ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

Я. Б. ЛОПАТИНСЬКИЙ

ПРО ОДИН ТИП СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Як вказувалося в [1], крайові задачі для систем лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного типу зводяться до інтегральних рівнянь вигляду (в матричній формі для двох вимірів)

$$u(x)-\int_S \frac{(x-y,\nu(y))}{(x-y)^2}\mathfrak{G}\left(x,y,\nu(x),\nu(y),\frac{x-y}{|x-y|}\right)u(y)\,d_yS=f(x).$$

Тут $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$, $(x,y)=(x_1y_1+x_2y_2)$, $|x|=+\sqrt{(x,x)}$; S — поверхня, що обмежує область, в якій розглядається задача, $\nu(y)$ — одиничний вектор внутрішньої нормалі до S в точці $y\in S$, $\mathfrak{G}(x,y,\xi,\eta,\zeta)$ — квадратна $p\times p$ матриця, неперервна при $x,y\in S$, $|\xi|=1$, $|\eta|=1$, $|\zeta|=1$.

Інтегральний оператор в цьому рівнянні цілком неперервний, якщо крива S задовольняє умову Ляпунова, однак ця його властивість порушується, якщо S має кутові точки.

Метою даної замітки є дослідження цього випадку на підставі недавніх результатів І. Ц. Гохберга і М. Г. Крейна [2].

Нехай $\mathfrak{G}(x,y,\xi,\eta,\zeta)$ — $p\times p$ матриця, визначена при $x,y\in S$, $|\xi|=1$, $|\eta|=1$, $|\zeta|=1$, неперервна і задовольняє умову

$$\mathfrak{G}(x,y,\xi,\eta,\zeta)=O(|(\xi,\zeta)|+|(\eta,\zeta)|).$$

Розглядається оператор

$$\mathfrak{G}u(x)=\int_S\frac{1}{|x-y|}\mathfrak{G}\left(x,y,\nu(x),\nu(y),\frac{x-y}{|x-y|}\right)u(y)\,d_yS,$$

при умові, що крива S складається з конечної кількості дуг $S_1, S_2, \ldots, S_n$, які задовольняють умову Ляпунова (нумерація ведеться за додатним обходом).

Припускається, що в кінцевих точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цих дуг кути між нормалями до суміжних дуг відмінні від π.

Далі досліджується індекс оператора $\mathrm{I}-\mathfrak{G}$ (I — одиничний оператор). Припускається, що оператор цей діє в просторі $L_\varepsilon(S)$ функціональних p стовпців $u(x)=(u_1(x),\ldots,u_p(x))$, $(x\in S)$ з нормою

$$|u|=\int_S r^{-\varepsilon}(x)|u(x)|\,d_xS=\sum_{k=1}^{p}\int_S r^{-\varepsilon}(x)|u_k(x)|\,d_xS.$$

Тут $r(x)$ означає найменше з чисел $|x - a_1|$, $|x - a_2|$, ..., $|x - a_n|$; $0 < \varepsilon < 1$.

Легко перевіряється обмеженість оператора $\mathfrak{G}$. Для дальшого дослідження кожна дуга S_k ділиться на три зв'язні частини $S_k^{(1)}$, $S_k^{(2)}$, $S_k^{(3)}$, таких, що $S_k^{(1)}$ $(S_k^{(3)})$ — примикає до точки контура a_{k-1} (точки a_k)[1], однозначно проектується на дотичну до S_k в цій точці і при $x \in S_k^{(1)}$ $(x \in S_k^{(3)})$, $r(x) = |x - a_{k-1}|$ $(r(x) = |x - a_k|)$.

Відповідно вводяться простори $L_k^{(i)}(\varepsilon)$ з нормою $\int\limits_{S_k^{(i)}} r^{-\varepsilon}(x)|u(x)|\, d_x S$.

Оператор $\mathfrak{G}$ породжує оператори

$$\mathfrak{G}_{kl}^{(ij)} u(x) = \int\limits_{S_l^{(j)}} \frac{1}{x-y} \mathfrak{G}\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right) u(y)\, d_y S,$$

$$(k, l = 1, \ldots, n;\ i, j = 1, 2, 3;\ x \in S_k^{(i)},\ y \in S_l^{(j)}),$$

які відображають $L_l^{(j)}(\varepsilon)$ в $L_k^{(i)}(\varepsilon)$.

Оператор $\mathfrak{G}$ очевидним чином ототожнюється з матричним оператором $(\mathfrak{G}_{kl}^{(i,j)})_{k,l=1,n;\, i,j=1,2,3}$, який діє в декартовому добутку просторів $L_k^{(i)}(\varepsilon)$.

Як відомо (див., наприклад, [3]), індекс оператора не змінюється при додаванні цілком неперервного оператора. Це дозволяє спростити оператори $\mathfrak{G}_{kl}^{(i,j)}$.

Легко переконатися, що оператори $\mathfrak{G}_{kl}^{(i,j)}$ цілком неперервні, якщо дуги $S_k^{(i)}$ і $S_l^{(j)}$ не суміжні або лежать на одній дузі S_k $(l = k)$. При визначенні індекса оператора $I - \mathfrak{G}$ можна таким чином замінити нулями всі оператори $\mathfrak{G}_{kl}^{(i,j)}$, за винятком операторів вигляду $\mathfrak{G}_{k,k+1}^{(3,1)}$, $\mathfrak{G}_{k+1,k}^{(1,3)}$, далі в матрицях $(\mathfrak{G}_{kl}^{i,j})$, $(I_{kl}^{(i,j)})$ можна викреслити рядки і стовпці, які відповідають дугам $S_k^{(2)}$.

Оператори, які залишаються, мають вигляд

$$Pu(x) = \int\limits_{S''} \frac{1}{|x-y|} P\left(x, y, \frac{x-y}{|x-y|}\right) u(y)\, d_y S.$$

Тут $x \in S'$, S' і S'' — гладкі дуги з спільним кінцем a, які однозначно проектуються на відповідні їм дотичні в точці a, $P(x, y, \zeta)$ — неперервна матриця при $x \in S'$, $y \in S''$ і $|\zeta| = 1$, $u \in L_\varepsilon(S'')$, $Pu \in L_\varepsilon(S')$, $(\nu_{S'}(a), \nu_{S''}(a)) > -1$.

Нехай e', e'' — одиничні вектори дотичних відповідно до S', S'' (напрямлені від точки a), $\tilde{x} = \xi e'$, $\tilde{y} = \eta e''$ — проекції x і y на e' і e''; $0 \leqslant \xi \leqslant \alpha$; $0 \leqslant \eta \leqslant \beta$. Через те, що дуги $S_k^{(1)}$ і $S_k^{(3)}$ довільно малі, можна припустити, що $(\nu(x), e') \neq \pm 1$, $(\nu(y), e'') \neq \pm 1$ при $x \in S'$, $y \in S''$.

Лема. Якщо при $x \in S'$, $y \in S''$, $x \to a$, $y \to a$ справедлива рівність

$$\lim P\left(x, y, \frac{x-y}{|x-y|}\right) = 0,$$

то оператор P цілком неперервний.

[1] $a_{n+1} = a_1$, $S_{n+1} = S_1$.

Доведення. Внаслідок топологічної еквівалентності просторів $L_\varepsilon(S')$ і $L_\varepsilon([0,\alpha])$, $L_\varepsilon(S'')$ і $L_\varepsilon([0,\beta])$ оператор P визначає відображення $L_\varepsilon([0,\beta])$ в $L_\varepsilon([0,\alpha])$.

Легко переконатися в обмеженості оператора P. Таким чином, достатньо довести, що зменшенням числа h можна рівномірно відносно η зробити довільно малим інтеграл

$$\int_0^\alpha \xi^{-\varepsilon}\eta^{\varepsilon}\left\{\frac{1}{|x(\xi+h)-y(\eta)|}P\left(x(\xi+h),y(\eta),\frac{x(\xi+h)-y(\eta)}{|x(\xi+h)-y(\eta)|}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{|x(\xi)-y(\eta)|}P\left(x(\xi),y(\eta),\frac{x(\xi)-y(\eta)}{|x(\xi)-y(\eta)|}\right)\right\}d\xi.$$

Функція P продовжується нулем на продовження відрізка $[0,\ \alpha]$. Розглядуваний інтеграл розкладається за схемою $\int_0^\delta+\int_\delta^\alpha$. Завдяки обмеженості величини $\int_0^\delta\frac{\xi^{-\varepsilon}\eta^{\varepsilon}}{|x(\xi)-y(\eta)|}d\eta$ інтеграл $\int_0^\delta$ може бути зроблений разом з P довільно малим зменшенням δ при $\eta<\delta$; інтеграл $\int_\delta^\alpha$ може бути зменшений підбором h так само, як і $\int_0^\delta$ при $\eta\leqslant\delta$.

Лема доведена.

На підставі цієї леми, беручи $\tilde P(\zeta)=P(a,\ a,\ \zeta)$ оператор P можна подати у вигляді

$$P=\tilde P+P_1,\ \tilde P u(\xi)=\int_0^\beta\frac{1}{|\tilde x-\tilde y|}\tilde P\left(\frac{\tilde x-\tilde y}{|\tilde x-\tilde y|}\right)u(\eta)\,d\eta,$$

P_1 — цілком неперервний.

Нехай L^p — множина p-стовпців $u(t)$, визначених на $(0,\ \infty)$, з нормою $\|u\|=\int_0^\infty|u(t)|\,dt$.

Останнє перетворення оператора $\tilde P$ полягає в заміні

$$\xi=e^{-s+\lg\alpha},\ \eta=e^{-t+\lg\beta},\ u(\xi)=\xi^{\varepsilon-1}u(s),\ v(\eta)=\eta^{\varepsilon-1}v(t);$$

це приводить до розгляду оператора, який діє із L^p в L^p, такого вигляду:

$$P_\omega u(s)=\int_0^\infty\frac{e^{\left(\varepsilon-\frac{1}{2}\right)\left(s-t+\lg\frac{\beta}{\alpha}\right)}}{\sqrt{e^{s-t+\lg\frac{\beta}{\alpha}}+e^{-s+t-\lg\frac{\beta}{\alpha}}-2\cos\omega}}P_\omega(s-t)\,u(t)\,dt,$$

$$P_\omega(t) = \tilde{P}\left(\frac{e^{-\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\lg\frac{\beta}{\alpha}}e' - e^{\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\lg\frac{\beta}{\alpha}}e''}{\sqrt{e^{t+\lg\frac{\beta}{\alpha}} + e^{-t-\lg\frac{\beta}{\alpha}} - 2\cos\omega}}\right), \quad \cos\omega = (e', e'') \neq 1.$$

Тепер за формулою І. Ц. Гохберга і М. Г. Крейна можна визначити індекс $\varkappa$ оператора $\mathrm{I} - \mathfrak{G}$. Нескладні обчислення приводять до такого результату.

Нехай для $k = 1, \ldots, n$ ω_k — внутрішній кут у вершині a_k контура S, τ_k, ν_k — відповідно одиничні вектори дотичної і нормалі до дуги S_k в точці a_k,

$$\zeta_k(t) = \frac{(e^{-\frac{t}{2}}\cos\omega_k - e^{\frac{t}{2}})\,\tau_k - e^{-\frac{t}{2}}\sin\omega_k\cdot\nu_k}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2\cos\omega_k}},$$

$$U^{(3,1)}_{k,k+1}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2\cos\omega_k}}\,\mathfrak{G}(a_k, a_k, \nu_k, -\sin\omega_k\tau_k - $$

$$- \cos\omega_k\nu_k, \zeta_k(-t))\,dt,$$

$$U^{(1,3)}_{k+1,k}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2\cos\omega_k}}\,\mathfrak{G}(a_k, a_k, -\sin\omega_k\tau_k - $$

$$- \cos\omega_k\nu_k, \nu_k, -\zeta_k(t))\,dt.$$

Очевидно,

$$\Delta_k(\lambda) = \det\{\mathrm{I} - U^{(1,3)}_{k+1,k}(\lambda)\,U^{(3,1)}_{k,k+1}(\lambda)\}$$

аналітична функція λ при $-\frac{1}{2} < \varepsilon - \frac{1}{2} = Im\lambda < \frac{1}{2}$. При $\lambda \to \pm\infty + i\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)$, $\lim\Delta_k(\lambda) = 1$; таким чином, можна обрати ε так, щоб на прямій $Im\lambda = \varepsilon$ ні один з $\Delta_k(\lambda)$ не перетворювався в нуль. При цьому припущенні справедлива

Теорема. Індекс оператора $\mathrm{I} - \mathfrak{G}$ в просторі $L_\varepsilon(S)$ конечний і дорівнює

$$\varkappa = -\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty+\varepsilon i}^{+\infty+\varepsilon i} d\,arg\,\Delta_k(\lambda).$$

Зокрема, внутрішній задачі Діріхле для оператора Лапласа відповідає інтегральне рівняння

$$u(x) - \frac{\varkappa}{\pi}\int\limits_S \frac{(x-y, \nu(y))}{|x-y|^2}\,u(y)\,d_y S = f(x)$$

при $\varkappa = 1$.

В цьому випадку

$$\mathfrak{G}(x, y, \xi, \eta, \zeta) = \frac{\varkappa}{\pi}(\zeta, \eta),$$

$$U_{k,k+1}^{(3,1)}(\lambda) = + U_{k+1,k}^{(1,3)}(\lambda) = \frac{\varkappa}{\pi} \sin \omega_k \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t - \frac{t}{2}}}{e^t + e^{-t} - 2\cos\omega_k} dt =$$

$$= \varkappa \frac{sh(\pi - \omega_k)\left(\lambda + i \cdot \frac{1}{2}\right)}{sh\, \pi \left(\lambda + i \cdot \frac{1}{2}\right)},$$

$$\Delta_k(\lambda) = 1 - \varkappa^2 \frac{sh^2(\pi - \omega_k)\left(\lambda + i \cdot \frac{1}{2}\right)}{sh^2 \pi \left(\lambda + i \cdot \frac{1}{2}\right)}.$$

Беручи $\lambda = \mu + i\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)$, легко перевірити, що змінна

$$z = \frac{sh^2(\pi - \omega_k)(\mu + i(\varepsilon - 1))}{sh^2 \pi (\mu + i(\varepsilon - 1))}$$

при $1 - \varepsilon$ і малому $\varepsilon < 1$, і μ, яке пробігає дійсну вісь, обходить відрізок $\left[0, \frac{(\pi - \omega_k)^2}{\pi^2}\right]$ в додатному напрямі.

Таким чином, якщо $\varkappa$ не належить відрізкам $\left[-\infty, -\frac{\pi}{|\pi - \omega_k|}\right]$ і $\left[\frac{\pi}{|\pi - \omega_k|}, +\infty\right]$, то індекс оператора $1 - \varkappa\mathfrak{G}$ дорівнює нулеві при $\varepsilon < 1$ і досить малому $1 - \varepsilon$.

Радіус Фредгольма оператора $\mathfrak{G}$ виявляється рівним $\min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\pi}{|\pi - \omega_k|}$, результат, одержаний Радоном при більш загальних припущеннях для оператора $\mathfrak{G}$, який відповідає задачі Діріхле.

ЛІТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. УМЖ, 2 (1953).

2. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. УМН, т. XIII, вып. 2 (1958).

3. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов. УМН, т. XII, вып. 2 (1957).