ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

С. П. ГАВЕЛЯ

ДО ПИТАННЯ ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОЛОГИХ ОБОЛОНОК МЕТОДОМ ПЛОСКИХ НАБЛИЖЕНЬ

Наведені в [1][1] інтегральні рівняння задач теорії пологих оболонок дозволяють встановити достатні умови розв'язності цих задач методом послідовних наближень, кожне з яких визначається відповідною задачею для пластинки.

Дійсно, помічаючи, що ядра $K(x, \xi)$ та $M(x, \xi)$ є квадратичні форми головних кривин k_1 та k_2 серединної поверхні оболонки, позначимо $\frac{1}{R} = k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$.

$$K^*(x, \xi) = R^2 K(x, \xi); \quad M^*(x, \xi) = R^2 M(x, \xi).$$

В цих позначеннях розв'язувальні рівняння (17)* набирають вигляду

$$\mu(x) = f^*(x) + \frac{1}{R^2} \iint\limits_{\Omega} K^*(x, \xi)\, \mu(\xi)\, d_\xi \Omega,$$

$$\nu(x) = \varphi^*(x) + \frac{1}{R^2} \iint\limits_{\Omega} M^*(x, \xi)\, \nu(\xi)\, d_\xi \Omega. \tag{1}$$

При одній з умов

$$R > \sqrt{\iint\limits_{\Omega}\iint\limits_{\Omega} |M^*(x, \xi)|^2\, d_x \Omega\, d_\xi \Omega}, \quad \text{чи} \quad R > \sqrt{\iint\limits_{\Omega}\iint\limits_{\Omega} |K^*(x, \xi)|^2\, d_x \Omega\, d_\xi \Omega},$$

якщо $K^*(x, \xi)$ — скалярна функція (тобто в другому випадку), або

$$R > \max_{1 \leqslant i \leqslant 2} \sum_{k=1,2} \sqrt{\iint\limits_{\Omega}\iint\limits_{\Omega} |K^*_{ik}(x, \xi)|^2\, d_x \Omega\, d_\xi \Omega}, \tag{2}$$

якщо $K^*(x, \xi)$ — матриця (в першому випадку), розв'язки рівнянь (1) розкладаються в абсолютно та рівномірно збіжні ряди

$$\mu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \mu_m(x)\, k^m; \qquad \nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \nu_m(x)\, k^m.$$

З формул (16)*

[1] Зберігаються припущення та позначення, прийняті в [1]. Номери формул з [1] будуть позначатись зірочками.

$$Z(x)=\iint\limits_{\Omega} H(x,\xi)\mu(\xi)\,d_{\xi}\Omega; \qquad W(x)=\iint\limits_{\Omega}\Gamma(x,\xi)\nu(\xi)\,d_{\xi}\Omega$$

випливає така ж збіжність рядів

$$Z(x)=\sum_{m=0}^{\infty} Z_m(x)k^m, \qquad \text{де } Z_m(x)=\iint\limits_{\Omega} H(x,\xi)\mu_m(\xi)\,d_{\xi}\Omega;$$

$$W(x)=\sum_{m=0}^{\infty} W_m(x)k^m, \quad W_m(x)=\iint\limits_{\Omega}\Gamma(x,\xi)\nu_m(\xi)\,d_{\xi}\Omega \tag{3}$$

та почленна застосовність до них операторів $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ та $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ і тим паче $a\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$ та $b\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)$.

Отже, має місце

Теорема. При умовах (2) розв'язок $Z=Z(x)$, $W=W(x)$ задачі

$$PZ(x)|_S=0; \qquad QW(x)|_S=0 \tag{4}$$

для системи

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)Z(x)+a\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)W(x)=f(x),$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)W(x)+b\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)Z(x)=\varphi(x)-k\delta W(x) \tag{5}$$

зображається у вигляді абсолютно та рівномірно збіжних рядів (3), коефіцієнти $Z_m(x)$ та $W_m(x)$ яких послідовно визначаються задачами

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)Z_0(x)=f(x), \quad PZ_0(x)|_S=0,$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)W_0(x)=\varphi(x), \quad QW_0(x)|_S=0,$$

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)Z_m(x)=-Ra\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)W_{m-1}(x); \quad PZ_m(x)|_S=0,$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)W_m(x)=-Rb\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)Z_{m-1}(x)-P\delta W_{m-1}(x); \; QW_m(x)|_S=0.$$

Розв'язання задачі (4) для оболонки (5) зводиться, таким чином, до послідовного розв'язання відповідних задач для пластинки. Умову (2) природно тому назвати умовою достатньої пологості оболонки (5) по відношенню до задачі (4).

Розглядаючи у вигляді прикладу задачу про шарнірне спирання по довільному контурі S

$$W|_S=\Delta W|_S=\Phi|_S=\Delta\Phi|_S=0$$

пологої сферичної оболонки

$$\Delta\Delta\Phi-\frac{Eh}{R}\Delta W=0,$$

$$\Delta\Delta W+\frac{12(1-\sigma^2)}{Eh^3R}\Delta\Phi=f$$

(тут h — товщина, R — радіус кривини серединної поверхні оболонки, E — модуль Юнга, σ — коефіцієнт Пуассона, f — нормальна складова зовнішнього навантаження в деякому масштабі) та позначаючи через $g(x, \xi)$ функцію Гріна задачі Діріхле (для рівняння Лапласа), що відповідає обмеженій замкненим контуром S області Ω, матимемо

$$K(x, \xi) = \frac{12(1-\sigma^2)}{R^2h^2} \iint_{\Omega} g(x, \zeta)\, g(\zeta, \xi)\, d_{\zeta}\Omega.$$

Як відомо, функція Гріна $g(x, \xi)$ задачі Діріхле для області Ω при всіх $x, \xi \in \Omega$, $x \neq \xi$ не перевищує функції Гріна $g^*(x, \xi)$ тієї самої задачі для іншої області Ω^*, якщо $\Omega \subset \Omega^*$. З іншого боку, для випадку, коли Ω^* — квадрат з стороною δ, маємо

$$\left| \iint_{\Omega} g^*(x, \zeta)\, g^*(\zeta, \xi)\, d_{\zeta}\Omega \right| =$$

$$= \left| \frac{4\delta^2}{\pi^4} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{m\pi x_1}{a} \sin\frac{m\pi \xi_1}{a} \sin\frac{n\pi x_2}{a} \sin\frac{n\pi \xi_2}{a}}{(m^2+n^2)^2} \right| < \frac{2\delta^2}{\pi^3}.$$

Тому можна вважати

$$|K(x, \xi)| < \frac{12(1-\sigma^2)}{R^2h^2} \cdot \frac{2\delta^2}{\pi^3},$$

де δ — зовнішній діаметр розглядуваної області Ω.

В результаті умова достатньої пологості (2) для цього випадку після очевидних спрощень набирає такого конкретного вигляду:

$$\delta \cdot \sqrt{mes\,\Omega} < Rh,$$

або, ще простіше,

$$\delta < \sqrt{Rh}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. С. П. Гавеля, А. М. Куземко. Застосування регулярних інтегральних рівнянь до деяких задач теорії пологих оболонок. Зб. робіт аспірантів (кафедр природничих наук). Вид. Львів. ун-ту, 1961.