С. В. ДЕНИСКО

# ПРО ДЕЯКІ ПЕРЕТВОРЕННЯ СПЕЦІАЛЬНИХ ПРЯМОЛІНІЙНИХ КОНГРУЕНЦІЙ

1. Розглянемо згинання конгруенції $C$ нормалей поверхні $\Phi$, яке здійснюється шляхом згинання поверхні $\Phi$. Причому конгруенція $C$ містить в собі такі лінійчаті поверхні $\Sigma$, що при згинанні конгруенції $C$ площі будь-яких областей поверхонь $\Sigma$ зберігаються.

Нехай поверхня $\Phi$ згинається в поверхню $\overset{*}{\Phi}$. Тоді конгруенція $C$ буде згинатись в конгруенцію нормалей поверхні $\overset{*}{\Phi}$.

Віднесемо обидві поверхні $\Phi$ і $\overset{*}{\Phi}$ до спільних координат $u^1$, $u^2$ так, що точка $(u^1, u^2)$ поверхні $\Phi$ накладатиметься на точку з тими ж координатами $(u^1, u^2)$ поверхні $\overset{*}{\Phi}$.

Для компонент основних тензорів поверхонь $\Phi$ і $\overset{*}{\Phi}$ введемо позначення. Компоненти першого, другого і третього основних тензорів поверхні $\Phi$ позначимо відповідно через $g_{ij}$, $\pi_{ij}$, $\nu_{ij}$. Очевидно, при нашому виборі координат $u^1$, $u^2$ величини $g_{ij}$ є також компонентами першого основного тензора поверхні $\overset{*}{\Phi}$, компоненти другого і третього основних тензорів цієї поверхні позначимо відповідно через $\overset{*}{\pi}_{ij}$ і $\overset{*}{\nu}_{ij}$.

Лінії перетину поверхонь $\Sigma$ з поверхнею $\Phi$ будемо називати для зручності лініями $\alpha$.

Легко переконатись, що диференціали криволінійних координат при зміщенні вздовж лінії $\alpha$ задовольняють рівняння

$$\left.\begin{aligned}(\pi_{ij} - \overset{*}{\pi}_{ij})\, du^i\, du^j = 0,\\ (\nu_{ij} - \overset{*}{\nu}_{ij})\, du^i\, du^j = 0.\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Звідси видно, що існує не більше ніж два однопараметричні сімейства ліній $\alpha$, а отже — не більше ніж два однопараметричні сімейства поверхонь $\Sigma$.

Надалі нам будуть потрібні такі відомі формули:

$$\left.\begin{aligned}\nu_{ij} - 2H\pi_{ij} + Kg_{ij} = 0,\\ \overset{*}{\nu}_{ij} - 2\overset{*}{H}\overset{*}{\pi}_{ij} + Kg_{ij} = 0,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$H = \pi_{ij}\, g^{ij}, \overset{*}{H} = \overset{*}{\pi}_{ij}\, g^{ij}, \tag{3}$$

$$\pi_{11}\, \pi_{22} - \pi_{12}^2 = \overset{*}{\pi}_{11}\, \overset{*}{\pi}_{22} - \overset{*}{\pi}{}_{12}^2, \tag{4}$$

де $H$ і $\overset{*}{H}$ — середні кривини поверхонь $\Phi$ і $\overset{*}{\Phi}$, а $K$ — повна кривина кожної з цих поверхонь.

Будемо вважати, очевидно, це завжди можливо, що на обох поверхнях координатна сітка ортогональна, причому на поверхні $\Phi$ сімейство ліній $u^2 = \text{const}$ складається з ліній $\alpha$. Тоді

$$g_{12} = g^{12} = 0 \tag{5}$$

і в силу (1)

$$\pi_{11} = \overset{*}{\pi}_{11}, \ \nu_{11} = \overset{*}{\nu}_{11}. \tag{6}$$

Якщо $\pi_{11} = 0$, то згідно з ($6_1$) і $\overset{*}{\pi}_{11} = 0$.

Отже, при згинанні поверхні $\Phi$ асимптотичні лінії $\alpha$ перетворюються в асимптотичні лінії.

Навпаки, якщо поверхня $\Phi$ згинається в поверхню $\overset{*}{\Phi}$ з збереженням одного сімейства асимптотичних ліній, то це сімейство складається з ліній $\alpha$.

Дійсно, нехай обидві поверхні даним згинанням віднесені до загальних координат $u^1$, $u^2$ так, що сімейство ліній $u^2 = \text{const}$ на кожній з цих поверхонь складається з асимптотичних ліній. Тоді

$$\pi_{11} = \overset{*}{\pi}_{11} = 0. \tag{7}$$

Тому з (2) матимемо

$$\nu_{11} = \overset{*}{\nu}_{11}. \tag{8}$$

Згідно з (7) і (8), з (1) виходить, що на поверхні $\Phi$ сімейство ліній $u^2 = \text{const}$ утворене лініями $\alpha$, що й треба було довести.

Нехай тепер лінії $u^2 = \text{const}$ не є асимптотичні. Тоді $\pi_{11} \neq 0$, а тому згідно з (6) і рівностей (2) матимемо

$$H = \overset{*}{H}. \tag{9}$$

Звідси, враховуючи (3), (5) і ($6_1$), дістанемо

$$\pi_{22} = \overset{*}{\pi}_{22}. \tag{10}$$

В силу ($6_1$) і (10) з рівності (4) маємо

$$\pi_{12} = -\overset{*}{\pi}_{12}. \tag{11}$$

Беручи до уваги рівності (5), (9), (10) і (11), з (2) дістаємо

$$\nu_{22} = \overset{*}{\nu}_{22}, \ \nu_{12} = -\overset{*}{\nu}_{12}. \tag{12}$$

Згідно з (6), (10), (11) і (12), з (1) виходить, що координатна сітка складається з ліній $\alpha$.

Таким чином, якщо на поверхні $\Phi$ одне сімейство ліній $\alpha$ не є сімейством асимптотичних ліній, то на цій поверхні існує ще й друге сімейство ліній $\alpha$, ортогональне до першого.

Сітка, диференціальне рівняння якої має вигляд ($1_1$), називається характеристичною [1]. Відомо [1], що ортогональна характеристична сітка — ізотермічна.

Отже, сітка, що складається з ліній $\alpha$, — характеристична і ізотермічна.

Тому надалі будемо вважати, що $u^1$, $u^2$ — ізотермічні координати.

В силу (6), (10) і (11) з рівнянь Петерсона — Кодацці виходить, що в ізотермічних координатах $u^1$, $u^2$

$$\pi_{12} = \text{const}.$$

Знайдемо коефіцієнти першої і другої квадратичних форм поверхні $\Phi$ для того випадку, коли одне з двох сімейств ліній $\alpha$ утворене асимптотичними лініями.

Нехай сімейство ліній $u^1 = \text{const}$ складається з асимптотичних ліній.

Раніше було встановлено, що асимптотичні лінії $\alpha$ при згинанні поверхні $\Phi$ перетворюються в асимптотичні лінії. Але, як відомо [2], інваріантне при згинанні поверхні сімейство асимптотичних ліній складається з прямих. Тому лінії $u^1 = \text{const}$ є прямі. Якщо так, то

$$\Gamma^1_{22} = 0.$$

Звідси, враховуючи, що $g_{12} = 0$, дістанемо

$$\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} = 0.$$

Отже,

$$g_{22} = B^2(u^2).$$

Оскільки $g_{11} = g_{22}$, то перша квадратична форма поверхні $\Phi$ набирає вигляду

$$ds^2 = B^2(u^2)[(du^1)^2 + (du^2)^2].$$

Але це є перша квадратична форма поверхні обертання.

Таким чином, якщо на поверхні $\Phi$ одне з двох сімейств ліній $\alpha$ складається з асимптотичних ліній, то поверхню $\Phi$ так можна накласти на поверхню обертання, що асимптотичні лінії $\alpha$ перетворяться в меридіани.

Оскільки на поверхні $\Phi$ лінії $u^1 = \text{const}$ — асимптотичні, то $\pi_{22} = 0$. Тому з рівняння Гаусса виходить, що

$$B^2 \frac{d^2 B^2}{(du^2)^2} - \left(\frac{dB^2}{du^2}\right)^2 - 2\pi_{12}^2 B^2 = 0.$$

Звідси, враховуючи, що $\pi_{12} = \text{const}$, дістанемо

$$4B^2 = \left(\frac{4\pi_{12}^2}{c_1 c_2} e^{-\frac{u^2\sqrt{c_1}}{2}} + c_2 e^{\frac{u^2\sqrt{c_1}}{2}}\right)^2,$$

де $c_1$, $c_2$ — сталі інтегрування.

Отже, ми знайшли коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні $\Phi$.

Серед коефіцієнтів другої квадратичної форми поверхні $\Phi$ залишається невідомим тільки коефіцієнт $\pi_{11}$. Щоб знайти його, скористуємось рівняннями Петерсона — Кодацці. Одне з цих рівнянь перетворюється в тотожність, а друге набирає вигляду

$$2B^2 \frac{\partial \pi_{11}}{\partial u^2} - \pi_{11} \frac{dB^2}{du^2} = 0,$$

звідки знаходимо

$$\pi_{11} = F(u^1) B^2(u^2),$$

де $F(u^1)$ — довільна функція.

2. Нехай одиничний вектор $a^i$ визначає векторне поле на поверхні $\Psi$. Нехай деяка лінійчата поверхня $S$ конгруенції дотичних до векторних ліній поля $a^i$ дотикається поверхні $\Psi$ вздовж кривої Г. Кожну прямолінійну твірну поверхні $S$ повернемо на кут $\pi$ навколо точки її дотику з поверхнею $\Psi$. При цьому поверхня $S$ буде перетворюватись сама в себе. Нехай дане перетворення поверхні $S$ зберігає площу будь-якої її області. Криву Г будемо називати лінією $\beta$.

Покажемо, що тільки векторні лінії поля $a^i$ і його трансверсалі є лінії $\beta$.

Легко переконатись, що диференціальне рівняння ліній $\beta$ має вигляд

$$\nabla_i a^k g_{kj} du^i du^j = 0,$$

де $g_{ij}$ — метричний тензор поверхні $\Psi$. Але відомо [3], що

$$\nabla_i a^k = \alpha_i \tilde{a}^k,$$

де $\alpha_i$ і $\tilde{a}^k$ — відповідно трансверсальний і доповняльний вектори поля $a^i$. Тому диференціальне рівняння ліній $\beta$ можна переписати таким чином:

$$(\alpha_i du^i)(\tilde{a}_j du^j) = 0. \tag{13}$$

Відомо [3], що рівняння векторних ліній і трансверсалей поля $a^i$ мають відповідно вигляд

$$\tilde{a}_i du^i = 0,$$

$$\alpha_i du^i = 0.$$

Завдяки цьому з (13) виходить, що тільки векторні лінії поля $a^i$ і його трансверсалі є лінії $\beta$.

Наше твердження доведене.

## ЛІТЕРАТУРА

1. A. Voss. Ueber isometrischen Flächen, Math. Ann., **46** (1895).
2. С. П. Фиников. Теория поверхностей. М.— Л., 1934.
3. А. П. Норден. Теория поверхностей. М., 1956.