ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

І. В. ВІТЕНЬКО, О. М. КОСТОВСЬКИЙ

УЗАГАЛЬНЕНІ ФОРМУЛИ ПЕРЕТВОРЕНЬ В МЕТОДАХ ЛОБАЧЕВСЬКОГО—ГРЕФФЕ І ЛЕМЕРА

В даній замітці даються узагальнені формули перетворень в методах Лобачевського—Греффе і Лемера для випадків поліномів, рядів Тейлора і рядів Лорана. Конкретно задача ставиться так: виразити коефіцієнти розкладу в ряд Лорана для функцій:

$$f_k(z)=\prod_{j=0}^{k-1} f(\omega_j^k z^{\frac{1}{k}})=\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i^{(k)} z^i, \tag{1}$$

$$Q_k(z)=\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k-1} f(\omega_j^{(k)} z^{\frac{1}{k}}) R_v(\omega_m^{(k)} z^{\frac{1}{k}})=\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i^{(k)} z^i,$$

де

$$R_v(z)=zv(z)f'(z),\ \omega_j^{(k)}=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k}j}\ (j=0,1,\ \ldots,\ k-1),$$

через коефіцієнти заданого ряду Лорана $f(z)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i z^i$ і допоміжного $v(z)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i z^i$. Ряд Лорана $v(z)$ обирається так, щоб $f(z)$ і $v(z)$ мали спільне кільце збіжності.

Розглянемо спочатку формули перетворень для методу Лобачевського—Греффе.

Нехай $f(z)$ — поліном: $f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$, $a_0\neq 0$. Як відомо [2 і 3], коефіцієнти $a_i^{(k)}$ обчислюються за формулами:

$$a_i^{(k)}=-\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} a_{i-j}^{(k)} S_{kj}\quad a_0^{(k)}=a_0^k,$$

$$S_m=-\frac{1}{a_0}\left(\sum_{j=1}^{m-1} a_j S_{m-j}+ma_m\right)\quad (m=1,2,\ldots,n), \tag{2}$$

$$S_m=-\frac{1}{a_0}\sum_{j=1}^{n} a_j S_{m-j}\quad (m>n).$$

Припустимо тепер, що $f(z)$ — ряд Тейлора, $f(z)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, $a_0\neq 0$. З першої формули (1) маємо:

$$f_k(z)=\lim_{n\to\infty} P_n^{(k)}(z),$$

де

$$P_n^{(k)}(z)=\prod_{j=0}^{k-1} P_n\left(z^{\frac{1}{k}}\omega_j^{(k)}\right),\ P_n(z)=a_0+a_1 z+\ldots+a_n z^n.$$

Беручи до уваги (2), переконуємось, що:

$$a_i^{(k)}=a_{i,ki}^{(k)}=a_{i,ki+1}^{(k)}=\ldots=a_{i,ki+l}^{(k)}=\lim_{n\to\infty} a_{i,n}^{(k)},$$

де $a_{i,j}^{(k)}$ — коефіцієнти полінома $P_n^{(k)}(z)$, $(i=0, 1, 2, \ldots)$, $(j=1, 2, \ldots, n)$. Звідси робимо висновок, що формули (2) залишаються без зміни і для ряду Тейлора, тільки третя рівність (2) є в цьому випадку зайвою, тому що $n=\infty$. Формули (2) можна застосувати теж для ряду Лорана, який обривається хоч би з одної сторони. У випадку, коли ряд Лорана має нескінченну кількість членів в обидві сторони, $a_i^{(k)}$ визначаються таким чином:

$$a_i^{(k)}=\lim_{\substack{m_1\to-\infty\\ m_2\to+\infty}} a_{i,m_1,m_2}^{(k)}=\lim_{m_2\to+\infty} a_{i,-\infty,m_2}^{(k)}=\lim_{m_1\to-\infty} a_{i,m_1,+\infty}^{(k)}, \tag{3}$$

де $a_{i,m_1,m_2}^{(k)}$ — коефіцієнти розкладу в ряд Лорана для функції:

$$f_{k,m_1,m_2}(z)=\prod_{j=0}^{k-1} f_{m_1,m_2}\left(z^{\frac{1}{k}}\omega_j^{(k)}\right),$$

причому

$$f_{m_1,m_2}(z)=\sum_{i=m_1}^{m_2} a_i z^i,\ m_2>m_1, \tag{4}$$

якщо $m_1=-\infty\,(m_2=+\infty)$, то $m_2\neq+\infty\,(m_1\neq-\infty)$. Із (4) видно, що $a_{i,m_1,m_2}^{(k)}$ можуть бути обчислені за формулами (2).

Перейдемо тепер до виводу формул перетворень для методу Лемера.

Спочатку розглянемо випадок ряду Тейлора:

$$f(z)=a_0+a_1 z+\ldots+a_n z^n+\ldots,\ a_0\neq 0.$$

Функцію $Q_k(z)$ з (1) можна записати у вигляді

$$Q_k(z)=f_k(z)T_k(z),$$

де

$$T_k(z)=\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1} T\left(\omega_m^{(k)} z^{\frac{1}{k}}\right),\ T(z)=\frac{zf'(z)\,v(z)}{f(z)}, \tag{5}$$

$$\omega_m^{(k)}=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}\,m}{k}}\quad (m=0,1,\ldots k-1).$$

По коефіцієнтах розкладу заданих функцій $f(z)$ і $v(z)$ легко можна знайти коефіцієнти функції $T(z)$. Нехай

$$T(z)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} t_i z^i. \tag{6}$$

Тоді з (5) випливає

$$T_k(z)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} t_{ik} z^i. \tag{7}$$

Значить,

$$b_i^{(k)}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} t_{mk} a_{i-m}^{(k)} \quad (i=\ldots-2,-1,0,1\ldots). \tag{8}$$

$b_i^{(k)}$ визначаються за формулою (8) і тоді, коли $f(z)$ є ряд Лорана, який обривається хоч би з однієї сторони.

Якщо число членів ряду Лорана не обмежене з двох сторін, тоді для $b_i^{(k)}$ можна дати такі формули:

$$b_i^{(k)}=\lim_{\substack{m_1\to-\infty\\ m_2\to+\infty}} b_{i,m_1,m_2}^{(k)}=\lim_{m_2\to+\infty} b_{i,-\infty,m_2}^{(k)}=\lim_{m_1\to-\infty} b_{i,m_1,+\infty}^{(k)}, \tag{9}$$

де $b_{i,m_1,m_2}^{(k)}$ — коефіцієнти розкладу в ряд Лорана для функції

$$Q_{k,m_1,m_2}(z)=\sum_{m=0}^{k-1}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq m}}^{k-2} f_{m_1,m_2}\left(\omega_j^{(k)} z^{\frac{1}{k}}\right) R_v\left(\omega_m^{(k)} z^{\frac{1}{k}}\right).$$

Причому $f_{m_1,m_2}(z)$ задовольняє умову (4).

При даних умовах коефіцієнти $b_{i,m_1,m_2}^{(k)}$ можуть бути обчислені за формулою (8). Формули (3) і (9) показують, що у випадку ряду Лорана з нескінченною кількістю членів в обидві сторони $a_i^{(k)}$ і $b_i^{(k)}$ $(i=\ldots-2,-1,0,1,2,\ldots)$ можуть бути обчислені для даного i з якою завгодно точністю при обриванні даного ряду на достатньо великих номерах m_1 і m_2 $(m_1<i-N,\ m_2>i+N)$. Припустимо, що $v(z)=z^l$ (l — будь-яке ціле число) і $f(z)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$, $a_0\neq 0$. Позначимо коефіцієнти $b_i^{(k)}$ у випадку функції $v(z)=z^l$ через $b_{i;l}^{(k)}$. Із (6), (7) і (8) легко виводяться такі формули для обчислення $b_{i;l}^{(k)}$:

$$b_{i;l}^{(k)}=-\sum_{j=1}^{i} a_{i-j}^{(k)} S_{kj-l}, \tag{10}$$

де величини $a_i^{(k)}$ і S_m обчислюються за формулами (2). Із формул (2) і (10) можна вивести формули для випадку, коли k набирає дискретних значень вигляду $k=p^\nu$ $(\nu=1,2,\ldots)$.

Тоді

$$A_i^{(\nu)} = -\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} A_{i-j}^{(\nu)} S_j^{(\nu)},\ A_0^{(\nu)} = (A_0^{(\nu-1)})^p,$$

$$S_m^{(\nu)} = S_{km}^{(\nu-1)},\ S_m^{(\nu-1)} = -\frac{1}{A_0^{(\nu-1)}}\left(\sum_{j=1}^{m-1} A_j^{(\nu-1)} S_{m-j}^{(\nu-1)} + mA_m^{(\nu-1)}\right),$$

$$B_{i;l}^{(\nu)} = -\sum_{j=1}^{i} A_{i-j}^{(\nu)} S_{j;l}^{(\nu)},\ S_{m;l}^{(\nu)} = S_{km;l}^{(\nu-1)}; \tag{11}$$

$$S_{m;l}^{(\nu-)} = -\frac{1}{A^{(\nu-1)}}\left(\sum_{j=1}^{m-1} A_j^{(\nu-1)} S_{m-j;l}^{(\nu-1)} + B_{m;l}^{(\nu-1)}\right),$$

де

$$A_i^{(\nu)} = a_i^{(p^\nu)},\ B_{i;l}^{(\nu)} = b_{i;l}^{(p^\nu)}.$$

$A_i^{(1)}$, $B_{i;l}^{(1)}$ визначаються за формулами (2) і (10).

$$(i = 0,\ 1, \ldots) \quad (\nu = 1,\ 2, \ldots).$$

Коефіцієнт $B_{i;l}^{(\nu)}$ можна обчисляти, не користуючись їх проміжними значеннями при $\nu' < \nu$. Схема обчислення в цьому випадку має вигляд

$$A_i^{(\nu)} = -\frac{1}{i}\sum_{j=1}^{i} A_{i-j}^{(\nu)} S_j^{(\nu)},\ A_0^{(\nu)} = a_0^{p^\nu},$$

$$B_{i,l}^{(\nu)} = -\sum_{j=1}^{i} A_{i-j}^{(\nu)} S_{j;l}^{(\nu)}, \tag{12}$$

де

$$S_m^{(\nu)} = S_{mk}^{(\nu-1)} \quad (m = 1,2, \ldots, n),$$

$$S_m^{(\nu)} = -\frac{1}{A_0^{(\nu-1)}}\sum_{j=1}^{n} A_j^{(\nu-1)} S_{m-j}^{(\nu)} \quad (np \geqslant m > n),$$

$$S_{m;l}^{(\nu)} = S_{mk;l}^{(\nu-1)} \quad (m = 1,2, \ldots, n),$$

$$S_{m;l}^{(\nu)} = -\frac{1}{A_0^{(\nu-1)}}\sum_{j=1}^{n} A_j^{(\nu-1)} S_{m-j;l}^{(\nu)} \quad (np \geqslant m > n),$$

причому

$$S_m^{(0)} = S_m,\ S_{m;l}^{(0)} = S_{m-l},\ S_{m;l}^{(0)} = 0 \ \ (m \leqslant l).$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots),\ (m = 1,\ 2, \ldots, n),\ (\nu = 1,\ 2, \ldots).$$

Формули (11) і (12) мають практичне значення тільки для поліномів. У випадку ряду Тейлора ($a_0 \neq 0$) для визначення $n + 1$ перших коефіцієнтів $a_i^{(k)}$ і $b_{i;l}^{(k)}$ зручна така схема:

а) за другою формулою (2) утворюємо послідовність $S_1, S_2, \ldots, S_{nk}$;

б) із даної послідовності обираємо підпослідовності $S_k, S_{2k}, \ldots, S_{nk}, S_{k-l}, S_{2k-l}, \ldots, S_{nk-l}$;

в) користуючись даними підпослідовностями за формулами (2) і (10), обчислюємо коефіцієнти $a_i^{(k)}$ і $b_{i;l}^{(k)}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Костовский. Основная теорема метода Лемера численного определения нулей полиномов, целых и голоморфных функций. УМН, т. XVI, в. 4 (100), 202—204 (1961).

2. А. Н. Костовский. Обобщенные формулы преобразований в методе Лобачевского—Греффе численного определения нулей полиномов, целых и голоморфных функций. Журнал выч. мат. и мат. физ., т. 1, 2, 346—348 (1961).

3. E. Netto. Vorlesungen über Algebra. Bd. 1, Lpz. (1900).