ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

Я. Б. ЛОПАТИНСЬКИЙ

ЗВЕДЕННЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ

Метою даної замітки є доведення можливості зведення в певному розумінні системи еліптичних рівнянь до системи теж еліптичного типу першого порядку.

1. Нехай

$$C_1^{(m)} = \begin{pmatrix} 1_{2^{m-1}} & 0 \\ 0 & -1_{2^{m-1}} \end{pmatrix}^{\text{[1]}} (m \geqslant 1),\; C_i^{(m)} = \begin{pmatrix} 0 & C_{i-1}^{(m-1)} \\ C_{i-1}^{(m-1)} & 0 \end{pmatrix} (m \geqslant 2;\; 2 \leqslant i \leqslant m). \tag{1}$$

Очевидно, $(C_1^{(m)})^2 = 1_{2^m}$. Індукцією відносно m перевіряється, що

$$(C_i^{(m)})^2 = 1_{2^m} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Далі, якщо $m \geqslant 2$, $i > 1$, то

$$C_1^{(m)} C_i^{(m)} + C_i^{(m)} C_1^{(m)} = 0.$$

Якщо $m \geqslant 3$, $i, j \geqslant 2$, $i \neq j$, то

$$C_i^{(m)} C_j^{(m)} + C_j^{(m)} C_i^{(m)} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{i-1}^{(m-1)} C_{j-1}^{(m-1)} + C_{j-1}^{(m-1)} C_{i-1}^{(m-1)} & 0 \\ 0 & C_{i-1}^{(m-1)} C_{j-1}^{(m-1)} + C_{j-1}^{(m-1)} C_{i-1}^{(m-1)} \end{pmatrix}$$

і, таким чином, за індукцією

$$C_i^{(m)} C_j^{(m)} + C_j^{(m)} C_i^{(m)} = 0.$$

Лема 1. Для кожного натурального m матриці $C_1^{(m)}, \ldots, C_m^{(m)}$, визначені формулами (1), мають властивості:

$$(C_i^{(m)})^2 = 1_{2^m},\; C_i^{(m)} C_j^{(m)} + C_j^{(m)} C_i^{(m)} = 0 \quad (i \neq j);$$

$$det \sum_{i=1}^{m} \alpha_i C_i^{(m)} = \Bigl(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2\Bigr)^{2^{m-1}} (m > 1).$$

Останнє твердження одержується з наступних підрахунків:

$$\Bigl(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i C_i^{(m)}\Bigr)^2 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \; 1_{2^m},$$

[1] 1_k — одинична матриця порядку k.

$$\left(\det\sum_{i=1}^{m}\alpha_i C_i^{(m)}\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2\right)^{2^m},$$

$$\det\sum_{i=1}^{m}\alpha_i C_i^{(m)}=\pm\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^2\right)^{2^{m-1}},$$

$$\det C_1^{(m)}=\begin{cases}-1\ (m=1),\\ 1\ (m>1).\end{cases}$$

2. Розглянемо сукупність векторів вигляду $k=(k_1,\ldots,k_n)$ $(n\geqslant 1)$ з цілими невід'ємними координатами; покладемо $\|k\|=k_1+\ldots+k_n$, $<i>=(\delta_{1i},\ldots,\delta_{ni})$ (δ_{kl} — символ Кронекера); k/l буде означати, що $l_i\geqslant k_i\ (i=1,\ldots,n)$ ($k\overline{/}l$ — заперечення цього).

Лема 2. Для довільних цілих $n\geqslant 2$, $s\geqslant 2$ існує таке p, що можна побудувати систему $p\times p$ матриць

$$C_{k,l,i,j}^{(n,s)}\quad(\|k\|,\|l\|=s-1;\ i,j=1,\ldots,n),$$

для яких система рівнянь

$$\Omega^{(n,s)}(\alpha,P_k):\tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{\|l\|=s-1}\ \sum_{<j>/l}C_{k,l,i,j}^{(n,s)}\left(\alpha_i P_l-\alpha_j P_{l-<j>+<i>}\right)=0^1$$

$$(\|k\|=s-1,\ k\neq(s-1)<n>)\tag{2}$$

має загальний розв'язок вигляду $P_k=\alpha^k P_0$ ($\alpha=\alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_n^{k_n}$, $\alpha\neq 0$ і дійсне). Ми доведемо,— методом математичної індукції, причому індукція ведеться по $n+s$, — дещо більш загальне твердження: для довільних натуральних h і $g\geqslant 2^{n-1}h\binom{s-2+n}{n-1}$ і системи Σ_g матриць $C_1,\ldots,C_g$, що задовольняють умову $(\sum_{i=1}^{g}\mu_i C_i)^2=(\sum_{i=1}^{g}\mu_i^2)1$, можна підібрати систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n}\ \sum_{\|l\|=s-1}\ \sum_{<j>/l}C_{klij}^{(n,s,h,\Sigma_g)}\left(\alpha_i X_l-\alpha_j X_{l-<j>+<i>}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i\sum_{\|l\|=s-1}P_{ikl}^{(n,s,h,\Sigma_g)}X_l=0\quad(\|k\|=s-1),\tag{3}$$

яка володіє такими властивостями (для дійсних α, λ):

1) Система (3) при $\lambda\neq 0$ має тільки нульовий розв'язок;

2) $P_{i,(s-1)<n>,l}^{(n,s,h,\Sigma_g)}$ $(\|l\|=s-1)$ — різні матриці системи Σ_g або нулі;

3) Матриця $\sum_{i=1}^{h}\lambda_i\sum_{\|l\|=s-1}P_{i,(s-1)<n>,l}\,\alpha^l$ при $\alpha\neq 0$, $\lambda\neq 0$ оборотна;

---

[1] При $s=1$ ця система пуста.

4) Система, одержана із (3) при $\lambda=0$ і виключенні рівняння, яке відповідає $k=(s-1)<n>$, має при $\alpha\neq 0$ загальний розв'язок $X_k=\alpha^k X_0$.

При $n\geqslant 2$, $s=2$ систему (3) можна подати у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{h} C_i(\alpha_i X_{<j>}-\alpha_j X_{<i>})+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{n+i}X_{<j>}=0 \quad (j=1,\ldots,n-1),$$

$$\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_i C_{n+h+i+j-1}X_{<j>}+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{n+i}X_{<n>}=0.$$

Дійсно, при $\lambda\neq 0$ з перших рівнянь одержуємо

$$X_{<j>}=\alpha_j R \quad (j=1,\ldots,n-1),$$

$$X_{<n>}=\left(\alpha_n 1+C_n\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{n+i}\right)R.$$

Підставляючи в останнє рівняння, дістаємо:

$$\left\{\sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_i C_{n+h+i+j-1}\alpha_j+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{n+i}\alpha_n-|\lambda|^2 C_n\right\}R=0.$$

Отже, $R=0$ і $X_{<j>}=0$.

Таким чином, перша умова виконується; друга умова теж, очевидно, виконується. Легко бачити, що виконана і третя умова.

Беручи тепер $\lambda=0$, $\alpha\neq 0$ і відкидаючи останнє рівняння, дістаємо

$$X_{<j>}=\alpha_j R,$$

$$R=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i C_i\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n}C_i X_{<i>}$$

і, отже, $X_{<n>}=\alpha_n R$.

Таким чином, четверта умова виконана.

Нехай тепер $n=2$, $s=3$. В цьому випадку систему (3) можна побудувати у вигляді (беручи $X_{2-k,k}=X_k$, $k=0,1,2$):

$$C_1(\alpha_2 X_0-\alpha_1 X_1)+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{i+1}X_0=0,$$

$$C_1(\alpha_2 X_1-\alpha_1 X_2)+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{i+1}X_1=0,$$

$$\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{i+1}X_0+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{h+i+1}X_2=0.$$

При $\lambda\neq 0$ з перших двох рівнянь знаходимо

$$X_0=\alpha_1\left(\alpha_2 C_1+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{i+1}\right)^{-1}C_1X_1,$$

$$X_1=\alpha_1\left(\alpha_2 C_1+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{i+1}\right)^{-1}C_1X_2$$

і, отже,

$$X_0=\frac{\alpha_1^2}{(\alpha_2^2+|\lambda|^2)^2}\left[(\alpha_2^2-|\lambda|^2)1+2\alpha_2\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{i+1}C_1\right]X_2.$$

Підставляючи в останнє рівняння, дістаємо

$$\left[\sum_{i=1}^{h}\frac{\alpha_1^2(\alpha_2^2-|\lambda|^2)}{(\alpha_2^2+|\lambda|^2)^2}\lambda_i C_{i+1}+\frac{2\alpha_1^2\alpha_2|\lambda|^2}{(\alpha_2^2+|\lambda|^2)^2}C_1+\sum_{i=1}^{h}\lambda_i C_{h+i+1}\right]X_2=0.$$

Отже, $X_2=0$, $X_1=0$, $X_0=0$.

Перша умова перевірена.

Очевидно, друга умова теж виконується. Виконання третьої умови легко перевірити.

Беручи тепер $\lambda=0$ і відкидаючи останнє рівняння, при $\alpha_2\neq 0$ знаходимо X_0, X_1 через X_2, при $\alpha_1\neq 0$ — X_2, X_1 через X_0; таким чином, остання умова теж виконується.

Нехай тепер n, $s\geqslant 3$. Система (3) конструюється так. Система матриць $\sum_g\left(g\geqslant 2^{n-1}h\binom{s-2+n}{n-1}\right)$ розбивається на дві непересічні підсистеми $\sum_{g_1}$, $\sum_{g_2}$ так, що $g=g_1+g_2$, $g_1\geqslant 2^{n-1}h\binom{s-3+n}{n-1}$, $g_2\geqslant$ $\geqslant 2^{n-2}(h+1)\binom{s-3+n}{n-2}$; через те що $h\geqslant 1$, таке розбиття завжди можливе.

Тепер за n, $s-1$, h, Σg_1 і за $n-1$, s, $h+1$, Σg_2 будуються системи

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\|l\|=s-2}\sum_{\langle j\rangle|l}C_{k-\langle n\rangle,l,i,j}^{(n,s-1,h,\Sigma g_1)}(\alpha_i X_{l+\langle n\rangle}-\alpha_j X_{l-\langle j\rangle+\langle i\rangle+\langle n\rangle})+$$

$$+\sum_{i=1}^{h}\sum_{\|l\|=s-2}\lambda_i P_{i,k-\langle n\rangle,l}^{(n,s-1,h,\Sigma g_1)}X_{l+\langle n\rangle}=0\quad(\|k\|=s-1,\ k_n>0),\qquad(4)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{\|l\|=s-1\\ l_n=0}}\sum_{\langle j\rangle|l}C_{k,l,i,j}^{(n-1,s,h+1,\Sigma g_2)}(\alpha_i X_l-\alpha_j X_{l-\langle j\rangle+i})+$$

$$+\sum_{\substack{\|l\|=s-1\\ l_n=0}}P_{1kl}^{(n-1,s,h+1,\Sigma g_2)}(\alpha_n X_l-\alpha_{\overline{l}}X_{l-\langle\overline{l}\rangle+\langle n\rangle})+$$

$$+\sum_{i=1}^{h}\sum_{\substack{\|l\|=s-1\\ l_n=0}}\lambda_i P_{i+1,\,k,\,\bar{l}}^{(n-1,\,s,\,h+1,\,\Sigma g_2)} X_{\bar{l}}=0\,(\|k\|=s-1,\ k_n=0)^1. \tag{5}$$

Нехай $\lambda \neq 0$. Тоді, за припущенням індукції із (4), $X_k = 0$ при $k_n > 0$, із (5) — $X_k = 0$ при $k_n = 0$. Умова 2, очевидно, виконується.

Нехай тепер $\lambda = 0$, $\alpha \neq 0$ і рівняння, яке відповідає $k = (s-1) < n >$, відкинуте. Тоді з (4), за припущенням індукції,

$$X_k = \alpha^{k-<n>}\, У (k_n > 0).$$

Підставляючи в (5), дістаємо

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\substack{\|l\|=s-1\\ l_n=0}}\sum_{<j>|l} C_{kl ij}^{(n-1,\,s,\,h+1,\,\Sigma g_2)}\,(\alpha_i X_l - \alpha_j X_{l-<j>+<i>}) +$$

$$+\alpha_n \sum_{\substack{\|l\|=s-1\\ l_n=0}} P_{1kl}^{(n-1,\,s,\,h+1,\,\Sigma g_2)}\, X_l = \sum_{\substack{\|l\|=s-1\\ l_n=0}} P_{1ki}^{(n-1,\,s,\,h+1,\,\Sigma g_2)}\alpha^l\, У. \tag{6}$$

Якщо $\alpha_n \neq 0$, то система (6) при $У = 0$, за припущенням індукції, має тільки нульовий розв'язок; отже, X_k $(k_n = 0)$ однозначно визначаються з системи (6) і через те, що $X_k = \alpha^k X_0$ є розв'язок системи (4), (5) при $\lambda = 0$, то при $\alpha_n \neq 0$ це загальний розв'язок цієї ж системи (з відкинутим рівнянням, яке відповідає $k = (s-1) < n >$).

Якщо $\alpha_n = 0$ (і, отже, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \neq 0$), то з рівняння (6) (при $k \neq (s-1) < n-1 >$) випливає, за припущенням індукції, $X_k = \alpha^k X_0$ $(\|k\| = s-1,\ k_n = 0)$; підставляючи в рівняння, яке відповідає $k = (s-1) < n-1 >$, внаслідок оборотності $\sum\limits_{\substack{\|l\|=s-1\\ l_n=0}} P_{1,\,(s-1)<n-1>,\,l}\,\alpha^l$, дістаємо $У = 0$ і, отже,

$$X_k = 0 \quad (\|k\| = s-1,\ k_n > 0).$$

Таким чином, четверта умова виконана.

Умови перша, друга, четверта будуть теж виконуватися, якщо рівняння, яке відповідає $k = (s-1) < n >$, замінити рівнянням, одержаним додаванням до нього рівняння, що відповідає $k = (s-1) < n-1 >$.

Для так зміненої системи (4), (5) виконується також і третя умова. Дійсно, вона зводиться до перевірки оборотності, при $\alpha \neq 0$, $\lambda \neq 0$:

$$\alpha_n \sum_{i=1}^{h}\sum_{\|l\|=s-2}\lambda_i P_{i,\,(s-2)<n>,\,l}^{(n,\,s-1,\,h,\,\Sigma g_1)}\,\alpha^{k-<n>} + \sum_{i=1}^{h}\sum_{\substack{\|l\|=s-1\\ l_n=0}}\lambda_i P_{i,\,(s-1)<n-1>,\,l}^{(n-1,\,s,\,h+1,\,\Sigma g_2)}\,\alpha^l.$$

Але оборотність цієї матриці випливає з того, що

---

[1] $\bar{l}$ означає такий індекс, що $<\bar{l}> / l$.

$$P_{i,\,(s-2)<n>l}^{(n,\,s-1,\,h,\Sigma g_1)} \text{ і } P_{i,\,(s-1)<n-1>,\,l}^{(n-1,\,s,\,h+1\,\Sigma g_2)}$$

обрані відповідно з систем Σ_{g_1} і Σ_{g_2}.

Лема доведена у вказаному, більш загальному формулюванні.

3. Нехай тепер $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum\limits_{\|k\| \leqslant s} A_k(x) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k = \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right)$

еліптичний оператор, визначений в деякій області D.

Теорема. Нехай $u_k = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k u \; (\|k\| \leqslant s-1,\ \delta u = \begin{pmatrix} \vdots \\ u_k \\ \vdots \end{pmatrix}$ (при деякому певному впорядкуванні і кратному повторенні цього стовпця); існує такий оператор $\mathfrak{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ першого порядку і еліптичного типу в D, що для всякого розв'язку $u(x)$ рівняння $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$ справджується рівняння

$$\mathfrak{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \delta u = 0.$$

Доведення. Нехай $\Omega^{(n,s)}(\alpha, P_k)$ — система, побудована в лемі 2, $C_1^{(n)}, \ldots, C_n^{(n)}$ — матриці, побудовані в лемі 1; розглянемо систему рівнянь, розв'язком якої є, очевидно, стовпець δu, якщо $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(n)} \frac{\partial}{\partial x_i} u_k = \sum_{i=1}^{n} C_i^{(n)} u_{k+<i>} \quad (\|k\| < s-1),$$

$$\Omega^{(n,s)}\left(\frac{\partial}{\partial x}, u_k\right) \quad (\|k\| = s-1),$$

$$\sum_{\|k\|=s} A_k(x) \frac{\partial}{\partial x_{\bar{k}}} u_{k-<\bar{k}>} + \sum_{\|k\|<s} A_k(x) u_k = 0 \quad (<\bar{k}> | k).[1]$$

Це шукана система. Для перевірки її еліптичності потрібно показати, що для дійсного ненульового $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ алгебраїчна система

$$\sum_{i=1}^{n} C_i^{(n)} \alpha_i P_k = 0 \quad (\|k\| < s-1),$$

$$\Omega^{(n,s)}(\alpha, P_k) \quad (\|k\| = s-1),$$

$$\sum_{\|k\|=s} A_k(x)\, \alpha_{\bar{k}} P_{k-<\bar{k}>} = 0$$

має тільки нульовий розв'язок.

---

[1] Розміри матриць в цих трьох серіях рівнянь узгоджені кратним повторенням (по діагоналі) спочатку побудованих матриць.

Дійсно, з першої серії рівнянь, на підставі леми 1,

$$P_k = 0 \qquad (\| k \| < s - 1).$$

З другої серії, за лемою 2.

$$P_k = \alpha^k P_0 \qquad (\| k \| = s - 1);$$

нарешті, останнє рівняння зводиться до співвідношення

$$\sum_{\|k\| = s} A_k(x) \alpha^k P_0 = 0,$$

звідки $P_0 = 0$; теорема доведена.