ТЕОРЕТИЧНА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА
Випуск II 1963

І. О. ПРУСОВ

ПРУЖНА РІВНОВАГА СПІВДОТИЧНИХ БЕЗ ТЕРТЯ ІЗОТРОПНИХ СМУГ

Розглядаються дві ізотропні смуги, які дотикаються між собою без тертя по прямій L_0 (рис. 1) і знаходяться в пружній рівновазі під дією заданого зовнішнього навантаження на L_j, а також зосереджених сил (X_k^j, Y_k^j) і зосереджених моментів M_k^j, прикладених в точках a_k^j та b_k^j відповідно, які належать області $-h_1 < y < 0\,(S_1^-)$, якщо $j = 1$, або області $0 < y < h_2(S_2^+)$, якщо $j = 2$. Зовнішнє навантаження на L_j задовольняє умови Діріхле на будь-якому скінченному інтервалі та абсолютно інтегроване в інтервалі $-\infty < x < +\infty$. Все зовнішнє навантаження, в тому числі і зосереджені сили і моменти, задовольняють відомі умови рівноваги.

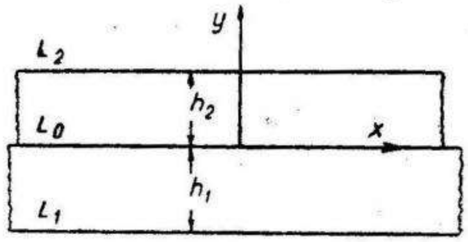

Рис. 1.

Позначимо через $\Phi_1(z)$ і $\Phi_2(z)$ функції Колосова—Мусхелішвілі, визначені відповідно в S_1^- і S_2^+. Поширивши відомим чином [1] визначення функції $\Phi_1(z)$ на область $0 < y < h_1(S_1^+)$, а $\Phi_2(z)$ на область $-h_2 < y < 0\,(S_2^+)$, знайдемо, що напружено-деформований стан в S_1^- і S_2^+ визначається формулами

$$X_x + Y_y = 2\,[\Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)}], \tag{1}$$

$$Y_y - i\,X_y = \Phi_j(z) - \Phi_j(\overline{z}) + (z - \overline{z})\,\overline{\Phi_j'(z)}, \tag{2}$$

$$2\mu_j\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \varkappa_j\,\Phi_j(z) + \Phi_j(\overline{z}) - (z - \overline{z})\,\overline{\Phi_j'(z)}. \tag{3}$$

В областях $S_j^\pm$ функції $\Phi_j(z)$ зобразимо у вигляді

$$\Phi_j(z) = -\sum \frac{X_k^j + i\,Y_k^j}{2\pi\,(1 + \varkappa_j)} \cdot \frac{1}{z - a_k^j} + \Phi_{0j}(z) \tag{4}$$

в S_1^- при $j = 1$ і в S_2^+ при $j = 2$.

$$\Phi_j(z) = -\sum \left[\frac{\varkappa_j (X_k^j + i Y_k^j)}{2\pi (1+\varkappa_j)} \cdot \frac{1}{z - \overline{a}_k^j} - \frac{X_k^j - i Y_k^j}{2\pi (1+\varkappa_j)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{a_k^j - \overline{a}_k^j}{(z - \overline{a}_k^j)^2} + \frac{i M_k^j}{2\pi (z - \overline{b}_k^j)^2} \right] + \Phi_{00j}(z) \tag{5}$$

в області S_1^+ при $j=1$ і в S_2^- при $j=2$, де $\Phi_{0j}(z)$ і $\Phi_{00j}(z)$ — голоморфні функції у відповідних областях.

На основі (2) і (3) граничні умови на L_0 такі:

$$[\Phi_1(t) + \Phi_2(t)]^+ - [\Phi_1(t) + \Phi_2(t)]^- = 0,$$
$$Im\,[\Phi_2^+(t) - \Phi_2^-(t)] = 0, \quad Im\,[\Phi_2^+(t) - r\Phi_1^-(t)] = 0, \tag{6}$$

де $r = [\mu_2(1+\varkappa_1)] : [\mu_1(1+\varkappa_2)]$, $\Phi_j^{\pm}(t)$ — граничні значення функцій $\Phi_j(z)$ на L_0 зі сторони $y > 0$ і $y < 0$. Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді лінійної комбінації функцій:

$$R_j(z),\ R_{0j}(z),\ \overline{R}_j(z),\ \overline{R}_{0j}(z),\ I_A(z) = \int_0^\infty A(\alpha)\, e^{+i\alpha(z+ih_1)}\, d\alpha,$$

$$I_B(z) = \int_0^\infty B(\alpha)\, e^{-i\alpha(z-ih_1)}\, d\alpha,$$

$$I_C(z) = \int_0^\infty C(\alpha)\, e^{-i\alpha(z-ih_2)}\, d\alpha, \quad I_D(z) = \int_0^\infty D(\alpha)\, e^{+i\alpha(z+ih_2)}\, d\alpha,\ \overline{I}_A(z) =$$

$$= \int_0^\infty \overline{A}(\alpha)\, e^{-i\alpha(z-ih_1)}\, d\alpha,$$

$$\overline{I}_B(z) = \int_0^\infty \overline{B}(\alpha)\, e^{+i\alpha(z+ih_1)}\, d\alpha,\ \overline{I}_C(z) = \int_0^\infty \overline{C}(\alpha)\, e^{+i\alpha(z+ih_2)}\, d\alpha,\ \overline{I}_D(z) =$$

$$= \int_0^\infty \overline{D}(\alpha)\, e^{-i\alpha(z-ih_2)}\, d\alpha, \tag{7}$$

де $R_j(z)$ і $R_{0j}(z)$ — головні частини (4) і (5) відповідно, $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ і $D(\alpha)$ — невідомі комплекснозначні функції. Під функціями $\overline{R}_j(z)$ (і аналогічно іншими, позначеними знаком спряження) слід розуміти функції, які набувають в точках $\overline{z}$ комплексно спряжені значення з $R_j(z)$.

У відповідності з (4), (5) граничні умови (6) тотожно задовольнимо, якщо покладемо

$$\Phi_1(z) = R_1(z) + b\overline{R}_1(z) + aR_2(z) + aR_{01}(z) - a\overline{R}_{02}(z) + I_A(z) +$$
$$+ b\overline{I}_A(z) + a I_B(z) + a I_C(z) - a\overline{I}_D(z)\ (S_1^-), \tag{8}$$

$$\Phi_1(z) = aR_1(z) - a\overline{R}_2(z) + R_{01}(z) + b\overline{R}_{01}(z) + aR_{02}(z) +$$
$$+ aI_A(z) - a\overline{I}_C(z) + I_B(z) + b\overline{I}_B(z) + aI_D(z)\ (S_1^+), \tag{9}$$
$$\Phi_2(z) = bR_1(z) + R_2(z) + a\overline{R}_2(z) - b\overline{R}_{01}(z) + bR_{02}(z) +$$
$$+ bI_A(z) + I_C(z) + a\overline{I}_C(z) - b\overline{I}_B(z) + bI_D(z)\ (S_2^+), \tag{10}$$
$$\Phi_2(z) = -b\overline{R}_1(z) + bR_2(z) + bR_{01}(z) + R_{02}(z) + a\overline{R}_{02}(z) -$$
$$- b\overline{I}_A(z) + bI_C(z) + bI_B(z) + I_D(z) + a\overline{I}_D(z)\ (S_2^-), \tag{11}$$

де

$$a = 1 : (1 + r), \quad b = r : (1 + r).$$

Невідомі функції $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ знайдемо, вимагаючи, щоб $\Phi_j(z)$ також задовольняли граничні умови на L_j, які випливають із (2)

$$\Phi_j(t_j) - \Phi_j(\overline{t}_j) + 2ih_j(-1)^j\,\overline{\Phi_j'(t_j)} = f_j(x)\ (j = 1,2), \tag{12}$$

де $t_j = x + ih_j(-1)^j$, $f_j(x)$ — значення $Y_y - iX_y$ на L_j. Накладені вище обмеження на зовнішнє навантаження на L_j допускає зображення функцій $f_j(x)$ у вигляді

$$f_j(x) = \int\limits_0^\infty F_j(\alpha)\,e^{i\alpha x}\,d\alpha + \int\limits_0^\infty F_j(-\alpha)\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha, \quad F_j(\alpha) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_j(x)\,e^{-i\alpha x}\,dx. \tag{13}$$

Враховуючи (8—11), система (12) з точністю до постійних множників має члени вигляду $(t_j - z_0)^{-n}$, які можна зобразити інтегралами Лапласа:

$$\frac{1}{(t_j - z_0)^n} = \frac{(-i)^n}{(n-1)!}\int\limits_0^\infty \alpha^{n-1}\,e^{i\alpha(t_j - z_0)}\,d\alpha, \quad \text{якщо } Im(t_j - z_0) > 0,$$
$$\frac{1}{(t_j - z_0)^n} = \frac{i^n}{(n-1)!}\int\limits_0^\infty \alpha^{n-1}\,e^{-i\alpha(t_j - z_0)}\,d\alpha, \quad \text{якщо } Im(t_j - z_0) < 0. \tag{14}$$

Враховуючи формули (13) і (14) та вимагаючи, щоб функції (8)—(11) перетворювали рівняння (12) в тотожність відносно параметра x, одержимо таку систему для визначення функцій $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$:

$$[1 + a(-1 + 2\alpha rh_1)\,e^{-2\alpha h_1}]\,A(\alpha) + a(1 + 2\alpha h_1)\,e^{-\alpha h}\,\overline{C}(\alpha) +$$
$$+ a(-r + 2\alpha h_1)\,e^{-2\alpha h_1}\,\overline{B}(\alpha) - a(1 + 2\alpha h_1)\,e^{-\alpha h}\,D(\alpha) = K_1(\alpha) + F_1(\alpha);$$
$$(be^{-2\alpha h_1} - 2\alpha h_1)\,A(\alpha) + ae^{-\alpha h}\,\overline{C}(\alpha) + (-1 + ae^{-2\alpha h_1})\,\overline{B}(\alpha) -$$
$$- ae^{-\alpha h}\,D(\alpha) = K_{01}(\alpha) + \overline{F}_1(-\alpha);$$
$$be^{-\alpha h}\,A(\alpha) + (ae^{-2\alpha h_2} - 2\alpha h_2)\,\overline{C}(\alpha) - be^{-\alpha h}\,\overline{B}(\alpha) + (be^{-2\alpha h_2} - 1)\,D(\alpha) =$$
$$= K_2(\alpha) + F_2(\alpha);$$

$$b\,(1+2\alpha h_2)\,e^{-\alpha h} A(\alpha)+[1+a(-r+2\alpha h_2)\,e^{-2\alpha h_2}]\,\overline{C}(\alpha)-$$

$$-b\,(1+2\alpha h_2)\,e^{-\alpha h} B(\alpha)+a(-1+2\alpha r h_2)e^{-2\alpha h_2} D(\alpha)=K_{02}(\alpha)+\overline{F}_2(-\alpha),$$

де $h=h_1+h_2$, $K_j(\alpha)$ і $K_{0j}(\alpha)$ — відомі функції, які набирають дійсних значень, якщо зовнішнє навантаження таке, що

$$Y_y(-x,y)=Y_y(x,y),\quad X_y(-x,y)=-X_y(x,y).$$

Визначення напруженого стану в будь-якій зафіксованій точці z зводиться до розв'язку системи (15) та обчислення інтегралів (7).

Причому суму інтегралів у кожній з формул (8—11) слід розглядати як один інтеграл, який збігається тільки при умові рівноваги полос.

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, 1954.

2. Ю. А. Шевляков, А. К. Приварников. До розрахунку шаруватих основ. Прикладна механіка, в. 2, 1962.

3. І. О. Прусов. Стиснення пружних півплощин. Питання механіки та математики. Вид. Львів. ун-ту, 1962.