ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

І. В. СКРИПНИК

ДО ПИТАННЯ ПРО УЗАГАЛЬНЕННЯ ПОНЯТТЯ АНАЛІТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

На можливість проведення деякої аналогії між аналітичними функціями комплексної змінної і розв'язками деякої еліптичної системи рівнянь вказував ще Пікар у 1891 р. Але ця ідея залишалась довгий час без належної уваги. В 1943 р. Л. Берс і А. Гельбарт дослідили функції $f(z)=u+iv$ $(z=x+iy)$, які задовольняють систему $\sigma_1(x)u_x= =\tau_1(y)v_y$; $\sigma_2(x)u_y=-\tau_2(y)v_x$ (на σ_1, σ_2, τ_1, τ_2 накладають певні обмеження) і переносять на них такі властивості аналітичних функцій, як похідна, розклад Тейлора, теорема і формула Коші. Основні їх результати викладені в обзорі І. Г. Петровського [5]. Дальший розвиток цих питань дали Л. Берс, І. Н. Векуа, А. І. Маркушевич, Г. Н. Положій, М. А. Лукомська та ін. В роботі [4] Я. Б. Лопатинський розглядає аналогічні питання для випадку системи рівнянь вигляду $Au=Bv$; $Bu= =-Av$, де A, B — лінійні диференціальні оператори довільного однакового порядку. Одним з обмежень на оператори A, B є їх комутативність. У даній роботі ця умова послаблюється.

§ 1

Нехай

$$A=\sum_{k+l\leqslant m}a_{k,l}\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\, dy^l}\,;\quad B=\sum_{k+l\leqslant n}b_{k,l}\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}$$

лінійні диференціальні оператори, коефіцієнти яких $a_{k,l}$, $b_{k,l}$ є аналітичними в області Ω, дійсними функціями дійсних аргументів x, y, припускається, що результант Δ форм $\sum\limits_{k+l=m}a_{k,l}\lambda^k\mu^l$; $\sum\limits_{k+l=n}b_{k,l}\lambda^k\mu^l$ відмінний від нуля в кожній точці області Ω.

Властивості системи

$$Au=f;\quad Bu=g \tag{1}$$

(f, g функції x, y, аналітичні в Ω) вивчаються в роботі [4].

Означення. Система (1) називається сумісною, якщо для всяких лінійних диференціальних операторів P, Q з коефіцієнтами, аналітичними в Ω, з $PA=QB$ йде $Pf=Qg$.

Теорема 1. Для того, щоб система (1) мала аналітичний в Ω розв'язок, необхідно і достатньо, щоб вона була сумісною. Всякий розв'язок системи (1) диференційований $m+n-1$ разів в деякій області

$\Omega_1 \subseteq \Omega$, є аналітичним в Ω_1 і аналітично продовжується в Ω. Однорідна система (1) має скінченну кількість лінійно незалежних в Ω_1, аналітичних в Ω рішень.

Доведення. Необхідність очевидна. Для $m=0$ або $n=0$ очевидна і достатність. Припускаємо, що $m \geqslant 1$ і $n \geqslant 1$. Нехай система сумісна. Розглянемо систему рівнянь

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^k\, \partial y^l} Au = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^k\, \partial y^l} f \quad (k+l=n-1);$$

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^k\, \partial y^l} Bu = \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^k\, \partial y^l} g \quad (k+l=m-1).$$

Детермінант з коефіцієнтів при похідних $\frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial x^k\, \partial y^l}$ $(k+l=m+n-1)$ дорівнює Δ, відмінний, за припущенням, від нуля в кожній точці області Ω, і тому система може бути приведена до вигляду

$$\frac{\partial^{m+n-1}u}{\partial x^k\, \partial y^{m+n-1-k}} = \sum_{i+j<m+n-1} c_{i,j}^{(k)} \frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i\, \partial y^j} + P_k f + Q_k g \quad (k=0;\ldots,m+n-1). \tag{2}$$

Тут $c_{i,j}^{(k)}$ аналітичні в Ω і P_k, Q_k — диференціальні оператори порядків $n-1$ і $m-1$ відповідно з аналітичними в Ω коефіцієнтами. Далі розглянемо систему рівнянь відносно $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\, \partial y^l}u$ $(k+l<m+n-1)$:

$$(PA+QB)u = Pf + Qg, \tag{3}$$

де P, Q — диференціальні оператори з аналітичними в Ω коефіцієнтами, такі, що $PA+QB$ — оператор порядку, меншого від $m+n-1$. Ця система має розв'язок, що випливає з сумісності системи (1). Нехай (x_0, y_0) така точка із Ω, в якій система (3) має розв'язок в полі дійсних чисел. З наступного буде випливати, що всяка точка має цю властивість. Нехай $P_{k,l}^{(0)}$ $(k+l<m+n-1)$ — система чисел, яка отожнює (3) в точці (x_0, y_0) при підстановці їх замість $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}u$. Покажемо, що існує і притому єдиний розв'язок системи (1), аналітичний в околі (x_0, y_0) і такий, що задовольняє початкові умови: в точці (x_0, y_0) $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}u = P_{k,l}^{(0)}$ $(k+l<m+n-1)$. Єдиність випливає з того, що початкові умови однозначно визначають значення всіх похідних від u в точці (x_0, y_0). Ці значення ми одержуємо з (2) або з рівнянь, одержаних диференціюванням (2), і вони будуть визначатися однозначно, оскільки зрівнювання двох виразів однієї і тієї самої похідної приводить до співвідношення вигляду (3), справедливому при $x=x_0$, $y=y_0$,

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\, \partial y^l}u = P_{k,l}^{(0)}.$$

Збіжність ряду

$$\sum_{k,l\geqslant 0} \left(\frac{\partial^{k+l}u}{\partial x^k\, \partial y^l}\right)_{(x_0,y_0)} \cdot \frac{(x-x_0)^k \cdot (y-y_0)^l}{k!\,l!}$$

можна довести методом мажорант. Його сума і буде шуканим розв'язком.

Нехай тепер $u(x, y)$ $m+n-1$ раз диференційоване рішення системи (1) в деякій області $\Omega_1 \subseteq \Omega$. Нехай $\frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k dy^l} = p_{k,l}$ в точці (x, y). На основі (2) $p_{k,l}(k+l \leqslant m+n-2)$ задовольняють систему рівнянь

$$p_{k,l} = (p_{k,l})_{(x_0,y_0)} + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} p_{k+1,l}\, d\xi + p_{k,l+1}\, d\eta \quad (k+l < m+n-2),$$

$$p_{k,l} = (p_{k,l})_{(x_0,y_0)} + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \Big\{ \Big(\sum_{i+j<m+n-1} c_{i,j}^{k+1} p_{i,j} + P_{k+1} f + Q_{k+1} g \Big) d\xi +$$

$$+ \Big(\sum_{i+j<m+n-1} c_{ij}^{(k)} p_{i,j} + P_k f + Q_k g \Big) d\eta \Big\} \quad (k+l = m+n-2).$$

Шлях інтегрування прямолінійний і належить області Ω_1. Підстановкою $\xi = x_0 + (x - x_0)t$; $\eta = y_0 + (y - y_0)t$ приведемо систему до системи інтегральних рівнянь (відносно $p_{k,l}$). Застосовуючи метод послідовних наближень, одержимо розв'язок цієї системи у вигляді границі рівномірно збіжної в деякому околі Ω_2 точки (x_0, y_0) послідовності аналітичних в Ω_2 функцій. Звідси випливає аналітичність розв'язку $u(x, y)$. Оскільки окіл Ω_2, очевидно, залежить тільки від області аналітичності коефіцієнтів операторів A, B, f, g, то можливе аналітичне продовження $u(x, y)$ на Ω.

З того, що система (3) має скінченну кількість розв'язків, випливає, що однорідна система (1) має скінченну кількість лінійно незалежних в Ω, аналітичних в Ω розв'язків. Ця кількість дорівнює різниці між $\frac{(m+n-1)(m+n)}{2}$ і рангом системи (3). З можливості аналітичного продовження рішень у Ω виходить, що ранг системи (3) зберігає постійну величину в кожній точці області Ω.

Ця теорема може бути уточнена, якщо припустити далі, що оператори A, B однакового порядку n і існують оператори A_1, B_1 того самого порядку n, які не вироджуються в жодній точці області Ω, такі, що $A_1 B = B_1 A$. Ці припущення будемо зберігати надалі. В цьому випадку має місце

Теорема 2. Кількість лінійно незалежних рішень однорідної системи дорівнює n^2, при цьому початкові умови похідних u до порядку $n-1$ можуть бути заданими довільно, а серед похідних порядку $2n-k$ довільних $k-1$. Умовою сумісності системи (1) є $B_1 f = A_1 g$.

Д о в е д е н н я. Передусім доведемо, що всякий оператор вигляду $CA + DB$ може бути зображений у вигляді $PA + QB$, де порядки PA, QB не перевищують порядку $PA + QB$, причому $C = P + EB_1$; $D = Q - EA_1$. Нехай

$$C = \sum_{k+l \leqslant p} c_{k,l} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}; \quad D = \sum_{k+l \leqslant p} d_{k,l} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k dy^l}$$

і порядки CA, DB більші від порядку $CA + DB$, тоді

$$\Big(\sum_{k+l=p} c_{kl}\,\lambda^k\,\mu^l\Big)\cdot\Big(\sum_{k'+l'=n} a_{k'l'}\,\lambda^{k'}\,\mu^{l'}\Big)+\Big(\sum_{k+l=p} d_{kl}\,\lambda^k\mu^l\Big)\cdot\Big(\sum_{k'+l'=n} b_{k'l'}\,\lambda^{k'}\,\mu^{l'}\Big)=0.$$

Тоді, оскільки результант форм $\sum\limits_{k+l=n} a_{kl}\,\lambda^k\mu^l$, $\sum\limits_{k+l=n} b_{kl}\,\lambda^k\mu^l$ відмінний від нуля в Ω, то

$$\sum_{k+l=p} c_{kl}\,\lambda^k\,\mu^l=\Big(\sum_{k+l=p-n} e_{kl}\,\lambda^k\mu^l\Big)\cdot\Big(\sum_{k'+l'=n} b_{k'l'}\,\lambda^{k'}\,\mu^{l'}\Big),$$

$$\sum_{k+l=p} d_{kl}\,\lambda^k\,\mu^l=-\Big(\sum_{k+l=p-n} e_{kl}\,\lambda^k\,\mu^l\Big)\cdot\Big(\sum_{k'+l'=n} a_{k'l'}\,\lambda^{k'}\,\mu^{l'}\Big).$$

З умови $B_1A=A_1B$ видно, що

$$\sum_{k+l=n} b_{kl}^{(1)}\,\lambda^k\,\mu^l=e(x,\,y)\cdot\sum_{k'+l'=n} b_{k'l'}\,\lambda^{k'}\,\mu^{l'},$$

$$\sum_{k+l=n} a_{kl}^{(1)}\,\lambda^k\,\mu^l=e(x,\,y)\cdot\sum_{k'+l'=n} a_{k'l'}\,\lambda^{k'}\,\mu^{l'},$$

причому $e(x,\,y)$ не дорівнює нулю в області Ω.

Покладемо

$$E_1=\sum_{k+l=p-n} e_{kl}\,\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}\cdot\frac{1}{e\,(x,y)};\quad \begin{array}{l} C=C_1+E_1\cdot B_1,\\ D=D_1-E_1\cdot A_1.\end{array}$$

Одержимо $CA+DB=C_1A+D_1B$ і порядки C_1A, D_1B менші від порядків CA, DB. Такий процес може бути продовжений і приводить до доведення твердження. Звідси виходить, що якщо $CA+DB=0$, то $C=EB_1$; $D=-EA_1$. Тому єдиною достатньою (і необхідною) умовою сумісності системи (1) є $B_1f=A_1g$. Далі система (3) еквівалентна системі незалежних рівнянь вигляду

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}Au=\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}f,\quad \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}Bu=\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}g,\ (k+l\leqslant n-2)$$

(пустої при $n<2$). Звідси виходить, що початкові значення похідних $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k\,\partial y^l}$ $(k+l\leqslant n-1)$ залишаються довільними, а серед похідних порядку $2n-k$ $(2\leqslant k\leqslant n)$ довільних буде $k-1$. Ранг системи (3) дорівнює $n(n-1)$, а кількість лінійно незалежних рішень однорідної системи (1) дорівнює $(2n-1)n-(n-1)n=n^2$, що і треба було довести. Таким чином, в кожній точці $(x_0,\,y_0)$ в рівняннях (3) міститься n^2 незалежних похідних, які будуть називатися параметричними.

Зауваження. Для існування операторів A_1, B_1 з потрібними властивостями необхідно і достатньо, щоб ранг матриці

$$\left(\alpha_{(m,p),(k,l,r)}\right)_{m,p=0,\dots,2n}^{k,l=0,\dots,n;\ r=1,2}$$

$$\alpha_{(m,p),(k,l,r)}=\sum_{\substack{i+k-\mu=m\\ i+j=n}}\ \sum_{j+l-\nu=p} C_l^{\nu}\,C_k^{\mu}\cdot\frac{\partial^{\nu+\mu}\,\beta_{j,i}^{(r)}}{\partial x^{\nu}\cdot\partial y^{\mu}};\quad \begin{array}{l}\beta_{i,j}^{(1)}=a_{i,j}\\ \beta_{i,j}^{(2)}=b_{i,j}\end{array}$$

був менший від меншого з її вимірів $(n+1)(n+2)$ в усіх точках області Ω.

§ 2

Тепер буде розглянена система

$$Au = Bv;\ Bu = -Av. \tag{4}$$

Характеристична функція системи

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{k+l=n} a_{k,l}\lambda^k\mu^l & -\sum\limits_{k+l=n} b_{k,l}\lambda^k\mu^l \\ \sum\limits_{k+l=n} b_{k,l}\lambda^k\mu^l & \sum\limits_{k+l=n} a_{k,l}\lambda^k\mu^l \end{vmatrix}$$

є, очевидно, додатно визначеною формою. Система (4), отже, є еліптичною. Достатньо гладке рішення такої системи буде аналітичним. Аналітичні в деякій області $\Omega_1 \subseteq \Omega$ функції u, v, які задовольняють цю систему, будуть називатися спряженими (цей зв'язок не симетричний). Функція $w = u + iv$, яка має властивості, що узагальнюють властивості аналітичної функції аргументу $x + iy$, буде називатися (A, B)-аналітичною. Очевидно, система (4) рівносильна рівнянню

$$(A + iB)w = 0. \tag{5}$$

Система $Au = 0$, $Bu = 0$ має, як відзначалось, n^2 лінійно незалежних рішень, аналітичних в Ω: $\omega_1, \ldots, \omega_{n^2}$. Очевидно, ω_i — (A, B) аналітичні. Всяка (A, B)-аналітична функція, що задовольняє вимогу $Aw = 0$, лінійно залежить від $\omega_1, \ldots, \omega_{n^2}$. (A, B)-аналітичні функції мають деякі узагальнені похідні.

Теорема 3. Нехай w, w_0 — (A, B)-аналітичні функції в деякій області $\Omega_1 \subseteq \Omega$, причому $Aw_0 \neq 0$. Нехай (x, y), (x_i, y_i), $(i = 1, \ldots, n^2)$ є точки із Ω. Нехай далі в точці $(x, y) \in \Omega_1$ $Aw_0 \neq 0$ і

$$\delta(w, x, y, x_1 y_1, \ldots, x_{n^2}, y_{n^2}) = \begin{vmatrix} w(x, y) & \omega_1(x, y) & \ldots & \omega_{n^2}(x, y) \\ w(x_1, y_1) & \omega_1(x_1, y_1) & \ldots & \omega_{n^2}(x_1, y_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w(x_{n^2}, y_{n^2}) & \omega_1(x_{n^2}, y_{n^2}) & \ldots & \omega_{n^2}(x_{n^2} y_{n^2}) \end{vmatrix} \tag{6}$$

Якщо $x_i \to x$, $y_i \to y$ $(i = 1, \ldots, n^2)$ і притому так, що

$$\frac{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}{(x_j - x)^2 + (y_j - y)^2} \quad (i, j = 1, \ldots, n^2)$$

залишаються обмеженими і точки з однорідними координатами $(x_1 - x) : (y_1 - y) : \ldots : (x_{n^2} - x) : (y_{n^2} - y)$ не скупчуються біля деякої алгебраїчної поверхні (яка визначається формулою (6) в роботі [4]). То

$$\frac{\delta(w, x, y, x_1, y_1, \ldots, x_{n^2}, y_{n^2})}{\delta(w_0, x, y, x_1, y_1, \ldots, x_{n^2}, y_{n^2})} \to \frac{Aw}{Aw_0}.$$

Доведення нічим не відрізняється від доведення, даного в роботі [4].

Теорема 4. Якщо w є (A, B)-аналітичною функцією, то Aw є (A_1, B_1)-аналітичною функцією в тій самій області.

§ 3

Тут буде даний локальний розклад (A, B)-аналітичної функції по елементарним (A, B)-аналітичним функціям, розклад, що узагальнює Тейлоровий.

Припустимо, що існує скінченне число A_j, B_j $(j = 0, \ldots, m-1)$ таких, що $A_{j+1} B_j = B_{j+1} A_j$ (усі A_j, B_j — оператори одного і того самого порядку n з аналітичними в Ω коефіцієнтами), причому

$$A_0 \equiv A_m \equiv A, \quad B_0 \equiv B_m \equiv B.$$

Будемо говорити тоді, що система (A, B) включається в цикл порядку m. Нехай $(x_0, y_0) \in \Omega$ $\dfrac{\partial^{i_s + j_s}}{\partial x^{i_s} \partial y^{i_s}} = D_s (s = 1, \ldots, n^2)$ параметричні похідні пари (A, B) (легко бачити, що вони можуть бути взяті як параметричні похідні і для інших пар).

Нехай $\omega_t^{(o,p)}$ $(t = 1, \ldots, n^2)$ — аналітичне рішення системи $A_p u = 0$, $B_p u = 0$ $(p = 0, \ldots, m-1)$, що задовольняє початкові умови: при $s \neq t$ $(D_s \omega_t^{(o,p)})_0 = 0$, при $s = t$ $(D_s \omega_t^{(o,p)})_0 = 1$. Знаком $(\ldots)_0$ позначається значення виразу в дужках при $x = x_0$, $y = y_0$. Якщо $\omega_t^{(k,p)}$ $(t = 1, \ldots, n_2)$ визначені і є функціями $(A_{\overline{k}}, B_{\overline{k}})$-аналітичними в околі (x_0, y_0) $[1 \leqslant \overline{k} \leqslant m,\ \overline{k} \equiv p - k (mod\, m)]$, то $\omega_t^{(k+1,p)}$ означає рішення системи $A_{\overline{k}-1} u = \omega_t^{(k,p)}$; $B_{\overline{k}-1} u = i\omega_t^{(k,p)}$, що задовольняє умови $(D_s \omega_t^{(k+1,p)})_0 = 0$ $(s, t = 1, \ldots, n^2)$. Система $A_{\overline{k}-1} u = \omega_t^{(k,p)}$, $B_{\overline{k}-1} u = i\omega_t^{(k,p)}$ сумісна, оскільки $B_{\overline{k}} \omega_t^{(k,p)} = A_{\overline{k}} (i\omega_i^{(k,p)})$. Очевидно, $\omega_t^{(k+1,p)}$ є функцією $(A_{\overline{k}-1}, B_{\overline{k}-1})$-аналітичною в області Ω. Розв'язок $\omega_t^{(k,p)}$ є функцією точок (x, y), (x_0, y_0).

Теорема 5. Всяка (A, B)-аналітична в околі точки (x_0, y_0) функція w розкладається і притому єдиним чином в ряд, який рівномірно і абсолютно збігається в деякому околі точки (x_0, y_0):

$$w(x, y) = \sum_{\frac{k-p}{m}=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{t=1}^{n^2} \omega_t^{(k,p)} (x, y, x_0, y_0) \cdot (D_t A^{(k,p)} w)_0, \tag{7}$$

$$A^{(k,p)} = A_{p-1} A_{p-2} \ldots A_0 \left(\prod_{i=m-1}^{0} A_i \right)^{\frac{k-p}{m}}.$$

Доведення розпадається на декілька частин. Спочатку буде показано, що

$$(D_t A^{(k,p)} w)_0 \ (t = 1, \ldots, n^2), (p = 0, \ldots, m-1), \left(\frac{k-p}{m} = 0, 1, \ldots \right)$$

однозначно визначають функцію w. Зауважимо, що з $A_j w_j = -iB_j w_j$ (w_j — довільна (A_j, B_j)-аналітична функція) випливає, що $(D_t A^{(k,p)} w)_0$ визначають також $(D_t (A, B)^{(k,p)} w_0)$, де через $(A, B)^{(k,p)}$ позначено вираз, аналогічний $A^{(k,p)}$, з заміною довільних A_j на відповідні B_j. З другого боку, кожна похідна $\dfrac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l}$ може бути зображена у вигляді

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} = \sum_{t=1}^{n^2} c_{t,j}^{(k,l)} D_t + P_{k,l}^{(j)} A_j + Q_{k,l}^{(j)} B_j, \qquad (8_j)$$

де $c_{t,j}^{k,l}$ — аналітичні функції (x, y); $P_{k,l}^{(j)}$, $Q_{k,l}^{(j)}$ — оператори порядку, не вищого ніж $k+l-n$, з аналітичними коефіцієнтами. Використовуємо спочатку формулу (8_0), потім перетворюємо аналогічно похідні, які входять у $P_{kl}^{(0)}$, $Q_{kl}^{(0)}$, але використовуючи вже формулу (8_1), далі робимо аналогічно, використовуючи послідовно $(8_2), \ldots, (8_{m-1}), (8_0)\ldots$ Нарешті одержимо

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} = \sum_{t=1}^{n^2} \sum_{q \leqslant \left[\frac{k+l}{n}\right]} c_{tpq}^{(k,l)} D_t (\mathbf{A}, B)^{(q,p)}, \qquad (8)$$

де $c_{tpq}^{(k,l)}$ — аналітичні функції. Таким чином, значення $(D_t (A, B)^{q,p} w)_0$ визначають значення $\left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} w\right)_0$ і, отже, аналітичну в околі (x_0, y_0) функцію w.

Тепер буде доведена рівномірна і абсолютна збіжність в деякому околі точки (x_0, y_0) ряду формули (7). Для цього будуть спочатку одержані оцінки $\omega_t^{(k,p)}$ і $(D_t A^{(k,p)} w)_0$. Як видно з формул (8), при $q \geqslant 1$ $\left(\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} \omega_t^{(q,p)}\right)_0 = 0$ при $k+l \leqq nq-1$. Таким чином, при $q \geqslant 1$, за формулою (4), функції $\omega_t^{(q+1,p+1)}$ визначаються системою (для простоти далі нижній індекс t будемо опускати)

$$\frac{\partial^{2n-1} u}{\partial x^k \partial y^{2n-1-k}} = \sum_{i+j<2n-1} c_{ij}^{(k)} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} + (P_k + iQ_k)\, \omega^{(q,p+1)} \quad (k = 0, \ldots, 2n-1)$$

(коефіцієнти цієї системи не будуть залежати від p, тому що $\omega_t^{(k,p)}$ $(k - p \equiv 0 \ (mod\, m))$ — (A, B)-аналітичні) і нульовими початковими умовами $\left(\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} u\right)_0 = 0$ $(0 \leqslant i+j \leqslant 2n-2)$. Оператори P_k, Q_k мають порядки $n-1$. Нехай при $|x-x_0| \leqslant r$ $|y-y_0| \leqslant r$, $r \leqslant 2$; $c_{ij}^{(k)}$ і коефіцієнти P_k, Q_k аналітичні. Тоді для $c_{ij}^{(k)}$ і коефіцієнтів P_k, Q_k можна вказати мажоранти вигляду $\dfrac{N}{1-\dfrac{x-x_0+y-y_0}{r}}$ (припустимо, що це також мажоранта для відповідних коефіцієнтів для інших пар A_j, B_j), для $\omega^{(q,p+1)}$ — мажоранти вигляду $\zeta_{q,p+1} = \dfrac{M_{p+1}^{(q)} \cdot \left[2\dfrac{x-x_0+y-y_0}{r}\right]^{nq}}{1-2\dfrac{x-x_0+y-y_0}{r}}$.

Покладаючи $\xi = 2\dfrac{x-x_0+y-y_0}{r}$ і зауважуючи, що при $i'+j' > i+j$ $\dfrac{\partial^{i'+j'}}{\partial x^{i'} \partial y^{j'}} \zeta_{q,p+1}$ мажорує $\dfrac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} \zeta_{q,p+1}$ (одержується зображенням $\zeta_{q,p+1}$

у вигляді ряду по ξ, диференціюванням і прирівнюванням відповідних коефіцієнтів), можна зобразити мажорантну систему у вигляді

$$\frac{\partial^{2n-1}}{\partial x^k \partial y^{2n-1-k}} u = \frac{N}{1-\frac{\xi}{2}} \sum_{i+j\leq 2n-2} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} +$$

$$+ \frac{M_{p+1}^{(q)} \cdot N \cdot n(n-1)}{1-\frac{\xi}{2}} \cdot \left(\frac{2}{r}\right)^{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} \left(\frac{\xi^{nq}}{1-\xi}\right).$$

Всяке рішення цієї системи з нульовими початковими умовами буде мажорувати $\omega^{(q+1,p+1)}$. Будемо шукати мажоранту у вигляді функції ξ, тоді для її визначення одержують рівняння

$$\frac{d^{2n-1} u}{d\xi^{2n-1}} = \frac{N \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{2n-1}}{1-\frac{\xi}{2}} \sum_{i\leq 2n-2} (i+1) \cdot \left(\frac{2}{r}\right)^i \cdot \frac{d^i u}{d\xi^i} +$$

$$+ \frac{M_{p+1}^{(q)} \cdot N \cdot n(n-1) \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^n}{1-\frac{\xi}{2}} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} \left(\frac{\xi^{nq}}{1-\xi}\right) \tag{9}$$

і початкові умови $\frac{d^i u}{d\xi^i}$ при $\xi = 0$. Знаходячи з рівняння (9) коефіцієнт, з яким $\frac{\partial^{2n-1} u}{d\xi^{2n-1}}$ мажорує $\frac{d^{2n-2} u}{d\xi^{2n-2}}$, і зауважуючи, що тоді $\frac{d^{2n-2} u}{d\xi^{2n-2}}$ буде з відповідними коефіцієнтами мажорувати молодші похідні, можемо змажорувати рівняння (9) лінійним рівнянням першого порядку відносно $\frac{d^{2n-2} u}{d\xi^{2n-2}}$.

А саме, розв'язок рівняння

$$\frac{d^{2n-1} v}{d\xi^{2n-1}} = \frac{N \cdot n(2n-1) r}{1-\frac{\xi}{2}} \cdot \frac{d^{2n-2} v}{d\xi^{2n-2}} +$$

$$+ \frac{M_{p+1}^{(q)} \cdot N \cdot n(n-1) \cdot r^n}{1-\frac{\xi}{2}} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} \left(\frac{\xi^{nq}}{1-\xi}\right), \tag{10}$$

яке задовольняє нульовим початковим умовам, мажорує шукане рішення рівняння (9). Відзначимо: при $Nn(2n-1)r \leq 1$; $\frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left[\frac{\eta^{nq}}{\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{1-N_1 r} \cdot (1-\eta)} \right]$ мажорує $\frac{1}{\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{1-N_1 r}} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\eta^{n-1}} \left(\frac{\eta^{nq}}{1-\eta}\right)$ $[N_1 = Nn(2n-1)]$, що легко одержуємо, зауважуючи, що при $1 - N_1 r \geqslant 0$ $\dfrac{1}{\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{1-N_1 r}}$ розкладається

по η з додатними коефіцієнтами). Інтегруючи рівняння (10) і використовуючи тільки що відзначений факт, одержуємо для $\omega^{(q+1,p+1)}$ мажоранту

$$w_{p+1}^{(q+1)} = M_{p+1}^{(q)} \cdot N_1 \cdot r^n \int_0^{\xi} \frac{(\xi-\eta)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{\eta^{nq}}{(1-\eta)\left(1-\frac{\eta}{2}\right)} d\eta. \qquad (11)$$

Інтегруємо n раз по частинах:

$$w_{p+1}^{(q+1)} = \frac{(-1)^{n-1} \cdot M_{p+1}^{(q)} \cdot N_1 \cdot r^n}{(nq+1)\ldots(nq+n)} \left\{ \frac{\xi^{n(q+1)}}{\left(1-\frac{\xi}{2}\right)(1-\xi)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\xi} \frac{\partial^n}{\partial \eta^n} \left[\frac{(\xi-\eta)^{n-1}}{(1-\eta)\left(1-\frac{\eta}{2}\right)} \right] \eta^{n(q+1)} d\eta \right\}.$$

Легко перевірити, що $\frac{2}{1-\xi}$ мажорує $\frac{1}{(1-\xi)\left(1-\frac{\xi}{2}\right)}$. Залишається показати, що інтеграл у формулі (11) має мажоранту вигляду $\frac{N_0\, \xi^{n(q+1)}}{1-\xi}$, де N_0 не залежить від q. Цей інтеграл зображується як лінійна комбінація з постійними (не залежними від q) коефіцієнтами інтегралів вигляду

$$\int_0^{\xi} \frac{(\xi-\eta)^{n-1-i}}{(1-\eta)^{1+j}\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{1+k}} \cdot \eta^{n(q+1)}\, d\eta \quad (i+j+k=n,\ i \leqslant n-1).$$

Досить показати, що кожний інтеграл має мажоранту вигляду $\frac{N_0\, \xi^{n(q+1)}}{1-\xi}$ з не залежними від q N_0 або що $\frac{\xi^{n(q+1)}}{(1-\xi)^{1+j} \cdot \left(1-\frac{\xi}{2}\right)^{1+k}}$ має мажоранту вигляду $N_0 \frac{d^{n-i}}{d\xi^{n-i}} \left[\frac{\xi^{nq}}{1-\xi}\right]$.

Таким чином, одержується мажоранта для $\omega^{(q+1,p+1)}$.

$$\zeta_{(q+1,p+1)} = \frac{N_2 \cdot M_{p+1}^{(q)} \cdot r^n}{(nq+1)\ldots(nq+n)} \cdot \frac{\xi^{n(q+1)}}{1-\xi},$$

де N_2 не залежить від q і, отже, $M_{p+1}^{(q+1)} = \frac{M_{p+1}^{(q)} \cdot N_2 \cdot r^n}{(nq+1)\ldots(nq+n)}$.

Звідси

$$M_{p+1}^{(q)} = \frac{M_{p+1}^{(0)} \cdot (N_2 r^n)^q}{(nq)!}.$$

Оскільки $0 \leq p \leq m-1$, то з $M_{p+1}^{(0)}$ можна вибрати найбільше й одержати мажоранту для $\omega^{(q,p)}$, яка не залежить від p:

$$\zeta_q = \frac{M \cdot (N_2 r^n)^q}{(nq)!} \cdot \frac{\xi^{nq}}{1-\xi},$$

де M не залежить ні від q, ні від p.

Тепер одержимо мажоранту для $(D_t A^{(k,p)} w)_0$. Зауважуючи, що $\frac{2}{(1-\xi)^{np}}$ мажорує $\frac{1}{\left(1-\frac{\xi}{2}\right)(1-\xi)^{np}}$, за індукцією легко встановити наступну мажоранту для $A^{(q,p)} w$ (мажоруючи коефіцієнти A_j єдиною функцією $\frac{N}{1-\frac{\xi}{2}}$, а Aw — функцією $\frac{N_3}{1-\xi}$):

$$\frac{M_0 \cdot (N_4 r^{-n})^q \cdot [n(q-1)]!}{(1-\xi)^{n(q-1)+1}}$$

(вона не залежить від p). Але тоді

$$|(D_t A^{(q,p)} w)_0| \leq (nq)!\, M_0 \cdot (N_4 r^{-n})^q \cdot [n(q+1)]^n$$

і при $|\xi| \leq \frac{1}{2\sqrt[n]{N_2 N_4}}$ ряд $\sum\limits_{\frac{k-p}{m}=0}^{\infty} \sum\limits_{p=0}^{m-1} \sum\limits_{t=1}^{n^2} \omega_t^{(k,p)} \cdot (D_t A^{(k,p)} w)_0$ буде рівномірно збіжним. Звідси зразу виходить, що сума цього ряду w_1 є (A, B)-аналітична функція (в деякому околі точки (x_0, y_0)). При цьому

$$(D_t A^{(k,p)} w_1)_0 = (D_t A^{(k,p)} w)_0$$

$$(t = 1, \ldots, n^2), (p = 0, \ldots, m-1), \left(\frac{k-p}{m} = 0, 1 \ldots\right).$$

Дійсно,

$A^{(k,p)} \omega_t^{(q,r)} = 0$ при $k > q$ і при $k - p \equiv 0 \ (mod\, m)$, $q - r \equiv 0 \ (mod\, m)$,
$\left(D_s A^{(q,p)} \omega_t^{(k,r)}\right)_0 = 1$ при $s = t$; $q = k$; $k - p \equiv 0 \ (mod\, m)$, $q - r \equiv 0 \ (mod\, m)$,
$(D_s A^{(q,p)} \omega_t^{(k,r)})_0 = 0$ при $s \neq t$; $q = k$; $k - p \equiv 0 \ (mod\, m)$, $q - r \equiv 0 \ (mod\, m)$,
$(D_s A^{(q,p)} \omega_t^{(k,r)})_0 = 0$ при $q < k$; $k - p \equiv 0 \ (mod\, m)$, $q - r \equiv 0 \ (mod\, m)$.

Почленне диференціювання ряду можливе, бо ряд рівномірно збігається і в комплексному околі точки (x_0, y_0). Враховуючи зроблені раніше зауваження, звідси випливає, що $w = w_1$, що і треба було довести.

§ 4

Тепер будуть дані аналогії теореми і інтегральної формули Коші. Нехай

$$A' = \sum_{k+l\leqslant n} (-1)^{k+l} \cdot \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} \cdot a_{kl}, \quad B' = \sum_{k,l\leqslant n} (-1)^{k+l} \cdot \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} \cdot b_{kl},$$

спряжені відповідно з A і B оператори (в сенсі Лагранжа). Оператори A', B' мають всі властивості пари A, B. Дійсно, характеристичні форми операторів A', B' і A, B відповідно збігаються, і з $A_m B_{m-1} = B_m A_{m-1}$ виходить $B'_{m-1} A'_m = A'_{m-1} B'_m$.

Нехай $\omega'_1, \ldots, \omega'_{n^2}$ — лінійно незалежні аналітичні в Ω розв'язки системи $A'u = 0$, $B'u = 0$. Нехай

$$v\, Au - u\, A'v = \frac{\partial}{\partial x} N(u, v) - \frac{\partial}{\partial y} M(u, v),$$

$$v\, Bu - u\, B'v = \frac{\partial}{\partial x} Q(u, v) - \frac{\partial}{\partial y} P(u,v),$$

де M, N, P, Q — диференціальні білінійні форми. Якщо $w = u + iv$ довільна (A, B)-аналітична функція, w' — (A', B')-аналітична функція в області $\Omega_1 \subseteq \Omega$ і C кусково-гладкий контур, який лежить в Ω_1, то з формули Гріна одержимо

$$0 = \int_{\Omega_C} \{w'(A + iB)w - w(A' + iB')w'\}\, d\tau =$$

$$= \int_{\Omega_C} \left[\frac{\partial}{\partial x} (N + iQ) - \frac{\partial}{\partial y} (M + iP) \right] d\tau =$$

$$= \int_C [M(w, w') + iP(w, w')]\, dx + [N(w, w') + iQ(w, w')]\, dy.$$

Зокрема,

$$\int_C \{M(w, \omega'_s) + iP(w, \omega'_s)\}\, dx + \{N(w, \omega'_s) + iQ(w, \omega'_s)\}\, dy = 0 \quad (12)$$

$$(s = 1, \ldots, n^2).$$

Ці останні формули і являють аналог теореми Коші.

Теорема 6. Якщо w є неперервно диференційована n разів функція в області $\Omega_1 \subseteq \Omega$ і для всякого кусково-гладкого контура C в цій області мають місце формули (12), то $(A + iB)w = 0$ і w — (A, B)-аналітична.

Доведення. Нехай (x_0, y_0) — довільна точка із Ω_1 і $\dot{C}$ — коло круга S довільно малого радіуса з центром (x_0, y_0). Із теореми (1) випливає існування дійсного аналітичного розв'язку ω' системи $A'u = 0$, $B'u = 0$, який задовольняє умову $\omega'(x_0, y_0) = 1$. При цьому ω' лінійно залежить від $\omega'_1, \ldots, \omega'_{n^2}$. Тоді

$$\int_C [M(w, \omega') + iP(w, \omega')]dx + \{N(w, \omega') + iQ(w, \omega')\}dy = 0,$$

$$\int\int_S \omega'(Au - Bv)\,dx\,dy = 0; \quad \int\int_S \omega'(Av + Bu)\,dx\,dy = 0. \qquad (13)$$

Звідси випливає: $Au = Bv$; $Av = -Bu$ в точці (x_0, y_0), тому що співвідношення (13) виконуються для будь-якого круга і $\omega'(x_0, y_0) = 1$. Оскільки точка (x_0, y_0) довільна, то $(A + iB)\,w = 0$ в Ω_1.

Якщо система $A'u = 0$, $B'u = 0$ має рішення ω_1, яке не обертається в нуль, то твердження теореми (6) зберігається при виконанні одного з співвідношень (12), що відповідає $s = 1$. Далі на основі теореми (3) роботи [3], одержимо, що n разів неперервно диференційоване рішення системи (4) є аналітичною функцією. Звідси випливає теорема 6.

Нехай $\Phi(x, y, \xi, \eta)$ — фундаментальний розв'язок (по (x, y) рівняння $(A' + iB')\,w = 0$, пронормований так, що для всякої неперервної разом з похідними до порядку $n - 1$ функції $u(x, y)$

$$\int_\gamma [M(u, \Phi) + iP(u, \Phi)]\,dx + [N(u, \Phi) + iQ(u, \Phi)]\,dy \to 2\pi i \cdot u(\xi, \eta);$$

якщо контур γ, що оточує (ξ, η) стягується до точки (ξ, η). Тоді за формулою Гріна безпосередньо одержується такий аналог інтегральної формули Коші для (A, B)-аналітичної в області Ω_1 і на кусково-гладкій границі C цієї області функції w:

$$w(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i}\int_C [M(w, \Phi) + iP(w, \Phi)]\,dx + [N(w, \Phi) + iQ(w, \Phi)]\,dy,$$

для всякої точки (ξ, η) в області Ω.

На закінчення висловлюю щиру подяку науковому керівникові проф. Я. Б. Лопатинському.

ЛІТЕРАТУРА

1. L. Bers. Theory of pseudo-analytic functions. New York, 1953.
2. И. Н. Векуа. Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, 1959.
3. Я. Б. Лопатинский. Нормальные фундаментальные решения системы линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа. ДАН СССР, т. 78, 5 865—867 (1951).
4. Я. Б. Лопатинский. Об одном обобщении понятия аналитической функции. УМЖ, 2, 56—73 (1950).
5. И. Г. Петровский. О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными. УМН, вып. 3—4 (13—14), 1, 44—70 (1946).