ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

С. П. ПОНОМАРЬОВ

ПРО МОНОГЕННІСТЬ СИМЕТРИЧНО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

Відомо, що якщо функція дійсного змінного має симетричну похідну всюди в $[a, b]$, тобто, якщо існує всюди границя

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=f_s'(x), \tag{1}$$

то, взагалі кажучи, звідси не випливає, що функція має всюди похідну, навіть якщо $f(x)$ є неперервною.

Теорема А. Я. Хінчина [1] твердить, що вимірна функція, яка має симетричну похідну майже всюди, майже всюди має похідну. При вивченні симетричної неперервності та симетричного диференціювання функцій дійсного змінного виникають великі труднощі. Так, наприклад, залишається до цього часу нерозв'язаною проблема Хаусдорфа: чи є зчисленною множина точок розриву всюди симетрично неперервної функції.

Для функцій комплексної змінної дамо визначення: функція $f(z)$ в точці z_0 має симетричну похідну, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0-h)}{2h}=f_s'(z_0), \tag{2}$$

де h — комплексне число. Оскільки існування $f_s'(z)$ накладає сильнішу умову на $f(z)$, ніж відповідно існування $f_s'(x)$ — на $f(x)$, то можна сподіватися, що при не дуже значних обмеженнях, накладених на $f(z)$, виконання (2) всюди в області викличе аналітичність $f(z)$.

Тут буде доведена така основна

Теорема 1. Якщо неперервна однолиста в області Ω функція $f(z)$ всюди має симетричну похідну, то $f(z)$ є аналітична в Ω.

Для доведення будуть потрібними декілька попередніх тверджень.

Теорема 2. Якщо в умовах теореми 1 вимагати, щоб

$$\sup|f_s|<\infty, \tag{3}$$

то $f(z)$ буде аналітичною в Ω.

Доведення. Легко перевірити, що з (3) випливає виконання умови Ліпшица для $f(z)$

$$|f(z')-f(z'')|\leq \sup|f_s'(z)|\cdot|z'-z''| \tag{3'}$$

і що майже всюди в Ω виконується $f_x=-if_y$. Після цього твердження теореми стає очевидним, якщо використати формулу Гріна.

Вкажемо на зв'язок симетричного диференціювання з симетричною ареолярною похідною. Можна показати, що з (2) випливає

$$\lim_{m\sigma \to 0} \frac{1}{m\sigma} \int_{\partial\sigma} f(z)\, dz = 0, \tag{4}$$

де σ — квадрати з центром в точці z_0. Тому, якщо (4) викликає моногенність f, то в цьому випадку функція, яка має симетричну похідну, буде поготів моногенною. Поки що встановлено, що з виконання (4) майже всюди в Ω і з умови (3) випливає моногенність f.

Теорема 3. Нехай неперервна на $[a, b]$ функція $\varphi(x)$ в кожній точці має скінченну симетричну похідну $\varphi_s'(x)$, яка є сумовною на $[a, b]$. Тоді

$$\int_a^b \varphi_s'(x)\, dx = \int_a^b \varphi'(x)\, dx = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Доведення. Для довільного інтервала $\Delta \subset [a, b]$ маємо

$$\Delta = \bigcup_n E_n \left(x : \left| \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x-h)}{2h} \right| \leqslant n,\ |h| < \frac{1}{n} \right). \tag{5}$$

Через те, що кожна E_n є замкненою в Δ і має місце теорема Бера про категорії, знайдеться така множина E_n і такий інтервал $\delta \subset \Delta$, що $\delta \subset E_n$. Тому

$$\int_\delta \varphi_s'\, dx = \int_\delta \varphi'\, dx = \varphi(\beta') - \varphi(\alpha'), \tag{6}$$

$$\delta = (\alpha', \beta'),$$

бо φ задовольняє умову Ліпшица в δ. Звідси випливає, що існує всюди щільна в $[a, b]$ відкинута множина G, на кожному складовому інтервалі якої виконується (6). Зобразимо $P = [a, b] - G$ у вигляді (5) і, знову використовуючи теорему Бера, знайдемо інтервал $\Delta = (\alpha, \beta)$ і E_{n_0}, що при цьому $\Delta P \neq 0$ і $\Delta P \subset E_{n_0}$. Можна вважати P досконалою. Покажемо, що на Δ виконується (6). Для цього достатньо встановити абсолютну неперервність φ на Δ. Нехай $\{\Delta_i\}$, $i = 1, \ldots, n$; $\Delta_i \Delta_j = 0$, $i \neq j$ — довільна система інтервалів в Δ. Можна показати, що для кожного $\Delta_i = (\alpha_i, \beta_i)$ і $\eta > 0$ має місце розклад

$$\Delta_i = \left(\bigcup_{k=1}^{P(i)} \delta_k^i \right) \cup \delta_i,\ m\delta_i < \eta;\ \delta_k^i = (\alpha_k^i, \beta_k^i);\ \delta_i = (\alpha_{P(i)}, \beta_i). \tag{7}$$

При цьому кожний δ_k^i такий, що або $\overset{0}{\delta}{}_k^i P = 0$, або центр δ_k^i міститься в P. Оцінимо суму приростів

$$\sum_{i=1}^n |\varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_i)| \leqslant \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{P(i)} |\varphi(\beta_k^i) - \varphi(\alpha_k^i)| + \sum_{i=1}^n |\varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_{P(i)})| =$$

$$= \sum{}' |\varphi(\beta_k^i) - \varphi(\alpha_k^i)| + \sum{}'' |\varphi(\beta_k^i) - \varphi(\alpha_k^i)| + \sum_{i=1}^n |\varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_{P(i)})|. \tag{8}$$

Суми Σ' і Σ'' поширені відповідно на δ_k^i, які не містять всередині точок P, і на δ_k^i, центр яких належить P. Одержуємо

$$\sum{}' |\varphi(\beta_k^i) - \varphi(\alpha_k^i)| = \sum{}' \left| \int_{\delta_k^i} \varphi' \, dx \right| \leqslant \int_{\cup\Delta_i} |\varphi_s'| \, dx,$$

і, покладаючи $\sum_{i=1}^{n} m\Delta_i < \frac{1}{n_0}$, маємо

$$\sum{}'' |\varphi(\beta_k^i) - \varphi(\alpha_k^i)| \leqslant n_0 \sum_{i=1}^{n} m\Delta_i.$$

Через те, що $\varphi(x)$ є неперервною, останній доданок в (8) може бути зроблений як завгодно малим. Тому остаточно

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi(\beta_i) - \varphi(\alpha_i)| \leqslant \int_{\cup\Delta_i} |\varphi_s'| \, dx + n_0 \sum_{i=1}^{n} m\Delta_i.$$

Звідси випливає абсолютна неперервність φ на Δ і виконання (6) на складових інтервалах множини $G_1 = G \cup \Delta$. Далі використовуємо трансфінітну індукцію. Нехай (6) виконується на складових інтервалах множин G_α, $\alpha < \beta$. Якщо β — другого роду, то, як неважко бачити, (6) виконується на складових інтервалах $G_\beta = \cup\, \sigma_\alpha$. Якщо ж β — першого роду, то, зображуючи $P_{\beta-1} = [a, b] - G_{\beta-1}$ у вигляді (5) і знову використовуючи теорему Бера, знайдемо відповідну порцію $\Delta P_{\beta-1}$, яка належить деякій E. Використовуючи міркування, які наведені вище, одержимо, що (6) виконується на складових інтервалах множини $G_\beta = G_{\beta-1} \cup \Delta$. Через те, що $\{P_\alpha\}$ строго монотонно спадає, то, згідно з принципом Контора—Бера, знайдеться таке γ, що $P_\gamma = 0$. Цим і завершується доведення твердження. Перейдемо до доведення основної теореми 1.

З її умов випливає, що $f(z)$ аналітична на всюди щільній в Ω відкритій множині G, якщо мати на увазі теорему 2 і теорему Бера, бо для будь-якого квадрата $\omega \subset \Omega$,

$$\omega = \cup_n E_n \left(\left| \frac{f(z+h) - f(z-h)}{2h} \right| \leqslant n, \ |h| < \frac{1}{n}, \ z \in \omega \right). \tag{9}$$

Множина особливостей $P = \overline{\Omega} - G$ є досконалою в Ω.

Покажемо, що $P_0 = P \frown \Omega = 0$. Припустимо протилежне. Тоді

$$P_0 = \bigcup_n E_n \left(\left| \frac{f(z+h) - f(z-h)}{2h} \right| \leqslant n, \ |h| < \frac{1}{n} \right). \tag{10}$$

Згідно з теоремою Бера про категорії, знайдеться квадрат ω і така E_n, що $P_0 \frown \omega = E_n \frown \omega \neq \varnothing$. В ω модуль $|f_s'|$ буде сумовний:

$$\iint_\omega |f'_s| \, dxdy \leqslant \sqrt{m(\omega \frown G) \cdot mf(\omega \frown G)} + nm\omega. \tag{11}$$

Тому використовуючи теорему Фубіні і теорему 3, робимо висновок, що в ω для будь-якого прямокутника q має місце формула Гріна:

$$\frac{1}{2i} \int_{\partial q} f dz = \iint_q \frac{\partial t}{\partial \bar{z}} \, dxdy. \tag{12}$$

Через те, що умови Коші—Рімана виконуються майже всюди в Ω, права частина в (12) дорівнює нулеві. Згідно з теоремою Морера, $f(z)$ аналітична в ω. Тому $P \cap \Omega = 0$.

У зв'язку з (4) доведемо таке твердження.

Теорема 4. Нехай $f(z)$ неперервна в області Ω і для майже всіх точок $z \in \Omega$.

$$\lim_{m\sigma \to 0} \frac{1}{m\sigma} \int_{\partial\sigma} f\,(z+\zeta)\,d\zeta = 0,$$

де σ — квадрат з центром в точці z. Нехай, крім того, функція

$$\varphi(z) = \sup_{\sigma} \frac{1}{m\sigma} \left| \int_{\partial\sigma} f(z+\zeta)\,d\zeta \right| \tag{13}$$

сумовна в Ω. Тоді f аналітична в Ω.

Доведення. Розглянемо

$$F_r(z) = \frac{1}{r^2} \iint_{\omega_r} f(z+\zeta)\,d\xi\,d\eta, \tag{14}$$

де ω_r — квадрат з стороною довжини r, z належить області G_r, $d(G_r, c\Omega) > r$.

Нехай σ — довільний квадрат, який міститься в G_r. Тоді

$$\frac{1}{m\sigma} \int_{\partial\sigma} F_r(z+t)\,dt = \frac{1}{r^2} \iint_{\omega_r} \left(\frac{1}{m\sigma} \int_{\partial\sigma} f(z+t+\zeta)\,dt \right) d\xi d\eta. \tag{15}$$

Використовуючи (13), маємо оцінку

$$\frac{1}{m\sigma} \left| \int_{\partial\sigma} F_r(z+t)\,dt \right| \leqslant \frac{1}{r^2} \iint_{\Omega} \varphi dx dy. \tag{16}$$

З другого боку, оскільки φ сумовна,

$$\lim_{m\sigma \to 0} \frac{1}{m\sigma} \int_{\partial\sigma} F_r(z+t)\,dt = 0. \tag{17}$$

З (16) і (17), як неважко показати, випливає аналітичність F_r в G_r. Після цього аналітичність f в Ω очевидна.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин. Fund. Math., **9**, 212—279 (1927).