ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

І. Г. СОКОЛОВ

ПРО ОБЕРНЕНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ДЕЯКИХ ПРОЦЕСІВ НАБЛИЖЕННЯ

С. М. Нікольський у відомій роботі [1, стор. 245] вказує на те, що метод С. Н. Бернштейна для доведення теорем (обернених) конструктивної теорії функцій є на сьогодні єдиним методом доведення тверджень подібного роду.

В цій замітці робимо спробу побудови загальної схеми доведення обернених теорем певного типу.

Як відомо, прямими теоремами конструктивної теорії функцій називаємо теореми типу Джексона, де виходячи з конструктивної характеристики функції дається висновок про порядок її наближення деякою послідовністю операторів.

Узагальнена обернена задача може бути сформульована таким чином. Нехай E — простір Банаха. Розглядається послідовність операторів $\{U_n\}$ з E в E. Нехай D_ω — множина елементів із E таких, що при $x \in D_\omega$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| U_n(x) \| < +\infty.$$

Необхідно дати конструктивну характеристику елементам із D_ω.

При вирішуванні цієї задачі ми розглядаємо функції як лінійні функціонали у просторі Банаха, тобто стаємо на точку зору теорії узагальнених функцій. При цьому, як видно з теореми [1], якщо у просторі E_1 має місце деяка пряма теорема для послідовності операторів U_n^*, то у спряженому просторі має місце деяка обернена теорема для послідовності «спряжених» операторів.

§ 1

Нехай E_1 — сепарабельний простір Банаха і E — простір, спряжений з E_1. Кожний лінійний функціонал L в E_1 має вигляд

$$L(y) = < x;\ y >;\ \| L \| = \| x \|;\ x \in E;\ y \in E_1. \tag{1}$$

Скалярний добуток $< x; y >$ є білінійний функціонал, неперервний по кожному аргументу.

Розглянемо у просторі E послідовність операторів $\{U_n\}$ (з E в E) і множину $D_\omega \in E$ елементів, на яких послідовність значень $U_n(x)$ обмежена:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| U_n(x) \| < +\infty, \text{ якщо } x \in D_\omega. \tag{2}$$

Припустимо далі, що дана множина $D_{\omega^*} \in E_1$ і послідовність операторів $\{U_n^*\}$ (з E_1 в E_1), для яких виконуються умови

$$\lim_{n\to\infty} U_n^*(y) = \omega^*(y); \; y \in D_\omega^*, \tag{3}$$

$$< U_n(x); \; y > = < x; \; U_n^*(y) >; \; x \in D_\omega: \; y \in D_{\omega^*}. \tag{4}$$

При цих припущеннях справедлива теорема:

Теорема 1.

а) Існує оператор A з областю визначення $H \in E$, що задається формулою

$$< z; \; y > = < A(z); \; \omega^*(y) >; \; z \in H; \; y \in D_{\omega^*}. \tag{5}$$

в) Для будь-якого $x \in D_\omega$ знайдуться елементи $z \in H$ і $u \in \mathfrak{G}$ такі, що

$$x = A(z) + u. \tag{6}$$

Притому $\mathfrak{G}$ є множина елементів з E, що задовольняють умову:

$$< u; \; \omega^*(y) > = 0 \tag{7}$$

для $y \in D_{\omega^*}$

Формула (6) дає деяку конструктивну характеристику елементам з D_ω.

Д о в е д е н н я. Нехай $x \in D_\omega$. Тоді послідовність лінійних функціоналів обмежена і, в силу відомої теореми Банаха, слабо компактна. Таким чином знайдеться така послідовність $U_{n_k}(x)$ (виділена з $U_n(x)$) і такий елемент $z \in E$, що $U_{n_k}(x)$ збігається слабо до z; тобто для усіх $y \in E_1$,

$$\lim_{n_k\to\infty} < U_{n_k}(x); \; y > = < z; \; y >.$$

Нехай $z = \omega(x)$, тоді

$$\lim < U_{n_k}(x); \; y > = < \omega(x); \; y >; \; x \in D_\omega; \; y \in E_1. \tag{8}$$

З умов (3) і (4) маємо

$$< \omega(x); \; y > = < x; \; \omega^*(y) > \tag{9}$$

для всіх $x \in D_\omega$ і $y \in D_{\omega^*}$.

Позначимо через H область значень оператора ω. На H визначимо оператор A формулою (5)

$$< z; \; y > = < A(z); \; \omega^*(y) >,$$

яка справедлива для всіх $z \in H$ і $y \in D_{\omega^*}$.

Існування такого оператора A випливає безпосередньо з формули (9).

Оператор A, взагалі кажучи, багатозначний, але характер його багатозначності легко визначити. Якщо $(Az)_1$ і $(Az)_2$ два значення оператора A для елемента z, то з формули (5) маємо

$$<(Az)_1 - (Az)_2; \; \omega^*(y)> = 0,$$

тобто

$$(Az)_1 - (Az)_2 \in \mathfrak{G}.$$

Покладаючи в формулі (9) $\omega(x) = z$ і беручи до уваги (5), одержимо $\langle x - A(z);\ \omega^*(y) \rangle = 0$ для всіх $y \in D\omega^*$, тобто

$$x = A(z) + u \tag{6}$$

§ 2

В останні роки теореми типу Е. В. Вороновської про наближення функцій поліномами Бернштейна були перенесені на наближення функцій деякими інтегральними додатними операторами (див., наприклад, [3], стор. 130—131, задачі 29, 31, 32 [4]).

Теорема, обернена теоремі Вороновської, була доведена Леу [5].

Використовуючи теорему [1], легко одержати обернення вищевказаних результатів.

Теорема 2. Нехай $K_n(x, t)$ неперервні по кожному аргументу в проміжку $[a, b]$ і $\psi(n)$ функція від n така, що

$$\lim_{n\to\infty} \psi(n)\left[\int_a^b \varphi(t) K_n(x;\ t)\,dt - \varphi(x)\right] = \varphi''(x) \tag{10}$$

рівномірно в проміжку $[c;\ d] \in [a;\ b]$, де $\varphi(x)$ має неперервну другу похідну. Якщо при тому для неперервної функції $f(x)$ виконується умова

$$\psi(n) \max_{c\leqslant t\leqslant d} \left| \int_a^b f(x) K_n(x;\ t)\,dx - f(t) \right| \leqslant K, \tag{11}$$

де K — деяка постійна, то $f(x)$ має на проміжку $[c;\ d]$ зображення

$$f(x) = \int_c^x dz \int_c^z q(v)\,dv + \alpha x + \beta, \tag{12}$$

де q — вимірна, обмежена функція на $[c;\ d]$, а α і β постійні.

Доведення. Нехай $E = m[a;\ b]$ — простір обмежених, вимірних функцій, а $E_1 = L[a;\ b]$ — сумовних на $[a;\ b]$ функцій.

Розглянемо послідовність лінійних операторів з E в E

$$\tilde{U}_n(f;\ t) = \psi(n)\left[\int_a^b K_n(x;\ t) f(x)\,dx - f(t)\right]$$

і покладемо

$$U_n(f; t) = \begin{cases} \tilde{U}_n(f;\ t), & t \in [c;\ d], \\ 0, & t \text{ зовні } [c;\ d]; \end{cases}$$

тоді

$$\| U_n(f;\ t) \|_{m(a;\ b)} = \| \tilde{U}_n(f;\ t) \|_{m(c;\ d)}.$$

Нехай далі D_{ω^*} є множина функцій з $L(a;\ b)$ неперервних на $[a;\ b]$ разом з своїми двома першими похідними. При цьому кожна функція із D_{ω^*} дорівнює нулю зовні деякого інтервала $(\gamma;\ \delta)$ (свого для кожної функції), внутрішнього до $[c;\ d]$.

Покладемо далі

$$U_n^*(\varphi; x) = \psi(n)\left[\int_a^b \varphi(t) K_n(x; t)\, dt - \varphi(x)\right].$$

Тоді, як легко бачити, для кожної функції $f \in E$ і $\varphi \in D_{\omega^*}$ маємо

$$< U_n(f); \varphi > = \int_a^b U_n(f; t)\varphi(t)\, dt = \int_a^b f(x) U_n^*(\varphi; x)\, dx =$$

$$= < f; U_n^*(\varphi) >.$$

Далі

$$\lim_{n\to\infty} U_n^*[\varphi; x] = \varphi''(x) = \omega^*(\varphi)$$

і

$$< z: \varphi > = \int_a^b z(t)\varphi''(t)\, dt = \int_a^b \left[\int_c^t du \int_c^u z(v)\, dv\right]\varphi''(t)\, dt$$

для $z \in E$ і $\varphi \in D_{\omega^*}$.

Тому, поклавши

$$A(z) = \int_c^t du \int_c^u z(v)\, dv,$$

одержимо

$$<z; \varphi> = <A(z); \omega^*(\varphi)>.$$

В силу теореми [1], якщо f неперервна на $[a; b]$ функція, така, що

$$\| U_n(f) \|_{m(a;b)} \leqslant K,$$

то

$$f(t) = \int_c^t du \int_c^u z(v)\, dv + \psi(t),$$

де $\psi(t)$ — неперервна функція, яка задовольняє умову

$$\int_c^d \psi(t)\varphi''(t)\, dt = 0$$

для будь-якої $\varphi \in D_{\omega^*}$.

В силу відомої теореми Дю Буа Реймонда ψ — лінійна функція.

ЛІТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский. Тр. мат. ин-та Стеклова, т. XXXVII, 244—278 (1951).
2. Е. В. Вороновская. ДАН СССР, (А), 79—85 (1932).
3. П. П. Коровкин. Линейные операторы и теория приближений. Физматгиз, 1959.
4. П. П. Коровкин. УМН., т. XIII, 6 (1958).
5. K. Leew, J. anal. math. 7, 1, 89—104 (1959).