j=1}^{i} A_{i-j}^{(\nu)} S_{j;l}^{(\nu)},\ S_{m;l}^{(\nu)} = S_{km;l}^{(\nu-1)}; \tag{11}$$

$$S_{m;l}^{(\nu-)} = -\frac{1}{A^{(\nu-1)}}\left(\sum_{j=1}^{m-1} A_j^{(\nu-1)} S_{m-j;l}^{(\nu-1)} + B_{m;l}^{(\nu-1)}\right),$$

де

$$A_i^{(\nu)} = a_i^{(p^\nu)},\ B_{i;l}^{(\nu)} = b_{i;l}^{(p^\nu)}.$$

$A_i^{(1)}$, $B_{i;l}^{(1)}$ визначаються за формулами (2) і (10).

$$(i = 0,\ 1, \ldots)\quad (\nu = 1,\ 2, \ldots).$$

Коефіцієнт $B_{i;l}^{(\nu)}$ можна обчисляти, не користуючись їх проміжними значеннями при $\nu' < \nu$. Схема обчислення в цьому випадку має вигляд

$$A_i^{(\nu)} = -\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} A_{i-j}^{(\nu)} S_j^{(\nu)},\ A_0^{(\nu)} = a_0^{p^\nu},$$

$$B_{i,l}^{(\nu)} = -\sum_{j=1}^{i} A_{i-j}^{(\nu)} S_{j;l}^{(\nu)}, \tag{12}$$

де

$$S_m^{(\nu)} = S_{mk}^{(\nu-1)}\quad (m = 1,2,\ \ldots,\ n),$$

$$S_m^{(\nu)} = -\frac{1}{A_0^{(\nu-1)}}\sum_{j=1}^{n} A_j^{(\nu-1)} S_{m-j}^{(\nu)}\quad (np \geqslant m > n),$$

$$S_{m;l}^{(\nu)} = S_{mk;l}^{(\nu-1)}\quad (m = 1,2\ , \ldots, n),$$

$$S_{m;l}^{(\nu)} = -\frac{1}{A_0^{(\nu-1)}}\sum_{j=1}^{n} A_j^{(\nu-1)} S_{m-j;l}^{(\nu)}\quad (np \geqslant m > n),$$

причому

$$S_m^{(0)} = S_m,\ S_{m;l}^{(0)} = S_{m-l},\ S_{m;l}^{(0)} = 0\ \ (m \leqslant l).$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots),\ (m = 1, 2, \ldots, n),\ (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Формули (11) і (12) мають практичне значення тільки для поліномів. У випадку ряду Тейлора ($a_0 \neq 0$) для визначення $n+1$ перших коефіцієнтів $a_i^{(k)}$ і $b_{i;l}^{(k)}$ зручна така схема:

а) за другою формулою (2) утворюємо послідовність $S_1, S_2, \ldots, S_{nk}$;

б) із даної послідовності обираємо підпослідовності $S_k, S_{2k}, \ldots, S_{nk}, S_{k-l}, S_{2k-l}, \ldots, S_{nk-l}$;

в) користуючись даними підпослідовностями за формулами (2) і (10), обчислюємо коефіцієнти $a_i^{(k)}$ і $b_{i;l}^{(k)}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Костовский. Основная теорема метода Лемера численного определения нулей полиномов, целых и голоморфных функций. УМН, т. XVI, в. 4 (100), 202—204 (1961).

2. А. Н. Костовский. Обобщенные формулы преобразований в методе Лобачевского—Греффе численного определения нулей полиномов, целых и голоморфных функций. Журнал выч. мат. и мат. физ., т. 1, 2, 346—348 (1961).

3. E. Netto. Vorlesungen über Algebra. Bd. 1, Lpz. (1900).

ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

І. В. СКРИПНИК

ДО ПИТАННЯ ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

На можливість проведення деякої аналогії між аналітичними функціями комплексної змінної і розв'язками деякої еліптичної системи рівнянь вказував ще Пікар у 1891 р. Але ця ідея залишалась довгий час без належної уваги. В 1943 р. Л. Берс і А. Гельбарт дослідили функції $f(z)=u+iv$ $(z=x+iy)$, які задовольняють систему $\sigma_1(x)u_x = \tau_1(y)v_y$; $\sigma_2(x)u_y=-\tau_2(y)v_x$ (на σ_1, σ_2, τ_1, τ_2 накладають певні обмеження) і переносять на них такі властивості аналітичних функцій, як похідна, розклад Тейлора, теорема і формула Коші. Основні їх результати викладені в обзорі І. Г. Петровського [5]. Дальший розвиток цих питань дали Л. Берс, І. Н. Векуа, А. І. Маркушевич, Г. Н. Положій, М. А. Лукомська та ін. В роботі [4] Я. Б. Лопатинський розглядає аналогічні питання для випадку системи рівнянь вигляду $Au=Bv$; $Bu=-Av$, де A, B — лінійні диференціальні оператори довільного однакового порядку. Одним з обмежень на оператори A, B є їх комутативність. У даній роботі ця умова послаблюється.

§ 1

Нехай

$$A=\sum_{k+l\leqslant m} a_{k,l}\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\, dy^l}\,;\quad B=\sum_{k+l\leqslant n} b_{k,l}\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}$$

лінійні диференціальні оператори, коефіцієнти яких $a_{k,l}$, $b_{k,l}$ є аналітичними в області Ω, дійсними функціями дійсних аргументів x, y, припускається, що результант Δ форм $\sum\limits_{k+l=m} a_{k,l}\lambda^k\mu^l$; $\sum\limits_{k+l=n} b_{k,l}\lambda^k\mu^l$ відмінний від нуля в кожній точці області Ω.

Властивості системи

$$Au=f;\quad Bu=g \tag{1}$$

(f, g функції x, y, аналітичні в Ω) вивчаються в роботі [4].

Означення. Система (1) називається сумісною, якщо для всяких лінійних диференціальних операторів P, Q з коефіцієнтами, аналітичними в Ω, з $PA=QB$ йде $Pf=Qg$.

Теорема 1. Для того, щоб система (1) мала аналітичний в Ω розв'язок, необхідно і достатньо, щоб вона була сумісною. Всякий розв'язок системи (1) диференційований $m+n-1$ разів в деякій області

$\Omega_1 \subseteq \Omega$, є аналітичним в Ω_1 і аналітично продовжується в Ω. Однорідна система (1) має скінченну кількість лінійно незалежних в Ω_1, аналітичних в Ω рішень.

Доведення. Необхідність очевидна. Для $m=0$ або $n=0$ очевидна і достатність. Припускаємо, що $m \geqslant 1$ і $n \geqslant 1$. Нехай система сумісна. Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^k \partial y^l} Au = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^k \partial y^l} f \quad (k+l=n-1);$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^k \partial y^l} Bu = \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^k \partial y^l} g \quad (k+l=m-1).$$

Детермінант з коефіцієнтів при похідних $\frac{\partial^{m+n-1} u}{\partial x^k \partial y^l}$ $(k+l=m+n-1)$ дорівнює Δ, відмінний, за припущенням, від нуля в кожній точці області Ω, і тому система може бути приведена до вигляду

$$\frac{\partial^{m+n-1} u}{\partial x^k \partial y^{m+n-1-k}} = \sum_{i+j<m+n-1} c_{i,j}^{(k)} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} + P_k f + Q_k g \quad (k=0; \ldots, m+n-1). \tag{2}$$

Тут $c_{i,j}^{(k)}$ аналітичні в Ω і P_k, Q_k — диференціальні оператори порядків $n-1$ і $m-1$ відповідно з аналітичними в Ω коефіцієнтами. Далі розглянемо систему рівнянь відносно $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} u$ $(k+l<m+n-1)$:

$$(PA+QB)u = Pf + Qg, \tag{3}$$

де P, Q — диференціальні оператори з аналітичними в Ω коефіцієнтами, такі, що $PA+QB$ — оператор порядку, меншого від $m+n-1$. Ця система має розв'язок, що випливає з сумісності системи (1). Нехай (x_0, y_0) така точка із Ω, в якій система (3) має розв'язок в полі дійсних чисел. З наступного буде випливати, що всяка точка має цю властивість. Нехай $P_{k,l}^{(0)}$ $(k+l<m+n-1)$ — система чисел, яка ототожнює (3) в точці (x_0, y_0) при підстановці їх замість $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} u$. Покажемо, що існує і притому єдиний розв'язок системи (1), аналітичний в околі (x_0, y_0) і такий, що задовольняє початкові умови: в точці (x_0, y_0) $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} u = P_{k,l}^{(0)}$ $(k+l<m+n-1)$. Єдиність випливає з того, що початкові умови однозначно визначають значення всіх похідних від u в точці (x_0, y_0). Ці значення ми одержуємо з (2) або з рівнянь, одержаних диференціюванням (2), і вони будуть визначатися однозначно, оскільки зрівнювання двох виразів однієї і тієї самої похідної приводить до співвідношення вигляду (3), справедливому при $x=x_0$, $y=y_0$,

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} u = P_{k,l}^{(0)} .$$

Збіжність ряду

$$\sum_{k,l \geqslant 0} \left(\frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k \partial y^l} \right)_{(x_0, y_0)} \cdot \frac{(x-x_0)^k \cdot (y-y_0)^l}{k!\, l!}$$

можна довести методом мажорант. Його сума і буде шуканим розв'язком.

Нехай тепер $u(x, y)$ $m+n-1$ раз диференційоване рішення системи (1) в деякій області $\Omega_1 \subseteq \Omega$. Нехай $\frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k dy^l} = p_{k,l}$ в точці (x, y). На основі (2) $p_{k,l} (k+l \leqslant m+n-2)$ задовольняють систему рівнянь

$$p_{k,l} = (p_{k,l})_{(x_0, y_0)} + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} p_{k+1,l}\, d\xi + p_{k,l+1}\, d\eta \quad (k+l < m+n-2),$$

$$p_{k,l} = (p_{k,l})_{(x_0,y_0)} + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \Big\{ \Big(\sum_{i+j<m+n-1} c_{i,j}^{k+1} p_{i,j} + P_{k+1} f + Q_{k+1} g \Big) d\xi +$$

$$+ \Big(\sum_{i+j<m+n-1} c_{ij}^{(k)} p_{i,j} + P_k f + Q_k g \Big) d\eta \Big\} \quad (k+l = m+n-2).$$

Шлях інтегрування прямолінійний і належить області Ω_1. Підстановкою $\xi = x_0 + (x - x_0)t$; $\eta = y_0 + (y - y_0)t$ приведемо систему до системи інтегральних рівнянь (відносно $p_{k,l}$). Застосовуючи метод послідовних наближень, одержимо розв'язок цієї системи у вигляді границі рівномірно збіжної в деякому околі Ω_2 точки (x_0, y_0) послідовності аналітичних в Ω_2 функцій. Звідси випливає аналітичність розв'язку $u(x, y)$. Оскільки окіл Ω_2, очевидно, залежить тільки від області аналітичності коефіцієнтів операторів A, B, f, g, то можливе аналітичне продовження $u(x, y)$ на Ω.

З того, що система (3) має скінченну кількість розв'язків, випливає, що однорідна система (1) має скінченну кількість лінійно незалежних в Ω, аналітичних в Ω розв'язків. Ця кількість дорівнює різниці між $\frac{(m+n-1)(m+n)}{2}$ і рангом системи (3). З можливості аналітичного продовження рішень у Ω виходить, що ранг системи (3) зберігає постійну величину в кожній точці області Ω.

Ця теорема може бути уточнена, якщо припустити далі, що оператори A, B однакового порядку n і існують оператори A_1, B_1 того самого порядку n, які не вироджуються в жодній точці області Ω, такі, що $A_1 B = B_1 A$. Ці припущення будемо зберігати надалі. В цьому випадку має місце

Теорема 2. Кількість лінійно незалежних рішень однорідної системи дорівнює n^2, при цьому початкові умови похідних u до порядку $n-1$ можуть бути заданими довільно, а серед похідних порядку $2n-k$ довільних $k-1$. Умовою сумісності системи (1) є $B_1 f = A_1 g$.

Д о в е д е н н я. Передусім доведемо, що всякий оператор вигляду $CA + DB$ може бути зображений у вигляді $PA + QB$, де порядки PA, QB не перевищують порядку $PA + QB$, причому $C = P + EB_1$; $D = Q - EA_1$. Нехай

$$C = \sum_{k+l \leqslant p} c_{k,l} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\, \partial y^l}\, ; \; D = \sum_{k+l \leqslant p} d_{k,l} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\, dy^l}$$

і порядки CA, DBбільші від порядку $CA + DB$, тоді

$$\Big(\sum_{k+l=p} c_{kl}\,\lambda^k\,\mu^l\Big)\cdot\Big(\sum_{k'+l'=n} a_{k'l'}\,\lambda^{k'}\,\mu^{l'}\Big)+\Big(\sum_{k+l=p} d_{kl}\,\lambda^k\,\mu^l\Big)\cdot\Big(\sum_{k'+l'=n} b_{k'l'}\,\lambda^{k'}\,\mu^{l'}\Big)=0.$$

Тоді, оскільки результант форм $\sum\limits_{k+l=n} a_{kl}\,\lambda^k\mu^l$, $\sum\limits_{k+l=n} b_{kl}\,\lambda^k\mu^l$ відмінний від нуля в Ω, то

$$\sum_{k+l=p} c_{kl}\,\lambda^k\,\mu^l=\Big(\sum_{k+l=p-n} e_{kl}\,\lambda^k\mu^l\Big)\cdot\Big(\sum_{k'+l'=n} b_{k'l'}\,\lambda^{k'}\,\mu^{l'}\Big),$$

$$\sum_{k+l=p} d_{kl}\,\lambda^k\,\mu^l=-\Big(\sum_{k+l=p-n} e_{kl}\,\lambda^k\,\mu^l\Big)\cdot\Big(\sum_{k'+l'=n} a_{k'l'}\,\lambda^{k'}\,\mu^{l'}\Big).$$

З умови $B_1A=A_1B$ видно, що

$$\sum_{k+l=n} b_{kl}^{(1)}\,\lambda^k\,\mu^l=e(x,\,y)\cdot\sum_{k'+l'=n} b_{k'l'}\,\lambda^{k'}\,\mu^{l'},$$

$$\sum_{k+l=n} a_{kl}^{(1)}\,\lambda^k\,\mu^l=e(x,\,y)\cdot\sum_{k'+l'=n} a_{k'l'}\,\lambda^{k'}\,\mu^{l'},$$

причому $e(x,\,y)$ не дорівнює нулю в області Ω.

Покладемо

$$E_1=\sum_{k+l=p-n} e_{kl}\,\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}\cdot\frac{1}{e(x,y)};\quad \begin{matrix} C=C_1+E_1\cdot B_1,\\ D=D_1-E_1\cdot A_1.\end{matrix}$$

Одержимо $CA+DB=C_1A+D_1B$ і порядки C_1A, D_1B менші від порядків CA, DB. Такий процес може бути продовжений і приводить до доведення твердження. Звідси виходить, що якщо $CA+DB=0$, то $C=EB_1$; $D=-EA_1$. Тому єдиною достатньою (і необхідною) умовою сумісності системи (1) є $B_1f=A_1g$. Далі система (3) еквівалентна системі незалежних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}Au=\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}f,\quad -\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}Bu=\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}g,\ (k+l\leqslant n-2)$$

(пустої при $n<2$). Звідси виходить, що початкові значення похідних $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}$ $(k+l\leqslant n-1)$ залишаються довільними, а серед похідних порядку $2n-k$ $(2\leqslant k\leqslant n)$ довільних буде $k-1$. Ранг системи (3) дорівнює $n(n-1)$, а кількість лінійно незалежних рішень однорідної системи (1) дорівнює $(2n-1)n-(n-1)n=n^2$, що і треба було довести. Таким чином, в кожній точці $(x_0,\,y_0)$ в рівняннях (3) міститься n^2 незалежних похідних, які будуть називатися параметричними.

З а у в а ж е н н я. Для існування операторів A_1, B_1 з потрібними властивостями необхідно і достатньо, щоб ранг матриці

$$\left(\alpha_{(m,p),(k,l,r)}\right)_{m,p=0,\dots,2n}^{k,l=0,\dots,n;\ r=1,2}$$

$$\alpha_{(m,p),(k,l,r)}=\sum_{\substack{i+k-\mu=m\\ i+j=n}}\ \sum_{j+l-\nu=p} C_l^\nu C_k^\mu\cdot\frac{\partial^{\nu+\mu}\beta_{j,i}^{(r)}}{\partial x^\nu\cdot\partial y^\mu};\quad \begin{matrix}\beta_{i,j}^{(1)}=a_{i,j}\\ \beta_{i,j}^{(2)}=b_{i,j}\end{matrix}$$

був менший від меншого з її вимірів $(n+1)(n+2)$ в усіх точках області Ω.

§ 2

Тепер буде розглянена система

$$Au = Bv; \; Bu = -Av. \tag{4}$$

Характеристична функція системи

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{k+l=n} a_{k,l}\lambda^k\mu^l & -\sum\limits_{k+l=n} b_{k,l}\lambda^k\mu^l \\ \sum\limits_{k+l=n} b_{k,l}\lambda^k\mu^l & \sum\limits_{k+l=n} a_{k,l}\lambda^k\mu^l \end{vmatrix}$$

є, очевидно, додатно визначеною формою. Система (4), отже, є еліптичною. Достатньо гладке рішення такої системи буде аналітичним. Аналітичні в деякій області $\Omega_1 \subseteq \Omega$ функції u, v, які задовольняють цю систему, будуть називатися спряженими (цей зв'язок не симетричний). Функція $w = u + iv$, яка має властивості, що узагальнюють властивості аналітичної функції аргументу $x + iy$, буде називатися (A, B)-аналітичною. Очевидно, система (4) рівносильна рівнянню

$$(A + iB)w = 0. \tag{5}$$

Система $Au = 0$, $Bu = 0$ має, як відзначалось, n^2 лінійно незалежних рішень, аналітичних в Ω: $\omega_1, \ldots, \omega_{n^2}$. Очевидно, ω_i — (A, B) аналітичні. Всяка (A, B)-аналітична функція, що задовольняє вимогу $Aw = 0$, лінійно залежить від $\omega_1, \ldots, \omega_{n^2}$. (A, B)-аналітичні функції мають деякі узагальнені похідні.

Теорема 3. Нехай w, w_0 — (A, B)-аналітичні функції в деякій області $\Omega_1 \subseteq \Omega$, причому $Aw_0 \neq 0$. Нехай (x, y), (x_i, y_i), $(i = 1, \ldots, n^2)$ є точки із Ω. Нехай далі в точці $(x, y) \in \Omega_1$ $Aw_0 \neq 0$ і

$$\delta(w, x, y, x_1 y_1, \ldots, x_{n^2}, y_{n^2}) = \begin{vmatrix} w(x, y) & \omega_1(x, y) & \ldots & \omega_{n^2}(x, y) \\ w(x_1, y_1) & \omega_1(x_1, y_1) & \ldots & \omega_{n^2}(x_1, y_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w(x_{n^2}, y_{n^2}) & \omega_1(x_{n^2}, y_{n^2}) & \ldots & \omega_{n^2}(x_{n^2} y_{n^2}) \end{vmatrix} \tag{6}$$

Якщо $x_i \to x$, $y_i \to y$ $(i = 1, \ldots, n^2)$ і притому так, що

$$\frac{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2} \quad (i, j = 1, \ldots, n^2)$$

залишаються обмеженими і точки з однорідними координатами $(x_1 - x) : (y_1 - y) : \ldots : (x_{n^2} - x) : (y_{n^2} - y)$ не скупчуються біля деякої алгебраїчної поверхні (яка визначається формулою (6) в роботі [4]). То

$$\frac{\delta(w, x, y, x_1, y_1, \ldots, x_{n^2}, y_{n^2})}{\delta(w_0, x, y, x_1, y_1, \ldots, x_{n^2}, y_{n^2})} \to \frac{Aw}{Aw_0}.$$

Доведення нічим не відрізняється від доведення, даного в роботі [4].

Теорема 4. Якщо w є (A, B)-аналітичною функцією, то Aw є (A_1, B_1)-аналітичною функцією в тій самій області.

§ 3

Тут буде даний локальний розклад (A, B)-аналітичної функції по елементарним (A, B)-аналітичним функціям, розклад, що узагальнює Тейлоровий.

Припустимо, що існує скінченне число A_j, B_j $(j = 0, \ldots, m-1)$ таких, що $A_{j+1} B_j = B_{j+1} A_j$ (усі A_j, B_j — оператори одного і того самого порядку n з аналітичними в Ω коефіцієнтами), причому

$$A_0 \equiv A_m \equiv A, \quad B_0 \equiv B_m \equiv B.$$

Будемо говорити тоді, що система (A, B) включається в цикл порядку m. Нехай $(x_0, y_0) \in \Omega$ $\dfrac{\partial^{i_s + j_s}}{\partial x^{i_s} \partial y^{i_s}} = D_s (s = 1, \ldots, n^2)$ параметричні похідні пари (A, B) (легко бачити, що вони можуть бути взяті як параметричні похідні і для інших пар).

Нехай $\omega_t^{(o,p)}$ $(t = 1, \ldots, n^2)$ — аналітичне рішення системи $A_p u = 0$, $B_p u = 0$ $(p = 0, \ldots, m-1)$, що задовольняє початкові умови: при $s \neq t$ $(D_s \omega_t^{(o,p)})_0 = 0$, при $s = t$ $(D_s \omega_t^{(o,p)})_0 = 1$. Знаком $(\ldots)_0$ позначається значення виразу в дужках при $x = x_0$, $y = y_0$. Якщо $\omega_t^{(k,p)}$ $(t = 1, \ldots, n_2)$ визначені і є функціями $(A_{\bar{k}}, B_{\bar{k}})$-аналітичними в околі (x_0, y_0) $[1 \leqslant \bar{k} \leqslant m,\ \bar{k} \equiv p - k (mod\, m)]$, то $\omega_t^{(k+1,p)}$ означає рішення системи $A_{\overline{k-1}} u = \omega_t^{(k,p)}$; $B_{\overline{k-1}} u = i\omega_t^{(k,p)}$, що задовольняє умови $(D_s \omega_t^{(k+1,p)})_0 = 0$ $(s, t = 1, \ldots, n^2)$. Система $A_{\overline{k-1}} u = \omega_t^{(k,p)}$, $B_{\overline{k-1}} u = i\omega_t^{(k,p)}$ сумісна, оскільки $B_{\bar{k}} \omega_t^{(k,p)} = A_{\bar{k}} (i\omega_i^{(k,p)})$. Очевидно, $\omega_t^{(k+1,p)}$ є функцією $(A_{\overline{k-1}}, B_{\overline{k-1}})$-аналітичною в області Ω. Розв'язок $\omega_t^{(k,p)}$ є функцією точок (x, y), (x_0, y_0).

Теорема 5. Всяка (A, B)-аналітична в околі точки (x_0, y_0) функція w розкладається і притому єдиним чином в ряд, який рівномірно і абсолютно збігається в деякому околі точки (x_0, y_0):

$$w(x, y) = \sum_{\frac{k-p}{m}=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{t=1}^{n^2} \omega_t^{(k,p)} (x, y, x_0, y_0) \cdot (D_t A^{(k,p)} w)_0, \tag{7}$$

$$A^{(k,p)} = A_{p-1} A_{p-2} \ldots A_0 \left(\prod_{i=m-1}^{0} A_i \right)^{\frac{k-p}{m}}.$$

Доведення розпадається на декілька частин. Спочатку буде показано, що

$$(D_t A^{(k,p)} w)_0 \ (t = 1, \ldots, n^2), (p = 0, \ldots, m-1), \left(\frac{k-p}{m} = 0, 1, \ldots \right)$$

однозначно визначають функцію w. Зауважимо, що з $A_j w_j = - iB_j w_j$ (w_j — довільна (A_j, B_j)-аналітична функція) випливає, що $(D_t A^{(k,p)} w)_0$ визначають також $(D_t (A, B)^{(k,p)} w_0)$, де через $(A, B)^{(k,p)}$ позначено вираз, аналогічний $A^{(k,p)}$, з заміною довільних A_j на відповідні B_j. З другого боку, кожна похідна $\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}$ може бути зображена у вигляді

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} = \sum_{t=1}^{n^2} c_{t,j}^{(k,l)} D_t + P_{k,l}^{(j)} A_j + Q_{k,l}^{(j)} B_j, \tag{8_j}$$

де $c_{t,j}^{k,l}$ — аналітичні функції (x, y); $P_{k,l}^{(j)}$, $Q_{k,l}^{(j)}$ — оператори порядку, не вищого ніж $k+l-n$, з аналітичними коефіцієнтами. Використовуємо спочатку формулу (8_0), потім перетворюємо аналогічно похідні, які входять у $P_{kl}^{(0)}$, $Q_{kl}^{(0)}$, але використовуючи вже формулу (8_1), далі робимо аналогічно, використовуючи послідовно $(8_2), \ldots, (8_{m-1}), (8_0)$... Нарешті одержимо

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} = \sum_{t=1}^{n^2} \sum_{q \leqslant \left[\frac{k+l}{n}\right]} c_{tpq}^{(k,l)} D_t(\boldsymbol{A}, B)^{(q,p)}, \tag{8}$$

де $c_{tpq}^{(k,l)}$ — аналітичні функції. Таким чином, значення $(D_t(A, B)^{q,p} w)_0$ визначають значення $\left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} w\right)_0$ і, отже, аналітичну в околі (x_0, y_0) функцію w.

Тепер буде доведена рівномірна і абсолютна збіжність в деякому околі точки (x_0, y_0) ряду формули (7). Для цього будуть спочатку одержані оцінки $\omega_t^{(k,p)}$ і $(D_t A^{(k,p)} w)_0$. Як видно з формул (8), при $q \geqslant 1$ $\left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} \omega_t^{(q,p)}\right)_0 = 0$ при $k+l \leqq nq-1$. Таким чином, при $q \geqslant 1$, за формулою (4), функції $\omega_t^{(q+1,p+1)}$ визначаються системою (для простоти далі нижній індекс t будемо опускати)

$$\frac{\partial^{2n-1} u}{\partial x^k \partial y^{2n-1-k}} = \sum_{i+j<2n-1} c_{ij}^{(k)} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} + (P_k + iQ_k)\, \omega^{(q,p+1)} \quad (k = 0, \ldots, 2n-1)$$

(коефіцієнти цієї системи не будуть залежати від p, тому що $\omega_t^{(k,p)}$ $(k - p \equiv 0 \pmod m)$ — (A, B)-аналітичні) і нульовими початковими умовами $\left(\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} u\right)_0 = 0$ $(0 \leqslant i+j \leqslant 2n-2)$. Оператори P_k, Q_k мають порядки $n-1$. Нехай при $|x - x_0| \leqslant r$ $|y - y_0| \leqslant r$, $r \leqslant 2$; $c_{ij}^{(k)}$ і коефіцієнти P_k, Q_k аналітичні. Тоді для $c_{ij}^{(k)}$ і коефіцієнтів P_k, Q_k можна вказати мажоранти вигляду $\dfrac{N}{1 - \dfrac{x - x_0 + y - y_0}{r}}$ (припустимо, що це також мажоранта для відповідних коефіцієнтів для інших пар A_j, B_j), для $\omega^{(q,p+1)}$ — мажоранти вигляду $\zeta_{q,p+1} = \dfrac{M_{p+1}^{(q)} \cdot \left[2\dfrac{x - x_0 + y - y_0}{r}\right]^{nq}}{1 - 2\dfrac{x - x_0 + y - y_0}{r}}$.

Покладаючи $\xi = 2\dfrac{x - x_0 + y - y_0}{r}$ і зауважуючи, що при $i' + j' > i + j$ $\dfrac{\partial^{i'+j'}}{\partial x^{i'} \partial y^{j'}} \zeta_{q,p+1}$ мажорує $\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \zeta_{q,p+1}$ (одержується зображенням $\zeta_{q,p+1}$

у вигляді ряду по ξ, диференціюванням і прирівнюванням відповідних коефіцієнтів), можна зобразити мажорантну систему у вигляді

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^k \partial y^{2n-1-k}} u = \frac{N}{1-\frac{\xi}{2}} \sum_{i+j\leqslant 2n-2} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} +$$

$$+ \frac{M_{p+1}^{(q)} \cdot N \cdot n(n-1)}{1-\frac{\xi}{2}} \cdot \left(\frac{2}{r}\right)^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} \left(\frac{\xi^{nq}}{1-\xi}\right).$$

Всяке рішення цієї системи з нульовими початковими умовами буде мажорувати $\omega^{(q+1,p+1)}$. Будемо шукати мажоранту у вигляді функції ξ, тоді для її визначення одержують рівняння

$$\frac{d^{2n-1} u}{d\xi^{2n-1}} = \frac{N \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{2n-1}}{1-\frac{\xi}{2}} \sum_{i\leqslant 2n-2} (i+1) \cdot \left(\frac{2}{r}\right)^i \cdot \frac{d^i u}{d\xi^i} +$$

$$+ \frac{M_{p+1}^{(q)} \cdot N \cdot n(n-1) \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^n}{1-\frac{\xi}{2}} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} \left(\frac{\xi^{nq}}{1-\xi}\right) \tag{9}$$

і початкові умови $\frac{d^i u}{d\xi^i}$ при $\xi = 0$. Знаходячи з рівняння (9) коефіцієнт, з яким $\frac{\partial^{2n-1} u}{d\xi^{2n-1}}$ мажорує $\frac{d^{2n-2} u}{d\xi^{2n-2}}$, і зауважуючи, що тоді $\frac{d^{2n-2} u}{d\xi^{2n-2}}$ буде з відповідними коефіцієнтами мажорувати молодші похідні, можемо змажорувати рівняння (9) лінійним рівнянням першого порядку відносно $\frac{d^{2n-2} u}{d\xi^{2n-2}}$.

А саме, розв'язок рівняння

$$\frac{d^{2n-1} v}{d\xi^{2n-1}} = \frac{N \cdot n(2n-1) r}{1-\frac{\xi}{2}} \cdot \frac{d^{2n-2} v}{d\xi^{2n-2}} +$$

$$+ \frac{M_{p+1}^{(q)} \cdot N \cdot n(n-1) \cdot r^n}{1-\frac{\xi}{2}} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} \left(\frac{\xi^{nq}}{1-\xi}\right), \tag{10}$$

яке задовольняє нульовим початковим умовам, мажорує шукане рішення рівняння (9). Відзначимо: при $Nn(2n-1)r \leqslant 1$; $\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left[\frac{\eta^{nq}}{\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{1-N_1 r} \cdot (1-\eta)} \right]$ мажорує $\frac{1}{\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{1-N_1 r}} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left(\frac{\eta^{nq}}{1-\eta}\right)$ $[N_1 = Nn(2n-1)]$, що легко одержуємо, зауважуючи, що при $1 - N_1 r \geqslant 0$ $\dfrac{1}{\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{1-N_1 r}}$ розкладається по η з додатними коефіцієнтами). Інтегруючи рівняння (10) і використовуючи тільки що відзначений факт, одержуємо для $\omega^{(q+1,p+1)}$ мажоранту

$$w_{p+1}^{(q+1)} = M_{p+1}^{(q)} \cdot N_1 \cdot r^n \int\limits_0^{\xi} \frac{(\xi-\eta)^{n-1}}{(n-1)\,!} \cdot \frac{\eta^{nq}}{(1-\eta)\left(1-\frac{\eta}{2}\right)}\, d\eta. \tag{11}$$

Інтегруємо n раз по частинах:

$$w_{p+1}^{(q+1)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot M_{p+1}^{(q)} \cdot N_1 \cdot r^n}{(nq+1)\ldots.(nq+n)} \left\{ \frac{\xi^{n(q+1)}}{\left(1-\frac{\xi}{2}\right)(1-\xi)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(n-1)\,!} \int\limits_0^{\xi} \frac{\partial^n}{\partial \eta^n} \left[\frac{(\xi-\eta)^{n-1}}{(1-\eta)\left(1-\frac{\eta}{2}\right)} \right] \eta^{n(q+1)}\, d\eta \right\}.$$

Легко перевірити, що $\dfrac{2}{1-\xi}$ мажорує $\dfrac{1}{(1-\xi)\left(1-\frac{\xi}{2}\right)}$. Залишається показати, що інтеграл у формулі (11) має мажоранту вигляду $\dfrac{N_0\, \xi^{n(q+1)}}{1-\xi}$, де N_0 не залежить від q. Цей інтеграл зображується як лінійна комбінація з постійними (не залежними від q) коефіцієнтами інтегралів вигляду

$$\int\limits_0^{\xi} \frac{(\xi-\eta)^{n-1-i}}{(1-\eta)^{1+j}\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{1+k}} \cdot \eta^{n(q+1)}\, d\eta \quad (i+j+k=n,\ i \leqslant n-1).$$

Досить показати, що кожний інтеграл має мажоранту вигляду $\dfrac{N_0\, \xi^{n(q+1)}}{1-\xi}$ з не залежними від q N_0 або що $\dfrac{\xi^{n(q+1)}}{(1-\xi)^{1+j}\cdot\left(1-\frac{\xi}{2}\right)^{1+k}}$ має мажоранту вигляду $N_0 \dfrac{d^{n-i}}{d\xi^{n-i}} \left[\dfrac{\xi^{nq}}{1-\xi}\right]$.

Таким чином, одержується мажоранта для $\omega^{(q+1,p+1)}$.

$$\zeta_{(q+1,p+1)} = \frac{N_2 \cdot M_{p+1}^{(q)} \cdot r^n}{(nq+1)\ldots(nq+n)} \cdot \frac{\xi^{n(q+1)}}{1-\xi},$$

де N_2 не залежить від q і, отже, $M_{p+1}^{(q+1)} = \dfrac{M_{p+1}^{(q)} \cdot N_2 \cdot r^n}{(nq+1)\ldots(nq+n)}$.

Звідси

$$M_{p+1}^{(q)}=\frac{M_{p+1}^{(0)}\cdot(N_2r^n)^q}{(nq)!}.$$

Оскільки $0\leq p\leq m-1$, то з $M_{p+1}^{(0)}$ можна вибрати найбільше й одержати мажоранту для $\omega^{(q,p)}$, яка не залежить від p:

$$\zeta_q=\frac{M\cdot(N_2r^n)^q}{(nq)!}\cdot\frac{\xi^{nq}}{1-\xi},$$

де M не залежить ні від q, ні від p.

Тепер одержимо мажоранту для $(D_tA^{(k,p)}w)_0$. Зауважуючи, що $\frac{2}{(1-\xi)^{np}}$ мажорує $\frac{1}{\left(1-\frac{\xi}{2}\right)(1-\xi)^{np}}$, за індукцією легко встановити наступну мажоранту для $A^{(q,p)}w$ (мажоруючи коефіцієнти A_j єдиною функцією $\frac{N}{1-\frac{\xi}{2}}$, а Aw — функцією $\frac{N_3}{1-\xi}$):

$$\frac{M_0\cdot(N_4r^{-n})^q\cdot[n(q-1)]!}{(1-\xi)^{n(q-1)+1}}$$

(вона не залежить від p). Але тоді

$$|(D_tA^{(q,p)}w)_0|\leq(nq)!\,M_0\cdot(N_4r^{-n})^q\cdot[n(q+1)]^n$$

і при $|\xi|\leq\frac{1}{2\sqrt[n]{N_2N_4}}$ ряд $\sum\limits_{\frac{k-p}{m}=0}^{\infty}\sum\limits_{p=0}^{m-1}\sum\limits_{t=1}^{n^2}\omega_t^{(k,p)}\cdot(D_tA^{(k,p)}w)_0$ буде рівномірно збіжним. Звідси зразу виходить, що сума цього ряду w_1 є (A,B)-аналітична функція (в деякому околі точки (x_0,y_0)). При цьому

$$(D_tA^{(k,p)}w_1)_0=(D_tA^{(k,p)}w)_0$$

$$(t=1,\ldots,n^2),(p=0,\ldots,m-1),\left(\frac{k-p}{m}=0,1\ldots\right).$$

Дійсно,

$A^{(k,p)}\omega_t^{(q,r)}=0$ при $k>q$ і при $k-p\equiv0\ (mod\ m)$, $q-r\equiv0\ (mod\ m)$,
$\left(D_sA^{(q,p)}\omega_t^{(k,r)}\right)_0=1$ при $s=t$; $q=k$; $k-p\equiv0\ (mod\ m)$, $q-r\equiv0\ (mod\ m)$,
$(D_sA^{(q,p)}\omega_t^{(k,r)})_0=0$ при $s\neq t$; $q=k$; $k-p\equiv0\ (mod\ m)$, $q-r\equiv0\ (mod\ m)$,
$(D_sA^{(q,p)}\omega_t^{(k,r)})_0=0$ при $q<k$; $k-p\equiv0\ (mod\ m)$, $q-r\equiv0\ (mod\ m)$.

Почленне диференціювання ряду можливе, бо ряд рівномірно збігається і в комплексному околі точки (x_0,y_0). Враховуючи зроблені раніше зауваження, звідси випливає, що $w=w_1$, що і треба було довести.

§ 4

Тепер будуть дані аналогії теореми і інтегральної формули Коші. Нехай

$$A' = \sum_{k+l\leqslant n} (-1)^{k+l} \cdot \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} \cdot a_{kl}, \quad B' = \sum_{k,l\leqslant n} (-1)^{k+l} \cdot \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} \cdot b_{kl},$$

спряжені відповідно з A і B оператори (в сенсі Лагранжа). Оператори A', B' мають всі властивості пари A, B. Дійсно, характеристичні форми операторів A', B' і A, B відповідно збігаються, і з $A_m B_{m-1} = B_m A_{m-1}$ виходить $B'_{m-1} A'_m = A'_{m-1} B'_m$.

Нехай $\omega'_1, \ldots, \omega'_{n^2}$ — лінійно незалежні аналітичні в Ω розв'язки системи $A'u = 0$, $B'u = 0$. Нехай

$$v\,Au - u\,A'v = \frac{\partial}{\partial x} N(u, v) - \frac{\partial}{\partial y} M(u, v),$$

$$v\,Bu - u\,B'v = \frac{\partial}{\partial x} Q(u, v) - \frac{\partial}{\partial y} P(u,v),$$

де M, N, P, Q — диференціальні білінійні форми. Якщо $w = u + iv$ довільна (A, B)-аналітична функція, w' — (A', B')-аналітична функція в області $\Omega_1 \subseteq \Omega$ і C кусково-гладкий контур, який лежить в Ω_1, то з формули Гріна одержимо

$$0 = \int\limits_{\Omega_C} \{w'(A + iB)w - w(A' + iB')w'\}\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{\Omega_C} \left[\frac{\partial}{\partial x}(N + iQ) - \frac{\partial}{\partial y}(M + iP)\right] d\tau =$$

$$= \int\limits_{C} [M(w, w') + iP(w, w')]\, dx + [N(w, w') + iQ(w, w')]\, dy.$$

Зокрема,

$$\int\limits_{C} \{M(w, \omega'_s) + iP(w, \omega'_s)\}\, dx + \{N(w, \omega'_s) + iQ(w, \omega'_s)\}\, dy = 0 \qquad (12)$$

$$(s = 1, \ldots, n^2).$$

Ці останні формули і являють аналог теореми Коші.

Теорема 6. Якщо w є неперервно диференційована n разів функція в області $\Omega_1 \subseteq \Omega$ і для всякого кусково-гладкого контура C в цій області мають місце формули (12), то $(A + iB)w = 0$ і w — (A, B)-аналітична.

Д о в е д е н н я. Нехай (x_0, y_0) — довільна точка із Ω_1 і $\dot{C}$ — коло круга S довільно малого радіуса з центром (x_0, y_0). Із теореми (1) випливає існування дійсного аналітичного розв'язку ω' системи $A'u = 0$, $B'u = 0$, який задовольняє умову $\omega'(x_0, y_0) = 1$. При цьому ω' лінійно залежить від $\omega'_1, \ldots, \omega'_{n^2}$. Тоді

$$\int_C [M(w, \omega') + iP(w, \omega')]dx + \{N(w, \omega') + iQ(w, \omega')\}dy = 0,$$

$$\int_S\int \omega'(Au - Bv)\,dx\,dy = 0; \quad \int_S\int \omega'(Av + Bu)\,dx\,dy = 0. \qquad (13)$$

Звідси випливає: $Au = Bv$; $Av = -Bu$ в точці (x_0, y_0), тому що співвідношення (13) виконуються для будь-якого круга і $\omega'(x_0, y_0) = 1$. Оскільки точка (x_0, y_0) довільна, то $(A + iB)\, w = 0$ в Ω_1.

Якщо система $A'u = 0$, $B'u = 0$ має рішення ω_1, яке не обертається в нуль, то твердження теореми (6) зберігається при виконанні одного з співвідношень (12), що відповідає $s = 1$. Далі на основі теореми (3) роботи [3], одержимо, що n разів неперервно диференційоване рішення системи (4) є аналітичною функцією. Звідси випливає теорема 6.

Нехай $\Phi(x, y, \xi, \eta)$ — фундаментальний розв'язок (по (x, y) рівняння $(A' + iB')\, w = 0$, пронормований так, що для всякої неперервної разом з похідними до порядку $n - 1$ функції $u(x, y)$

$$\int_\gamma [M(u, \Phi) + iP(u, \Phi)]\,dx + [N(u, \Phi) + iQ(u, \Phi)]\,dy \to 2\pi i \cdot u(\xi, \eta);$$

якщо контур γ, що оточує (ξ, η) стягується до точки (ξ, η). Тоді за формулою Гріна безпосередньо одержується такий аналог інтегральної формули Коші для (A, B)-аналітичної в області Ω_1 і на кусково-гладкій границі C цієї області функції w:

$$w(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i}\int_C [M(w, \Phi) + iP(w, \Phi)]\,dx + [N(w, \Phi) + iQ(w, \Phi)]\,dy,$$

для всякої точки (ξ, η) в області Ω.

На закінчення висловлюю щиру подяку науковому керівникові проф. Я. Б. Лопатинському.

ЛІТЕРАТУРА

1. L. Bers. Theory of pseudo-analytic functions. New York, 1953.
2. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, 1959.
3. Я. Б. Лопатинский. Нормальные фундаментальные решения системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. ДАН СССР, т. 78, 5 865—867 (1951).
4. Я. Б. Лопатинский. Об одном обобщении понятия аналитической функции. УМЖ, 2, 56—73 (1950).
5. И. Г. Петровский. О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными. УМН, вып. 3—4 (13—14), 1, 44—70 (1946).

А. І. МАРКОВСЬКИЙ

ПРО АНСАМБЛІ МІНІМАЛЬНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

В цій статті, спираючись на результати і методи Л. Хермандера, ми даємо деякі узагальнення його теорії мінімальних диференціальних операторів з постійними коефіцієнтами.

Нехай Ω — область в n-мірному евклідовому просторі E^n, $A(D) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ — диференціальний оператор з постійними комплексними коефіцієнтами. Тут $a_\alpha = a_{\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_n}$,

$$D_k = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k},\ D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\ldots\ldots D_n^{\alpha_n},\ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots\ldots + \alpha_n. \tag{1}$$

Далі $C_0^\infty(\Omega)$ позначає множину всіх безмежно диференційовних функцій з компактними носіями, що лежать в Ω. $D(A)$ позначає область визначення оператора A.

Як відомо [1], оператор $A_0 : D(A_0) \to L^2(\Omega)$ називається мінімальним оператором, відповідним до $A(D)$, якщо A_0 є замиканням в $L^2(\Omega)$ оператора $A(D)$ на $C_0^\infty(\Omega)$. Оскільки нижче ми розглядаємо тільки мінімальні оператори, то індекс 0 переважно будемо опускати.

Позначимо через Ω_δ δ-окіл області Ω.

Означення 1[1]. Нехай Ω — обмежена область в E^n з межею Γ. Ми скажемо, що

1) Ω має T_i-властивість, якщо існує таке скінченне покриття $\bigcup\limits_{k=1}^{N} T^k \supset \overline{\Omega}$, що для будь-якого k $(k = 1, \ldots, N)$ і будь-якого $\delta > 0$ можна знайти такий вектор t, що $(\Gamma \cap T^k) + t \subset \Omega$ при $|t| < \delta$;

2) Ω має T_e-властивість, якщо існує таке скінченне покриття, $\bigcup\limits_{k=1}^{N} T^k \supset \overline{\Omega}$, що для будь-якого $k (k = 1, \ldots, N)$ і будь-якого $\delta > 0$ можна знайти такий вектор t, що $(\Gamma \cap T^k) + t \subset \Omega_\delta / \Omega_{\delta/2}$ при $\frac{\delta}{2} < |t| < \delta$.

Лема 1. [2] Нехай Ω має T_i- або T_e-властивість і $A(D)$ — диференціальний оператор з постійними коефіцієнтами. Якщо $u(x) \in L^2(E^n)$ і $A(D)u(x) \in L^2(E^n)$ в значенні теорії узагальнених функцій, і носій $u(x)$ компактний і лежить в $\overline{\Omega}$, то $u \in D(A_0)$ в $L^2(\Omega)$.

Зауваження. Доведення цієї леми у випадку, коли Ω має T_e-властивість, цілком аналогічне випадку T_i-властивості. Для функції $u(x)$, згаданої в лемі 1, будується послідовність $\{\varphi_n(x)\}^\infty$, така, що

[1] T_i-властивість визначена Л. Хермандером в [2].

$$\varphi_n(x) \in C_0^\infty(\Omega), \ (n = 1, 2, \ldots\ldots) \text{ і } \lim_{n\to\infty}(\|\varphi_n - u\| + \|A(\varphi_n - u)\|) = 0.$$

При цьому виявляється, що послідовність $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ в деякому розумінні можна зробити універсальною, а саме такою, що $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ залежать лише від $u(x)$ і геометрії області Ω, але не залежать від $A(D)$, і, таким чином, придатні для будь-якого оператора $A(D)$ з постійними коефіцієнтами.

Переходимо тепер до нашої основної теми.

Нехай $B_0, B_1, \ldots, B_m$ — банахові простори з нормами відповідно $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1, \ldots, \|\cdot\|_m$. Тоді, як відомо, $B = B_0 \times B_1 \times \ldots \times B_m$ з нормою $\|\cdot\|^2 = \|\cdot\|_0^2 + \ldots + \|\cdot\|_m^2$ (або їй еквівалентною) буде також банаховим простором.

Означення 2. Сукупність лінійних операторів $T_1, \ldots, T_m$, $T_i : B_0 \to B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, таких, що $\varnothing \neq D_T = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant m} D(T_i) \subset B_0$, будемо називати ансамблем лінійних операторів.

Означення 3. Нехай $B_0, B_1, \ldots B_m$ — банахові простори, $T_1, \ldots, T_m$ — ансамбль лінійних операторів. Множину $G_T = \{[u, T_1u, \ldots, T_m u], u \in D_T\} \subset B$ називаємо графіком ансамблю лінійних операторів $T_1, \ldots, T_m$.

Коли $m = 1$, це поняття збігається з класичним поняттям графіка оператора, вперше запровадженим Дж. фон Нейманом. Легко доводиться таке твердження:

Лема 2. Якщо оператори $T_1, \ldots, T_m$ замкнені і утворюють ансамбль, то G_T є замкнений підпростір простору B, і, таким чином, G_T є банаховий простір.

Розглянемо тепер таку задачу. Нехай $A_1, \ldots, A_m$ — мінімальні оператори в $L^2(\Omega)$ з областями визначення відповідно $D(A_1), \ldots, D(A_m)$. Треба описати всі ті мінімальні оператори $B(D)$, для яких $D(B) \supset \bigcap_{i=1}^m D(A_i)$.

Задачі, подібні до сформульованої, носять назву теорем вкладення. Вони ставляться в різноманітних банахових функціональних просторах. З цього приводу див. фундаментальну роботу [3] і оглядову статтю [6], де подано повну бібліографію цього питання.

При $m = 1$ ця задача була поставлена і повністю розв'язана Л. Хермандером в [1]. Там же він дослідив структуру областей визначення мінімальних операторів.

Мають місце такі твердження:

Теорема 1. Нехай $B_0, B_1, \ldots, B_{m+1}$ — банахові простори, $T_1, \ldots, T_m$ — ансамбль замкнених лінійних операторів, $T : B_0 \to B_{m+1}$ — лінійний оператор, що допускає замикання. Тоді якщо $D(T) \supset D_T$, то існує така константа C, що

$$\|Tu\|_{m+1}^2 \leqslant C\left(\sum_{i=1}^m \|T_i u\|_i^2 + \|u\|_0^2\right), \ u \in D_T. \tag{2}$$

Доведення. З леми 2 випливає, що G_T замкнене. Отже, відображення

$$G_T \ni [u, T_1 u, \ldots, T_m u] \to Tu \in B_{m+1}$$

визначене на банаховому просторі. Для доведення теореми достатньо встановити, що воно замкнене. Якщо $[u_n, T_1u_n, \ldots, T_mu_n]$ збігається в G_T, а Tu_n збігається в B_{m+1}, то існує $u \in D_T$ такий, що

$$u_n \to u, \; T_i u_n \to T_i u \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Отже, $u \in D(T)$, і оскільки T допускає замикання, то $Tu_n \to Tu$. Залишається застосувати теорему Банаха про замкнений графік.

Переходячи до мінімальних операторів у $L^2(\Omega)$, всюди далі вважаємо, що Ω має T_i- або T_e-властивість.

Теорема 2. Нехай $A_1, \ldots, A_m$ — ансамбль мінімальних операторів в $L^2(\Omega)$. Тоді $D_A = \bigcap\limits_{i=1}^{m} D(A_i)$ утворюється поповненням $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|\cdot\|_* = (\|\cdot\|^2 + \|A_1(\cdot)\|^2 + \ldots + \|A_m(\cdot)\|^2)^{1/2}$.

Справді, нехай $u \in D_A$. Якщо $u(x)$ має компактний носій, що лежить в Ω, то послідовність $\{\psi_n(x)\}_1^\infty$ середніх функцій з радіусом усереднення $\frac{1}{n}$ має, як відомо (див., напр., [3]), ті властивості, що $\psi_n(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \|u - \psi_n\|_* = 0$. В противному випадку ми продовжимо функцію $u(x)$ на E^n, поклавши $u(x) \equiv 0$ при $x \,\overline{\in}\, \Omega$. Тоді можна побудувати послідовність $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, яка буде універсальною в розумінні, згаданому в зауваженні до леми 1. При цьому для кожного i ($i = 1, 2, \ldots, m$) маємо $\lim\limits_{n\to\infty}(\|u - \varphi_n\| + \|A_i(u - \varphi_n)\|) = 0$ і, значить, $\lim\limits_{n\to\infty} \|u - \varphi_n\|_* = 0$, що і потрібно.

Теорема 3. Нехай $B, A_1, \ldots, A_m$ — мінімальні оператори в $L^2(\Omega)$. Для того, щоб $D(B) \supset D_A = \bigcap\limits_{i=1}^{m} D(A_i)$, необхідно і достатньо, щоб існувала така константа C, що

$$\|Bu\|^2 \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n} \|A_i u\|^2 + \|u\|^2\right) \tag{3}$$

для всякої функції $u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$.

Необхідність є наслідком теореми 1.

Д о с т а т н і с т ь. Якщо $u \in D_A$, то на основі теореми 2 існує послідовність $\varphi_n(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ така, що $\|u - \varphi_n\|_* \to 0$ при $n \to \infty$. З (3) випливає, що $\|\varphi_n - \varphi_k\| + \|B(\varphi_n - \varphi_k)\| \to 0$, $k, n \to \infty$. З замкненості оператора B випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = u \in D(B)$.

Таким же способом, як лема 1.6 ([1], стор. 22), доводиться таке твердження:

Теорема 4. Щоб $B(D)u$ для довільного $u \in D_A$ була в значенні теорії узагальнених функцій обмеженою функцією, необхідно і достатньо, щоб існувала така константа C, що

$$\sup_{x\in\Omega} |B(D)u(x)|^2 \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{m} \|A_i u\|^2 + \|u\|^2\right) \tag{4}$$

для всіх $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Якщо ця нерівність виконується, то $B(D)u$ для $u \in D_A$ є рівномірно неперервною функцією після видозміни на множині міри нуль, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує компактна множина $K \subset \Omega$, що $|B(D)u(x)| < \varepsilon$ при $x \in \Omega \backslash K$.

Маючи на меті дати для теорем 3 і 4 алгебраїчні еквіваленти, запровадимо такі позначення. Якщо $A(D) = \sum\limits_{\alpha} a_\alpha D^\alpha$ — диференціальний оператор, то йому відповідає поліном $A(\xi) = \sum\limits_{\alpha} a_\alpha \xi^\alpha$, де $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in E^n$ $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$. Оператор, що відповідає поліному $A^{(\alpha)}(\xi) = \frac{\partial^{|\alpha|} A(\xi)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \ldots \partial \xi_n^{\alpha_n}}$, будемо позначати через $A^{(\alpha)}(D)$. Нарешті, покладемо $\tilde{A}(\xi) = (\Sigma \,|A^{(\alpha)}(\xi)|^2)^{1/2}$.

Ідучи за доведенням теореми 2.2, 2.6 і 2.7 [1] і спираючись на теорему 3 і 4, доводимо такі твердження.

Теорема 5. Нехай $B, A_1, \ldots, A_m$ — мінімальні оператори в $L^2(\Omega)$. Для того, щоб $D(B) \supset D_A$, необхідно і достатньо, щоб існувала така константа C, що

$$|B(\xi)|^2 \leqslant C \sum_{i=1}^{m} \tilde{A}_i^2(\xi) \tag{5}$$

для всіх дійсних ξ.

Коли оператори $B, A_1, \ldots, A_m$ однорідні степені ν, то нерівність (5) можна спростити. Справді, поклавши $\lambda\xi$ замість ξ і переходячи до границі, коли $\lambda \to \infty$, з (5) одержимо:

$$|B(\xi)| \leqslant C \sum |A_i(\xi)|. \tag{6}$$

Отже, ця умова є необхідна і достатня для того, щоб $D(B) \supset D_A$. В випадку однорідних операторів на еквівалентність нерівностей (5) і (6), по суті, вперше звернув увагу Л. Гордінг [4].

Приклад. Нехай $A_1 = D_1^\nu, \ldots, A_n = D_n^\nu$. Тоді легко бачити, що для будь-яких $\mu_1, \ldots, \mu_n$, таких, що $\Sigma \mu_i \leqslant \nu$, маємо

$$|\xi_1^{\mu_1} \ldots \xi_n^{\mu_n}| \leqslant C \sum_{i=1}^{n} |\xi_i^\nu|$$

і, значить, для довільного оператора $B(D)$ порядку не вище ніж ν $D(B) \supset \bigcap\limits_{i=1}^{n} D(D_i^\nu)$. Цей результат є частинним випадком однієї глибокої теореми Н. Ароншайна [5].

Теорема 6. Якщо $B(D)u$ для всіх $u \in D_A$ — неперервна функція після видозміни на множині міри нуль, то

$$\int\limits_{E^n} \frac{|B(\xi)|^2}{\Sigma \tilde{A}_i(\xi)^2} d\xi < \infty.$$

Навпаки, якщо ця умова виконується, то $B(D)u$ для всякої $u \in D_A$ — рівномірно неперервна функція після видозміни на множині міри нуль, і прямує до нуля при наближенні до межі Ω в тому розумінні, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує така компактна множина $K \subset \Omega$, що $|B(D)u| < \varepsilon$ для всіх $x \in \Omega \backslash K$.

Теорема 7. Якщо $B(\xi)/(\sum_{i=1}^{m}\hat{A}_i(\xi)^2)^{1/2} \in L^{\frac{2p}{p-2}}(E^n)$, то $B(D)u \in L^p(\Omega)$ для всякої $u \in D_A$.

Зауважимо ще раз, що теореми 3—7 справедливі в припущенні, що Ω має T_i- або T_e-властивості, оскільки вони спираються на теорему 2. Використовуючи цю останню, можна узагальнити в подібному напрямку деякі інші теореми Л. Хермандера. Ми не будемо їх наводити.

ЛІТЕРАТУРА

1. Л. Хермандер. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. ИЛ, 1959.
2. L. Hörmander. Arciv för Math., Bd. 3, **46** (1958).
3. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1950.
4. L. Gårding. Math. Scand., **1**, 55—72 (1953).
5. N. Aronszajn. Proc. Conf. Partial Differential Equations, Univ. of Kansas. Technical Report, **14**, 94—106 (1954).
6. С. М. Никольский. УМН, т. 16, в. 5 (1961).

Я. Б. ЛОПАТИНСЬКИЙ

ПРО ОДИН ТИП СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Як вказувалося в [1], крайові задачі для систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного типу зводяться до інтегральних рівнянь вигляду (в матричній формі для двох вимірів)

$$u(x)-\int\limits_S \frac{(x-y,\nu(y))}{(x-y)^2}\,\mathfrak{G}\left(x,y,\nu(x),\nu(y),\frac{x-y}{|x-y|}\right)u(y)\,d_yS=f(x).$$

Тут $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $(x,y)=(x_1y_1+x_2y_2)$, $|x|=+\sqrt{(x,x)}$; S — поверхня, що обмежує область, в якій розглядається задача, $\nu(y)$ — одиничний вектор внутрішньої нормалі до S в точці $y\in S$, $\mathfrak{G}(x,y,\xi,\eta,\zeta)$ — квадратна $p\times p$ матриця, неперервна при $x,y\in S$, $|\xi|=1$, $|\eta|=1$, $|\zeta|=1$.

Інтегральний оператор в цьому рівнянні цілком неперервний, якщо крива S задовольняє умову Ляпунова, однак ця його властивість порушується, якщо S має кутові точки.

Метою даної замітки є дослідження цього випадку на підставі недавніх результатів І. Ц. Гохберга і М. Г. Крейна [2].

Нехай $\mathfrak{G}(x,y,\xi,\eta,\zeta)$ — $p\times p$ матриця, визначена при $x,y\in S$, $|\xi|=1$, $|\eta|=1$, $|\zeta|=1$, неперервна і задовольняє умову

$$\mathfrak{G}(x,y,\xi,\eta,\zeta)=O(|(\xi,\zeta)|+|(\eta,\zeta)|).$$

Розглядається оператор

$$\mathfrak{G}u(x)=\int\limits_S \frac{1}{|x-y|}\,\mathfrak{G}\left(x,y,\nu(x),\nu(y),\frac{x-y}{|x-y|}\right)u(y)\,d_yS,$$

при умові, що крива S складається з конечної кількості дуг $S_1, S_2, \ldots, S_n$, які задовольняють умову Ляпунова (нумерація ведеться за додатним обходом).

Припускається, що в кінцевих точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цих дуг кути між нормалями до суміжних дуг відмінні від π.

Далі досліджується індекс оператора $\mathrm{I}-\mathfrak{G}$ (I — одиничний оператор). Припускається, що оператор цей діє в просторі $L_\varepsilon(S)$ функціональних p стовпців $u(x)=(u_1(x),\ldots,u_p(x))$, $(x\in S)$ з нормою

$$|u|=\int\limits_S r^{-\varepsilon}(x)\,|u(x)|\,d_xS=\sum_{k=1}^{p}\int\limits_S r^{-\varepsilon}(x)\,|u_k(x)|\,d_xS.$$

Тут $r(x)$ означає найменше з чисел $|x-a_1|$, $|x-a_2|, \ldots, |x-a_n|$; $0<\varepsilon<1$.

Легко перевіряється обмеженість оператора $\mathfrak{G}$. Для дальшого дослідження кожна дуга S_k ділиться на три зв'язні частини $S_k^{(1)}$, $S_k^{(2)}$, $S_k^{(3)}$, таких, що $S_k^{(1)}$ $(S_k^{(3)})$ — примикає до точки контура a_{k-1} (точки a_k)[1], однозначно проектується на дотичну до S_k в цій точці і при $x\in S_k^{(1)}$ $(x \in S_k^{(3)})$, $r(x)=|x-a_{k-1}|$ $(r(x)=|x-a_k|)$.

Відповідно вводяться простори $L_k^{(i)}(\varepsilon)$ з нормою $\int\limits_{S_k^{(i)}} r^{-\varepsilon}(x)|u(x)|\,d_xS$.

Оператор $\mathfrak{G}$ породжує оператори

$$\mathfrak{G}_{kl}^{(ij)}u(x)=\int\limits_{S_l^{(j)}}\frac{1}{x-y}\,\mathfrak{G}\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right)u(y)\,d_yS,$$

$$(k, l=1, \ldots, n;\; i, j=1, 2, 3;\; x\in S_k^{(i)},\; y\in S_l^{(j)}),$$

які відображають $L_l^{(j)}(\varepsilon)$ в $L_k^{(i)}(\varepsilon)$.

Оператор $\mathfrak{G}$ очевидним чином ототожнюється з матричним оператором $(\mathfrak{G}_{kl}^{(i,j)})_{k, l=1, n;\, i,j=1,2,3}$, який діє в декартовому добутку просторів $L_k^{(i)}(\varepsilon)$.

Як відомо (див., наприклад, [3]), індекс оператора не змінюється при додаванні цілком неперервного оператора. Це дозволяє спростити оператори $\mathfrak{G}_{kl}^{(i,j)}$.

Легко переконатися, що оператори $\mathfrak{G}_{kl}^{(i,j)}$ цілком неперервні, якщо дуги $S_k^{(i)}$ і $S_l^{(j)}$ не суміжні або лежать на одній дузі S_k $(l=k)$. При визначенні індекса оператора $I-\mathfrak{G}$ можна таким чином замінити нулями всі оператори $\mathfrak{G}_{kl}^{(i,j)}$, за винятком операторів вигляду $\mathfrak{G}_{k,k+1}^{(3,1)}$, $\mathfrak{G}_{k+1,k}^{(1,3)}$, далі в матрицях $(\mathfrak{G}_{kl}^{i,j})$, $(I_{kl}^{(i,j)})$ можна викреслити рядки і стовпці, які відповідають дугам $S_k^{(2)}$.

Оператори, які залишаються, мають вигляд

$$Pu(x)=\int\limits_{S''}\frac{1}{|x-y|}\,P\left(x, y, \frac{x-y}{|x-y|}\right)u(y)\,d_yS.$$

Тут $x\in S'$, S' і S'' — гладкі дуги з спільним кінцем a, які однозначно проектуються на відповідні їм дотичні в точці a, $P(x, y, \zeta)$ — неперервна матриця при $x\in S'$, $y\in S''$ і $|\zeta|=1$, $u\in L_\varepsilon(S'')$, $Pu\in L_\varepsilon(S')$, $(\nu_{S'}(a), \nu_{S''}(a))>-1$.

Нехай e', e'' — одиничні вектори дотичних відповідно до S', S'' (напрямлені від точки a), $\tilde{x}=\xi e'$, $\tilde{y}=\eta e''$ — проекції x і y на e' і e''; $0\leqslant\xi\leqslant\alpha$; $0\leqslant\eta\leqslant\beta$. Через те, що дуги $S_k^{(1)}$ і $S_k^{(3)}$ довільно малі, можна припустити, що $(\nu(x), e')\neq\pm1$, $(\nu(y), e'')\neq\pm1$ при $x\in S'$, $y\in S''$.

Лема. Якщо при $x\in S'$, $y\in S''$, $x\to a$, $y\to a$ справедлива рівність

$$\lim P\left(x, y, \frac{x-y}{|x-y|}\right)=0,$$

то оператор P цілком неперервний.

[1] $a_{n+1}=a_1$, $S_{n+1}=S_1$.

Доведення. Внаслідок топологічної еквівалентності просторів $L_\varepsilon(S')$ і $L_\varepsilon([0, \alpha])$, $L_\varepsilon(S'')$ і $L_\varepsilon([0, \beta])$ оператор P визначає відображення $L_\varepsilon([0, \beta])$ в $L_\varepsilon([0, \alpha])$.

Легко переконатися в обмеженості оператора P. Таким чином, достатньо довести, що зменшенням числа h можна рівномірно відносно η зробити довільно малим інтеграл

$$\int_0^\alpha \xi^{-\varepsilon} \eta^\varepsilon \left\{ \frac{1}{|x(\xi+h) - y(\eta)|} P\left(x(\xi+h), y(\eta), \frac{x(\xi+h) - y(\eta)}{|x(\xi+h) - y(\eta)|}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{|x(\xi) - y(\eta)|} P\left(x(\xi), y(\eta), \frac{x(\xi) - y(\eta)}{|x(\xi) - y(\eta)|}\right)\right\} d\xi.$$

Функція P продовжується нулем на продовження відрізка $[0, \alpha]$. Розглядуваний інтеграл розкладається за схемою $\int_0^\delta + \int_\delta^\alpha$. Завдяки обмеженості величини $\int_0^\delta \frac{\xi^{-\varepsilon} \eta^\varepsilon}{|x(\xi) - y(\eta)|} d\eta$ інтеграл $\int_0^\delta$ може бути зроблений разом з P довільно малим зменшенням δ при $\eta < \delta$; інтеграл $\int_\delta^\alpha$ може бути зменшений підбором h так само, як і $\int_0^\delta$ при $\eta \leqslant \delta$.

Лема доведена.

На підставі цієї леми, беручи $\tilde{P}(\zeta) = P(a, a, \zeta)$ оператор P можна подати у вигляді

$$P = \tilde{P} + P_1, \quad \tilde{P} u(\xi) = \int_0^\beta \frac{1}{|\tilde{x} - \tilde{y}|} \tilde{P}\left(\frac{\tilde{x} - \tilde{y}}{|\tilde{x} - \tilde{y}|}\right) u(\eta)\, d\eta,$$

P_1 — цілком неперервний.

Нехай L^p — множина p-стовпців $u(t)$, визначених на $(0, \infty)$, з нормою $\|u\| = \int_0^\infty |u(t)|\, dt$.

Останнє перетворення оператора $\tilde{P}$ полягає в заміні

$$\xi = e^{-s + \lg\alpha}, \quad \eta = e^{-t + \lg\beta}, \quad u(\xi) = \xi^{\varepsilon - 1} u(s), \quad v(\eta) = \eta^{\varepsilon - 1} v(t);$$

це приводить до розгляду оператора, який діє із L^p в L^p, такого вигляду:

$$P_\omega u(s) = \int_0^\infty \frac{e^{\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)\left(s - t + \lg\frac{\beta}{\alpha}\right)}}{\sqrt{e^{s - t + \lg\frac{\beta}{\alpha}} + e^{-s + t - \lg\frac{\beta}{\alpha}} - 2\cos\omega}} P_\omega(s - t)\, u(t)\, dt,$$

$$P_\omega(t)=\tilde{P}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\lg\frac{\beta}{\alpha}}e'-e^{\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\lg\frac{\beta}{\alpha}}e''}{\sqrt{e^{t+\lg\frac{\beta}{\alpha}}+e^{-t-\lg\frac{\beta}{\alpha}}-2\cos\omega}}\right),\ \cos\omega=(e',e'')\neq 1.$$

Тепер за формулою І. Ц. Гохберга і М. Г. Крейна можна визначити індекс $\varkappa$ оператора $\mathrm{I}-\mathfrak{G}$. Нескладні обчислення приводять до такого результату.

Нехай для $k=1,\ldots,n$ ω_k — внутрішній кут у вершині a_k контура S, τ_k, ν_k — відповідно одиничні вектори дотичної і нормалі до дуги S_k в точці a_k,

$$\zeta_k(t)=\frac{(e^{-\frac{t}{2}}\cos\omega_k-e^{\frac{t}{2}})\,\tau_k-e^{-\frac{t}{2}}\sin\omega_k\cdot\nu_k}{\sqrt{e^t+e^{-t}-2\cos\omega_k}},$$

$$U^{(3,1)}_{k,k+1}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\lambda t}}{\sqrt{e^t+e^{-t}-2\cos\omega_k}}\mathfrak{G}(a_k,a_k,\nu_k,-\sin\omega_k\tau_k-$$
$$-\cos\omega_k\nu_k,\zeta_k(-t))\,dt,$$

$$U^{(1,3)}_{k+1,k}(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\lambda t}}{\sqrt{e^t+e^{-t}-2\cos\omega_k}}\mathfrak{G}(a_k,a_k,-\sin\omega_k\tau_k-$$
$$-\cos\omega_k\nu_k,\nu_k,-\zeta_k(t))\,dt.$$

Очевидно,

$$\Delta_k(\lambda)=\det\{\mathrm{I}-U^{(1,3)}_{k+1,k}(\lambda)\,U^{(3,1)}_{k,k+1}(\lambda)\}$$

аналітична функція λ при $-\frac{1}{2}<\varepsilon-\frac{1}{2}=Im\lambda<\frac{1}{2}$. При $\lambda\to\pm\infty+i\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)$, $\lim\Delta_k(\lambda)=1$; таким чином, можна обрати ε так, щоб на прямій $Im\lambda=\varepsilon$ ні один з $\Delta_k(\lambda)$ не перетворювався в нуль. При цьому припущенні справедлива

Теорема. Індекс оператора $\mathrm{I}-\mathfrak{G}$ в просторі $L_\varepsilon(S)$ конечний і дорівнює

$$\varkappa=-\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i}d\,arg\,\Delta_k(\lambda).$$

Зокрема, внутрішній задачі Діріхле для оператора Лапласа відповідає інтегральне рівняння

$$u(x)-\frac{\varkappa}{\pi}\int\limits_S\frac{(x-y,\nu(y))}{|x-y|^2}u(y)\,d_yS=f(x)$$

при $\varkappa=1$.

В цьому випадку

$$\mathfrak{G}(x,y,\xi,\eta,\zeta)=\frac{\varkappa}{\pi}(\zeta,\eta),$$

$$U_{k,k+1}^{(3,1)}(\lambda) = + U_{k+1,k}^{(1,3)}(\lambda) = \frac{\varkappa}{\pi} \sin \omega_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t - \frac{t}{2}}}{e^t + e^{-t} - 2\cos\omega_k} dt =$$

$$= \varkappa \frac{sh(\pi - \omega_k)\left(\lambda + i \cdot \frac{1}{2}\right)}{sh\,\pi\left(\lambda + i \cdot \frac{1}{2}\right)},$$

$$\Delta_k(\lambda) = 1 - \varkappa^2 \frac{sh^2(\pi - \omega_k)\left(\lambda + i \cdot \frac{1}{2}\right)}{sh^2\pi\left(\lambda + i \cdot \frac{1}{2}\right)}.$$

Беручи $\lambda = \mu + i\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)$, легко перевірити, що змінна

$$z = \frac{sh^2(\pi - \omega_k)(\mu + i(\varepsilon - 1))}{sh^2\pi(\mu + i(\varepsilon - 1))}$$

при $1 - \varepsilon$ і малому $\varepsilon < 1$, і μ, яке пробігає дійсну вісь, обходить відрізок $\left[0, \frac{(\pi - \omega_k)^2}{\pi^2}\right]$ в додатному напрямі.

Таким чином, якщо $\varkappa$ не належить відрізкам $\left[-\infty, -\frac{\pi}{|\pi - \omega_k|}\right]$ і $\left[\frac{\pi}{|\pi - \omega_k|}, +\infty\right]$, то індекс оператора $1 - \varkappa\mathfrak{G}$ дорівнює нулеві при $\varepsilon < 1$ і досить малому $1 - \varepsilon$.

Радіус Фредгольма оператора $\mathfrak{G}$ виявляється рівним $\min\limits_{1 \leq k \leq n} \frac{\pi}{|\pi - \omega_k|}$, результат, одержаний Радоном при більш загальних припущеннях для оператора $\mathfrak{G}$, який відповідає задачі Діріхле.

ЛІТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. УМЖ, 2 (1953).

2. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. УМН, т. XIII, вып. 2 (1958).

3. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. УМН, т. XII, вып. 2 (1957).

Я. Б. ЛОПАТИНСЬКИЙ

ЗВЕДЕННЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

Метою даної замітки є доведення можливості зведення в певному розумінні системи еліптичних рівнянь до системи теж еліптичного типу першого порядку.

1. Нехай

$$C_1^{(m)} = \begin{pmatrix} 1_{2^{m-1}} & 0 \\ 0 & -1_{2^{m-1}} \end{pmatrix}^{1} (m \geqslant 1),\ C_i^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 & C_{i-1}^{(m-1)} \\ C_{i-1}^{(m-1)} & 0 \end{pmatrix} (m \geqslant 2;\ 2 \leqslant i \leqslant m). \tag{1}$$

Очевидно, $(C_1^{(m)})^2 = 1_{2^m}$. Індукцією відносно m перевіряється, що

$$(C_i^{(m)})^2 = 1_{2^m} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Далі, якщо $m \geqslant 2$, $i > 1$, то

$$C_1^{(m)} C_i^{(m)} + C_i^{(m)} C_1^{(m)} = 0.$$

Якщо $m \geqslant 3$, $i, j \geqslant 2$, $i \neq j$, то

$$C_i^{(m)} C_j^{(m)} + C_j^{(m)} C_i^{(m)} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{i-1}^{(m-1)} C_{j-1}^{(m-1)} + C_{j-1}^{(m-1)} C_{i-1}^{(m-1)} & 0 \\ 0 & C_{i-1}^{(m-1)} C_{j-1}^{(m-1)} + C_{j-1}^{(m-1)} C_{i-1}^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

і, таким чином, за індукцією

$$C_i^{(m)} C_j^{(m)} + C_j^{(m)} C_i^{(m)} = 0.$$

Лема 1. Для кожного натурального m матриці $C_1^{(m)}, \ldots, C_m^{(m)}$, визначені формулами (1), мають властивості:

$$(C_i^{(m)})^2 = 1_{2^m},\ C_i^{(m)} C_j^{(m)} + C_j^{(m)} C_i^{(m)} = 0 \quad (i \neq j);$$

$$\det \sum_{i=1}^{m} \alpha_i C_i^{(m)} = \Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2\Big)^{2^{m-1}} (m > 1).$$

Останнє твердження одержується з наступних підрахунків:

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i C_i^{(m)}\Big)^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2\ 1_{2^m},$$

[1] 1_k — одинична матриця порядку k.

$$\left(det \sum_{i=1}^{m} \alpha_i C_i^{(m)}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2\right)^{2^m},$$

$$det \sum_{i=1}^{m} \alpha_i C_i^{(m)} = \pm \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2\right)^{2^{m-1}},$$

$$det\, C_1^{(m)} = \begin{cases} -1 \ (m=1), \\ 1 \ (m>1). \end{cases}$$

2. Розглянемо сукупність векторів вигляду $k = (k_1, \ldots, k_n)$ $(n \geqslant 1)$ з цілими невід'ємними координатами; покладемо $\| k \| = k_1 + \ldots + k_n$, $< i > = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{ni})$ (δ_{kl} — символ Кронекера); k/l буде означати, що $l_i \geqslant k_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ ($k\overline{/}l$ — заперечення цього).

Лема 2. Для довільних цілих $n \geqslant 2$, $s \geqslant 2$ існує таке p, що можна побудувати систему $p \times p$ матриць

$$C_{k,l,i,j}^{(n,s)} \quad (\| k \|, \| l \| = s-1;\ i, j = 1, \ldots, n),$$

для яких система рівнянь

$$\Omega^{(n,s)}(\alpha, P_k): \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\|l\|=s-1} \sum_{<j>/l} C_{k,l,i,j}^{(n,s)} \left(\alpha_i P_l - \alpha_j P_{l-<j>+<i>}\right) = 0^{1}$$

$$(\| k \| = s-1,\ k \neq (s-1) < n >) \tag{2}$$

має загальний розв'язок вигляду $P_k = \alpha^k P_0$ $(\alpha = \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n},\ \alpha \neq 0$ і дійсне). Ми доведемо,— методом математичної індукції, причому індукція ведеться по $n + s$, — дещо більш загальне твердження: для довільних натуральних h і $g \geqslant 2^{n-1} h \binom{s-2+n}{n-1}$ і системи Σ_g матриць $C_1, \ldots, C_g$, що задовольняють умову $(\sum_{i=1}^{g} \mu_i C_i)^2 = (\sum_{i=1}^{g} \mu_i^2) 1$, можна підібрати систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\|l\|=s-1} \sum_{<j>/l} C_{klij}^{(n,s,h,\Sigma_g)} \left(\alpha_i X_l - \alpha_j X_{l-<j>+<i>}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \sum_{\|l\|=s-1} P_{ikl}^{(n,s,h,\Sigma_g)} X_l = 0 \quad (\| k \| = s-1), \tag{3}$$

яка володіє такими властивостями (для дійсних α, λ):

1) Система (3) при $\lambda \neq 0$ має тільки нульовий розв'язок;
2) $P_{i,(s-1)<n>,l}^{(n,s,h,\Sigma_g)}$ $(\| l \| = s-1)$ — різні матриці системи Σ_g або нулі;
3) Матриця $\sum_{i=1}^{h} \lambda_i \sum_{\|l\|=s-1} P_{i,(s-1)<n>,l}\, \alpha^l$ при $\alpha \neq 0$, $\lambda \neq 0$ оборотна;

[1] При $s = 1$ ця система пуста.

4) Система, одержана із (3) при $\lambda=0$ і виключенні рівняння, яке відповідає $k=(s-1)<n>$, має при $\alpha\neq 0$ загальний розв'язок $X_k=\alpha^k X_0$.

При $n\geqslant 2$, $s=2$ систему (3) можна подати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{h} C_i(\alpha_i X_{<j>}-\alpha_j X_{<i>})+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{n+i}X_{<j>}=0\ \ (j=1,\ldots,n-1),$$

$$\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_i C_{n+h+i+j-1}X_{<j>}+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{n+i}X_{<n>}=0.$$

Дійсно, при $\lambda\neq 0$ з перших рівнянь одержуємо

$$X_{<j>}=\alpha_j R\ \ (j=1,\ldots,n-1),$$

$$X_{<n>}=\left(\alpha_n 1+C_n\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{n+i}\right)R.$$

Підставляючи в останнє рівняння, дістаємо:

$$\left\{\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_i C_{n+h+i+j-1}\alpha_j+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{n+i}\alpha_n-|\lambda|^2 C_n\right\}R=0.$$

Отже, $R=0$ і $X_{<j>}=0$.

Таким чином, перша умова виконується; друга умова теж, очевидно, виконується. Легко бачити, що виконана і третя умова.

Беручи тепер $\lambda=0$, $\alpha\neq 0$ і відкидаючи останнє рівняння, дістаємо

$$X_{<j>}=\alpha_j R,$$

$$R=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i C_i\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n}C_i X_{<i>}$$

і, отже, $X_{<n>}=\alpha_n R$.

Таким чином, четверта умова виконана.

Нехай тепер $n=2$, $s=3$. В цьому випадку систему (3) можна побудувати у вигляді (беручи $X_{2-k,k}=X_k$, $k=0,1,2$):

$$C_1(\alpha_2 X_0-\alpha_1 X_1)+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{i+1}X_0=0,$$

$$C_1(\alpha_2 X_1-\alpha_1 X_2)+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{i+1}X_1=0,$$

$$\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{i+1}X_0+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{h+i+1}X_2=0.$$

При $\lambda\neq 0$ з перших двох рівнянь знаходимо

$$X_0 = \alpha_1 \left(\alpha_2 C_1 + \sum_{i=1}^{h} \lambda_i C_{i+1}\right)^{-1} C_1 X_1,$$

$$X_1 = \alpha_1 \left(\alpha_2 C_1 + \sum_{i=1}^{h} \lambda_i C_{i+1}\right)^{-1} C_1 X_2$$

і, отже,

$$X_0 = \frac{\alpha_1^2}{(\alpha_2^2 + |\lambda|^2)^2} \left[(\alpha_2^2 - |\lambda|^2) 1 + 2\alpha_2 \sum_{i=1}^{h} \lambda_i C_{i+1} C_1\right] X_2.$$

Підставляючи в останнє рівняння, дістаємо

$$\left[\sum_{i=1}^{h} \frac{\alpha_1^2 (\alpha_2^2 - |\lambda|^2)}{(\alpha_2^2 + |\lambda|^2)^2} \lambda_i C_{i+1} + \frac{2\alpha_1^2 \alpha_2 |\lambda|^2}{(\alpha_2^2 + |\lambda|^2)^2} C_1 + \sum_{i=1}^{h} \lambda_i C_{h+i+1}\right] X_2 = 0.$$

Отже, $X_2 = 0$, $X_1 = 0$, $X_0 = 0$.

Перша умова перевірена.

Очевидно, друга умова теж виконується. Виконання третьої умови легко перевірити.

Беручи тепер $\lambda = 0$ і відкидаючи останнє рівняння, при $\alpha_2 \neq 0$ знаходимо X_0, X_1 через X_2, при $\alpha_1 \neq 0$ — X_2, X_1 через X_0; таким чином, остання умова теж виконується.

Нехай тепер n, $s \geqslant 3$. Система (3) конструюється так. Система матриць $\sum_g \left(g \geqslant 2^{n-1} h \binom{s-2+n}{n-1}\right)$ розбивається на дві неперетинні підсистеми $\sum_{g_1}$, $\sum_{g_2}$ так, що $g = g_1 + g_2$, $g_1 \geqslant 2^{n-1} h \binom{s-3+n}{n-1}$, $g_2 \geqslant 2^{n-2} (h+1) \binom{s-3+n}{n-2}$; через те що $h \geqslant 1$, таке розбиття завжди можливе.

Тепер за n, $s-1$, h, Σg_1 і за $n-1$, s, $h+1$, Σg_2 будуються системи

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\|l\|=s-2} \sum_{\langle j \rangle | l} C^{(n, s-1, h, \Sigma g_1)}_{k-\langle n \rangle, l, i, j} (\alpha_i X_{l+\langle n \rangle} - \alpha_j X_{l-\langle j \rangle + \langle i \rangle + \langle n \rangle}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{h} \sum_{\|l\|=s-2} \lambda_i P^{(n, s-1, h, \Sigma g_1)}_{i, k-\langle n \rangle, l} X_{l+\langle n \rangle} = 0 \quad (\|k\| = s-1,\ k_n > 0), \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{\|l\|=s-1 \\ l_n=0}} \sum_{\langle j \rangle | l} C^{(n-1, s, h+1, \Sigma g_2)}_{k, l, i, j} (\alpha_i X_l - \alpha_j X_{l-\langle j \rangle + i}) +$$

$$+ \sum_{\substack{\|l\|=s-1 \\ l_n=0}} P^{(n-1, s, h+1, \Sigma g_2)}_{1kl} (\alpha_n X_l - \alpha_{\bar{l}} X_{l-\langle \bar{l} \rangle + \langle n \rangle}) +$$

$$+\sum_{i=1}^{h}\sum_{\substack{\|l\|=s-1\\ l_n=0}}\lambda_i P_{i+1,k,l}^{(n-1,s,h+1,\Sigma g_2)}X_l=0\,(\|k\|=s-1,\ k_n=0)^1. \tag{5}$$

Нехай $\lambda \neq 0$. Тоді, за припущенням індукції із (4), $X_k=0$ при $k_n>0$, із (5) — $X_k=0$ при $k_n=0$. Умова 2, очевидно, виконується.

Нехай тепер $\lambda=0$, $\alpha\neq 0$ і рівняння, яке відповідає $k=(s-1)<n>$, відкинуте. Тоді з (4), за припущенням індукції,

$$X_k=\alpha^{k-<n>}Y(k_n>0).$$

Підставляючи в (5), дістаємо

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{\|l\|=s-1\\ l_n=0}}\sum_{<j>|l}C_{kl ij}^{(n-1,s,h+1,\Sigma g_2)}(\alpha_i X_l-\alpha_j X_{l-<j>+<i>})+$$

$$+\alpha_n\sum_{\substack{\|l\|=s-1\\ l_n=0}}P_{1kl}^{(n-1,s,h+1,\Sigma g_2)}X_l=\sum_{\substack{\|l\|=s-1\\ l_n=0}}P_{1ki}^{(n-1,s,h+1,\Sigma g_2)}\alpha^l Y. \tag{6}$$

Якщо $\alpha_n\neq 0$, то система (6) при $Y=0$, за припущенням індукції, має тільки нульовий розв'язок; отже, X_k $(k_n=0)$ однозначно визначаються з системи (6) і через те, що $X_k=\alpha^k X_0$ є розв'язок системи (4), (5) при $\lambda=0$, то при $\alpha_n\neq 0$ це загальний розв'язок цієї ж системи (з відкинутим рівнянням, яке відповідає $k=(s-1)<n>$).

Якщо $\alpha_n=0$ (і, отже, $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})\neq 0$), то з рівняння (6) (при $k\neq(s-1)<n-1>$) випливає, за припущенням індукції, $X_k=\alpha^k X_0$ $(\|k\|=s-1,\ k_n=0)$; підставляючи в рівняння, яке відповідає $k=(s-1)<n-1>$, внаслідок оборотності $\sum\limits_{\substack{\|l\|=s-1\\ l_n=0}}P_{1,(s-1)<n-1>,l}\,\alpha^l$, дістаємо $Y=0$ і, отже,

$$X_k=0\quad(\|k\|=s-1,\ k_n>0).$$

Таким чином, четверта умова виконана.

Умови перша, друга, четверта будуть теж виконуватися, якщо рівняння, яке відповідає $k=(s-1)<n>$, замінити рівнянням, одержаним додаванням до нього рівняння, що відповідає $k=(s-1)<n-1>$.

Для так зміненої системи (4), (5) виконується також і третя умова. Дійсно, вона зводиться до перевірки оборотності, при $\alpha\neq 0$, $\lambda\neq 0$:

$$\alpha_n\sum_{i=1}^{h}\sum_{\|l\|=s-2}\lambda_i P_{i,(s-2)<n>,l}^{(n,s-1,h,\Sigma g_1)}\alpha^{k-<n>}+\sum_{i=1}^{h}\sum_{\substack{\|l\|=s-1\\ l_n=0}}\lambda_i P_{i,(s-1)<n-1>,l}^{(n-1,s,h+1,\Sigma g_2)}\alpha^l.$$

Але оборотність цієї матриці випливає з того, що

---

[1] $\bar{l}$ означає такий індекс, що $<\bar{l}>|l$.

$$P_{i,\,(s-2)<n>\,l}^{(n,\,s-1,\,h,\,\Sigma g_1)} \text{ і } P_{i,\,(s-1)<n-1>,\,l}^{(n-1,\;s,\,h+1\;\Sigma g_2)}$$

обрані відповідно з систем Σ_{g_1} і Σ_{g_2}.

Лема доведена у вказаному, більш загальному формулюванні.

3. Нехай тепер $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum\limits_{\|k\| \leqslant s} A_k(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k = \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right)$

еліптичний оператор, визначений в деякій області D.

Теорема. Нехай $u_k = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u \left(\|k\| \leqslant s-1,\ \delta u = \begin{pmatrix} \vdots \\ u_k \\ \vdots \end{pmatrix}\right.$ (при деякому певному впорядкуванні і кратному повторенні цього стовпця); існує такий оператор $\mathfrak{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ першого порядку і еліптичного типу в D, що для всякого розв'язку $u(x)$ рівняння $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$ справджується рівняння

$$\mathfrak{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \delta u = 0.$$

Доведення. Нехай $\Omega^{(n,s)}(\alpha, P_k)$ — система, побудована в лемі 2, $C_1^{(n)}, \dots, C_n^{(n)}$ — матриці, побудовані в лемі 1; розглянемо систему рівнянь, розв'язком якої є, очевидно, стовпець δu, якщо $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(n)} u_{k+<i>} \quad (\|k\| < s-1),$$

$$\Omega^{(n,s)}\left(\frac{\partial}{\partial x}, u_k\right) \quad (\|k\| = s-1),$$

$$\sum_{\|k\|=s} A_k(x) \frac{\partial}{\partial x_{\bar{k}}} u_{k-<\bar{k}>} + \sum_{\|k\|<s} A_k(x) u_k = 0 \quad (<\bar{k}> \mid k).[1]$$

Це шукана система. Для перевірки її еліптичності потрібно показати, що для дійсного ненульового $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ алгебраїчна система

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(n)} \alpha_i P_k = 0 \quad (\|k\| < s-1),$$

$$\Omega^{(n,s)}(\alpha, P_k) \quad (\|k\| = s-1),$$

$$\sum_{\|k\|=s} A_k(x)\, \alpha_{\bar{k}}\, P_{k-<\bar{k}>} = 0$$

має тільки нульовий розв'язок.

---

[1] Розміри матриць в цих трьох серіях рівнянь узгоджені кратним повторенням (по діагоналі) спочатку побудованих матриць.

Дійсно, з першої серії рівнянь, на підставі леми 1,

$$P_k = 0 \qquad (\| k \| < s - 1).$$

З другої серії, за лемою 2.

$$P_k = \alpha^k P_0 \qquad (\| k \| = s - 1);$$

нарешті, останнє рівняння зводиться до співвідношення

$$\sum_{\|k\| = s} A_k(x) \alpha^k P_0 = 0,$$

звідки $P_0 = 0$; теорема доведена.

С. П. ГАВЕЛЯ

ДО ПИТАННЯ ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК МЕТОДОМ ПЛОСКИХ НАБЛИЖЕНЬ

Наведені в [1] [1] інтегральні рівняння задач теорії пологих оболонок дозволяють встановити достатні умови розв'язності цих задач методом послідовних наближень, кожне з яких визначається відповідною задачею для пластинки.

Дійсно, помічаючи, що ядра $K(x, \xi)$ та $M(x, \xi)$ є квадратичні форми головних кривин k_1 та k_2 серединної поверхні оболонки, позначимо $\frac{1}{R} = k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$.

$$K^*(x, \xi) = R^2 K(x, \xi); \quad M^*(x, \xi) = R^2 M(x, \xi).$$

В цих позначеннях розв'язувальні рівняння (17)* набирають вигляду

$$\mu(x) = f^*(x) + \frac{1}{R^2} \iint_{\Omega} K^*(x, \xi)\, \mu(\xi)\, d_\xi \Omega,$$

$$\nu(x) = \varphi^*(x) + \frac{1}{R^2} \iint_{\Omega} M^*(x, \xi)\, \nu(\xi)\, d_\xi \Omega. \tag{1}$$

При одній з умов

$$R > \sqrt{\iint_{\Omega}\iint_{\Omega} |M^*(x, \xi)|^2\, d_x \Omega\, d_\xi \Omega}, \quad \text{чи} \quad R > \sqrt{\iint_{\Omega}\iint_{\Omega} |K^*(x, \xi)|^2\, d_x \Omega\, d_\xi \Omega},$$

якщо $K^*(x, \xi)$ — скалярна функція (тобто в другому випадку), або

$$R > \max_{1 \leqslant i \leqslant 2} \sum_{k=1,2} \sqrt{\iint_{\Omega}\iint_{\Omega} |K^*_{ik}(x, \xi)|^2\, d_x \Omega\, d_\xi \Omega}, \tag{2}$$

якщо $K^*(x, \xi)$ — матриця (в першому випадку), розв'язки рівнянь (1) розкладаються в абсолютно та рівномірно збіжні ряди

$$\mu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m(x)\, k^m; \qquad \nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \nu_m(x)\, k^m.$$

З формул (16)*

---

[1] Зберігаються припущення та позначення, прийняті в [1]. Номери формул з [1] будуть позначатись зірочками.

$$Z(x)=\iint\limits_{\Omega} H(x,\xi)\,\mu(\xi)\,d_{\xi}\Omega;\qquad W(x)=\iint\limits_{\Omega}\Gamma(x,\xi)\,\nu(\xi)\,d_{\xi}\Omega$$

випливає така ж збіжність рядів

$$Z(x)=\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x)\,k^m,\qquad \text{де } Z_m(x)=\iint\limits_{\Omega} H(x,\xi)\,\mu_m(\xi)\,d_{\xi}\Omega;$$

$$W(x)=\sum_{m=0}^{\infty} W_m(x)\,k^m,\ \ W_m(x)=\iint\limits_{\Omega}\Gamma(x,|\xi)\,\nu_m(\xi)\,d_{\xi}\Omega \tag{3}$$

та почленна застосовність до них операторів $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ та $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ і тим паче $a\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$ та $b\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Отже, має місце

Теорема. При умовах (2) розв'язок $Z=Z(x)$, $W=W(x)$ задачі

$$PZ(x)|_S=0;\qquad QW(x)|_S=0 \tag{4}$$

для системи

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)Z(x)+a\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)W(x)=f(x),$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)W(x)+b\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)Z(x)=\varphi(x)-k\,\delta\,W(x) \tag{5}$$

зображається у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів (3), коефіцієнти $Z_m(x)$ та $W_m(x)$ яких послідовно визначаються задачами

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)Z_0(x)=f(x),\quad PZ_0(x)|_S=0,$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)W_0(x)=\varphi(x),\quad QW_0(x)|_S=0,$$

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)Z_m(x)=-R\,a\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)W_{m-1}(x);\quad PZ_m(x)|_S=0,$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)W_m(x)=-Rb\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)Z_{m-1}(x)-P\,\delta\,W_{m-1}(x);\ QW_m(x)|_S=0.$$

Розв'язання задачі (4) для оболонки (5) зводиться, таким чином, до послідовного розв'язання відповідних задач для пластинки. Умову (2) природно тому назвати умовою достатньої пологості оболонки (5) по відношенню до задачі (4).

Розглядаючи у вигляді прикладу задачу про шарнірне спирання по довільному контурі S

$$W|_S=\Delta W|_S=\Phi|_S=\Delta\Phi|_S=0$$

пологої сферичної оболонки

$$\Delta\Delta\Phi-\frac{Eh}{R}\Delta W=0,$$

$$\Delta\Delta W+\frac{12\,(1-\sigma^2)}{Eh^3R}\Delta\Phi=f$$

(тут h — товщина, R — радіус кривини серединної поверхні оболонки, E — модуль Юнга, σ — коефіцієнт Пуассона, f — нормальна складова зовнішнього навантаження в деякому масштабі) та позначаючи через $g(x, \xi)$ функцію Гріна задачі Діріхле (для рівняння Лапласа), що відповідає обмеженій замкненим контуром S області Ω, матимемо

$$K(x, \xi) = \frac{12(1-\sigma^2)}{R^2 h^2} \iint\limits_{\Omega} g(x, \zeta)\, g(\zeta, \xi)\, d_\zeta \Omega .$$

Як відомо, функція Гріна $g(x, \xi)$ задачі Діріхле для області Ω при всіх $x, \xi \in \Omega$, $x \neq \xi$ не перевищує функції Гріна $g^*(x, \xi)$ тієї самої задачі для іншої області Ω^*, якщо $\Omega \subset \Omega^*$. З іншого боку, для випадку, коли Ω^* — квадрат з стороною δ, маємо

$$\left| \iint\limits_{\Omega} g^*(x, \zeta)\, g^*(\zeta, \xi)\, d_\zeta \Omega \right| =$$

$$= \left| \frac{4\delta^2}{\pi^4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x_1}{a} \sin\frac{m\pi \xi_1}{a} \sin\frac{n\pi x_2}{a} \sin\frac{n\pi \xi_2}{a}}{(m^2+n^2)^2} \right| < \frac{2\delta^2}{\pi^3} .$$

Тому можна вважати

$$|K(x, \xi)| < \frac{12(1-\sigma^2)}{R^2 h^2} \cdot \frac{2\delta^2}{\pi^3} ,$$

де δ — зовнішній діаметр розглядуваної області Ω.

В результаті умова достатньої пологості (2) для цього випадку після очевидних спрощень набирає такого конкретного вигляду:

$$\delta \cdot \sqrt{mes \Omega} < Rh,$$

або, ще простіше,

$$\delta < \sqrt{Rh}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. С. П. Гавеля, А. М. Куземко. Застосування регулярних інтегральних рівнянь до деяких задач теорії пологих оболонок. Зб. робіт аспірантів (кафедр природничих наук). Вид. Львів. ун-ту, 1961.

ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

М. П. ШЕРЕМЕТЬЄВ, Б. Л. ПЕЛЕХ

ДО ПИТАННЯ ПРО ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ В ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК

У статті даються рівняння, які виражають варіаційні принципи Лагранжа і Кастіліано в теорії оболонок. Принцип Кастіліано виводиться з так званого основного функціоналу. За допомогою останнього одержані, як частинні випадки, інші варіаційні принципи (в тому числі і принцип можливих переміщень).

Всі диференціальні рівняння і граничні умови теорії оболонок розглядаються як рівняння Ейлера, складені для основного функціоналу.

Всі викладки стосуються випадку, коли гіпотеза Кірхгоффа—Лява про збереження нормального елемента виконується не повністю [1].

§ 1. ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ ЛАГРАНЖА В ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК

Розглянемо оболонку постійної товщини $2h$, серединна поверхня якої Ω обмежена контуром Γ. Для простоти викладок віднесемо серединну поверхню до ортогональних гауссових координат α і β.

Кожній точці $M(\alpha, \beta)$ поверхні Ω відповідає тріедр одиничних векторів $\vec{\tau}_{(\alpha)}, \vec{\tau}_{(\beta)}, \vec{n}$; $\vec{\tau}_{(\alpha)}, \vec{\tau}_{(\beta)}$ — вектори, дотичні до α- і β-ліній відповідно, $\vec{n}$ — вектор нормалі.

На основі прийнятої гіпотези компоненти деформації оболонки визначаються співвідношеннями:

$$e_{\alpha\alpha}=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{w}{R_1};\quad \omega_1=\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta};$$

$$e_{\beta\beta}=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{w}{R_2};\quad \omega_2=\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta}-\frac{v}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha};$$

$$e_{\alpha n}=\gamma_3+\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}-\frac{u}{R_1};\qquad e_{\beta n}=\gamma_4+\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}-\frac{v}{R_2};\tag{1.1}$$

$$\tau_1=-\frac{\gamma_3}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_4}{\partial\alpha};\qquad \tau_2=-\frac{\gamma_4}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_3}{\partial\beta};$$

[1] Прийнята гіпотеза полягає в такому: прямолінійні волокна оболонки, нормальні до серединної поверхні до деформації, залишаються прямолінійними і після деформації, не зазнають розтягнень — стиснень, але після деформації не перпендикулярні до деформованої серединної поверхні.

$$\varkappa_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_3}{\partial\alpha} + \frac{\gamma_4}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}; \quad \varkappa_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_4}{\partial\beta} + \frac{\gamma_3}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}.$$

Тут

$$\left.\begin{aligned}\vec{\delta} &= u\vec{\tau}_{(\alpha)} + v\vec{\tau}_{(\beta)} + w\vec{n}\\ \vec{\Theta} &= -\gamma_4\vec{\tau}_{(\alpha)} + \gamma_3\vec{\tau}_{(\beta)} + \omega_n\vec{n}\end{aligned}\right\}$$

вектори пружного зміщення і повороту, γ_4, γ_3 — кути повороту $\vec{n}$ навколо $\vec{\tau}_{(\alpha)}$ і $\vec{\tau}_{(\beta)}$ відповідно, γ_1, γ_2 — кути повороту $\vec{\tau}_{(\alpha)}$ і $\vec{\tau}_{(\beta)}$ в сторону $\vec{n}$; при цьому $\gamma_1 + \gamma_3 = e_{\alpha n}$; $\gamma_2 + \gamma_4 = e_{\beta n}$.

При тій же гіпотезі відносно нормального елемента методами теорії пружності легко одержати варіаційне рівняння Лагранжа для оболонок. Воно має вигляд

$$\iint_{\Omega}\left\{\delta W_0 - \vec{R}\cdot\delta\vec{\delta} - \vec{L}\cdot\delta\vec{\Theta}\right\}AB\,d\alpha\,d\beta -$$

$$-\int_{\Gamma}\vec{R}_{(t)}\cdot\delta\vec{\delta}\,ds_{(\Gamma)} - \int_{\Gamma}\vec{Q}_{(t)}\,\delta\vec{\Theta}\,ds_{(\Gamma)} = 0, \tag{1.2}$$

де W_0 — пружний потенціал для оболонки;

$$\vec{R} = X\vec{\tau}_{(\alpha)} + Y\vec{\tau}_{(\beta)} + Z\vec{n};$$

$$\vec{L} = -E\vec{\tau}_{(\alpha)} + F\vec{\tau}_{(\beta)};$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{R}_{(t)} &= S\vec{s} + T\vec{t} + N\vec{n},\\ \vec{Q}_{(t)} &= -G\vec{s} + H\vec{t},\end{aligned}\right\}$$

головні вектори пружних напружень і моментів в перерізі з нормаллю $\vec{t}$.

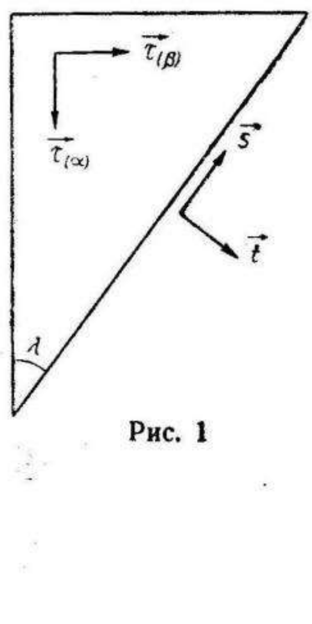

Рис. 1

$$\vec{R}_{(t)} = \vec{R}_{(\alpha)}\sin\lambda + \vec{R}_{(\beta)}\cos\lambda;$$

$$\vec{Q}_{(t)} = \vec{Q}_{(\alpha)}\sin\lambda + \vec{Q}_{(\beta)}\cos\lambda;$$

де

$$\vec{R}_{(\alpha)} = T_1\vec{\tau}_{(\alpha)} + S_1\vec{\tau}_{(\beta)} + N_1\vec{n};$$

$$\vec{R}_{(\beta)} = S_2\vec{\tau}_{(\alpha)} + T_2\vec{\tau}_{(\beta)} + N_2\vec{n};$$

$$\vec{Q}_{(\alpha)} = -H_1\vec{\tau}_{(\alpha)} + G_1\vec{\tau}_{(\beta)};$$

$$\vec{Q}_{(\beta)} = -G_2\vec{\tau}_{(\alpha)} + H_2\vec{\tau}_{(\beta)}.$$

Доведемо таку теорему:

Теорема. Для виконання варіаційного рівняння Лагранжа (1.2) необхідно і достатньо, щоб для довільної кінцевої частини оболонки ω виконувались статичні рівняння рівноваги:

$$\int_{\gamma} \vec{R}_{(t)} ds_{(\gamma)} + \iint_{\omega} \vec{R} d\omega = 0; \tag{1.3}$$

$$\int_{\gamma} \vec{Q}_{(t)} ds_{(\gamma)} + \iint_{\omega} \vec{L} d\omega + \int_{\gamma} \vec{r} \times \vec{R}_{(t)} ds_{(\gamma)} + \iint_{\omega} r \times R d\omega = 0,$$

де γ — контур, який обмежує область ω.

Покажемо спочатку, що з рівняння (1.2) витікають як умови рівноваги, так і граничні умови. Доводиться це так само, як і в теорії пружності. Після звичайних для цього випадку перетворень приходимо до виразу, з якого внаслідок довільності варіацій δu, δv, δw, $\delta\gamma_4$, $\delta\gamma_3$, δw_n одержуємо

А) диференціальні умови рівноваги:

$$\frac{\partial (BT_1)}{\partial \alpha} - T_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial (AS_2)}{\partial \beta} + S_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{AB}{R_1} N_1 + XAB = 0;$$

$$\frac{\partial (AT_2)}{\partial \beta} - T_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{\partial (BS_1)}{\partial \alpha} + S_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{AB}{R_2} N_2 + YAB = 0;$$

$$\frac{\partial (BN_1)}{\partial \alpha} + \frac{\partial (AN_2)}{\partial \beta} - AB\left[\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2}\right] + ZAB = 0; \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial (BH_1)}{\partial \alpha} + H_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial (AG_2)}{\partial \beta} - G_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - ABN_2 + EAB = 0;$$

$$\frac{\partial (BG_1)}{\partial \alpha} - G_2 \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial (AH_2)}{\partial \beta} + H_1 \frac{\partial A}{\partial \beta} - ABN_1 + FAB = 0;$$

$$S_1 - S_2 + \frac{H_1}{R_1} - \frac{H_2}{R_2} = 0.$$

Б) статичні граничні умови:

$$\begin{aligned}
T_1 \sin\lambda + S_2 \cos\lambda &= -S\cos\lambda + T\sin\lambda;\\
S_1 \sin\lambda + T_2 \cos\lambda &= S\sin\lambda + T\cos\lambda;\\
N_1 \sin\lambda + N_2 \cos\lambda &= N;\\
H_1 \sin\lambda + G_2 \cos\lambda &= -G\cos\lambda - H\sin\lambda;\\
G_1 \sin\lambda + H_2 \cos\lambda &= -G\sin\lambda + H\cos\lambda,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

або

$$\begin{aligned}
S &= (T_2 - T_1)\sin\lambda\cos\lambda - S_2\cos^2\lambda + S_1\sin^2\lambda;\\
T &= (S_1 + S_2)\sin\lambda\cos\lambda + T_2\cos^2\lambda + T_1\sin^2\lambda;\\
N &= N_1\sin\lambda + N_2\cos\lambda;\\
G &= (H_1 + H_2)\sin\lambda\cos\lambda + G_2\cos^2\lambda + G_1\sin^2\lambda;\\
H &= (G_1 - G_2)\sin\lambda\cos\lambda - H_1\sin^2\lambda + H_2\cos^2\lambda.
\end{aligned} \tag{1.5$'$}$$

Оскільки А і Б в сукупності рівносильні статичним рівнянням рівноваги (1.3)[1], то тим самим необхідність теореми доведена.

Достатність теореми очевидна і випливає з загальних передумов застосування принципу можливих переміщень до пружних тіл.

§ 2. СПІВВІДНОШЕННЯ ПРУЖНОСТІ В ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК

В дальшому нам потрібне буде знання законів пружності для оболонок. Для цього розглянемо потенціальну енергію деформації оболонки U_0. Вираз енергії U_0 одержимо з відповідного виразу для U в лінійній теорії пружності, покладаючи в останньому $e_{zz}=0$. Стосовно до обраної системи координат маємо[2]

$$2U_0=\iint_{\Omega}\Big\{\int_{-h}^{h}[(\lambda+2\mu)(\overset{*}{e}{}^2_{\alpha\alpha}+\overset{*}{e}{}^2_{\beta\beta})+2\lambda h\overset{*}{e}_{\alpha\alpha}\overset{*}{e}_{\beta\beta}+$$
$$+\mu(\overset{*}{e}{}^2_{\alpha\beta}+\overset{*}{e}{}^2_{\alpha n}+\overset{*}{e}{}^2_{\beta n})]\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)dz\Big\}AB\,d\alpha d\beta. \tag{2.1}$$

Значок * означає, що відповідні величини віднесені до еквідистантної поверхні, для якої

$$\overset{*}{e}_{\alpha\alpha}=\frac{e_{\alpha\alpha}+z\varkappa_1}{1+\frac{z}{R_1}};\quad \overset{*}{e}_{\beta\beta}=\frac{e_{\beta\beta}+z\varkappa_2}{1+\frac{z}{R_2}}; \tag{2.2}$$

$$\overset{*}{e}_{\alpha\beta}=\frac{e_{\alpha\beta}+z\left(\frac{\omega_1}{R_2}+\frac{\omega_2}{R_1}\right)+z\tau_1\left(1+\frac{z}{R_2}\right)+z\tau_2\left(1+\frac{z}{R_1}\right)}{\left(1+\frac{z}{R_1}\right)\left(1+\frac{z}{R_2}\right)};$$

$$\overset{*}{e}_{\alpha n}=\frac{e_{\alpha n}}{1+\frac{z}{R_1}};\quad \overset{*}{e}_{\beta n}=\frac{e_{\beta n}}{1+\frac{z}{R_2}}.$$

Вираз, який стоїть під знаком поверхневого інтеграла, назвемо подвійною питомою енергією деформації оболонки.

Тоді

$$U_0=\iint_{\Omega}W_0AB\,d\alpha\,d\beta. \tag{2.3}$$

На підставі формул (1.1) і (2.2) видно, що пружний потенціал для оболонки є функцією десяти величин $e_{\alpha\alpha}$, ω_1, ω_2, $e_{\beta\beta}$, $e_{\alpha n}$, $e_{\beta n}$, τ_1, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ_2. Приріст питомої роботи деформації dW_A, буде рівний

$$dW_A=T_1\,de_{\alpha\alpha}+S_1\,d\omega_1+S_2\,d\omega_2+T_2\,de_{\beta\beta}+$$
$$+N_1\,de_{\alpha n}+N_2\,de_{\beta n}+H_1 d\tau_1+G_1\,d\varkappa_1+G_2\,d\varkappa_2+H_2\,d\tau_2$$

---

[1] М. П. Шереметьєв. До питання про функції напружень в теорії оболонок, Доповідь на Всес. конф. по теорії пластинок і оболонок. Львів, 21—25, IX. 1961.

[2] Якщо, як звичайно [2], вважати, що σ_{zz} мале в порівнянні з $\sigma_{\alpha\alpha}$, $\sigma_{\alpha\beta}$, $\sigma_{\beta\beta}$, то питома енергія деформації оболонки буде визначатися формулою (2, 1), якщо коефіцієнт $\lambda+2\mu$ замінити на $E/1-\nu^2$ і λ — на $E\nu/1-\nu^2$. Дальший хід міркувань залишається без змін.

і, як в теорії пружності, $dW_A = dW_0$. Тепер легко показати, що десять відповідних зусиль і моментів T_1, S_1, S_2, T_2, N_1, N_2, H_1, G_1, G_2, H_2 виражаються через W_0 формулами, аналогічними формулам Гріна в теорії пружності. Загальний вигляд пружного потенціалу W_0 одержимо, якщо в (2.1) підставимо (2.2) і виконаємо інтегрування.

В результаті цих дій маємо:

$$
\begin{aligned}
2W_0 = {} & (\lambda+2\mu)\frac{R_1}{R_2}\left\{\left[2h+(R_2-R_1)\ln\frac{1+\frac{h}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}}\right]e_{\alpha\alpha}^2+\right.\\
& +2(R_2-R_1)\left(2h-R_1\ln\frac{1+\frac{h}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}}\right)e_{\alpha\alpha}\varkappa_1+\left[R_1(R_1-R_2)\left(2h-\right.\right.\\
& \left.\left.\left.-R_1\ln\frac{1+\frac{h}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}}\right)+\frac{2}{3}h^3\right]\varkappa_1^2\right\}+(\lambda+2\mu)\frac{R_2}{R_1}\left\{\left[2h+\right.\right.\\
& \left.+(R_1-R_2)\ln\frac{1+\frac{h}{R_2}}{1-\frac{h}{R_2}}\right]e_{\beta\beta}^2+2(R_1-R_2)\left(2h-R_2\ln\frac{1+\frac{h}{R_2}}{1-\frac{h}{R_2}}\right)e_{\beta\beta}\varkappa_2+\\
& \left.+\left[R_2(R_2-R_1)\left(2h-R_2\ln\frac{1+\frac{h}{R_2}}{1-\frac{h}{R_2}}\right)+\frac{2}{3}h^3\right]\varkappa_2^2\right\}+\\
& +4\lambda he_{\alpha\alpha}e_{\beta\beta}+\frac{4}{3}\lambda h^3\varkappa_1\varkappa_2+\mu\left\{\frac{R_1}{R_2}\left[2h+(R_2-R_1)\ln\frac{1+\frac{\;}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}}\right]\omega_1^2+\right.\\
& +\frac{R_2}{R_1}\left[2h+(R_1-R_2)\ln\frac{1+\frac{h}{R_2}}{1-\frac{h}{R_2}}\right]\omega_2^2+4h\,\omega_1\omega_2+\\
& +\frac{R_1}{R_2}\left[R_1(R_1-R_2)\left(2h-R_1\ln\frac{1+\frac{h}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}}\right)+\frac{2}{3}h^3\right]\tau_1^2+
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$+\frac{R_2}{R_1}\left[R_2(R_2-R_1)\left(2h-R_2\ln\frac{1+\frac{h}{R_2}}{1-\frac{h}{R_2}}\right)+\frac{2}{3}h^3\right]\tau_2^2+$$

$$+\frac{4}{3}h^3\tau_1\tau_2+\frac{2R_1(R_2-R_1)}{R_2}\left(2h-R_1\ln\frac{1+\frac{h}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}}\right)\omega_1\tau_1+$$

$$+\frac{2R_2(R_1-R_2)}{R_1}\left(2h-R_2\ln\frac{1+\frac{h}{R_2}}{1-\frac{h}{R_2}}\right)\omega_2\tau_2+\frac{R_1}{R_2}\left[2h+\right.$$

$$\left.+(R_2-R_1)\ln\frac{1+\frac{h}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}}\right]e_{\alpha n}^2+\frac{R_2}{R_1}\left[2h+(R_1-R_2)\ln\frac{1+\frac{h}{R_2}}{1-\frac{h}{R_2}}\right]e_{\beta n}^2\Bigg\}.$$

Співвідношення пружності, які відповідають виписаному W_0, запишемо для зручності в матричній формі:

$$\begin{Bmatrix} T_1\\ S_1\\ S_2\\ T_2\\ N_1\\ N_2\\ H_1\\ G_1\\ G_2\\ H_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} c_{11} & 0 & 0 & c_{14} & 0 & 0 & 0 & c_{18} & 0 & 0\\ 0 & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 & c_{27} & 0 & 0 & 0\\ 0 & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{3,10}\\ c_{41} & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{49} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c_{72} & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{77} & 0 & 0 & c_{7,10}\\ c_{81} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{88} & c_{89} & 0\\ 0 & 0 & 0 & c_{94} & 0 & 0 & 0 & c_{98} & c_{99} & 0\\ 0 & 0 & c_{10,3} & 0 & 0 & 0 & c_{10,7} & 0 & 0 & c_{10,10} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} e_{\alpha\alpha}\\ \omega_1\\ \omega_2\\ e_{\beta\beta}\\ e_{\alpha n}\\ e_{\beta n}\\ \tau_1\\ \varkappa_1\\ \varkappa_2\\ \tau_2 \end{Bmatrix}, \qquad (2.4)$$

де

$$c_{11}=(\lambda+2\mu)\frac{R_1}{R_2}\left[2h+(R_2-R_1)\ln\frac{1+\frac{h}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}}\right];$$

$$c_{18}=c_{81}=(\lambda+2\mu)\frac{R_1(R_2-R_1)}{R_2}\left(2h-R_1\ln\frac{1+\frac{h}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}}\right);$$

$$c_{22}=\mu\frac{R_1}{R_2}\left[2h+(R_2-R_1)\ln\frac{1+\frac{h}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}}\right];$$

$$c_{27}=c_{72}=\mu\frac{R_1(R_2-R_1)}{R_2}\left(2h-R_1\ln\frac{1+\frac{h}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}}\right);$$

$$c_{14}=c_{41}=2\lambda h;\quad c_{23}=c_{32}=2\mu h;$$

$$c_{33}=\mu\frac{R_2}{R_1}\left[2h+(R_1-R_2)\ln\frac{1+\frac{h}{R_2}}{1-\frac{h}{R_2}}\right];$$

$$c_{3,10}=c_{10,3}=\mu\frac{R_2(R_1-R_2)}{R_1}\left(2h-R_2\ln\frac{1+\frac{h}{R_2}}{1+\frac{h}{R_2}}\right);$$

$$\tag{2.5}$$

$$c_{44}=(\lambda+2\mu)\frac{R_2}{R_1}\left[2h+(R_1-R_2)\ln\frac{1+\frac{h}{R_2}}{1-\frac{h}{R_2}}\right];$$

$$c_{49}=c_{94}=(\lambda+2\mu)\frac{R_2(R_1-R_2)}{R_1}\left(2h-R_2\ln\frac{1+\frac{h}{R_2}}{1-\frac{h}{R_2}}\right);$$

$$c_{55}=\mu\frac{R_1}{R_2}\left[2h+(R_2-R_1)\ln\frac{1+\frac{h}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}}\right];$$

$$c_{66}=\mu\frac{R_2}{R_1}\left[2h+(R_1-R_2)\ln\frac{1+\frac{h}{R_2}}{1-\frac{h}{R_2}}\right];$$

$$c_{77}=\mu\frac{R_1}{R_2}\left[R_1(R_1-R_2)\left(2h-R_1\ln\frac{1+\frac{h}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}}\right)+\frac{2}{3}h^3\right];$$

$$c_{88}=(\lambda+2\mu)\frac{R_1}{R_2}\left[R_1(R_1-R_2)\left(2h-R_1\ln\frac{1+\frac{h}{R_1}}{1-\frac{h}{R_1}}\right)+\frac{2}{3}h^3\right];$$

$$c_{99}=(\lambda+2\mu)\frac{R_2}{R_1}\left[R_2(R_2-R_1)\left(2h-R_2\ln\frac{1+\frac{h}{R_2}}{1-\frac{h}{R_2}}\right)+\frac{2}{3}h^3\right];$$

$$c_{10,10}=\mu\frac{R_2}{R_1}\left[R_2(R_2-R_1)\left(2h-R_2\ln\frac{1+\frac{h}{R_2}}{1-\frac{h}{R_2}}\right)+\frac{2}{3}h^3\right];$$

$$c_{89}=c_{98}=\frac{2}{3}\lambda h^3;\qquad c_{7,10}=c_{10,7}=\frac{2}{3}\mu h^3.$$

З останніх співвідношень видно, що матриця (C) перетворення (2.4) симетрична.

Таким чином, у загальному випадку співвідношень пружності, одержаних точно в межах прийнятої гіпотези відносно нормального елемента, справедливі всі теореми лінійної теорії пружності, доведення яких вимагає симетрії матриці (C).

В одержаному загальному законі пружності (2.4) зусилля і моменти не можуть залежати від інших компонентів деформації, крім виписаних. В поширеній літературі з теорії оболонок при виведенні співвідношень пружності застосовується інший підхід. При цьому в деякому наближенні одержують [7], що зусилля і моменти залежать від таких компонентів деформацій, залежність від яких не одержана нами при точній постановці питання про співвідношення пружності.

Розв'язуючи (2.4) відносно компонентів деформації, одержимо:

$$\begin{Bmatrix} e_{\alpha\alpha} \\ e_{\beta\beta} \\ \varkappa_1 \\ \varkappa_2 \\ e_{\alpha n} \\ e_{\beta n} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & 0 & d_{33} & d_{34} & 0 & 0 \\ 0 & d_{42} & d_{43} & d_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{66} \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ G_1 \\ G_2 \\ N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}. \tag{2.6}$$

Коефіцієнти d_{ij} виражаються через c_{ij} таким чином:

$$d_{11}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta^{(TG)}};\ d_{12}=d_{21}=-\frac{\Delta_{12}}{\Delta^{(TG)}};\ d_{13}=d_{31}=\frac{\Delta_{13}}{\Delta^{(TG)}};$$

$$d_{22}=\frac{\Delta_{22}}{\Delta^{(TG)}};\ d_{24}=d_{42}=\frac{\Delta_{24}}{\Delta^{(TG)}};\ d_{33}=\frac{\Delta_{33}}{\Delta^{(TG)}};$$

$$d_{34}=d_{43}=-\frac{\Delta_{43}}{\Delta^{(TG)}};\ d_{44}=\frac{\Delta_{44}}{\Delta^{(TG)}};\ d_{55}=\frac{1}{c_{55}};\ d_{66}=\frac{1}{C_{66}},$$

де

$$\Delta^{(TG)}=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{14} & c_{18} & 0 \\ c_{41} & c_{44} & 0 & c_{49} \\ c_{81} & 0 & c_{88} & c_{89} \\ 0 & c_{94} & c_{98} & c_{99} \end{vmatrix}$$

Δ_{ij} — мінор елемента, який стоїть на перетині j-рядка і i-стовпця.

Компоненти деформації ω_1, ω_2, τ_1 і τ_2 таким чином не виражаються, тому що

$$\Delta^{(SH)}=\begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} & c_{27} & 0 \\ c_{32} & c_{33} & 0 & c_{3,10} \\ c_{72} & 0 & c_{77} & c_{7,10} \\ 0 & c_{10,3} & c_{10,7} & c_{10,10} \end{vmatrix}\equiv 0.$$

Це навіть видно із самого факту існування недиференціальної залежності (шосте рівняння рівноваги)

$$S_1-S_2+\frac{H_1}{R_1}-\frac{H_2}{R_2}=0.$$

Ми не вважаємо, що співвідношеннями пружності (2.4) і (2.6) слід користуватися в усіх практичних випадках, але з цих точних формул видно шляхи спрощення співвідношень для різних класів оболонок і з будь-якою точністю. Ці спрощення повинні грунтуватися на точно поставленому експерименті.

Для сферичної оболонки вираз пружного потенціалу набирає вигляду

$$W_0^{(\text{сф})}=h(\lambda+2\mu)(e_{\alpha\alpha}^2+e_{\beta\beta}^2)+2\lambda h\,e_{\alpha\alpha}e_{\beta\beta}+$$

$$+\mu h(e_{\alpha\beta}^2+e_{\alpha n}^2+e_{\beta n}^2)+\frac{1}{3}h^3(\lambda+2\mu)(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)+\frac{2}{3}\lambda h^3\varkappa_1\varkappa_2+\frac{1}{3}\mu h^3\tau_0^2, \quad (2.8)$$

де $\tau_0=\tau_1+\tau_2$.

Як показав Є. І. Лунь, $W_0^{(\text{сф})}$ є точним в рамках прийнятої гіпотези.

Відповідний закон пружності може бути одержаний або безпосередньо з (2.8) або як частинний випадок при $R_1=R_2=R$ (R — радіус сфери) із (2.4).

Вирахуємо коефіцієнти матриці (C) для сферичної оболонки:

$$c_{11}=2h(\lambda+2\mu);\quad c_{14}=c_{41}=2\lambda h;$$

$$c_{22}=c_{23}=c_{33}=c_{32}=c_{55}=c_{66}=2\mu h;$$

$$c_{44}=2h(\lambda+2\mu);\quad c_{77}=c_{10,10}=\frac{2}{3}\mu h^3;$$

$$c_{88}=c_{99}=\frac{2}{3}(\lambda+2\mu)h^3;\quad c_{89}=c_{98}=\frac{2}{3}\lambda h^3;$$

$$c_{18}=c_{81}=c_{3,10}=c_{10,3}=c_{4,9}=c_{94}=c_{27}=c_{72}=0.$$

Тоді
$$T_1=\frac{2Eh(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[e_{\alpha\alpha}+\frac{\nu}{1-\nu}e_{\beta\beta}\right];\quad S_1=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\alpha\beta};$$
$$T_2=\frac{2Eh(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[e_{\beta\beta}+\frac{\nu}{1-\nu}e_{\alpha\alpha}\right];\quad S_2=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\alpha\beta};$$
$$N_1=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\alpha n};\quad N_2=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\beta n};$$
$$H_1=H_2=\frac{Eh^3}{3(1+\nu)}\tau_0; \tag{2.9}$$
$$G_1=\frac{2Eh^3(1-\nu)}{3(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varkappa_1+\frac{\nu}{1-\nu}\varkappa_2\right];$$
$$G_2=\frac{2Eh^3(1-\nu)}{3(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varkappa_2+\frac{\nu}{1-\nu}\varkappa_1\right].$$

Наведені співвідношення також точні у вказаному вище змісті. Експериментально повинні бути перевірені лише коефіцієнти в (2.9).

Для інших оболонок такі прості закони пружності не одержуються. Так, наприклад, якщо для кругової циліндричної оболонки радіуса R вирахувати коефіцієнти в W_0 з точністю до $\frac{h^3}{R}$, то

$$W_0^{(\text{цил})}=h(\lambda+2\mu)(e_{\alpha\alpha}^2+e_{\beta\beta}^2)+2\lambda h\,e_{\alpha\alpha}e_{\beta\beta}+$$
$$+\mu h(e_{\alpha\beta}^2+e_{\alpha n}^2+e_{\beta n}^2)+\frac{1}{3}h^3(\lambda+2\mu)(\varkappa_1^2+\varkappa_2^2)+$$
$$+\frac{2}{3}\lambda h^3\varkappa_1\varkappa_2+\frac{1}{3}\mu h^3\tau_0^2+\frac{2}{3}\frac{h^3}{R}(\lambda+2\mu)(e_{\alpha\alpha}\varkappa_1-e_{\beta\beta}\varkappa_2)+$$
$$+\frac{2}{3}\frac{h^3}{R}\mu(\omega_1\tau_1-\omega_2\tau_2). \tag{2.10}$$

Відповідний закон пружності в цьому випадку має вигляд:
$$T_1=\frac{2Eh(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[e_{\alpha\alpha}+\frac{\nu}{1-\nu}e_{\beta\beta}+\frac{h^2}{3R}\varkappa_1\right];$$
$$T_2=\frac{2Eh(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[e_{\beta\beta}+\frac{\nu}{1-\nu}e_{\alpha\alpha}-\frac{h^2}{3R}\varkappa_2\right];$$
$$S_1=\frac{Eh}{1+\nu}\left[e_{\alpha\beta}+\frac{h^2}{3R}\tau_1\right];$$
$$S_2=\frac{Eh}{1+\nu}\left[e_{\alpha\beta}-\frac{h^2}{3R}\tau_2\right]; \tag{2.11}$$
$$N_1=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\alpha n};$$
$$N_2=\frac{Eh}{1+\nu}e_{\beta n};$$
$$H_1=\frac{Eh^3}{3(1+\nu)}\left[\tau_0+\frac{\omega_1}{R}\right];$$

$$H_2 = \frac{Fh^3}{3(1+\nu)}\left[\tau_0 - \frac{\omega_2}{R}\right];$$

$$G_1 = \frac{2Eh^3(1-\nu)}{3(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varkappa_1 + \frac{\nu}{1-\nu}\varkappa_2 + \frac{e_{\alpha\alpha}}{R}\right];$$

$$G_2 = \frac{2Eh^3(1-\nu)}{3(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\varkappa_2 + \frac{\nu}{1-\nu}\varkappa_1 - \frac{e_{\beta\beta}}{R}\right].$$

§ 3. ВАРІАЦІЙНА ЗАДАЧА В ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК. ПРИНЦИП КАСТІЛІАНО

Розглянемо функціонал

$$\begin{aligned}
&I(u, v, w, \gamma_4, \gamma_3;\ e_{\alpha\alpha}, \omega_1, \omega_2, e_{\beta\beta}, \\
&e_{\alpha n}, e_{\beta n}, \tau_1, \varkappa_1, \varkappa_2, \tau_2; T_1, S_1, S_2, T_2, \\
&N_1, N_2, H_1, G_1, G_2, H_2) = \iint\limits_{\Omega}\Big\{W_0 - \Big[T_1\Big(e_{\alpha\alpha} - \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{w}{R_1}\Big) + \\
&+ S_1\Big(\omega_1 - \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\Big) + S_2\Big(\omega_2 - \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{v}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\Big) + \\
&+ T_2\Big(e_{\beta\beta} - \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta} - \frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{w}{R_2}\Big) + N_1\Big(e_{\alpha n} - \frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{u}{R_1} - \gamma_3\Big) + \\
&+ N_2\Big(e_{\beta n} - \frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{v}{R_2} - \gamma_4\Big) + H_1\Big(\tau_1 - \frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_4}{\partial\alpha} + \frac{\gamma_3}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\Big) + \\
&+ G_1\Big(\varkappa_1 - \frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_3}{\partial\alpha} - \frac{\gamma_4}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\Big) + G_2\Big(\varkappa_2 - \frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_4}{\partial\beta} - \frac{\gamma_3}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\Big) + \\
&+ H_2\Big(\tau_2 - \frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_3}{\partial\beta} + \frac{\gamma_4}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\Big)\Big] - (Xu + Yv + Zw + \qquad (3.1) \\
&+ E\gamma_4 + F\gamma_3)\Big\}AB\,d\alpha\,d\beta - \int\limits_{\Gamma_1^{(1)}}(-S\cos\lambda + T\sin\lambda)\,u\,ds_{(\Gamma)} - \\
&- \int\limits_{\Gamma_1^{(2)}}(S\sin\lambda + T\cos\lambda)\,v\,ds_{(\Gamma)} - \int\limits_{\Gamma_1^{(3)}}Nw\,ds_{(\Gamma)} - \\
&- \int\limits_{\Gamma_1^{(4)}}(-G\cos\lambda - H\sin\lambda)\,\gamma_4\,ds_{(\Gamma)} - \int\limits_{\Gamma_1^{(5)}}(-G\sin\lambda + H\cos\lambda)\,\gamma_3\,ds_{(\Gamma)} - \\
&- \int\limits_{\Gamma_2^{(1)}}(T_1\sin\lambda + S_2\cos\lambda)(u - \bar u)\,ds_{(\Gamma)} - \int\limits_{\Gamma_2^{(2)}}(S_1\sin\lambda + T_2\cos\lambda)(v - \bar v)\,ds_{(\Gamma)} - \\
&- \int\limits_{\Gamma_2^{(3)}}(N_1\sin\lambda + N_2\cos\lambda)(w - \bar w)\,ds_{(\Gamma)} - \int\limits_{\Gamma_2^{(4)}}(H_1\sin\lambda + G_2\cos\lambda)(\gamma_4 - \bar\gamma_4)\,ds_{(\Gamma)} -
\end{aligned}$$

$$-\int\limits_{\Gamma_2^{(5)}} (G_1 \sin\lambda + H_2 \cos\lambda)(\gamma_3 - \overline{\gamma}_3)\, ds_{(\Gamma)},$$

де W_0 — пружний потенціал для оболонки, взятий за формулою (2.3);
$\Gamma_1^{(i)}$ $(i = 1 - 5)$ — частини контура Γ, на яких задані S, T, N, G, H;
$\Gamma_2^{(i)}$ $(i = 1 - 5)$ — частини контура Γ, на яких задані u, v, w, γ_4, γ_3.

Неважко переконатися, що варіюванням інтеграла (3.1) по його 25 функціональних аргументах одержуємо всі рівняння теорії оболонок, а саме:

3а) співвідношення пружності, які збігаються з (2.4);

3б) умови рівноваги (1.5);

3в) рівняння Коші (1.1);

3г) статичні граничні умови (1.4) на частинах $\Gamma_1^{(i)}$ $(i = 1 - 5)$;

3д) геометричні граничні умови $u = \overline{u}$, $v = \overline{v}$, $w = \overline{w}$, $\gamma_4 = \overline{\gamma}_4$, $\gamma_3 = \overline{\gamma}_3$ на частинах $\Gamma_2^{(i)}$ $(i = 1 - 5)$ граничного контура Γ.

Таким чином, відносно основного функціоналу (3.1) справедлива така теорема:

Теорема. Варіаційне рівняння $\delta J = 0$ має в ролі рівнянь Ейлера співвідношення 3а—3в, а в ролі природних (ейлерових) граничних умов систему 3г—3д.

З точки зору наведеної теореми сформульована вище екстремальна задача відповідає найбільш загальному варіаційному принципу в теорії оболонок. З останнього, як частинні випадки, повинні випливати всі інші варіаційні принципи.

Наприклад, приєднуючи до (3.1), як попередні, умови 3в, 3д, одержимо принцип можливих переміщень, виведений окремо в § 1. Ейлеровими рівняннями функціоналу Лагранжа є 3б і 3г, які збігаються з А і Б § 1. Справедливість теореми § 1 (з врахуванням примітки на стор. 4) випливає з доведеної загальної варіаційної теореми для основного функціоналу (3.1).

Очевидно, що кожний з частинних варіаційних принципів дає можливість варіаційним методом задовольнити тільки ті рівняння теорії оболонок, які не були приєднані до основного функціоналу як попередні.

Зупинимося на випадку, коли до (3.1), як попередні, приєднані умови 3б і 3г. Замінюючи в одержаному таким способом з основного функціоналу виразі всі компоненти деформації через компоненти напруження за допомогою (2. 6), одержимо нову варіаційну задачу про знаходження максимального[1] значення функціоналу

$$J(T_1, S_1, S_2, T_2, N_1, N_2, H_1, G_1, G_2, H_2) =$$

$$= -\iint\limits_{\Omega} \Big\{ d_{11} T_1^2 + 2d_{12} T_1 T_2 + d_{22} T_2^2 + 2d_{13} T_1 G_1 + d_{33} G_1^2 +$$

$$+ 2d_{24} T_2 G_2 + d_{44} G_2^2 + 2d_{34} G_1 G_2 + d_{77} S_1^2 + 2d_{78} S_1 S_2 + d_{88} S_2^2 +$$

$$+ 2d_{29} S_1 H_1 + d_{99} H_1^2 + 2d_{8,10} S_2 H_2 + d_{10,10} H_2^2 + 2d_{9,10} H_1 H_2 +$$

[1] Це випливає з загальної теорії перетворення таких варіаційних задач [1].

$$+ d_{55} N_1^2 + d_{66} N_2^2 \Big\} AB\, d\alpha\, d\beta + \int\limits_{\Gamma_2^{(1)}} (T_1 \sin\lambda + S_2 \cos\lambda) \bar{u}\, ds_{(\Gamma)} + \tag{3.2}$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_2^{(2)}} (S_1 \sin\lambda + T_2 \cos\lambda) \bar{v}\, ds_{(\Gamma)} + \int\limits_{\Gamma_2^{(3)}} (N_1 \sin\lambda + N_2 \cos\lambda) \bar{w}\, ds_{(\Gamma)} +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_2^{(4)}} (H_1 \sin\lambda + G_2 \cos\lambda) \bar{\gamma}_4\, ds_{(\Gamma)} + \int\limits_{\Gamma_2^{(5)}} (G_1 \sin\lambda + H_2 \cos\lambda) \bar{\gamma}_3\, ds_{(\Gamma)}.$$

Оскільки попередніми умовами 3б і 3г є умови рівноваги оболонки, а наслідком задачі, як це буде показано в § 4, рівняння сумісності деформацій, то екстремальна задача для (3.2) виражає собою, за аналогією з теорією пружності, принцип Кастіліано в теорії оболонок.

У випадках жорсткого защемлення краю оболонки Γ_2 ($\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = \bar{\gamma}_4 = \bar{\gamma}_3 = 0$) або, коли задані граничні зусилля і моменти (S, T, N, G, H) на Γ_2, вираз для функціоналу (3.2) спрощується і набирає вигляду

$$J_0 (T_1, S_1, S_2, T_2, N_1, N_2, H_1, G_1, G_2, H_2) =$$

$$= - \iint\limits_{\Omega} \Big\{ d_{11} T_1^2 + 2d_{12} T_1 T_2 + d_{22} T_2^2 + 2d_{13} T_1 G_1 + d_{33} G_1^2 +$$

$$+ 2 d_{24} T_2 G_2 + d_{44} G_2^2 + 2d_{34} G_1 G_2 + d_{77} S_1^2 + 2d_{78} S_1 S_2 +$$

$$+ d_{88} S_2^2 + 2 d_{79} S_1 H_1 + d_{99} H_1^2 + 2 d_{8,10} S_2 H_2 + d_{10,10} H_2^2 +$$

$$+ 2 d_{9,10} H_1 H_2 + d_{55} N_1^2 + d_{66} N_2^2 \Big\} AB\, d\alpha\, d\beta. \tag{3.3}$$

Перепускаючи проміжні викладки, запишемо вираз функціоналу, екстремальна задача для якого виражає принцип Кастіліано в теорії сферичних оболонок

$$J^{(\text{сф})} = - \frac{1-\nu^2}{4Eh} \iint\limits_{\Omega} \Big\{ T_1^2 + T_2^2 - \frac{2}{1-\nu} (\nu T_1 T_2 - S^2 - N_1^2 - N_2^2) -$$

$$- \frac{3}{h^2} \Big[G_1^2 + G_2^2 - \frac{2}{1-\nu} (\nu G_1 G_2 - H^2) \Big] \Big\} AB\, d\alpha\, d\beta + K_{\Gamma_2^{(i)}}, \tag{3.4}$$

$K_{\Gamma_2^{(1)}}$ — доважок у вигляді 5 контурних інтегралів у (3.2), який перетворюється в нуль у простіших випадках, вказаних вище.

§ 4. ВИВЕДЕННЯ ТОТОЖНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ СУМІСНОСТІ ДЕФОРМАЦІЙ В ТЕОРІЇ ОБОЛОНОК З ПРИНЦИПУ КАСТІЛІАНО

Варіаційні задачі для функціоналів (3.2) — (3.5) одержані для дійсно існуючого стану деформації оболонки. Це значить, що задовольняються тотожні співвідношення нерозривності деформацій. Внаслідок прийнятої гіпотези відносно нормального елемента одержуються в остаточному результаті чотири співвідношення сумісності деформацій. Ці чотири співвідношення мають вигляд

$$AB\left[\frac{\varkappa_1}{R_2}+\frac{\varkappa_2}{R_1}\right]=AB\left[\frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial e_{\alpha n}}{\partial\alpha}+\frac{e_{\beta n}}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial e_{\beta n}}{\partial\beta}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{e_{\alpha n}}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\right]+\frac{\partial^2 e_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{e_{\alpha\beta}}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{e_{\alpha\alpha}}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\frac{1}{A}\frac{\partial(Be_{\beta\beta})}{\partial\alpha}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{e_{\alpha\beta}}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{e_{\beta\beta}}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial(Ae_{\alpha\alpha})}{\partial\beta}\right];$$

$$-\frac{\partial(B\varkappa_2)}{\partial\alpha}+\varkappa_1\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{\partial(A\tau_1)}{\partial\beta}+\tau_2\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{1}{R_1}\left[\frac{AB}{R_2}e_{\alpha n}+\right.$$

$$\left.+e_{\alpha\alpha}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{\partial(A\omega_1)}{\partial\beta}+\omega_2\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{\partial(Be_{\beta\beta})}{\partial\alpha}\right]=0; \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial(A\varkappa_1)}{\partial\beta}-\varkappa_2\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{\partial(B\tau_2)}{\partial\alpha}-\tau_1\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_2}\left[\frac{AB}{R_1}e_{\beta n}+\right.$$

$$\left.+e_{\beta\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{\partial(B\omega_2)}{\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\frac{\partial(Ae_{\alpha\alpha})}{\partial\beta}\right]=0;$$

$$\frac{\omega_1}{R_2}+\tau_2=\frac{\omega_2}{R_1}+\tau_1+\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial(Ae_{\alpha n})}{\partial\beta}-\frac{\partial(Be_{\beta n})}{\partial\alpha}\right].$$

Якщо $e_{\alpha n}=e_{\beta n}=0$, то одержуємо звичайні співвідношення сумісності деформацій [2]. Компоненти деформацій, які відповідають варійованому напруженому стану:

$$T_1+\delta T_1,\ S_1+\delta S_1,\ S_2+\delta S_2,\ T_2+\delta T_2,\ N_1+\delta N_1,$$
$$N_2+\delta N_2,\ H_1+\delta H_1,\ G_1+\delta G_1,\ G_2+\delta G_2,\ H_2+\delta H_2, \tag{4.2}$$

систему (4.1) не задовольняють. Можна лише сказати, що варіації

$$\delta T_1,\ \delta S_1,\ \delta S_2,\ \delta T_2,\ \delta N_1,\ \delta N_2,\ \delta H_1,\ \delta G_1,\ \delta G_2,\ \delta H_2$$

зв'язані між собою співвідношеннями

$$\frac{\partial(B\delta T_1)}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\delta T_2+\frac{\partial(A\delta S_2)}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\delta S_1+\frac{AB}{R_1}\delta N_1=0;$$

$$\frac{\partial(B\delta S_1)}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\delta S_2+\frac{\partial(A\delta T_2)}{\partial\beta}-\frac{\partial A}{\partial\beta}\delta T_1+\frac{AB}{R_2}\delta N_2=0;$$

$$\frac{\partial(B\delta N_1)}{\partial\alpha}+\frac{\partial(A\delta N_2)}{\partial\beta}-AB\left[\frac{\delta T_1}{R_1}+\frac{\delta T_2}{R_2}\right]=0; \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial(B\delta H_1)}{\partial\alpha}+\frac{\partial B}{\partial\alpha}\delta H_2+\frac{\partial(A\delta G_2)}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\delta G_1-AB\,\delta N_2=0;$$

$$\frac{\partial(B\delta G_1)}{\partial\alpha}-\frac{\partial B}{\partial\alpha}\delta G_2+\frac{\partial(A\delta H_2)}{\partial\beta}+\frac{\partial A}{\partial\beta}\delta H_1-AB\,\delta N_1=0$$

і

$$\delta T_1\sin\lambda+\delta S_2\cos\lambda=0;$$
$$\delta S_1\sin\lambda+\delta T_2\cos\lambda=0;$$
$$\delta N_1\sin\lambda+\delta N_2\cos\lambda=0; \tag{4.4}$$

$$\delta H_1 \sin\lambda + \delta G_2 \cos\lambda = 0;$$
$$\delta G_1 \sin\lambda + \delta H_2 \cos\lambda = 0.$$

(Як звичайно, вважаємо, що S, T, N, G, H не змінюються).

Раніше, в § 3, вказувалося, що співвідношення нерозривності деформацій є наслідками варіаційних рівнянь Кастіліано. Доведемо тепер це твердження строго для довільних оболонок. Принцип Кастіліано в загальному випадку з врахуванням (4.4) запишеться

$$\delta J = -\iint_{\Omega} \Big\{ \delta T_1 e_{\alpha\alpha} + \delta S_1 \omega_1 + \delta S_2 \omega_2 + \delta \tau_2 e_{\beta\beta} + \delta N_1 e_{\alpha n} +$$
$$+ \delta N_2 e_{\beta n} + \delta H_1 \tau_1 + \delta G_1 \varkappa_1 + \delta G_2 \delta_2 \varkappa_2 + \delta H_2 T_2 \Big\} AB\, d\alpha\, d\beta = 0. \quad (4.5)$$

Зобразимо компоненти деформації $e_{\alpha\alpha}$, ω_1, ω_2, $e_{\beta\beta}$, $e_{\alpha n}$, $e_{\beta n}$, τ_1, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ_2 через 15 функцій координат α і β:

$$\begin{gathered} \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2; \\ \Phi^{\alpha\alpha}, \Phi^{\alpha\beta}, \Phi^{\beta\alpha}, \Phi^{\beta\beta}, \Phi^{\alpha n}, \Phi^{\beta n}; \\ \Psi^{\alpha\alpha}, \Psi^{\alpha\beta}, \Psi^{\beta\alpha}, \Psi^{\beta\beta} \end{gathered} \quad (4.6)$$

за формулами

$$\begin{aligned}
e_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} + \frac{\varphi_2}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\varphi_3}{R_1} - \frac{1}{AB}\Phi^{\alpha\alpha};\\
\omega_1 &= \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha} - \frac{\varphi_1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{1}{AB}\Phi^{\alpha\beta};\\
\omega_2 &= \frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} - \frac{\varphi_2}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{1}{AB}\Phi^{\beta\alpha};\\
e_{\beta\beta} &= \frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta} + \frac{\varphi_1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\varphi_3}{R_2} - \frac{1}{AB}\Phi^{\beta\beta};\\
e_{\alpha n} &= \psi_1 + \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\alpha} - \frac{\varphi_1}{R_1} - \frac{1}{AB}\Phi^{\alpha n};\\
e_{\beta n} &= \psi_2 + \frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta} - \frac{\varphi_2}{R_2} - \frac{1}{AB}\Phi^{\beta n};\\
\tau_1 &= \frac{1}{A}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha} - \frac{\psi_1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{1}{AB}\Psi^{\alpha\alpha};\\
\varkappa_1 &= \frac{1}{A}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha} + \frac{\psi_2}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{1}{AB}\Psi^{\alpha\beta};\\
\varkappa_2 &= \frac{1}{B}\frac{\partial\psi_2}{\partial\beta} + \frac{\psi_1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{1}{AB}\Psi^{\beta\alpha};\\
\tau_2 &= \frac{1}{B}\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta} - \frac{\psi_2}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{1}{AB}\Psi^{\beta\beta}.
\end{aligned} \quad (4.7)$$

Вносячи (4.7) у варіаційну формулу Кастіліано, після нескладних перетворень одержимо, враховуючи (4.3) і (4.4):

$$\iint_{\Omega}\Big\{\Phi^{\alpha\alpha}\,\delta T_1+\Phi^{\alpha\beta}\,\delta S_1+\Phi^{\beta\alpha}\,\delta S_2+\Phi^{\beta\beta}\,\delta T_2+$$

$$+\Phi^{\alpha n}\,\delta N_1+\Phi^{\beta n}\,\delta N_2+\Psi^{\alpha\alpha}\,\delta H_1+\Psi^{\alpha\beta}\,\delta G_1+\Psi^{\beta\alpha}\,\delta G_2+$$

$$+\Psi^{\beta\beta}\,\delta H_2\Big\}\,d\alpha\,d\beta=0. \qquad (4.8)$$

Нехай тепер

$$\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \rho,\ \chi \qquad (4.9)$$

є довільні функції координат α, β. Кожне з рівнянь (4.4) помножимо відповідно на одну з функцій (4.9).

Склавши одержані добутки, проінтегруємо таким чином складену суму вздовж граничного контура Г:

$$\int_{\Gamma}\Big\{[\delta T_1\sin\lambda+\delta S_2\cos\lambda]\,\xi+[\delta S_1\sin\lambda+\delta T_2\cos\lambda]\,\eta+$$

$$+[\delta N_1\sin\lambda+\delta N_2\cos\lambda]\,\zeta+[\delta H_1\sin\lambda+\delta G_2\cos\lambda]\,\rho+$$

$$+[\delta G_1\sin\lambda+\delta H_2\cos\lambda]\,\chi\Big\}\,ds_{(\Gamma)}=0. \qquad (4.10)$$

Використовуючи формули Гріна—Рімана і (4.3), прийдемо до виразу

$$\iint_{\Omega}\Big\{\xi\Big[\delta T_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\delta S_1\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{AB}{R_1}\delta N_1\Big]+\eta\Big[\delta T_1\frac{\partial A}{\partial\beta}-$$

$$-\delta S_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\frac{AB}{R_2}\delta N_2\Big]+\zeta\Big[\frac{AB}{R_1}\delta T_1+\frac{AB}{R_2}\delta T_2\Big]+$$

$$+\rho\Big[\delta G_1\frac{\partial A}{\partial\beta}-\delta H_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}+AB\,\delta N_2\Big]+\chi\Big[\delta G_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\delta H_1\frac{\partial A}{\partial\beta}+AB\,\delta N_1\Big]+$$

$$+B\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\delta T_1+B\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\delta S_1+B\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\delta N_1+A\frac{\partial\xi}{\partial\beta}\delta S_2+A\frac{\partial\eta}{\partial\beta}\delta T_2+$$

$$+A\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\delta N_2+B\frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\delta H_1+B\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\delta G_1+A\frac{\partial\rho}{\partial\beta}\delta G_2+A\frac{\partial\chi}{\partial\beta}\delta H_2\Big\}\,d\alpha\,d\beta=0. \qquad (4.11)$$

Область інтегрування в (4.8) і (4.11) одна і та сама і займає всю серединну поверхню оболонки Ω. А тому з (4.8) і (4.11) випливають співвідношення

$$\Phi^{\alpha\alpha}=\eta\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{AB}{R_1}\zeta+B\frac{\partial\xi}{\partial\alpha};$$

$$\Phi^{\alpha\beta}=-\xi\frac{\partial A}{\partial\beta}+B\frac{\partial\eta}{\partial\alpha};$$

$$\Phi^{\beta\alpha}=-\eta\frac{\partial B}{\partial\alpha}+A\frac{\partial\xi}{\partial\beta};$$

$$\Phi^{\beta\beta}=\xi\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{AB}{R_2}\zeta+A\frac{\partial\eta}{\partial\beta}; \qquad (4.12)$$

$$\Phi^{\alpha n} = -\frac{AB}{R_1}\xi + AB\chi + B\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha};$$

$$\Phi^{\beta n} = -\frac{AB}{R_2}\eta + AB\rho + A\frac{\partial\zeta}{\partial\beta};$$

$$\Psi^{\alpha\alpha} = -\chi\frac{\partial A}{\partial\beta} + B\frac{\partial\rho}{\partial\alpha};$$

$$\Psi^{\alpha\beta} = \rho\frac{\partial A}{\partial\beta} + B\frac{\partial\chi}{\partial\alpha};$$

$$\Psi^{\beta\alpha} = \chi\frac{\partial B}{\partial\alpha} + A\frac{\partial\rho}{\partial\beta};$$

$$\Psi^{\beta\beta} = -\rho\frac{\partial B}{\partial\alpha} + A\frac{\partial\chi}{\partial\beta}.$$

Ці співвідношення мають місце з точністю до довільного множника k, величина якого в наступних викладках не грає ролі.

Неважко переконатися, що в силу рівнянь (4.12) між функціями Φ і Ψ можна встановити такі тотожні зв'язки:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\Phi^{\beta\alpha}}{A}\right) + \frac{\Phi^{\alpha\beta}}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\Phi^{\alpha\alpha}}{B}\right) + \frac{\Phi^{\beta\beta}}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\Phi^{\beta n}}{R_1} = \frac{AB}{R_1}\rho;\\
-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\Phi^{\alpha\beta}}{A}\right) - \frac{\Phi^{\beta\alpha}}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\Phi^{\beta\beta}}{A}\right) - \frac{\Phi^{\alpha\alpha}}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{\Phi^{\alpha n}}{R_2} = -\frac{AB}{R_2}\chi;\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\Psi^{\beta\beta}}{A}\right) + \frac{\Psi^{\alpha\alpha}}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\Psi^{\alpha\beta}}{B}\right) + \frac{\Psi^{\beta\alpha}}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} = \frac{AB}{R_1 R_2}\rho; \qquad (4.13)\\
-\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\Psi^{\alpha\alpha}}{B}\right) - \frac{\Psi^{\beta\beta}}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\Psi^{\beta\alpha}}{A}\right) - \frac{\Psi^{\alpha\beta}}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} = -\frac{AB}{R_1 R_2}\chi;\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\Phi^{\beta n}}{A}\right) - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\Phi^{\alpha n}}{B}\right) + \frac{1}{R_2}\Phi^{\alpha\beta} - \frac{1}{R_1}\Phi^{\beta\alpha} + \Psi^{\beta\beta} - \Psi^{\alpha\alpha} = 0.
\end{gathered}$$

Із (4.7) випливає

$$\begin{gathered}
\Phi^{\alpha\alpha} = AB\left[-e_{\alpha\alpha} + \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha} + \frac{\varphi_2}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\varphi_3}{R_1}\right];\\
\Phi^{\alpha\beta} = AB\left[-\omega_1 + \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha} - \frac{\varphi_1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right];\\
\Phi^{\beta\alpha} = AB\left[-\omega_2 + \frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta} - \frac{\varphi_2}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right];\\
\Phi^{\beta\beta} = AB\left[-e_{\beta\beta} + \frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta} + \frac{\varphi_1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\varphi_3}{R_2}\right]; \qquad (4.14)\\
\Phi^{\alpha n} = AB\left[-e_{\alpha n} + \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\alpha} - \frac{\varphi_1}{R_1} + \psi_1\right];\\
\Phi^{\beta n} = AB\left[-e_{\beta n} + \frac{1}{B}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta} - \frac{\varphi_2}{R_2} + \psi_2\right];
\end{gathered}$$

$$\Psi^{\alpha\alpha}=AB\left[-\tau_1+\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha}-\frac{\psi_1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right];$$

$$\Psi^{\alpha\beta}=AB\left[-\varkappa_1+\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha}+\frac{\psi_2}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right];$$

$$\Psi^{\beta\alpha}=AB\left[-\varkappa_2+\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_2}{\partial\beta}+\frac{\psi_1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right];$$

$$\Psi^{\beta\beta}=AB\left[-\tau_2+\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta}-\frac{\psi_2}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right].$$

Вносячи (4.14) в (4.13), після деяких обрахувань одержимо для дійсно існуючого стану деформації оболонки п'ять співвідношень сумісності деформацій

$$\begin{gathered}\frac{\partial(Ae_{\alpha\alpha})}{\partial\beta}-e_{\beta\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}-\omega_1\frac{\partial B}{\partial\alpha}-(e_{\beta n}-\gamma_4)\frac{AB}{R_1}-\frac{\partial(B\omega_2)}{\partial\alpha}=0;\\ \frac{\partial(A\omega_1)}{\partial\beta}+\omega_2\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{\partial(Be_{\beta\beta})}{\partial\alpha}+e_{\alpha\alpha}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+(e_{\alpha n}-\gamma_3)\frac{AB}{R_2}=0;\\ \frac{\partial(A\varkappa_1)}{\partial\beta}-\varkappa_2\frac{\partial A}{\partial\beta}-\tau_1\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\gamma_4\frac{AB}{R_1R_2}-\frac{\partial(B\tau_2)}{\partial\alpha}=0;\\ \frac{\partial(A\tau_1)}{\partial\beta}+\tau_2\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{\partial(B\varkappa_2)}{\partial\alpha}+\varkappa_1\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\gamma_3\frac{AB}{R_1R_2}=0;\\ \frac{\omega_1}{R_2}+\tau_2=\frac{\omega_2}{R_1}+\tau_1+\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial(Ae_{\alpha n})}{\partial\beta}-\frac{\partial(Be_{\beta n})}{\partial\alpha}\right].\end{gathered}\tag{4.15}$$

В перші чотири рівняння (4.15) входять величини γ_4 і γ_3. Визначаючи їх з перших двох рівнянь і підставляючи в третє і четверте, одержуємо

$$\begin{gathered}-\frac{\partial(B\varkappa_2)}{\partial\alpha}+\varkappa_1\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{\partial(A\tau_1)}{\partial\beta}+\tau_2\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{1}{R_1}\left[\frac{AB}{R_2}e_{\alpha n}-\right.\\ \left.-\frac{\partial(Be_{\beta\beta})}{\partial\alpha}+e_{\alpha\alpha}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{\partial(A\omega_1)}{\partial\beta}+\omega_2\frac{\partial A}{\partial\beta}\right]=0;\\ \frac{\partial(A\varkappa_1)}{\partial\beta}-\varkappa_2\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{\partial(B\tau_2)}{\partial\alpha}-\tau_1\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{1}{R_2}\left[\frac{AB}{R_1}e_{\beta n}-\right.\\ \left.-\frac{\partial(Ae_{\alpha\alpha})}{\partial\beta}+e_{\beta\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{\partial(B\omega_2)}{\partial\alpha}+\omega_1\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right]=0.\end{gathered}\tag{4.16}$$

З перших двох рівнянь (4.15), використовуючи формули

$$\omega_1=\frac{1}{2}e_{\alpha\beta}+\omega_n,$$

$$\omega_2=\frac{1}{2}e_{\alpha\beta}-\omega_n,$$

можна знайти $\frac{\partial\omega_n}{\partial\alpha}$ і $\frac{\partial\omega_n}{\partial\beta}$.

Вимога однозначності у визначенні ω_n: $\frac{\partial^2\omega_n}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{\partial^2\omega_n}{\partial\beta\,\partial\alpha}$ приведе до рівняння:

$$AB\left[\frac{\varkappa_1}{R_2}+\frac{\varkappa_2}{R_1}\right]=AB\left[\frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial e_{\alpha n}}{\partial\alpha}+\frac{e_{\beta n}}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial e_{\beta n}}{\partial\beta}+\frac{e_{\alpha n}}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)\right]+\frac{\partial^2 e_{\alpha\beta}}{\partial\alpha\partial\beta}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{e_{\alpha\beta}}{A}\frac{\partial A}{\partial\beta}+\frac{e_{\alpha\alpha}}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\frac{1}{A}\frac{\partial(Be_{\beta\beta})}{\partial\alpha}\right]+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{e_{\alpha\beta}}{B}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+\frac{e_{\beta\beta}}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{1}{B}\frac{\partial(Ae_{\alpha\alpha})}{\partial\beta}\right].$$

Це рівняння разом з двома (4.16) і останнім в (4.15) становить систему, яка точно збігається з співвідношеннями нерозривності деформацій (4.1).

Таким чином, встановлено геометричний зміст принципу Кастіліано в теорії оболонок, як енергетичного виразу початку нерозривності деформацій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Р. Курант, О. Гильберт. Методы математической физики, т. I. М.—Л., Гостехиздат, 1951.
2. А. Л. Гольденвейзер. Теория упругих тонких оболочек. ГИТТЛ, 1953.
3. І. Н. Слезінгер. Принцип Кастіліано в нелінійній теорії пружності. Прикладна механіка, т. V, в. 1, 1959.
4. Л. С. Лейбензон. Собрание трудов, т. I. М., 1951.
5. E. Reissner. Note on the method of complementary energy. J. math. ph., v. 27, 2. (1948).
6. E. Reissner. On some problems in shell theory. Proc. of the first symp. nav. Str. mech. Oxford—London—New York—Paris, 1960.
7. I. K. Knowles and E. Reissner. Note on stresstrain relations for thin elastic shells. J. math. ph., v. 37, 269—282 (1958).

І. О. ПРУСОВ

ПРУЖНА РІВНОВАГА СПІВДОТИЧНИХ БЕЗ ТЕРТЯ ІЗОТРОПНИХ СМУГ

Розглядаються дві ізотропні смуги, які дотикаються між собою без тертя по прямій L_0 (рис. 1) і знаходяться в пружній рівновазі під дією заданого зовнішнього навантаження на L_j, а також зосереджених сил (X_k^j, Y_k^j) і зосереджених моментів M_k^j, прикладених в точках a_k^j та b_k^j відповідно, які належать області $-h_1 < y < 0 (S_1^-)$, якщо $j = 1$, або області $0 < y < h_2 (S_2^+)$, якщо $j = 2$. Зовнішнє навантаження на L_j задовольняє умови Діріхле на будь-якому скінченному інтервалі та абсолютно інтегроване в інтервалі $-\infty < x < +\infty$. Все зовнішнє навантаження, в тому числі і зосереджені сили і моменти, задовольняють відомі умови рівноваги.

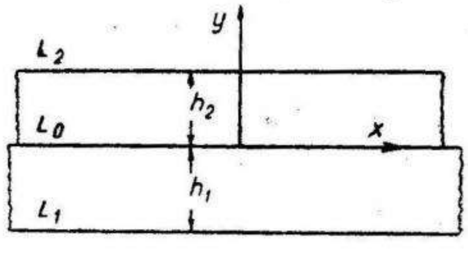

Рис. 1.

Позначимо через $\Phi_1(z)$ і $\Phi_2(z)$ функції Колосова—Мусхелішвілі, визначені відповідно в S_1^- і S_2^+. Поширивши відомим чином [1] визначення функції $\Phi_1(z)$ на область $0 < y < h_1 (S_1^+)$, а $\Phi_2(z)$ на область $-h_2 < y < 0 (S_2^+)$, знайдемо, що напружено-деформований стан в S_1^- і S_2^+ визначається формулами

$$X_x + Y_y = 2 [\Phi_j (z) + \overline{\Phi_j (z)}], \tag{1}$$

$$Y_y - i X_y = \Phi_j(z) - \Phi_j(\overline{z}) + (z - \overline{z}) \overline{\Phi_j'(z)}, \tag{2}$$

$$2\mu_j \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varkappa_j \Phi_j(z) + \Phi_j(\overline{z}) - (z - \overline{z}) \overline{\Phi_j'(z)}. \tag{3}$$

В областях $S_j^\pm$ функції $\Phi_j(z)$ зобразимо у вигляді

$$\Phi_j(z) = -\sum \frac{X_k^j + i Y_k^j}{2\pi (1 + \varkappa_j)} \cdot \frac{1}{z - a_k^j} + \Phi_{0j}(z) \tag{4}$$

в S_1^- при $j = 1$ і в S_2^+ при $j = 2$.

$$\Phi_j(z) = -\sum\left[\frac{\varkappa_j(X_k^j + iY_k^j)}{2\pi(1+\varkappa_j)}\cdot\frac{1}{z-\overline{a}_k^j} - \frac{X_k^j - iY_k^j}{2\pi(1+\varkappa_j)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{a_k^j - \overline{a}_k^j}{(z-\overline{a}_k^j)^2} + \frac{iM_k^j}{2\pi(z-\overline{b}_k^j)^2}\right] + \Phi_{00j}(z) \qquad (5)$$

в області S_1^+ при $j=1$ і в S_2^- при $j=2$, де $\Phi_{0j}(z)$ і $\Phi_{00j}(z)$ — голоморфні функції у відповідних областях.

На основі (2) і (3) граничні умови на L_0 такі:

$$[\Phi_1(t) + \Phi_2(t)]^+ - [\Phi_1(t) + \Phi_2(t)]^- = 0,$$

$$Im\,[\Phi_2^+(t) - \Phi_2^-(t)] = 0, \quad Im\,[\Phi_2^+(t) - r\Phi_1^-(t)] = 0, \qquad (6)$$

де $r = [\mu_2(1+\varkappa_1)] : [\mu_1(1+\varkappa_2)]$, $\Phi_j^\pm(t)$ — граничні значення функцій $\Phi_j(z)$ на L_0 зі сторони $y>0$ і $y<0$. Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді лінійної комбінації функцій:

$$R_j(z),\ R_{0j}(z),\ \overline{R}_j(z),\ \overline{R}_{0j}(z),\ I_A(z) = \int_0^\infty A(\alpha)\,e^{+i\alpha(z+ih_1)}\,d\alpha,$$

$$I_B(z) = \int_0^\infty B(\alpha)\,e^{-i\alpha(z-ih_1)}\,d\alpha,$$

$$I_C(z) = \int_0^\infty C(\alpha)\,e^{-i\alpha(z-ih_2)}\,d\alpha, \quad I_D(z) = \int_0^\infty D(\alpha)\,e^{+i\alpha(z+ih_2)}\,d\alpha, \ \overline{I}_A(z) =$$

$$= \int_0^\infty \overline{A}(\alpha)\,e^{-i\alpha(z-ih_1)}\,d\alpha,$$

$$\overline{I}_B(z) = \int_0^\infty \overline{B}(\alpha)\,e^{+i\alpha(z+ih_1)}\,d\alpha,\ \overline{I}_C(z) = \int_0^\infty \overline{C}(\alpha)\,e^{+i\alpha(z+ih_2)}\,d\alpha,\ \overline{I}_D(z) =$$

$$= \int_0^\infty \overline{D}(\alpha)\,e^{-i\alpha(z-ih_2)}\,d\alpha, \qquad (7)$$

де $R_j(z)$ і $R_{0j}(z)$ — головні частини (4) і (5) відповідно, $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ і $D(\alpha)$ — невідомі комплекснозначні функції. Під функціями $\overline{R}_j(z)$ (і аналогічно іншими, позначеними знаком спряження) слід розуміти функції, які набувають в точках $\overline{z}$ комплексно спряжені значення з $R_j(z)$.

У відповідності з (4), (5) граничні умови (6) тотожно задовольнимо, якщо покладемо

$$\Phi_1(z) = R_1(z) + b\overline{R}_1(z) + aR_2(z) + aR_{01}(z) - a\overline{R}_{02}(z) + I_A(z) +$$

$$+ b\overline{I}_A(z) + aI_B(z) + aI_C(z) - a\overline{I}_D(z)\ (S_1^-), \qquad (8)$$

$$\Phi_1(z) = a R_1(z) - a \overline{R}_2(z) + R_{01}(z) + b \overline{R}_{01}(z) + a R_{02}(z) +$$
$$+ a I_A(z) - a \overline{I}_C(z) + I_B(z) + b \overline{I}_B(z) + a I_D(z) \ (S_1^+), \tag{9}$$
$$\Phi_2(z) = b R_1(z) + R_2(z) + a \overline{R}_2(z) - b \overline{R}_{01}(z) + b R_{02}(z) +$$
$$+ b I_A(z) + I_C(z) + a \overline{I}_C(z) - b \overline{I}_B(z) + b I_D(z) \ (S_2^+), \tag{10}$$
$$\Phi_2(z) = -b \overline{R}_1(z) + b R_2(z) + b R_{01}(z) + R_{02}(z) + a \overline{R}_{02}(z) -$$
$$- b \overline{I}_A(z) + b I_C(z) + b I_B(z) + I_D(z) + a \overline{I}_D(z) \ (S_2^-), \tag{11}$$

де

$$a = 1 : (1 + r), \quad b = r : (1 + r).$$

Невідомі функції $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ знайдемо, вимагаючи, щоб $\Phi_j(z)$ також задовольняли граничні умови на L_j, які випливають із (2)

$$\Phi_j(t_j) - \Phi_j(\overline{t}_j) + 2 i h_j (-1)^j \overline{\Phi'_j(t_j)} = f_j(x) \ (j = 1,2), \tag{12}$$

де $t_j = x + ih_j(-1)^j$, $f_j(x)$ — значення $Y_y - iX_y$ на L_j. Накладені вище обмеження на зовнішнє навантаження на L_j допускає зображення функцій $f_j(x)$ у вигляді

$$f_j(x) = \int_0^\infty F_j(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha + \int_0^\infty F_j(-\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad F_j(\alpha) =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_j(x) e^{-i\alpha x} dx. \tag{13}$$

Враховуючи (8—11), система (12) з точністю до постійних множників має члени вигляду $(t_j - z_0)^{-n}$, які можна зобразити інтегралами Лапласа:

$$\frac{1}{(t_j - z_0)^n} = \frac{(-i)^n}{(n-1)!} \int_0^\infty \alpha^{n-1} e^{i\alpha(t_j - z_0)} d\alpha, \quad \text{якщо } Im(t_j - z_0) > 0,$$
$$\tag{14}$$
$$\frac{1}{(t_j - z_0)^n} = \frac{i^n}{(n-1)!} \int_0^\infty \alpha^{n-1} e^{-i\alpha(t_j - z_0)} d\alpha, \quad \text{якщо } Im(t_j - z_0) < 0.$$

Враховуючи формули (13) і (14) та вимагаючи, щоб функції (8)—(11) перетворювали рівняння (12) в тотожність відносно параметра x, одержимо таку систему для визначення функцій $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$:

$$[1 + a(-1 + 2\alpha r h_1) e^{-2\alpha h_1}] A(\alpha) + a(1 + 2\alpha h_1) e^{-\alpha h} \overline{C}(\alpha) +$$
$$+ a(-r + 2\alpha h_1) e^{-2\alpha h_1} \overline{B}(\alpha) - a(1 + 2\alpha h_1) e^{-\alpha h} D(\alpha) = K_1(\alpha) + F_1(\alpha);$$
$$(b e^{-2\alpha h_1} - 2\alpha h_1) A(\alpha) + a e^{-\alpha h} \overline{C}(\alpha) + (-1 + a e^{-2\alpha h_1}) \overline{B}(\alpha) -$$
$$- a e^{-\alpha h} D(\alpha) = K_{01}(\alpha) + \overline{F}_1(-\alpha);$$
$$b e^{-\alpha h} A(\alpha) + (a e^{-2\alpha h_2} - 2\alpha h_2) \overline{C}(\alpha) - b e^{-\alpha h} \overline{B}(\alpha) + (b e^{-2\alpha h_2} - 1) D(\alpha) =$$
$$= K_2(\alpha) + F_2(\alpha);$$

$$b\,(1+2\alpha h_2)\,e^{-\alpha h} A\,(\alpha)+[1+a\,(-r+2\alpha h_2)\,e^{-2\alpha h_2}]\,\overline{C}\,(\alpha)-$$
$$-\,b\,(1+2\alpha h_2)\,e^{-\alpha h}\,B\,(\alpha)+a\,(-1+2\alpha r h_2) e^{-2\alpha h_2} D\,(\alpha)=K_{02}\,(\alpha)+\overline{F}_2\,(-\alpha),$$

де $h=h_1+h_2$, $K_j(\alpha)$ і $K_{0j}\,(\alpha)$ — відомі функції, які набирають дійсних значень, якщо зовнішнє навантаження таке, що

$$Y_y\,(-x,\,y)=Y_y\,(x,\,y),\quad X_y\,(-x,\,y)=-X_y\,(x,\,y).$$

Визначення напруженого стану в будь-якій зафіксованій точці z зводиться до розв'язку системи (15) та обчислення інтегралів (7).

Причому суму інтегралів у кожній з формул (8—11) слід розглядати як один інтеграл, який збігається тільки при умові рівноваги полос.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
2. Ю. А. Шевляков, А. К. Приварников. До розрахунку шаруватих основ. Прикладна механіка, в. 2, 1962.
3. І. О. Прусов. Стиснення пружних півплощин. Питання механіки та математики. Вид. Львів. ун-ту, 1962.

І. О. ПРУСОВ, Ж. В. СТАРОВОЙТЕНКО

ПРУЖНА РІВНОВАГА СКЛАДЕНОЇ СМУГИ

Розглянемо смугу, складену з двох спаяних по прямій L_0 (рис. 1) смуг, одна з яких займає область $-h_1 < y < 0$ (S_1^-), а друга — область $0 < y < h_2$ (S_2^+). Пружні постійні матеріалу цих смуг μ_j і $\varkappa_j$ $(j = 1, 2)$.

Потрібно знайти напружений стан у розглядуваній неоднорідній смузі в залежності від дії зовнішнього навантаження на прямих L_j, зосереджених сил (X_k^j, Y_k^j) та зосереджених моментів M_k^j, прикладених відповідно в точках $a_k^{(j)}$ і $b_k^{(j)}$, які належать області S_1^-, якщо $j = 1$, або S_2^+, якщо $j = 2$ $(k = 1, 2, \dots N)$.

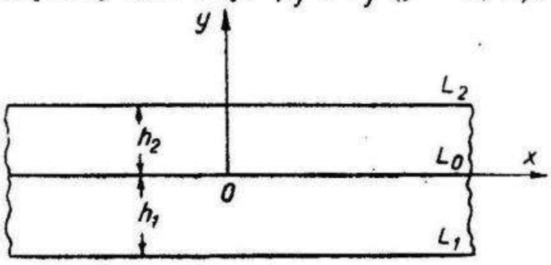

Рис. 1.

Розв'язок аналогічної задачі для складеної смуги, навантаженої лише по лінії спаю, іншим методом одержаний в праці [2].

Деякі задачі для смуги з підкріплюючими пружними лінійними елементами розглянуті в праці [3]. Метод розв'язку даної задачі аналогічний [5].

Позначимо через $\Phi_j(z)$ та $\Psi_j(z)$ функції Колосова—Мусхелішвілі, за допомогою яких визначається напружений стан в S_1^- (при $j = 1$), та S_2^+ (при $j = 2$). Поширивши відомим чином [1] функцію $\Phi_1(z)$ на область $0 < y < h_1$ (S_1^+), а функцію $\Phi_2(z)$ на область $-h_2 < y < 0$ (S_2^-), знайдемо, що напружено-деформований стан в S_1^- та S_2^+ визначається формулами

$$X_x + Y_y = 2\left[\Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)}\right], \tag{1}$$

$$Y_y - iX_y = \Phi_j(z) - \Phi_j(\overline{z}) + (z - \overline{z})\,\overline{\Phi_j'(z)}, \tag{2}$$

$$2\mu_j\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varkappa_j \Phi_j(z) + \Phi_j(\overline{z}) - (z - \overline{z})\,\overline{\Phi_j'(z)} \tag{3}$$

за допомогою функції $\Phi_1(z)$, визначеної в S_1^- і S_1^+, та функції $\Phi_2(z)$, визначеної в S_2^+ і S_2^-.

Функції $\Phi_j(z)$ мають такі особливості:

$$\Phi_j(z) = -\frac{1}{2\pi}\left(\sum_k \frac{X_k^{(j)} + iY_k^{(j)}}{1 + \varkappa_j} \cdot \frac{1}{z - a_k^{(j)}}\right), \tag{4}$$

в S_1^-, якщо $j=1$, і в S_2^+, якщо $j=2$;

$$\Phi_j(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_k \left[\frac{X_k^{(j)} - iY_k^{(j)}}{1+\varkappa_j} \cdot \frac{a_k^{(j)} - \overline{a}_k^{(j)}}{(z-\overline{a}_k^{(j)})^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\varkappa_j (X_k^{(j)} + iY_k^{(j)})}{(1+\varkappa_j)(z-\overline{a}_k^{(j)})} - \frac{iM_k^{(j)}}{(z-\overline{b}_k^{(j)})^2} \right] \tag{5}$$

в S_1^+, якщо $j=1$, і в S_2^-, якщо $j=2$. При умові, що $\lim\limits_{z\to t}(z-\overline{z})\Phi_j'(z)=0$ на L_0, за винятком, можливо, скінченного числа точок t, граничні умови задачі на основі (2) і (3) набирають вигляду

$$[\Phi_2(t) + \Phi_1(t)]^+ - [\Phi_2(t) + \Phi_1(t)]^- = 0 \text{ на } L_0, \tag{6}$$

$$(\Phi_2(t) - r_1\Phi_1(t)]^+ + r_2[\Phi_2(t) - r_1\Phi_1(t)]^- = 0 \text{ на } L_0, \tag{7}$$

$$\Phi_j(t) - \Phi_j(\overline{t}) + 2ih_j(-1)^j\,\overline{\Phi_j'(t)} = f_j(x) \text{ на } L_j (j=1,2), \tag{8}$$

де $r_1 = \frac{1+\varkappa_1}{r(1+\varkappa_2)}$, $r_2 = \frac{r+\varkappa_1}{1+r\varkappa_2}$, $r = \mu_1/\mu_2$, $f_j(x) = Y_y - iX_y$ — відомі функції на L_j, згідно з припущенням, абсолютно інтегровані в інтервалі $(-\infty, +\infty)$ і задовольняють умови Діріхле на будь-якому кінцевому інтервалі змінної x. Значками $+$ та $-$ зверху квадратних дужок (6) і (7) позначені граничні значення функцій на L_0 із сторони S_j^+ і S_j^-.

Приймемо, що зовнішнє навантаження на L_1, L_2 і зосереджені навантаження статично зрівноважуються. Внаслідок цього функції $\Phi_j(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$.

Позначимо праві частини (4) та (5) через $R_j(z)$ та $R_{0j}(z)$. У відповідності з (4) та (5) граничні умови (6) і (7) тотожно задовольняються, якщо покласти

$$\Phi_1(z) = R_1(z) + \frac{a}{r_2}R_2(z) + \frac{b}{r_2}R_{01}(z) + I_A(z) +$$

$$+ \frac{b}{r_2}I_B(z) + \frac{a}{r_2}I_D(z) \quad \text{в } S_1^-,$$

$$\Phi_1(z) = dR_1(z) + R_{01}(z) + aR_{02}(z) + dI_A(z) + I_B(z) + aI_C(z) \text{ в } S_1^+.$$

$$\Phi_2(z) = ar_1R_1(z) + R_2(z) - bR_{02}(z) + ar_1I_A(z) - bI_C(z) + I_D(z) \text{ в } S_2^+, \tag{9}$$

$$\Phi_2(z) = -\frac{d}{r_2}R_2(z) + \frac{ar_1}{r_2}R_{01}(z) + R_{02}(z) + \frac{ar_1}{r_2}I_B(z) +$$

$$+ I_C(z) - \frac{d}{r_2}I_D(z) \quad \text{в } S_2^-,$$

де

$$\frac{1+r_2}{1+r_1} = a; \quad \frac{r_2-r_1}{1+r_1} = b; \quad \frac{1-r_1r_2}{1+r_1} = d,$$

$$I_A(z) = \int_0^\infty A(\alpha)\,e^{i\alpha(z+ih_1)}\,d\alpha; \quad I_B(z) = \int_0^\infty B(\alpha)\,e^{-i\alpha(z-ih_1)}\,d\alpha;$$

$$I_C(z) = \int_0^\infty C(\alpha)\, e^{i\alpha(z+ih_2)}\, d\alpha; \quad I_D(z) = \int_0^\infty D(\alpha)\, e^{-i\alpha(z-ih_2)}\, d\alpha.$$

$A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ — невідомі, взагалі комплекснозначні функції від дійсної змінної α.

Для визначення функцій $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ використаємо формули (8) і (9). Тоді, якщо представимо інтегралами Лапласа функції

$$\frac{1}{(t_j - z_0)^n} = \frac{(-i)^n}{(n-1)!}\int_0^\infty \alpha^{n-1} e^{i\alpha(t_j - z_0)} d\alpha, \qquad (Im\, t > Im\, z_0),$$

$$\frac{1}{(t_j - z_0)^n} = \frac{i^n}{(n-1)!}\int_0^\infty \alpha^{n-1} e^{-i\alpha(t_j - z_0)} d\alpha, \qquad (Im\, t < Im\, z_0),$$

$$f_j(x) = \int_0^\infty [F_j(\alpha)\, e^{-i\alpha x} + F_j(-\alpha)\, e^{i\alpha x}]\, d\alpha, \tag{10}$$

де $F_j(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_j(x)\, e^{i\alpha x}\, dx$, $t_j = x + (-1)^j \cdot i\, h_j$, $(j = 1,2)$, z_0 — яка-небудь точка із точок a_k^j, b_k^j, $\bar{a}_k^j$, $\bar{b}_k^j$ і прирівняємо в підінтегральному виразі коефіцієнти при $e^{i\alpha x}$ і $e^{-i\alpha x}$ окремо, одержимо систему чотирьох рівнянь:

$$\begin{gathered}
(1 - de^{-2\alpha h_1})\, A(\alpha) + \frac{2\alpha\, h_1\, b}{r_2} e^{-2\alpha h_1} \bar{B}(\alpha) - a e^{-\alpha(h_1+h_2)}\, C(\alpha) + \\
+ \frac{2\alpha\, h_1\, a}{r_2} e^{-\alpha(h_1+h_2)}\, \bar{D}(\alpha) = k_1(\alpha); \\
-2\alpha\, h_1\, A(\alpha) + \left(\frac{b}{r_2} e^{-2\alpha h_1} - 1\right) \bar{B}(\alpha) + \frac{a}{r_2} e^{-\alpha(h_1+h_2)}\, \bar{D}(\alpha) = k_2(\alpha); \\
a\, r_1\, e^{-\alpha(h_1+h_2)}\, A(\alpha) - (b e^{-2\alpha h_2} + 1)\, C(\alpha) - 2\alpha\, h_2\, \bar{D}(\alpha) = k_3(\alpha); \\
2\alpha\, h_2\, a r_1\, e^{-\alpha(h_1+h_2)}\, A(\alpha) - \frac{a r_1}{r_2} e^{-\alpha(h_1+h_2)}\, \bar{B}(\alpha) - 2\alpha\, h_2\, b e^{-2\alpha h_2} C(\alpha) + \\
+ \left[1 + \frac{de^{-2\alpha h_2}}{r_2}\right] \bar{D}(\alpha) = k_4(\alpha),
\end{gathered} \tag{11}$$

де

$$\begin{gathered}
k_1(\alpha) = -\sum_{k=1}^{N} \Big\{ \Big[-id \cdot p_k^{(1)} + \frac{2\alpha\, h_1\, b}{r_2} (p_k^{(1)} \alpha\, (a_k^{(1)} - \bar{a}_k^{(1)}) + i\varkappa_1\, \bar{p}_k^{(1)}) \Big] e^{-\alpha\left(h_1 + i a_k^{(1)}\right)} + \\
+ [\bar{p}_k^{(1)} (a_k^{(1)} - \bar{a}_k^{(1)} + 2ih_1)\alpha - i\varkappa_1\, p_k^{(1)}]\, e^{-\alpha(h_1 + i\bar{a}_k^{(1)})} + a \Big[\bar{p}_k^{(2)} (a_k^{(2)} - \bar{a}_k^{(2)} + \\
+ 2\frac{ih_1}{r_2}\Big)\alpha - i\varkappa_2\, p_k^{(2)}\Big] e^{-(\alpha(h_1 + i\bar{a}_k^{(2)})} - \frac{i\alpha\, M_k^{(1)}}{2\pi} e^{-\alpha\,(h_1 + i\bar{b}_k^{(1)})} -
\end{gathered}$$

$$-M_k^{(2)}\frac{i\alpha a}{2\pi}e^{-\alpha(h_1+i\overline{b}_k^{(2)})}-M_k^{(1)}\frac{ih_1 b}{\pi r_2}\alpha^2 e^{-\alpha(h_1+ib_k^{(1)})}\Big\}+F_1(-\alpha);$$

$$k_2(\alpha)=-\sum_{k=1}^{N}\Big\{i\overline{p}_k^{(1)}e^{-\alpha(h_1+i\overline{a}_k^{(1)})}+$$

$$+\frac{b}{r_2}\left[p_k^{(1)}(a_k^{(1)}-\overline{a}_k^{(1)})\alpha+i\varkappa_1\overline{p}_k^{(1)}\right]e^{-\alpha(h_1+ia_k^{(1)})}+$$

$$+\frac{a}{r_2}i\overline{p}_k^{(2)}e^{-\alpha(h_1+i\overline{a}_k^{(2)})}-M_k^{(1)}\frac{i\alpha b}{2\pi r_2}e^{-\alpha(h_1+ib_k^{(1)})}\Big\}+\overline{F}_1(\alpha);$$

$$k_3(\alpha)=-\sum_{k=1}^{N}\Big\{-b\,[i\varkappa_2 p_k^{(2)}-\alpha(a_k^{(2)}-\overline{a}_k^{(2)})\overline{p}_k^{2}]\,e^{-\alpha(h_2+i\overline{a}_k^{(2)})}+$$

$$+ip_k^{(2)}e^{-\alpha(h_2+ia_k^{(2)})}+i\alpha r_1 p_k^{(1)}e^{-\alpha(h_2+ia_k^{(1)})}-M_k^{(2)}\frac{i\alpha b}{2\pi}e^{-\alpha(h_2+ib_k^{(2)})}\Big\}+$$

$$+F_2(-\alpha);$$

$$k_4(\alpha)=-\sum_{k=1}^{N}\Big\{\frac{ar_1}{r_2}\left[p_k^{(1)}(\overline{a}_k^{(1)}-a_k^{(1)}+2ih_2r_2)\alpha-i\varkappa_1\overline{p}_k^{(1)}\right]e^{-\alpha(h_2+ia_k^{(1)})}+$$

$$+[p_k^{(2)}(\overline{a}_k^{(2)}-a_k^{(2)}+2ih_2)\alpha-i\varkappa_2\overline{p}_k^{(2)}]\,e^{-\alpha(h_2+ia_k^{(2)})}+[i\overline{p}_k^{(2)}\frac{d}{r_2}-$$

$$-2\alpha h_2 b(\overline{p}_k^{(2)}(\overline{a}_k^{(2)}-a_k^{(2)})\alpha+i\varkappa_2 p_k^{(2)})]\,e^{-\alpha(h_2+i\overline{a}_k^{(2)})}+$$

$$+M_k^{(1)}\frac{i\alpha ar_1}{2\pi r_2}e^{-\alpha(h_2+ib_k^{(1)})}+M_k^{(2)}\frac{i\alpha}{2\pi}e^{-\alpha(h_2+ib_k^{(2)})}-$$

$$-M_k^{(2)}\frac{i\alpha^2 h_2 b}{\pi}e^{-\alpha(h_2+i\overline{b}_k^{(2)})}\Big\}+\overline{F}_2(\alpha);$$

$$p_k^{(1)}=\frac{X_k^{(1)}+iY_k^{(1)}}{2\pi(1+\varkappa_1)};\quad p_k^{(2)}=\frac{X_k^{(2)}+iY_k^{(2)}}{2\pi(1+\varkappa_2)}.$$

При $h_j\to\infty$ із системи (11) знаходимо, що $A(\alpha)=B(\alpha)=C(\alpha)=D(\alpha)=0$. Отже, пружна рівновага спаяних із різних матеріалів півплощин під дією зосереджених сил і моментів визначається формулами (9), якщо покласти в них інтегральні члени рівними нулеві.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.

2. С. Е. Бирман. К задаче об упругом равновесии составной полосы. ДАН СССР, т. 62, 2 (1948).

3. М. П. Шереметьєв, Д. Г. Хлебніков. Згин нескінченної смуги з підкріпленим краєм. Прикладна механіка, 2 (1961).

4. Ю. А. Шевляков, А. К. Приварников. До розрахунку шаруватих основ. Прикладна механіка, т. 8, 2 (1962).

5. І. О. Прусов. Стиснення пружних півплощин. Питання механіки і математики. Вид. ЛДУ, вип. 2, 1962.

ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

Ж. В. СТАРОВОЙТЕНКО

РІВНОВАГА СМУГИ ПІД ДІЄЮ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ І ЗОСЕРЕДЖЕНИХ МОМЕНТІВ

Розглянемо смугу $0 < y < h$ (область S^+), на яку діють зосереджені сили $P_k = X_k + iY_k$, прикладені в довільних точках a_k, $(a_k = x_k + iy_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, N_1)$, і зосереджені моменти M_k, прикладені в точках b_k $(k = 1, 2, \ldots, N_2)$. Точки a_k і b_k належать області S^+.

Розв'язок задачі про пружну рівновагу безмежної смуги, навантаженої лише по контуру, наведений в праці [2].

Задача про рівновагу смуги під дією зосереджених сил методом операційного числення розв'язана в праці [3].

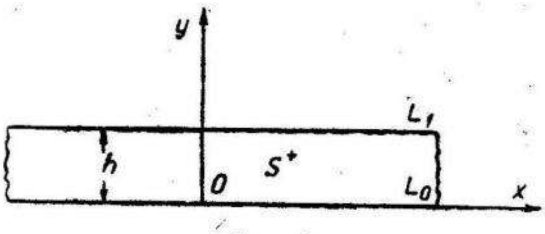

Рис. 1.

Напружений стан у смузі визначається за допомогою функцій Колосова—Мусхелішвілі $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$, поширених і на область S^- $(-h < y < 0)$, формулами [1]:

$$X_x + Y_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \tag{1}$$

$$Y_y - iX_y = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \tag{2}$$

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varkappa\Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \tag{3}$$

де μ і $\varkappa$ — постійні матеріалу смуги.

При умові, що

$$\lim_{z \to t}(z - \bar{z})\Phi'(z) = 0 \text{ на } L_0,$$

за винятком, можливо, скінченного числа точок t, граничні умови задачі на основі (2) і (3) запишуться у вигляді

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 0 \text{ на } L_0, \tag{4}$$

$$\Phi(t) - \Phi(\bar{t}) + 2ih\overline{\Phi'(t)} = 0 \text{ на } L_1. \tag{5}$$

Значками $+$ і $-$ зверху функцій у формулі (4) позначені граничні значення функцій на L_0 зі сторони S^+ і S^-.

Приймемо, що зовнішні навантаження статично зрівноважуються. Внаслідок цього функція $\Phi(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$.

Гранична умова (4) задовольняється, якщо покласти

$$\Phi(z) = A_1 + B_1 + \int_0^\infty A(\alpha)\, e^{i\alpha(z+ih)}\, d\alpha + \int_0^\infty B(\alpha)\, e^{-i\alpha(z-ih)}\, d\alpha, \tag{6}$$

де

$$A_1 = -\sum_{k=1}^{N_1} \frac{X_k + i Y_k}{2\pi(1+\varkappa)} \cdot \frac{1}{z - a_k}$$

(особливість функції $\Phi(z)$ в S^+),

$$B_1 = -\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)} \sum_{k=1}^{N_1} \frac{(X_k - iY_k)(\bar{a}_k - a_k)}{(z-\bar{a}_k)^2} + \frac{\varkappa(X_k + iY_k)}{z - \bar{a}_k}\Bigg] -$$

$$- \sum_{k=1}^{N_2} \frac{i M_k}{2\pi} \frac{1}{(z - \bar{b}_k)^2}$$

(особливість функції $\Phi(z)$ в S^-).

$A(\alpha)$, $B(\alpha)$ — невідомі, взагалі комплекснозначні функції від дійсної змінної α.

Функції, що входять у вирази A_1 і B_1, представимо інтегралами Лапласа

$$\frac{1}{(t-z_0)^n} = \frac{(-i)^n}{(n-1)!} \int_0^\infty \alpha^{n-1} e^{i\alpha(t-z_0)}\, d\alpha \qquad (Im\, t > Im\, z_0),$$

$$\frac{1}{(t-z_0)^n} = \frac{(i)^n}{(n-1)!} \int_0^\infty \alpha^{n-1} e^{-i\alpha(t-z_0)}\, d\alpha \qquad (Im\, t < Im\, z_0)$$

(z_0 — яка-небудь точка із a_k, b_k) і скористаємось формулою (5).

Прирівнюючи в підінтегральному виразі коефіцієнти при $e^{i\alpha x}$ та $e^{-i\alpha x}$, одержимо для визначення $A(\alpha)$ і $B(\alpha)$ два рівняння:

$$(e^{-2\alpha h} - 1) A(\alpha) - 2\alpha h \bar{B}(\alpha) = k_1(\alpha),$$

$$2\alpha h e^{-2\alpha h} A(\alpha) + (1 - e^{-2\alpha h}) \bar{B}(\alpha) = k_2(\alpha),$$

$$k_1(\alpha) = -\sum_{k=1}^{N_1} \Big\{ i p_k e^{-\alpha(h + i a_k)} - [\bar{p}_k (a_k - \bar{a}_k)\alpha - i\varkappa p_k] e^{-\alpha(h + i\bar{a}_k)} \Big\} -$$

$$- \sum_{k=1}^{N_2} \frac{M_k i\alpha}{2\pi} e^{-\alpha(h + i\bar{b}_k)};$$

$$k_2(\alpha) = -\sum_{k=1}^{N_1} \Big\{ -i\bar{p}_k + 2h\alpha^2 \bar{p}_k (\bar{a}_k - a_k) + 2i\alpha h \varkappa p_k] e^{-\alpha(h + i\bar{a}_k)} +$$

$$+ [p_k(\bar{a}_k - a_k)\alpha - i\varkappa \bar{p}_k + 2i\alpha h p_k] e^{-\alpha(h + i a_k)} \Big\} -$$

$$-\sum_{k=1}^{N_2} M_k \frac{i\alpha^2 h}{\pi} e^{-\alpha(h+i\bar{b}_k)} - \sum_{k=1}^{N_2} M_k \frac{i\alpha}{2\pi} e^{-\alpha(h+ib_k)};$$

$$p_k = \frac{X_k + i\,Y_k}{2\pi(1+\varkappa)}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.
2. С. Е. Бирман. К задаче об упругом равновесии бесконечной полосы. ДАН СССР, т. 62, 2 (1948).
3. А. И. Лурье. Операционное исчисление. Гостехиздат, 1951.

ЗМІСТ

Стор.

Редактор Ф. О. Гриншпон

Технічний редактор Т. В. Саранюк

Коректор Л. О. Ширякова

Львовский ордена Ленина государственный университет им. Ив. Франко.
Теоретическая и прикладная математика, выпуск II.

(На украинском языке).

БГ 01330. Здано до набору 10. VIII. 1962 р. Підписано до друку 15. IV. 1963 р. Формат $70 \times 108^1/_{16}$. Папер. арк. 3,125. Ум. друк. арк. 8,5625. Обл.-видавн. арк. 7,2. Тираж 600.
Ціна 36 коп.+оправа 5 коп. Зам. 513.

Львівська книжкова друкарня Головполіграфвидаву Міністерства культури УРСР, Львів, Пекарська, 11.

Ціна 41 коп.