ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

А. І. МАРКОВСЬКИЙ

ПРО АНСАМБЛІ МІНІМАЛЬНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

В цій статті, спираючись на результати і методи Л. Хермандера, ми даємо деякі узагальнення його теорії мінімальних диференціальних операторів з постійними коефіцієнтами.

Нехай Ω — область в n-мірному евклідовому просторі E^n, $A(D) = \sum\limits_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ — диференціальний оператор з постійними комплексними коефіцієнтами. Тут $a_\alpha = a_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}$,

$$D_k = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}, \; D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots . . D_n^{\alpha_n}, \; |\alpha| = \alpha_1 + \ldots . + \alpha_n. \tag{1}$$

Далі $C_0^\infty(\Omega)$ позначає множину всіх безмежно диференційовних функцій з компактними носіями, що лежать в Ω. $D(A)$ позначає область визначення оператора A.

Як відомо [1], оператор $A_0 : D(A_0) \to L^2(\Omega)$ називається мінімальним оператором, відповідним до $A(D)$, якщо A_0 є замиканням в $L^2(\Omega)$ оператора $A(D)$ на $C_0^\infty(\Omega)$. Оскільки нижче ми розглядаємо тільки мінімальні оператори, то індекс 0 переважно будемо опускати.

Позначимо через Ω_δ δ-окіл області Ω.

Означення 1[1]. Нехай Ω — обмежена область в E^n з межею Γ. Ми скажемо, що

1) Ω має T_i-властивість, якщо існує таке скінченне покриття $\bigcup\limits_{k=1}^{N} T^k \supset \overline{\Omega}$, що для будь-якого k $(k = 1, \ldots, N)$ і будь-якого $\delta > 0$ можна знайти такий вектор t, що $(\Gamma \cap T^k) + t \subset \Omega$ при $|t| < \delta$;

2) Ω має T_e-властивість, якщо існує таке скінченне покриття, $\bigcup\limits_{k=1}^{N} T^k \supset \overline{\Omega}$, що для будь-якого $k (k = 1, \ldots, N)$ і будь-якого $\delta > 0$ можна знайти такий вектор t, що $(\Gamma \cap T^k) + t \subset \Omega_\delta / \Omega_{\delta/2}$ при $\frac{\delta}{2} < |t| < \delta$.

Лема 1. [2] Нехай Ω має T_i- або T_e-властивість і $A(D)$ — диференціальний оператор з постійними коефіцієнтами. Якщо $u(x) \in L^2(E^n)$ і $A(D)u(x) \in L^2(E^n)$ в значенні теорії узагальнених функцій, і носій $u(x)$ компактний і лежить в $\overline{\Omega}$, то $u \in D(A_0)$ в $L^2(\Omega)$.

Зауваження. Доведення цієї леми у випадку, коли Ω має T_e-властивість, цілком аналогічне випадку T_i-властивості. Для функції $u(x)$, згаданої в лемі 1, будується послідовність $\{\varphi_n(x)\}^\infty$, така, що

---

[1] T_i-властивість визначена Л. Хермандером в [2].

$$\varphi_n(x) \in C_0^\infty(\Omega),\ (n = 1, 2, \ldots\ldots) \text{ і } \lim_{n\to\infty}(\|\varphi_n - u\| + \|A(\varphi_n - u)\|) = 0.$$

При цьому виявляється, що послідовність $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$ в деякому розумінні можна зробити універсальною, а саме такою, що $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ залежать лише від $u(x)$ і геометрії області Ω, але не залежать від $A(D)$, і, таким чином, придатні для будь-якого оператора $A(D)$ з постійними коефіцієнтами.

Переходимо тепер до нашої основної теми.

Нехай $B_0, B_1, \ldots, B_m$ — банахові простори з нормами відповідно $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1, \ldots, \|\cdot\|_m$. Тоді, як відомо, $B = B_0 \times B_1 \times \ldots \times B_m$ з нормою $\|\cdot\|^2 = \|\cdot\|_0^2 + \ldots + \|\cdot\|_m^2$ (або їй еквівалентною) буде також банаховим простором.

Означення 2. Сукупність лінійних операторів $T_1, \ldots, T_m$, $T_i: B_0 \to B_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, таких, що $\varnothing \neq D_T = \bigcap_{1\leqslant i\leqslant m} D(T_i) \subset B_0$, будемо називати ансамблем лінійних операторів.

Означення 3. Нехай $B_0, B_1, \ldots B_m$ — банахові простори, $T_1, \ldots, T_m$ — ансамбль лінійних операторів. Множину $G_T = \{[u, T_1u, \ldots, T_m u], u \in D_T\} \subset B$ називаємо графіком ансамблю лінійних операторів $T_1, \ldots, T_m$.

Коли $m = 1$, це поняття збігається з класичним поняттям графіка оператора, вперше запровадженим Дж. фон Нейманом. Легко доводиться таке твердження:

Лема 2. Якщо оператори $T_1, \ldots, T_m$ замкнені і утворюють ансамбль, то G_T є замкнений підпростір простору B, і, таким чином, G_T є банаховий простір.

Розглянемо тепер таку задачу. Нехай $A_1, \ldots, A_m$ — мінімальні оператори в $L^2(\Omega)$ з областями визначення відповідно $D(A_1), \ldots, D(A_m)$. Треба описати всі ті мінімальні оператори $B(D)$, для яких $D(B) \supset \bigcap_{i=1}^{m} D(A_i)$.

Задачі, подібні до сформульованої, носять назву теорем вкладення. Вони ставляться в різноманітних банахових функціональних просторах. З цього приводу див. фундаментальну роботу [3] і оглядову статтю [6], де подано повну бібліографію цього питання.

При $m = 1$ ця задача була поставлена і повністю розв'язана Л. Хермандером в [1]. Там же він дослідив структуру областей визначення мінімальних операторів.

Мають місце такі твердження:

Теорема 1. Нехай $B_0, B_1, \ldots, B_{m+1}$ — банахові простори, $T_1, \ldots, T_m$ — ансамбль замкнених лінійних операторів, $T: B_0 \to B_{m+1}$ — лінійний оператор, що допускає замикання. Тоді якщо $D(T) \supset D_T$, то існує така константа C, що

$$\|Tu\|_{m+1}^2 \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{m} \|T_i u\|_i^2 + \|u\|_0^2\right),\ u \in D_T. \tag{2}$$

Доведення. З леми 2 випливає, що G_T замкнене. Отже, відображення

$$G_T \ni [u, T_1 u, \ldots, T_m u] \to Tu \in B_{m+1}$$

визначене на банаховому просторі. Для доведення теореми достатньо встановити, що воно замкнене. Якщо $[u_n, T_1 u_n, \ldots, T_m u_n]$ збігається в G_T, а Tu_n збігається в B_{m+1}, то існує $u \in D_T$ такий, що

$$u_n \to u, \ T_i u_n \to T_i u \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Отже, $u \in D(T)$, і оскільки T допускає замикання, то $Tu_n \to Tu$. Залишається застосувати теорему Банаха про замкнений графік.

Переходячи до мінімальних операторів у $L^2(\Omega)$, всюди далі вважаємо, що Ω має T_i- або T_e-властивість.

Теорема 2. Нехай $A_1, \ldots, A_m$ — ансамбль мінімальних операторів в $L^2(\Omega)$. Тоді $D_A = \bigcap_{i=1}^{m} D(A_i)$ утворюється поповненням $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|\cdot\|_* = (\|\cdot\|^2 + \|A_1(\cdot)\|^2 + \ldots + \|A_m(\cdot)\|^2)^{1/2}$.

Справді, нехай $u \in D_A$. Якщо $u(x)$ має компактний носій, що лежить в Ω, то послідовність $\{\psi_n(x)\}_1^\infty$ середніх функцій з радіусом усереднення $\frac{1}{n}$ має, як відомо (див., напр., [3]), ті властивості, що $\psi_n(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ і $\lim\limits_{n\to\infty} \|u - \psi_n\|_* = 0$. В противному випадку ми продовжимо функцію $u(x)$ на E^n, поклавши $u(x) \equiv 0$ при $x \bar{\in} \Omega$. Тоді можна побудувати послідовність $\{\varphi_n(x)\}_1^\infty$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, яка буде універсальною в розумінні, згаданому в зауваженні до леми 1. При цьому для кожного i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty}(\|u - \varphi_n\| + \|A_i(u - \varphi_n)\|) = 0$ і, значить, $\lim\limits_{n\to\infty} \|u - \varphi_n\|_* = 0$, що і потрібно.

Теорема 3. Нехай $B, A_1, \ldots, A_m$ — мінімальні оператори в $L^2(\Omega)$. Для того, щоб $D(B) \supset D_A = \bigcap_{i=1}^{m} D(A_i)$, необхідно і достатньо, щоб існувала така константа C, що

$$\|Bu\|^2 \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n} \|A_i u\|^2 + \|u\|^2\right) \tag{3}$$

для всякої функції $u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$.

Необхідність є наслідком теореми 1.

Достатність. Якщо $u \in D_A$, то на основі теореми 2 існує послідовність $\varphi_n(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ така, що $\|u - \varphi_n\|_* \to 0$ при $n \to \infty$. З (3) випливає, що $\|\varphi_n - \varphi_k\| + \|B(\varphi_n - \varphi_k)\| \to 0$, $k, n \to \infty$. З замкненості оператора B випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = u \in D(B)$.

Таким же способом, як лема 1.6 ([1], стор. 22), доводиться таке твердження:

Теорема 4. Щоб $B(D)u$ для довільного $u \in D_A$ була в значенні теорії узагальнених функцій обмеженою функцією, необхідно і достатньо, щоб існувала така константа C, що

$$\sup_{x \in \Omega} |B(D)u(x)|^2 \leqslant C\left(\sum_{i=1}^{m} \|A_i u\|^2 + \|u\|^2\right) \tag{4}$$

для всіх $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Якщо ця нерівність виконується, то $B(D)u$ для $u \in D_A$ є рівномірно неперервною функцією після видозміни на множині міри нуль, і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує компактна множина $K \subset \Omega$, що $|B(D)u(x)| < \varepsilon$ при $x \in \Omega \setminus K$.

Маючи на меті дати для теорем 3 і 4 алгебраїчні еквіваленти, запровадимо такі позначення. Якщо $A(D) = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ — диференціальний оператор, то йому відповідає поліном $A(\xi) = \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha$, де $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in E^n$ $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}$. Оператор, що відповідає поліному $A^{(\alpha)}(\xi) = \frac{\partial^{|\alpha|} A(\xi)}{\partial \xi_1^{\alpha_1} \ldots \partial \xi_n^{\alpha_n}}$, будемо позначати через $A^{(\alpha)}(D)$. Нарешті, покладемо $\tilde{A}(\xi) = (\sum |A^{(\alpha)}(\xi)|^2)^{1/2}$.

Ідучи за доведенням теореми 2.2, 2.6 і 2.7 [1] і спираючись на теорему 3 і 4, доводимо такі твердження.

Теорема 5. Нехай $B, A_1, \ldots, A_m$ — мінімальні оператори в $L^2(\Omega)$. Для того, щоб $D(B) \supset D_A$, необхідно і достатньо, щоб існувала така константа C, що

$$|B(\xi)|^2 \leqslant C \sum_{i=1}^{m} \tilde{A}_i^2(\xi) \tag{5}$$

для всіх дійсних ξ.

Коли оператори $B, A_1, \ldots, A_m$ однорідні степені ν, то нерівність (5) можна спростити. Справді, поклавши $\lambda\xi$ замість ξ і переходячи до границі, коли $\lambda \to \infty$, з (5) одержимо:

$$|B(\xi)| \leqslant C \sum |A_i(\xi)|. \tag{6}$$

Отже, ця умова є необхідна і достатня для того, щоб $D(B) \supset D_A$. В випадку однорідних операторів на еквівалентність нерівностей (5) і (6), по суті, вперше звернув увагу Л. Гордінг [4].

Приклад. Нехай $A_1 = D_1^\nu, \ldots, A_n = D_n^\nu$. Тоді легко бачити, що для будь-яких $\mu_1, \ldots, \mu_n$, таких, що $\sum \mu_i \leqslant \nu$, маємо

$$|\xi_1^{\mu_1} \ldots \xi_n^{\mu_n}| \leqslant C \sum_{i=1}^{n} |\xi_i^\nu|$$

і, значить, для довільного оператора $B(D)$ порядку не вище ніж ν $D(B) \supset \bigcap_{i=1}^{n} D(D_i^\nu)$. Цей результат є частинним випадком однієї глибокої теореми Н. Ароншайна [5].

Теорема 6. Якщо $B(D)u$ для всіх $u \in D_A$ — неперервна функція після видозміни на множині міри нуль, то

$$\int_{E^n} \frac{|B(\xi)|^2}{\sum \tilde{A}_i(\xi)^2} d\xi < \infty.$$

Навпаки, якщо ця умова виконується, то $B(D)u$ для всякої $u \in D_A$ — рівномірно неперервна функція після видозміни на множині міри нуль, і прямує до нуля при наближенні до межі Ω в тому розумінні, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує така компактна множина $K \subset \Omega$, що $|B(D)u| < \varepsilon$ для всіх $x \in \Omega \setminus K$.

Теорема 7. Якщо $B(\xi)/(\sum_{i=1}^{m}\hat{A}_i(\xi)^2)^{1/2} \in L^{\frac{2p}{p-2}}(E^n)$, то $B(D)u \in L^p(\Omega)$ для всякої $u \in D_A$.

Зауважимо ще раз, що теореми 3—7 справедливі в припущенні, що Ω має T_i- або T_e-властивості, оскільки вони спираються на теорему 2. Використовуючи цю останню, можна узагальнити в подібному напрямку деякі інші теореми Л. Хермандера. Ми не будемо їх наводити.

ЛІТЕРАТУРА

1. Л. Хермандер. К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. ИЛ, 1959.
2. L. Hörmander. Arciv för Math., Bd. 3, **46** (1958).
3. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М., 1950.
4. L. Gårding. Math. Scand., **1**, 55—72 (1953).
5. N. Aronszajn. Proc. Conf. Partial Differential Equations, Univ. of Kansas. Technical Report, **14**, 94—106 (1954).
6. С. М. Никольский. УМН, т. 16, в. 5 (1961).