ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

І. Г. СОКОЛОВ

# УТОЧНЕННЯ ОДНІЄЇ НЕРІВНОСТІ П. Л. ЧЕБИШЕВА

Чебишев довів таке цікаве твердження.

Нехай $f(x)$ і $K(x)$ дві монотонні обмежені функції. Якщо $f$ і $K$ змінюються в одному напрямі, то

$$\int_a^b f(x)\, K(x)\, dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \int_a^b K(x)\, dx \geqslant 0. \tag{1}$$

Якщо ж $f$ і $K$ змінюються в обернених напрямах, то справедлива нерівність, обернена до (1) [1].

Ми даємо уточнення нерівності в тому сенсі, що для кожної вимірної, обмеженої на $[a, b]$ функції $f(x)$ і сумовної на $[a, b]$ $K(x)$ дається оцінка зверху для лівої частини нерівності (1).

Ми будемо виходити з такої теореми С. М. Нікольського (2):

Нехай $E$ — простір Банаха і $F, F_1, F_2, \ldots, F_n$ — лінійні функціонали, визначені на $E$. Тоді

$$\min_{\lambda_k} \|F - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k F_k\| = \max_x F(x),$$

де максимум береться серед тих $x \in E$, для яких

$$\|x\| \leqslant 1;\ F_k(x) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Якщо $E$ є $L(a, b)$, то теорема С. М. Нікольського набуває вигляду:

Нехай $f$; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ вимірні, обмежені на $[a, b]$ функції. Тоді

$$\min_{\lambda_k} \|f - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k\|_m = \max_k \int_a^b K(x) f(x)\, dx,$$

де максимум береться за тими сумовними функціями $K$, які задовольняють умови

$$\int_a^b K(x)\, \varphi_k(x)\, dx = 0;\quad \int_a^b |K(x)|\, dx = 1.$$

В окремому випадку ($n = 1$; $\varphi_1(x) = 1$) маємо

$$\min_\lambda \|f - \lambda\|_m = \max \int_a^b f(x) K(x)\, dx, \tag{2}$$

$$\text{де } \|K\|_L = 1; \quad \int_a^b K(x)\,dx = 0.$$

Але

$$\min_{\lambda} \|f - \lambda\| = \frac{1}{2}\,\omega(f),$$

де $\omega(f)$ є істотне коливання $f$ на $[a, b]$, тобто

$$\omega(f) = vrai \max f(x) - vrai \min f(x).$$

Таким чином, із (2) одержуємо

$$\frac{1}{2}\,\omega(f) = \max_K \int_a^b f(x) K(x)\,dx, \tag{3}$$

де функції $K$ задовольняють умови, вказані в (2).

Якщо тепер $K$ є будь-яка сумовна функція, то

$$K_1(x) = \frac{1}{K_c}\left(K(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b K(x)\,dx\right),$$

де $K_c = \|K - \frac{1}{b-a}\int_a^b K(x)\,dx\|_L$

є вже допустима функція і із (3) випливає

$$\frac{1}{2}\,\omega(f)\cdot K_c \geqslant \int_a^b K(x) f(x)\,dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b K(x)\,dx \int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

Нерівність (4) є точною у тому сенсі, що для будь-якої $f \in \mathfrak{M}$ найдеться $K \in L$, така, що ця нерівність переходить в рівність.

Для $K(x) = f(x)$ одержимо

$$\frac{1}{2}\,\omega(f)\cdot f_c \geqslant \int_a^b f^2(x)\,dx - \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right]^2. \tag{5}$$

Остання нерівність є уточненням нерівності Буняковського—Шварца.

Приклад. Розглянемо оцінку зверху для коефіцієнтів Фур'є вимірної обмеженої функції $f(x)$:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx.$$

Нехай

$$[a,\ b] = \left[\frac{m\pi}{n};\ \frac{\overline{m+1}}{n}\,\pi\right] \quad (m = \overline{0;\ 2n} - 1).$$

Покладемо $K(x) = \cos nx$.

Тоді
$$\int\limits_{\frac{m\pi}{n}}^{\overline{\frac{m+1}{n}}\pi} \cos nx\,dx = 0;\quad K_c = \int\limits_{\frac{m\pi}{n}}^{\overline{\frac{m+1}{n}}\pi} |\cos nx|\,dx = \frac{2}{n},$$

і нерівність (4) дає

$$\frac{1}{n}\,\omega_m(f) \geqslant \int\limits_{\frac{m\pi}{n}}^{\overline{\frac{m+1}{n}}\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$

де $\omega_m(f)$ є істотна зміна $f$ на $\left[\frac{m\pi}{n};\ \overline{\frac{m+1}{n}}\,\pi\right]$.

Сумуючи по $m$, одержуємо

$$\frac{1}{\pi^2}\sum_{m=0}^{2n-1}\omega_m(f)\,\Delta x_m \geqslant a_n, \tag{6}$$

де

$$\Delta x_m = \frac{\pi}{n} = \overline{\frac{m+1}{n}}\cdot\pi - \frac{m\pi}{n}.$$

## ЛІТЕРАТУРА

1. Гурса. Курс математического анализа, т. 1.
2. С. М. Никольский. ИАН СССР, сер. мат., **10**, 207—256 (1946).