ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

С. В. ДЕНИСКО

ПРО ЕКВІАРЕАЛЬНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ПОВЕРХОНЬ, КОЖНЕ З ЯКИХ ЗДІЙСНЮЄТЬСЯ АБО З ДОПОМОГОЮ В'ЯЗКИ ПРЯМИХ, АБО З ДОПОМОГОЮ НОРМАЛЕЙ ДЕЯКОЇ ПОВЕРХНІ

Відображення однієї поверхні на другу, при якому зберігається відношення площ, називається еквіареальним. Якщо при цьому зберігатимуться ще й площі, а не тільки їх відношення, то таке еквіареальне відображення будемо називати еквіалентним.

1. Еквіареальне відображення замкненої поверхні Φ на замкнену поверхню $\overset{*}{\Phi}$ з допомогою в'язки P паралельних прямих може бути тільки еквіалентним. [1]

Справді, якщо $r(A)$ — радіус-вектор точки A поверхні Φ, то точка $\overset{*}{A}$ поверхні $\overset{*}{\Phi}$, відповідна до точки A, визначатиметься радіусом-вектором

$$\overset{*}{\bar{r}}(\overset{*}{A}) = \bar{r}(A) + \lambda(A)\,\bar{k},$$

де $\overline{k}$ — сталий вектор, паралельний прямим в'язки P.

Оскільки поверхні Φ і $\overset{*}{\Phi}$ замкнені, то функція $\lambda(A)$ на поверхні Φ в деякій точці A_0 досягає екстремального значення.

Нехай нашим відображенням окіл точки A_0 на поверхні Φ і відповідний йому окіл точки $\overset{*}{A}_0$ на поверхні $\overset{*}{\Phi}$ віднесені до спільних координат u^1, u^2. Тоді в точці A_0 похідні $\frac{\partial\lambda}{\partial u^1}$ і $\frac{\partial\lambda}{\partial u^2}$ повинні дорівнювати нулеві, а тому

$$g_{ij}(A_0) = \overset{*}{g}_{ij}(\overset{*}{A}_0),$$

де g_{ij} і $\overset{*}{g}_{ij}$ — компоненти метричних тензорів поверхонь Φ і $\overset{*}{\Phi}$. Це можливо тільки в тому випадку, коли еквіареальне відображення поверхні Φ на поверхню $\overset{*}{\Phi}$ з допомогою прямих в'язки P еквіалентне.

---

[1] Поверхня Φ відображається на всю поверхню $\overset{*}{\Phi}$, а не на її частину. Крім цього, вважаємо, що кожна з поверхонь Φ і $\overset{*}{\Phi}$ не має особливих точок, за винятком, можливо, точок ліній самоперетину або точок ліній самостику. Причому в околі особливої точки відображаються тільки регулярні прості куски поверхні, що проходять через цю точку.

Ці зауваження стосуються всіх інших пунктів нашої статті, в яких йтиме мова про відображення замкнених поверхонь.

Отже, наше твердження доведене.

Чи для кожної замкненої поверхні існує якась інша замкнена поверхня, така, щоб одна з цих поверхонь еквіареально відображалась на другу з допомогою в'язки паралельних прямих?

Виявляється, що так. Навіть більш того, для кожної замкненої поверхні можна вказати таку замкнену поверхню, що одна з цих поверхонь ізометрично відображатиметься на другу з допомогою в'язки паралельних прямих.

Справді, нехай $\bar{r}(A)$ — радіус-вектор довільної точки A даної замкненої поверхні Ψ. Візьмемо іншу поверхню $\overset{*}{\Psi}$, векторне рівняння якої записується у вигляді

$$\bar{\overset{*}{r}}(\overset{*}{A}) = \bar{r}(A) + \lambda(A)\bar{m},$$

де $\bar{m}$ — одиничний вектор сталого напрямку, а $\lambda(A)$ — взята із знаком мінус подвоєна проекція вектора $\bar{r}(A)$ на вісь вектора $\bar{m}$.

Поверхня Ψ ізометрично відображатиметься на поверхню $\overset{*}{\Psi}$ з допомогою в'язки прямих, паралельних вектору $\bar{m}$.

Крім цього, очевидно, поверхня $\overset{*}{\Psi}$ замкнена, а тому має місце наше твердження.

2. Нехай замкнена поверхня Φ еквіареально відображається на замкнену поверхню $\overset{*}{\Phi}$ з допомогою в'язки прямих з центром S.

Тоді поверхні Φ і $\overset{*}{\Phi}$ повинні бути подібними і подібно розміщеними відносно точки S.

Для доведення візьмемо за початок координат точку S. Тоді, якщо $\bar{r}(A)$ — радіус-вектор точки A поверхні Φ, то точка $\overset{*}{A}$ поверхні $\overset{*}{\Phi}$, відповідна до точки A, матиме радіус-вектор

$$\bar{\overset{*}{r}}(\overset{*}{A}) = \lambda(A)\bar{r}(A).$$

Оскільки поверхні Φ і $\overset{*}{\Phi}$ замкнені і точка S не є конічною для жодної з цих поверхонь, то функція $\lambda(A)$ досягає на поверхні Φ свого найбільшого і найменшого значення. Покажемо, що ці значення рівні, тобто що функція $\lambda(A)$ стала.

Міркуючи так само, як і в попередньому пункті, дістанемо, що в точці A_0, в якій $\lambda(A)$ досягає екстремуму,

$$\lambda(A_0) = c,$$

або

$$\lambda(A_0) = -c,$$

де c^2 — коефіцієнт спотворення площ.

Але найбільше значення функції $\lambda(A)$ і її найменше значення не можуть бути різних знаків, бо інакше центр в'язки був би конічною точкою поверхні $\overset{*}{\Phi}$.

Таким чином, функція $\lambda(A)$ стала і дорівнює c або $-c$.

Це говорить про те, що поверхні Φ і $\overset{*}{\Phi}$ подібні і подібно розміщені відносно точки S, що й треба було довести.

3. Одна з поверхонь Φ і $\overset{*}{\Phi}$ відображається на другу з допомогою нормалей поверхні Φ.

Нехай на поверхні Φ знайдеться хоч одна точка A_0, що не збігається з відповідною їй точкою $\overset{*}{A}_0$ на поверхні $\overset{*}{\Phi}$, і в точці A_0:

1) одиничний вектор $\overline{n}$, нормальний до поверхні Φ, нормальний також до поверхні $\overset{*}{\Phi}$ в точці $\overset{*}{A}_0$, тобто пряма $A_0\overset{*}{A}_0$ є нормаль для кожної з поверхонь Φ і $\overset{*}{\Phi}$;

2) головні напрямки відображення не збігаються з головними напрямками поверхні Φ;

3) середня кривина $H(A_0)$ поверхні Φ відмінна від нуля;

4) повна кривина $K(A_0)$ поверхні Φ відмінна від нуля.

При цих умовах дане відображення не може бути еквівалентним.

Справді, нехай рівняння поверхонь Φ і $\overset{*}{\Phi}$ відповідно

$$\overline{r} = \overline{r}(u^1, u^2),$$

$$\overline{\overset{*}{r}} = \overline{r}(u^1, u^2) + z(u^1, u^2)\,\overline{n}(u^1, u^2).$$

З цих рівнянь видно, що відповідні при нашому відображенні точки мають однакові координати.

Крім цього, згідно з умовою 1, похідні $\frac{\partial z}{du^1}$ і $\frac{\partial z}{\partial u^2}$ в точці A_0 рівні нулеві.

Тому в точці $\overset{*}{A}_0$ метричний тензор поверхні $\overset{*}{\Phi}$

$$\overset{*}{g}_{ij} = g_{ij} - 2\pi_{ij} z(A_0) + \nu_{ij} z^2(A_0), \tag{1}$$

де g_{ij}, π_{ij}, ν_{ij} — компоненти трьох основних тензорів поверхні Φ в точці A_0.

Вважатимемо, що на обох поверхнях головна сітка відображення є координатна сітка. Тоді $g_{12} = \overset{*}{g}_{12} = 0$, і тому з рівності (1) дістанемо

$$z(A_0) = 0$$

або

$$z(A_0)\nu_{12} - 2\pi_{12} = 0.$$

Перша рівність в нашому випадку неможлива, бо точка A_0 не збігається з точкою $\overset{*}{A}_0$.

Якщо скористатись формулою [1]

$$\nu_{ij} = 2H(A_0)\pi_{ij} - K(A_0) g_{ij} \tag{2}$$

і врахувати умови 2 і 3, то з другої рівності дістанемо

$$z(A_0) = \frac{1}{H(A_0)}. \tag{3}$$

Беручи до уваги (2) і (3), легко переконатись, що якби наше відображення було еквівалентним, то

$$k_1 k_2 (k_1^2 + k_2^2) = 0,$$

де k_1 і k_2 — головні кривини поверхні Φ в точці A_0. Але це суперечить умові 4.

Таким чином, ми прийшли до суперечності, що й доводить наше твердження.

4. Узагальнюючи поняття симетрії точок відносно площини, будемо вважати, що дві точки A_1 і A_2 симетричні відносно поверхні Φ, якщо пряма A_1A_2 є нормаль до поверхні Φ і точкою перетину прямої A_1A_2 з поверхнею Φ відрізок A_1A_2 ділиться навпіл.

Дві поверхні називатимемо симетричними відносно поверхні Φ, якщо кожна точка однієї поверхні симетрична відносно поверхні Φ деякій точці другої поверхні.

Нехай замкнена поверхня Φ_1 симетрична поверхні Φ_2 відносно замкненої поверхні Φ.

Поверхні Φ_1 і Φ_2 мають відповідно рівняння

$$\bar{r}_1(A_1) = \bar{r}(A) + z(A)\bar{n}(A)$$

і

$$\bar{r}_2(A_2) = \bar{r}(A) - z(A)\bar{n}(A),$$

де $\bar{r}(A)$ — радіус-вектор точки A поверхні Φ, а $\bar{n}(A)$ — одиничний вектор, нормальний до поверхні Φ в точці A.

Між точками поверхонь Φ_1 і Φ_2 встановимо відповідність, вважаючи відповідними точки, симетричні відносно поверхні Φ. Нехай ця відповідність буде еквіалентною.

Тоді, аналогічно пункту 1, можемо твердити, що в точці A_0, в якій $z(A)$ досягає екстремального значення,

$$z(A_0)(g_{11}\pi_{22} + g_{22}\pi_{11} - 2g_{12}\pi_{12}) + z^3(A_0)(\nu_{11}\pi_{22} + \nu_{22}\pi_{11} - 2\nu_{12}\pi_{12}) = 0,$$

де g_{ij}, π_{ij}, ν_{ij} — компоненти першого, другого і третього основних тензорів поверхні Φ. Поділивши праву і ліву частини попередньої рівності на дискримінант тензора g_{ij}, а також врахувавши відповідні вирази для середньої кривини H поверхні Φ [1], матимемо

$$H(A_0)z(A_0)[1 + z^2(A_0)] = 0. \tag{4}$$

Очевидно, $z(A_0) \neq 0$, бо інакше б збігалися поверхні Φ_1, Φ_2 і Φ. Тому з рівності (4) виходить, що $H(A_0) = 0$.

Отже, якщо в кожній точці замкненої поверхні Φ її середня кривина відмінна від нуля, то не знайдеться жодної пари замкнених поверхонь, симетричних відносно поверхні Φ, таких, щоб одна з них еквіалентно відображалась на другу з допомогою нормалей поверхні Φ.

Від попереднього доведення мало чим відрізняється доведення такого твердження.

Нехай поверхні Ψ_1 і Ψ_2, симетричні відносно поверхні Ψ, відображаються одна на другу з допомогою нормалей поверхні Ψ. Це відображення не може бути еквіалентним, якщо є пара відповідних точок A_1 і A_2, таких, що:

1) пряма A_1A_2 є нормаль як до поверхні Ψ_1 в точці A_1, так і до поверхні Ψ_2 в точці A_2;

2) точка A_1 не збігається з точкою A_2;

3) середня кривина поверхні Ψ в точці її перетину з прямою A_1A_2 відмінна від нуля.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. Ф. Каган. Основы теории поверхностей, II. М.—Л., 1948.