ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

В. О. ГУКЕВИЧ

ЦІЛІ ФУНКЦІЇ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ І ЧАСТКОВИЙ ІНТЕГРАЛ ФУР'Є

Нехай функція f задана на всій осі. Назвемо «частковим» інтегралом Фур'є порядку T функції f в точці x вираз

$$S_T(f;\ x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\frac{\sin T(x-t)}{x-t}\,dt \qquad (T>0)$$

(легко переконатися, що $S_T(f)$ існує майже всюди, якщо $f \in L_p(-\infty, \infty)$ $(p \geqslant 1)$).

Далі, через $\mathfrak{G}_\sigma$ і $\mathfrak{G}_{\sigma-0}$ позначено сукупність усіх цілих трансцендентних функцій експоненціального типу з показником відповідно $\leqslant \sigma$ і $<\sigma$, а через $\mathfrak{G}_\sigma^{(p)}$ і $\mathfrak{G}_{\sigma-0}^{(p)}$ — клас функцій, що належать відповідно до $\mathfrak{G}_\sigma$ і $\mathfrak{G}_{\sigma-0}$ і рівночасно є сумовними в p-му степеню на всій осі.

У питаннях гармонічної апроксимації неперіодичних функцій на всій осі частковий інтеграл Фур'є і цілі функції експоненціального типу відіграють відповідно таку роль, як часткова сума ряду Фур'є і тригонометричні многочлени при гармонічній апроксимації періодичних функцій.

В цій замітці розглянемо деякі властивості функцій класу $\mathfrak{G}_\sigma^{(p)}$, $\mathfrak{G}_{\sigma-0}^{(p)}$ і частково інтеграла Фур'є, аналогічні відповідним властивостям тригонометричного полінома і часткового ряду Фур'є.

§ 1

Введемо позначення

$$S_T(x;\ f;\ \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-v)\,\frac{\sin Tv \sin \theta Tv}{\pi\, T v^2 \theta}\,dv$$

і

$$\Phi(v;\ \theta) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin v}{v}\cdot\frac{\sin \theta v}{\theta v} \quad (0<\theta\leqslant 1).$$

Обчислимо інтеграл

$$\varphi(t) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u)\cos ut\,du.$$

$$\varphi(t)=2\int_0^\infty \Phi(u)\cos ut\,du=2\int_0^\infty \frac{\sin u\sin\theta u}{\pi\theta u^2}\cos ut\,du=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(1-\theta+t)u-\cos(1+\theta+t)u}{\pi\theta u^2}du+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(1-\theta-t)u-\cos(1+\theta-t)u}{\pi\theta u^2}du.$$

Відомо, що

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2ax-\cos 2bx}{x^2}dx=\pi(b-a),\text{ якщо } b\geqslant a,\ a\geqslant 0.$$

Використовуючи останній факт, маємо

$$\varphi(t)=\begin{cases} 1, & |t|\leqslant 1-\theta\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1-t}{\theta}+1\right), & 1-\theta\leqslant t\leqslant 1+\theta\\ \frac{1}{2}\left(\frac{-1+t}{\theta}+1\right), & -(1+\theta)\leqslant t\leqslant 1-\theta\\ 0, & |t|\geqslant 1+\theta \end{cases} \qquad (\beta).$$

Справедлива така

Теорема 1. Якщо $f\in W_2$, тобто $\frac{f(x)}{1+|x|}\in L_2(-\infty,\infty)$ і $f\in \mathfrak{G}_\tau$, де $\tau\leqslant$ $\leqslant T(1-\theta)$,

то

$$S_T(x;\ f;\ \theta)\equiv f(x). \qquad (1)$$

Доведення теореми є повторенням доведення подібної теореми для узагальненого інтеграла Феєра [1, стор. 217].

Дійсно, в розглядeному випадку, згідно з теоремою Вінера—Палея, маємо

$$f_1(x)=\frac{f(x)-f(i)}{x-i}=\int_{-\tau}^{\tau} e^{itx}\,\psi(t)\,dt,$$

де

$$\psi(t)\in L_2[-\tau,\tau].$$

$$S_T(x;\ f;\ \theta)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x-v)\frac{\sin Tv\sin\theta Tv}{\pi\theta Tv^2}dv=$$

$$=T\int_{-\infty}^{\infty}\Big[f(i)+f_1(x-v)(x-i-v)\Big]\frac{\sin Tv\sin\theta Tv}{\pi\theta v^2T^2}dv=$$

$$= f(i)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Tv \sin\theta Tv}{\pi\theta Tv^2}\,dv + (x-i)\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-v)\,\frac{\sin Tv\sin\theta Tv}{\pi\theta Tv^2}\,dv -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-v)\,\frac{\sin Tv \sin\theta Tv}{\pi\theta Tv}\,dv\,.$$

Але [5, т. 2, стор. 637]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u \sin\theta u}{\theta u^2}\,du = \pi.$$

Таким чином,

$$S_T(x; f; \theta) = f(i) + (x-i)\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-v)\,\frac{\sin Tv\sin\theta Tv}{\pi\theta Tv^2}\,dv -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x-v)\,\frac{\sin Tv\sin\theta Tv}{\pi\theta Tv}\,dv.$$

Використовуючи теорему про звертку [1, стор. 136], дістаємо

$$S_T(x; f; \theta) = f(i) + (x-i)\int_{-\tau}^{\tau}\varphi\left(\frac{t}{T}\right)\psi(t)\,e^{itx}\,dt -$$

$$-\frac{i}{T}\int_{-\tau}^{\tau}\varphi'\left(\frac{t}{T}\right)\psi(t)\,e^{itx}\,dt,$$

після чого залишається взяти до уваги (β).

Зауважимо [1, стор. 208], що коли $f \in L_p(-\infty, \infty)$, $p \geqslant 2$, то $f \in W_2$. Розглянемо функцію $f \in \mathfrak{G}_\tau^{(p)}$, де $p \geqslant 2$, $\tau \leqslant T(1-\Theta)$.

Для такої функції в рівності (1) можна перейти до границі, коли $\Theta \to 0$.

Дійсно. Використовуючи нерівність Гельдера, бачимо, що інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-v)\,\frac{\sin Tv}{v}\,\psi(\theta Tv)\,dv,$$

де

$$\psi(\theta; v) = \begin{cases} \dfrac{\sin\theta v}{\theta v}, & \theta v \neq 0 \\ 1, & \theta v = 0, \end{cases}$$

рівномірно збігається відносно u з проміжку [0,1], звідки, беручи до уваги неперервність підінтегральної функції для $-\infty < v < \infty$ і $-1 \leqslant \theta \leqslant 1$, випливає неперервність інтеграла по параметру в проміжку [0,1].

Таким чином, якщо $f \in \mathfrak{G}_T^{(p)}$ і $p \geqslant 2$, то

$$S_T(f;\ x) = \lim_{\theta \to 0} S_T(x;\ f;\ \theta) \equiv f(x). \tag{2}$$

Покажемо, що для $1 < p \leqslant 2$ має місце тотожність, аналогічна (2). А саме, справедлива така

Теорема 2. Функція $\varphi(z) \in \mathfrak{G}_{T-0}^{(p)}$, де $1 < p \leqslant 2$, є нерухомою точкою оператора $S_T(f)$, тобто

$$S_T(\varphi;\ x) \equiv \varphi(x). \tag{3}$$

Доведення. Нехай $1 < p \leqslant 2$. Згідно з узагальненою теоремою Вінера—Палея будь-яку функцію $\varphi(z) \in \mathfrak{G}_{T-0}^{(p)}$ можна зобразити у вигляді

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{iuz} \gamma(u)\, du,$$

де $\gamma(u) \in L_2(-\sigma, \sigma)$ і $\sigma < T$.

Тоді тому, що $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt = \pi$, маємо

$$\sqrt{2\pi}\,[\varphi(x) - S_T(\varphi;\ x)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt \int_{-\sigma}^{\sigma} (e^{iut} - e^{iux})\, \gamma(u). \tag{4}$$

Легко бачити, що для будь-яких додатних A і C

$$\int_{-C}^{A} \left[\int_{-\sigma}^{\sigma} (e^{iut} - e^{iux})\, \gamma(u)\, du \right] \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt =$$

$$= \int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(u)\, du \int_{-C}^{A} (e^{iut} - e^{iux})\, \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt.$$

Але

$$\lim_{\substack{A \to \infty \\ C \to \infty}} \int_{-C}^{A} \left[\int_{-\sigma}^{\sigma} (e^{iut} - e^{iux})\, \gamma(u)\, du \right] \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt \int_{-\sigma}^{\sigma} (e^{iut} - e^{iux})\, \gamma(u)\, du$$

і тому

$$\sqrt{2\pi}\,[\varphi(x) - S_T(\varphi;\ x)] = -\frac{1}{\pi} \lim_{\substack{A \to \infty \\ C \to \infty}} \int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(u)\, du \int_{-C}^{A} (e^{iut} - e^{iux})\, \frac{\sin T(x-t)}{x-t}\, dt. \tag{5}$$

Покажемо, що в інтегралі справа можна перейти до границі під знаком інтеграла, коли A і $C \to \infty$.

Для цього зауважимо, що

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(u)\, du \int_{A}^{\infty} (e^{iut} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt \to 0,$$

коли $A \to \infty$.

(Доведення того, що $\int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(u)\, du \int_{-\infty}^{-C} (e^{iut} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt$, коли $C \to \infty$ зовсім аналогічне останньому).

З цією метою зауважимо, що

$$\int_{a}^{\infty} (e^{iut} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt, \text{ де } a > x$$

збігається рівномірно відносно u в проміжку $[-\sigma, \sigma]$. (Дійсно. Для інтеграла $\int_{a}^{\infty} e^{iux} \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt$ це очевидно, а для інтеграла $\int_{a}^{\infty} e^{iut} \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt$ випливає з відомої ознаки Діріхле [5, т. 2, стор. 690], якщо врахувати, що які б не були B,

$$\left| \int_{a}^{\infty} e^{iut} \sin T(x-t)\, dt \right| = \left| \int_{a+x}^{B+x} e^{iu(x+z)} \sin Tz\, dz \right| =$$

$$= \left| e^{iux} \frac{iu \sin Tz - T\cos Tz}{T^2 - u^2} \Bigg|_{z=a+x}^{B+x} \right| < \frac{2(\sigma + T)}{T^2 - \sigma^2} \quad (0 < \sigma < T)$$

і $\frac{1}{x-t} \searrow 0 \ (t \to \infty)$.

Але тоді

$$\Phi(A;\, u) = \int_{A}^{\infty} (e^{iut} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt \to 0 \quad (A \to \infty)$$

рівномірно відносно u, звідки в силу нерівності Шварца відразу випливає, що

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(u)\, du \int_{A}^{\infty} (e^{iut} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt \to 0, \quad (A \to \infty),$$

оскільки $\gamma(u) \in L_2(-\sigma, \sigma)$.

Отже, перехід до границі під знаком інтеграла в рівності (5) законний.

Таким чином,

$$\sqrt{2\pi}\, [\varphi(x) - S_T(\varphi;\, x)] = -\frac{1}{\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iut} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt.$$

Розглянемо

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(u) du \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iut} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt.$$

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \gamma(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt =$$

$$= \int_{0}^{\sigma} \gamma(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itu} - e^{iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt +$$

$$+ \int_{0}^{\sigma} \gamma(-u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-itu} - e^{-iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt \tag{6}$$

і далі

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{\pm iut} - e^{\pm iux}) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\cos ut - \cos ux) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt \pm$$

$$\pm i \int_{-\infty}^{\infty} (\sin ut - \sin ux) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt. \tag{7}$$

Але

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\cos ut - \cos ux) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt = \cos ux \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cos uz \frac{\sin Tz}{z} dz - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Tz}{z} dz \right) - \sin ux \int_{-\infty}^{\infty} \sin uz \frac{\sin Tz}{z} dz. \tag{8}$$

Зауважимо, що всі інтеграли в (8) існують, тому що $|u| \leqslant \sigma < T$. При цьому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin uz \frac{\sin Tz}{z} dz = 0$$

і [5, т. 2, стор. 636]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos uz \frac{\sin Tz}{z} dz = \pi \quad (0 < u < T).$$

Таким чином,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\cos ut - \cos ux) \frac{\sin T(x-t)}{x-t} dt = 0, \tag{9}$$

тому що

$$0 \leqslant u \leqslant \sigma < T.$$

Аналогічно показуємо, що також

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\sin ut-\sin ux)\,\frac{\sin T(x-t)}{x-t}\,dt=0\quad(0\leqslant u\leqslant\sigma<T).\tag{10}$$

З формул (4—10) випливає справедливість теореми (2).

На основі тотожностей (2) і (3) можна висловити таке загальне твердження.

Якщо $f\in\mathfrak{G}_{T-0}^{(p)}$ $(p>1)$, $(T>0)$,
то

$$S_T(f;\ x)\equiv f(x).\tag{11}$$

Нехай, як і всюди, у дальшому через $\|\psi\|_{L_p}$ позначено $\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$; справедлива

Теорема 3. Якщо $f\in L_p(-\infty,\ \infty)$ $(p>1)$,
то

$$\|S_T(f)\|_{L_p}\leqslant c_p\|f\|_{L_p},$$

де c_p — постійна, що залежить тільки від p.

Теорема є безпосередньо результатом відомого факту [2, стор. 312] згідно з яким, якщо $f\in L_p(-\infty,\ \infty)$ $(p>1)$, то функція

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{x-t}\,dt$$

існує майже всюди і задовольняє нерівність $\|g\|_{L_p}\leqslant A(p)\|f\|_{L_p}$, де $A(p)$ — постійна, що залежить тільки від p.

§ 2

Відзначимо ще одну властивість часткового інтеграла Фур'є.

В роботі С. М. Лозинського [3] показано, що в метриці C часткова сума ряду Фур'є даного порядку має найменшу норму серед норм тригонометрично-поліноміальних операцій того ж порядку. Подібний факт справедливий для часткового інтеграла Фур'є, як засобу наближення функцій в просторі $L_2(-\infty,\ \infty)$. Дійсно, нехай $A(f)$ є лінійний оператор, який функцію $f\in L_2(-\infty,\ \infty)$ переводить у функцію класу $\mathfrak{G}_\sigma^{(2)}$ і нерухомими точками якого є функції того ж класу $\mathfrak{G}_\sigma^{(2)}$.

Справедлива нерівність

$$\|A\|_{L2}\geqslant\|S_\sigma\|_{L2},\tag{12}$$

де $\|A\|_{L_2}$, $\|S_\sigma\|_{L_2}$ є відповідно норми операторів $A(f)$ і $S_\sigma(f)$.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що оператор $S_\sigma(f)$ належить $\mathfrak{G}_\sigma^{(2)}$, звідки. беручи до уваги тотожність (2), випливає, що він є оператором типу $A(f)$.

Дійсно. Якщо $f \in L_2(-\infty, \infty)$, то

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx$$

збігається до функції

$$F(y) \in L_2(-\infty, \infty)$$

і

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(y)|^2\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2\, dy.$$

Нехай

$$F_\alpha(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)\, e^{-ixy}\, dx \quad (\alpha > 0).$$

Тоді [2, стор. 313]

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} F_\alpha(y)\, e^{ixy}\, dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)\, \frac{\sin \sigma (x-t)}{x-t}\, dt.$$

Переходячи в останній рівності до границі, коли $\alpha \to \infty$, що законно, тому що $F_\alpha(y)$ збігається в L_2 до $F(y) \in L_2(-\infty, \infty)$, одержуємо

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} F(y)\, e^{ixy}\, dy = S_\sigma(f; x). \tag{13}$$

Згідно з теоремою Вінера—Палея формула (13) означає, що $S_\sigma(f)$ є функцією класу $\mathfrak{G}_\sigma^{(2)}$ і

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S_\sigma(f; x)|^2\, dx = \int_{-\sigma}^{\sigma} |F(x)|^2\, dx.$$

Але

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx.$$

Таким чином,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S_\sigma(f; x)|^2\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx,$$

і значить $\| S_\sigma \|_{L_2} \leqslant 1$.

З другого боку, тому що оператор $A(f)$ має ненульову нерухому точку, то $\| A \|_{L_2} \geqslant 1$. Звідси випливає (12) і $\| S_\sigma \|_{L_2} = 1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. ГОНТИ, 1939.
2. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. ГОНТИ, 1939.
3. С. М. Лозинский. ДАН СССР, 61, 2, 193—196 (1948).

4. И. И. Ибрагимов. УМН, **12 : 13** (75), 323—328 (1948).
5. Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2 и 3. Физматгиз, М.—Л., 1959.
6. Е. Т. Уиттекер, Г. Н. Ватсон. Курс современного анализа, ч. 1. М.—Л., 1933.